مشتق‌پذیری توابع چند متغیره

یکی از ویژگی‌های مهم ناشی از مشتق‌پذیری توابع یک متغیره، امکان تقریب خطی یک تابع مشتق‌پذیر در همسایگی نقطه‌ای است که تابع در آن مشتق‌پذیر است. به طور دقیق‌تر، اگر تابع یک متغیره f در یک همسایگی نقطه $x_\circ \in \mathbb{R}$ تعریف شده در این نقطه مشتق‌پذیر باشد آنگاه برای مقادیر x به اندازه کافی نزدیک به $x_\circ$، $f(x) \approx f(x_\circ) + f'(x_\circ)(x - x_\circ)$. این تقریب به تقریب خطی معروف بوده برای توابع یک متغیره مشتق‌پذیر برقرار است. تقریب دقیق‌تر خواهد بود اگر مقدار x به $x_\circ$ نزدیک‌تر اختیار شود. بدیهی است یکی از شرایط لازم برای برقراری تقریب خطی، پیوستگی تابع مورد بررسی در نقطه $x_\circ$ است.

در مورد توابع چند متغیره، وجود مشتق سویی یک تابع چند متغیره در یک نقطه و در سوی‌های مختلف، به آن اندازه قوی نیست که امکان چنین تقریبی را ایجاد کند. در آخرین مثال بخش قبل مشاهده کردیم وجود مشتق سویی یک تابع در تمام سوی‌ها حتی ضامنی برای پیوستگی تابع در آن نقطه نخواهد بود.

هدف ما در این فصل ارائه تعریف مناسبی از مشتق‌پذیری توابع چند متغیره است که امکان تقریب خطی را به طور طبیعی به دنبال داشته باشد. برای این منظور ابتدا مفهوم مشتق‌پذیری برای توابع یک متغیره را یک بار دیگر مورد بررسی قرار می‌دهیم.

فرض کنیم تابع یک متغیره f در یک همسایگی نقطه $x_\circ \in \mathbb{R}$ تعریف شده باشد. در این صورت f را در نقطه $x_\circ$ مشتق‌پذیر نامیم هرگاه $\lim\limits_{\Delta x \to \circ} \dfrac{f(x_\circ + \Delta x) - f(x_\circ)}{\Delta x}$ وجود داشته باشد. اگر مقدار این حد را با نماد m نشان دهیم و تابع $\alpha(\Delta x)$ را با دستور زیر تعریف کنیم

$$\alpha(\Delta x) := \begin{cases} \dfrac{f(x_\circ + \Delta x) - f(x_\circ)}{\Delta x} - m & \Delta x \neq \circ \\ \circ & \Delta x = \circ \end{cases}$$

آنگاه $f(x_\circ + \Delta x) - f(x_\circ) = m\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x$ و $\lim\limits_{\Delta x \to \circ} \alpha(\Delta x) = \circ$. عکس این خاصیت نیز برقرار است. به عبارت دیگر:

تابع f در نقطه $x_\circ$ مشتق‌پذیر است اگر و تنها اگر عدد m و تابع α تعریف شده در یک همسایگی صفر وجود داشته باشند به گونه‌ای که برای مقادیر کوچک Δx با این خاصیت که $x_\circ + \Delta x$ در دامنه تعریف f قرار گیرد، داشته باشیم

$$f(x_\circ + \Delta x) - f(x_\circ) = m\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x \qquad \text{و} \qquad \lim_{\Delta x \to \circ} \alpha(\Delta x) = \circ$$

و در این صورت m مشتق تابع f در نقطه $x_\circ$ خواهد بود.

اکنون از خاصیت معادل فوق استفاده کرده، مفهوم مشتق‌پذیری توابع چندمتغیره را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

تعریف

فرض کنیم $D \subset \mathbb{R}^n$ و $p \in D$ نقطه‌ای درونی برای D باشد (یعنی D در برگیرنده یک همسایگی از نقطه p باشد). تابع $f : D \to \mathbb{R}$ را در این نقطه مشتق‌پذیر نامیم هرگاه اعداد $m_۱$، …، m_n و توابع $\alpha_۱$، …، α_n وجود داشته باشند به گونه‌ای که برای نمو به اندازه کافی کوچک $\Delta x = (\Delta x_۱, \dots, \Delta x_n)$ با این خاصیت که $p + \Delta x \in D$ داشته باشیم

$$f(p+\Delta x)-f(p) = \sum_{i=۱}^{n} m_i \Delta x_i + \sum_{i=۱}^{n} \alpha_i(\Delta x)\Delta x_i \quad \text{و} \quad \lim_{\Delta x \to o} \alpha_i(\Delta x) = \circ \ \ \forall i = ۱, \dots, n$$

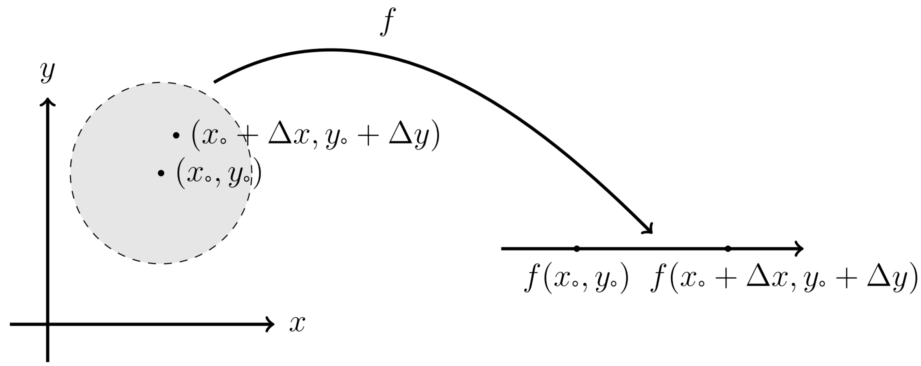
در تعریف فوق عبارت $p + \Delta x$ نماد خلاصه‌ای برای نقطه $(p_۱ + \Delta x_۱, \dots, p_n + \Delta x_n) \in \mathbb{R}^n$ است.

برای داشتن درک مناسبی از مفهوم مشتق‌پذیری توابع چند متغیره، مفهوم مشتق‌پذیری را برای یک تابع دو متغیره بررسی می‌کنیم. فرض کنیم $p(x_\circ, y_\circ) \in \mathbb{R}^۲$ و f تابعی دو متغیره تعریف شده در یک همسایگی نقطه p باشد. طبق تعریف اخیر، اگر f در نقطه p مشتق‌پذیر باشد آنگاه اعداد $m_۱$ و $m_۲$ و توابع $\alpha_۱(\Delta x, \Delta y)$ و $\alpha_۲(\Delta x, \Delta y)$ وجود دارند به گونه‌ای که برای هر نمو کوچک $(\Delta x, \Delta y)$ در صفحه با این خاصیت که $(x_\circ + \Delta x, y_\circ + \Delta y)$ در دامنه تعریف f قرار گیرد، نمو مقادیر تابع، یعنی $f(x_\circ + \Delta x, y_\circ + \Delta y) - f(x_\circ, y_\circ)$ به صورت مجموع دو جمله، یکی $m_۱\Delta x + m_۲\Delta y$ و دیگری $\alpha_۱(\Delta x, \Delta y)\Delta x + \alpha_۲(\Delta x, \Delta y)\Delta y$ نوشته شود، یعنی

$$f(x_\circ + \Delta x, y_\circ + \Delta y) - f(x_\circ, y_\circ) = (m_۱\Delta x + m_۲\Delta y) + \Big(\alpha_۱(\Delta x, \Delta y)\Delta x + \alpha_۲(\Delta x, \Delta y)\Delta y\Big)$$

و

$$\lim_{(\Delta x, \Delta y) \to (\circ,\circ)} \alpha_۱(\Delta x, \Delta y) = \lim_{(\Delta x, \Delta y) \to (\circ,\circ)} \alpha_۲(\Delta x, \Delta y) = \circ$$



اگر تابع متغیره f در نقطه $p \in \mathbb{R}^n$ مشتق‌پذیر باشد آنگاه با بازنویسی رابطه بیان شده در تعریف فوق به صورت

$$f(p+\Delta x) - f(p) = (m_۱, \ldots, m_n) \begin{pmatrix} \Delta x_۱ \\ \vdots \\ \Delta x_n \end{pmatrix} + (\alpha_۱(\Delta x), \ldots, \alpha_n(\Delta x)) \begin{pmatrix} \Delta x_۱ \\ \vdots \\ \Delta x_n \end{pmatrix}$$

ماتریس سطری $(m_۱, \ldots, m_n)$ را ماتریس مشتق f در نقطه p نامیده آن را با نماد $Df(p)$ نشان می‌دهیم.

مثال. تابع $f : \mathbb{R}^۲ \to \mathbb{R}$ با دستور $f(x,y) = ۳x^۲ - ۷xy$ مفروض است.
الف) نشان دهید f در نقطه $p(۱, -۲)$ مشتق‌پذیر است.
ب) نشان دهید f در هر نقطه دلخواه $p(x_\circ, y_\circ) \in \mathbb{R}^۲$ مشتق‌پذیر است.

الف) تابع f بر سراسر $\mathbb{R}^۲$ تعریف شده است. برای نمو $(\Delta x, \Delta y)$ در صفحه، به بررسی نمو مقادیر تابع، یعنی $f(۱+\Delta x, -۲+\Delta y) - f(۱, -۲)$ می‌پردازیم.

$$\begin{aligned} f(۱+\Delta x, -۲+\Delta y) - f(۱,-۲) &= \Big(۳(۱+\Delta x)^۲ - ۷(۱+\Delta x)(-۲+\Delta y)\Big) - \Big(۳ \times ۱^۲ - ۷ \times ۱ \times (-۲)\Big) \\ &= ۶\Delta x + ۳\Delta^۲ x + ۱۴\Delta x - ۷\Delta y - ۷\Delta x\Delta y \\ &= ۲۰\Delta x - ۷\Delta y + (۳\Delta x)\Delta x + (-۷\Delta x)\Delta y \\ &= m_۱\Delta x + m_۲\Delta y + \alpha_۱(\Delta x, \Delta y)\Delta x + \alpha_۲(\Delta x, \Delta y)\Delta y \end{aligned}$$

که در آن $m_۱ = ۲۰$، $m_۲ = -۷$، $\alpha_۱(\Delta x, \Delta y) = ۳\Delta x$ و $\alpha_۲(\Delta x, \Delta y) = -۷\Delta x$. با توجه به اینکه برای توابع $\alpha_۱$ و $\alpha_۲$ معرفی شده در اینجا $\lim\limits_{(\Delta x, \Delta y) \to (\circ,\circ)} \alpha_i(\Delta x, \Delta y) = \circ$ (برای $i = ۱, ۲$)، طبق تعریف، تابع f در نقطه $(۱, -۲)$ مشتق‌پذیر است.

ب) همان مراحل قسمت (الف) را برای نقطه (x_0, y_0) به جای $(1, -2)$ تکرار می‌کنیم.

$$\begin{aligned} f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0, y_0) &= \Big(3(x_0+\Delta x)^2 - 7(x_0+\Delta x)(y_0+\Delta y)\Big) - \Big(3x_0^2 - 7x_0y_0\Big) \\ &= 6x_0\Delta x + 3\Delta^2 x - 7x_0\Delta y - 7y_0\Delta x - 7\Delta x\Delta y \\ &= \Big((6x_0 - 7y_0)\Delta x + (-7x_0)\Delta y\Big) + \Big((3\Delta x)\Delta x + (-7\Delta x)\Delta y\Big) \\ &= (m_1\Delta x + m_2\Delta y) + \Big(\alpha_1(\Delta x, \Delta y)\Delta x + \alpha_2(\Delta x, \Delta y)\Delta y\Big) \end{aligned}$$

که در آن $m_1 = 6x_0 - 7y_0$، $m_2 = -7x_0$، $\alpha_1(\Delta x, \Delta y) = 3\Delta x$ و $\alpha_2(\Delta x, \Delta y) = -7\Delta x$. مجددا با توجه به اینکه توابع α_1 و α_2 وقتی $(\Delta x, \Delta y) \to (0, 0)$ حدی برابر صفر دارند، بنا به تعریف، f در نقطه دلخواه $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ مشتق‌پذیر است.

نکته مهمی در قسمت (ب) مثال فوق مشاهده می‌شود. اگر مقادیر m_1 و m_2 به دست آمده در این قسمت را با ضابطه f مقایسه کنیم، مشاهده می‌شود در این مثال

$$m_1 = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \qquad \text{و} \qquad m_2 = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$$

قضیه بعد نشان می‌دهد، این خاصیت در حالت کلی نیز برقرار است.

قضیه

فرض کنیم تابع n متغیره $f : D \to \mathbb{R}$ در نقطه درونی $p \in D$ مشتق‌پذیر باشد. در این صورت کلیه مشتقات جزئی مرتبه اول f در p وجود داشته، داریم $Df(p) = (\frac{\partial f}{\partial x_1}(p), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(p))$. به علاوه برای مقادیر کوچک Δx،

$$f(p+\Delta x) - f(p) \approx \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(p)\Delta x_i$$

خلاصه‌ای از اثبات را در اینجا مرور می‌کنیم. طبق فرض مشتق‌پذیری f در نقطه p، اعداد m_1، ...، m_n و توابع α_1، ...، α_n وجود دارند با این خاصیت که برای مقادیر کوچک نمو $\Delta x := (\Delta x_1, \ldots, \Delta x_n)$ در $\mathbb{R}^n$،

$$\begin{aligned} f(p+\Delta x) - f(p) &= f(p_1+\Delta x_1, \ldots, p_n+\Delta x_n) - f(p_1, \ldots, p_n) \\ &= \Big(m_1\Delta x_1 + \cdots + m_n\Delta x_n\Big) + \Big(\alpha_1(\Delta x)\Delta x_1 + \cdots + \alpha_n(\Delta x)\Delta x_n\Big) \quad (1) \end{aligned}$$

که در آن توابع $\alpha_i(\Delta x_1,\dots,\Delta x_n)$ وقتی $(\Delta x_1,\dots,\Delta x_n)\to(0,\dots,0)$، حدی برابر صفر دارند. اکنون برای $1\le i\le n$، فرض کنیم Δx نموی در $\mathbb{R}^n$ به صورت $\Delta x=(0,\dots,0,\Delta x_i,0\dots,0)$ باشد. با بازنویسی رابطه فوق برای این نمو، خواهیم داشت

$$f(p_1,\dots,p_i+\Delta x_i,\dots,p_n)-f(p_1,\dots,p_i,\dots,p_n)=m_i\Delta x_i+\alpha_i(\Delta x)\Delta x_i$$

و در نتیجه با تقسیم طرفین این رابطه به Δx_i و میل دادن آن به سمت صفر خواهیم داشت.

$$\lim_{\Delta x_i\to 0}\frac{f(p_1,\dots,p_i+\Delta x_i,\dots,p_n)-f(p_1,\dots,p_i,\dots,p_n)}{\Delta x_i}=\lim_{\Delta x_i\to 0}\Big(m_i+\alpha_i(\Delta x)\Big)=m_i$$

در نتیجه $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(p)$ وجود داشته برابر m_i است.
در نهایت برای مقادیر کوچک نمو $\Delta x=(\Delta x_1,\dots,\Delta x_n)$ در $\mathbb{R}^n$، با توجه به تعریف مشتق‌پذیری که در (۱) بیان شده است، و با توجه به اینکه جمله $\Big(\alpha_1(\Delta x)\Delta x_1+\cdots+\alpha_n(\Delta x)\Delta x_n\Big)$ نسبت به جمله $m_1\Delta x_1+\cdots+m_n\Delta x_n$ کوچک است تقریب زیر را خواهیم داشت.

$$f(p+\Delta x)-f(p)\approx m_1\Delta x_1+\cdots+m_n\Delta x_n=\frac{\partial f}{\partial x_1}(p)\Delta x_1+\cdots+\frac{\partial f}{\partial x_n}(p)\Delta x_n \qquad (2)$$

تذکر. فرض کنیم f در یک همسایگی نقطه $p\in\mathbb{R}^n$ تعریف شده در این نقطه مشتق‌پذیر باشد. اگر $x=(x_1,\dots,x_n)$ نقطه‌ای در مجاورت p باشد آنگاه با قرار دادن $\Delta x_i:=x_i-p_i$ (برای هر $i=1,\dots,n$) داریم $x_i=p_i+\Delta x_i$ و در نتیجه $x=p+\Delta x$. در نتیجه طبق رابطه (۲)، تقریب زیر را خواهیم داشت

$$\begin{aligned}f(x)=f(p+\Delta x)\;&\approx\; f(p)+\frac{\partial f}{\partial x_1}(p)\Delta x_1+\cdots+\frac{\partial f}{\partial x_n}(p)\Delta x_n\\&=\; f(p)+\frac{\partial f}{\partial x_1}(p)(x_1-p_1)+\cdots+\frac{\partial f}{\partial x_n}(p)(x_n-p_n)\end{aligned}$$

تقریب اخیر که برای نقاط نزدیک p برقرار است تحت نام **تقریب خطی** f **در همسایگی نقطه** p نامیده می‌شود. بدیهی است هر چه x به نقطه p نزدیک‌تر باشد این تقریب دقیق‌تر خواهد بود. همین مسئله نشان می‌دهد اگر f در نقطه p مشتق‌پذیر باشد آنگاه در این نقطه پیوسته نیز خواهد بود.

تذکر.

قبلا در قالب یک مثال مشاهده کردیم امکان دارد مشتقات جزئی یک تابع در یک نقطه وجود داشته باشند بدون آن که تابع در آن نقطه پیوسته و در نتیجه مشتق‌پذیر باشد. پس در حالت کلی، وجود مشتقات جزئی یک تابع در یک نقطه دال بر مشتق‌پذیری تابع در آن نقطه نیست.

با وجود این، با اضافه کردن یک شرط به مشتقات جزئی می‌توانیم مشتق‌پذیری تابع را نتیجه بگیریم.

قضیه

اگر کلیه مشتقات جزئی مرتبه اول f در یک همسایگی از نقطه $p \in D$ وجود داشته در این نقطه پیوسته باشند آنگاه f در این نقطه مشتق‌پذیر است.

نتیجه.

با توجه به اینکه مشتقات جزئی هر تابع چندجمله بر $\mathbb{R}^n$، مجددا تابعی چندجمله‌ای و در نتیجه پیوسته است، بنابر قضیه قبل، هر تابع چندجمله‌ای در هر نقطه از $\mathbb{R}^n$ مشتق‌پذیر است.

مانند آنچه در بحث پیوستگی بیان شد در اینجا نیز می‌توان ثابت کرد اگر دو تابع n متغیره f و g در نقطه $p \in \mathbb{R}^n$ مشتق‌پذیر باشند آنگاه هر یک از توابع $f \pm g$، λf ($\lambda \in \mathbb{R}$ ثابت) و fg نیز در p مشتق‌پذیر هستند. به علاوه اگر $g(p) \neq ۰$ آنگاه تابع $\frac{f}{g}$ نیز در p مشتق‌پذیر خواهد بود.

در بالا مشاهده کردیم اگر تابع f در نقطه $p \in \mathbb{R}^n$ مشتق‌پذیر باشد آنگاه کلیه مشتقات جزئی مرتبه اول آن در این نقطه وجود خواهد داشت. اکنون این سؤال مطرح می‌شود که در این حالت در مورد مشتق سویی تابع در این نقطه و در سویی خاص چه می‌توان گفت؟ قضیه زیر پاسخ این سؤال را بیان می‌کند.

قضیه

فرض کنیم تابع n متغیره f در یک همسایگی نقطه $p \in \mathbb{R}^n$ تعریف شده در این نقطه مشتق‌پذیر باشد. در این صورت برای هر $u \in \mathbb{R}^n$ با $\|u\| = ۱$، مشتق سویی f در p و در سوی u وجود دارد و

$$D_u f(p) = u_۱ \frac{\partial f}{\partial x_۱}(p) + \cdots + u_n \frac{\partial f}{\partial x_n}(p)$$

نگاه مختصری به اثبات این قضیه داشته باشیم. طبق فرض قضیه، بنابر مشتق‌پذیری f در نقطه p و با استفاده از تقریب خطی f، برای $x \in \mathbb{R}^n$ به اندازه کافی نزدیک p، داریم

$$f(x_1, \ldots, x_n) \approx f(p_1, \ldots, p_n) + \frac{\partial f}{\partial x_1}(p)(x_1 - p_1) + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(p)(x_n - p_n)$$

و همان طور که اشاره شد، هر چه x به p نزدیک‌تر باشد تقریب فوق دقیق‌تر خواهد بود. اکنون برای $u = (u_1, \ldots, u_n) \in \mathbb{R}^n$ با $\|u\| = 1$ و برای $t \in \mathbb{R}$ قرار می‌دهیم $x := p + tu = (p_1 + tu_1, \ldots, p_n + tu_n)$. به این ترتیب

$$f(p + tu) - f(p) \approx \frac{\partial f}{\partial x_1}(p)(x_1 - p_1) + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(p)(x_n - p_n) = (tu_1)\frac{\partial f}{\partial x_1}(p) + \cdots + (tu_n)\frac{\partial f}{\partial x_n}(p)$$

به این ترتیب

$$D_u f(p) = \lim_{t \to 0} \frac{f(p + tu) - f(p)}{t} = u_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(p) + \cdots + u_n \frac{\partial f}{\partial x_n}(p)$$

تذکر

بنابر قضیه فوق، برای یک تابع دومتغیره و مشتق‌پذیر f در نقطه‌ای چون $p \in \mathbb{R}^2$، مشتق سویی f در این نقطه و در سوی بردار یکه $\vec{u} = a\vec{i} + b\vec{j}$ برابر $D_u f(p) = a\frac{\partial f}{\partial x}(p) + b\frac{\partial f}{\partial y}(p)$ خواهد بود. عبارت اخیر را می‌توانیم به صورت ضرب نقطه‌ای دو بردار $\vec{u}$ و بردار $\frac{\partial f}{\partial x}(p)\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}(p)\vec{j}$ نشان دهیم. بردار اخیر را گرادیان f در نقطه p نامیده آن را با نماد $\nabla f(p)$ نشان می‌دهیم. به همین ترتیب برای یک تابع سه متغیره قرار می‌دهیم

$$\nabla f(p) = \frac{\partial f}{\partial x}(p)\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}(p)\vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z}(p)\vec{k}$$

بنابر قضیه اخیر، اگر تابع دو یا سه متغیره f در نقطه p مشتق‌پذیر باشد آنگاه برای هر بردار یکه مانند $\vec{u}$، خواهیم داشت $D_u f(p) = \nabla f(p) \cdot \vec{u}$.

مثال. فرض کنیم دما در نقاط مختلف فضا از دستور $T(x, y, z) = x^3 - 4xyz$ پیروی کند.

الف) اگر از نقطه $p(1, 1, 2)$ در سوی مبدا مختصات حرکت کنیم دما با چه سرعتی شروع به تغییر می‌کند.

ب) از این نقطه در چه سویی حرکت کنیم تا دما با بیشترین سرعت ممکن شروع به افزایش کند.

ج) در چه سویی حرکت کنیم تا دما با بیشترین سرعت ممکن کاهش یابد.

الف) برداری که ابتدای آن نقطه $(۱,۱,۲)$ و انتهای آن $(۰,۰,۰)$ باشد بردار $-\vec{i}-\vec{j}-۲\vec{k}$ خواهد بود. بردار یکه هم جهت با این بردار نیز برابر $\vec{u}=\frac{۱}{\sqrt{۶}}(-\vec{i}-\vec{j}-۲\vec{k})$ است. با توجه به اینکه سرعت تغییرات تابع دما با حرکت از نقطه $(۱,۱,۲)$ و در هر سویی با استفاده از مشتق سویی $D_uT(۱,۱,۲)$ حاصل می‌شود و با توجه به مشتق‌پذیری تابع چندجمله‌ای T در هر نقطه از فضا و از جمله در نقطه p، بنابر بحث فوق خواهیم داشت

$$D_uT(۱,۱,۲)=\nabla T(p)\cdot\vec{u}$$

داریم

$$\begin{aligned}\nabla T(x,y,z)=\frac{\partial T}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial T}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial T}{\partial z}\vec{k} &= (۳x^۲-۴yz)\vec{i}+(-۴xz)\vec{j}+(-۴xy)\vec{k}\\ &\Rightarrow \nabla T(۱,۱,۲)=-۵\vec{i}-۸\vec{j}-۴\vec{k}\end{aligned}$$

در نتیجه $D_uT(p)=\Big(-۵\vec{i}-۸\vec{j}-۴\vec{k}\Big)\cdot\frac{۱}{\sqrt{۶}}\Big(-\vec{i}-\vec{j}-۲\vec{k}\Big)=\frac{۲۱}{\sqrt{۶}}$. توجه کنیم که مثبت بودن نتیجه حاصل نشان می‌دهد با حرکت از نقطه $(۱,۱,۲)$ و در سوی مبدا مختصات، دما شروع به افزایش کرده، سرعت افزایش دما برابر $\frac{۲۱}{\sqrt{۶}}$ است.

ب) فرض کنیم $\vec{u}$ بردار یکه دلخواهی باشد. مانند آنچه در قسمت قبل مشاهده کردیم، سرعت تغییر دما با حرکت از نقطه p و در سوی $\vec{u}$ برابر است با

$$D_uT(p)=\nabla T(p)\cdot\vec{u}=\|\nabla T(p)\|\,\|\vec{u}\|\,\cos\theta=\|\nabla T(p)\|\cos\theta$$

که در آن θ زاویه بین بردار $\nabla T(p)$ و بردار یکه $\vec{u}$ است. طبیعتا بیشترین مقدار $D_uT(p)$ زمانی حاصل می‌شود که $\cos\theta=۱$، یا $\theta=۰$. به عبارت دیگر با حرکت در جهت بردار گرادیان، سرعت افزایش تابع T بیشترین مقدار ممکن را خواهد داشت. پس جهت حرکت یکه برای داشتن بیشترین سرعت افزایش دما، عبارت است از

$$\vec{u}=\frac{۱}{\|\nabla T(p)\|}\nabla T(p)=\frac{۱}{\sqrt{۱۰۵}}(-۵\vec{i}-۸\vec{j}-۴\vec{k})$$

ج) مانند بحث قسمت (ب)، بیشترین سرعت کاهش تابع T زمانی حاصل می‌شود که $\theta=\pi$. به عبارت دیگر، با حرکت در خلاف جهت بردار گرادیان مقدار تابع با بیشترین سرعت ممکن کاهش می‌یابد.

مشاهده کردیم در صورت مشتق‌پذیری تابع دو یا سه متغیره f در نقطه p، مشتق سویی تابع در آن نقطه

از دستور $D_uf(p)=\nabla f(p)\cdot\vec{u}$ به دست می‌اید. همانطور که مثال زیر نشان می‌دهد، این تساوی شرط لازم برای مشتق‌پذیری است.

مثال. تابع $f:\mathbb{R}^۲\to\mathbb{R}$ با دستور $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\sin(x^۳-y^۳)}{x^۲+y^۲} & (x,y)\neq(۰,۰)\\ ۰ & (x,y)=(۰,۰)\end{cases}$ مفروض است.

الف) نشان دهید f در نقطه $(۰,۰)$ پیوسته بوده، مشتقات جزئی f در این نقطه وجود دارند.

ب) برای بردار یکه $\vec{u}=a\vec{i}+b\vec{j}$، مطلوب است محاسبه $D_uf(۰,۰)$ و $\nabla f(۰,۰)\cdot\vec{u}$. چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

الف) برای اثبات پیوستگی f در نقطه $(۰,۰)$،

$$\begin{aligned}|f(x,y)-f(۰,۰)| &= |\frac{\sin(x^۳-y^۳)}{x^۲+y^۲}|\leq\frac{|x^۳-y^۳|}{x^۲+y^۲}\\ &\leq \frac{|x^۳|}{x^۲+y^۲}+\frac{|y^۳|}{x^۲+y^۲}=\frac{x^۲}{x^۲+y^۲}|x|+\frac{y^۲}{x^۲+y^۲}|y|\\ &\leq |x|+|y|\leq\sqrt{x^۲+y^۲}+\sqrt{x^۲+y^۲}=۲\sqrt{x^۲+y^۲}\end{aligned}$$

اکنون وقتی $(x,y)\to(۰,۰)$، $\sqrt{x^۲+y^۲}\to ۰$. در نتیجه با توجه به نامساوی فوق، $\lim_{(x,y)\to(۰,۰)}|f(x,y)-f(۰,۰)|=۰$ و از آنجا $\lim_{(x,y)\to(۰,۰)}f(x,y)=f(۰,۰)$. پس f در نقطه $(۰,۰)$ پیوسته است. برای مشتقات جزئی f در این نقطه

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(۰,۰) &= \lim_{x\to۰}\frac{f(x,۰)-f(۰,۰)}{x}=\lim_{x\to۰}\frac{\frac{\sin(x^۳)}{x^۲}}{x}=۱\\ \frac{\partial f}{\partial y}(۰,۰) &= \lim_{y\to۰}\frac{f(۰,y)-f(۰,۰)}{y}=\lim_{y\to۰}\frac{\frac{\sin(-y^۳)}{y^۲}}{y}=-۱\end{aligned}$$

ب) با توجه به متن سئوال، مشتق سویی تابع در نقطه $(۰,۰)$ را مستقیما حساب می‌کنیم.

$$D_uf(۰,۰)=\lim_{t\to۰}\frac{f(at,bt)-f(۰,۰)}{t}=\lim_{t\to۰}\frac{\frac{\sin(t^۳a^۳-t^۳b^۳)}{t^۲a^۲+t^۲b^۲}}{t}=\lim_{t\to۰}\frac{\sin(t^۳(a^۳-b^۳))}{t^۳}=a^۳-b^۳$$

در فرمول فوق از این خاصیت استفاده کرده‌ایم که $a^۲+b^۲=۱$. نهایتا با استفاده از قسمت (الف)،

$$\nabla f(۰,۰)\cdot\vec{u}=(\frac{\partial f}{\partial x}(۰,۰)\vec{i}+\frac{\partial f}{\partial y}(۰,۰)\vec{j})\cdot(a\vec{i}+b\vec{j})=(\vec{i}-\vec{j})\cdot(a\vec{i}+b\vec{j})=a-b$$

با توجه به اینکه تساوی $D_uf(۰,۰)=\nabla f(۰,۰)\cdot\vec{u}$ برای هر بردار یکه $\vec{u}$ لزوما برقرار نیست پس f در نقطه $(۰,۰)$ مشتق‌پذیر نیست.