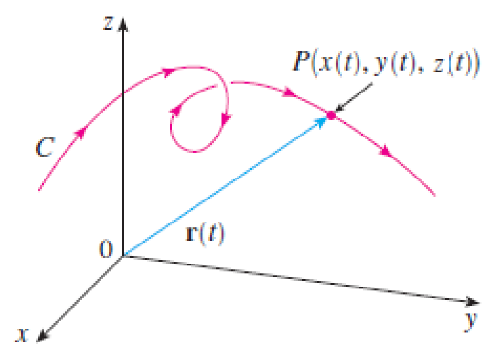
خم‌های پارامتری، خط عمود و صفحه مماس بر رویه

هدف ما در این بخش بررسی مفهوم هندسی صفحه مماس بر یک رویه است. از آنجا که ابزار اصلی در این راستا مفهوم خط مماس بر یک منحنی خواهد بود، لذا ابتدا بحث منحنی‌های پارامتری در فضا و خطوط مماس بر این منحنی‌ها را مطرح کرده، سپس به کمک آنها بحث صفحه مماس بر یک رویه را مشاهده خواهیم کرد.

فرض کنیم $I \subseteq \mathbb{R}$ بازه ای از اعداد حقیقی و $x = x(t)$، $y = y(t)$، $z = z(t)$ توابعی یک متغیره با دامنه مشترک I باشند. در این صورت مجموعه نقاط $\{(x(t), y(t), z(t)) : t \in I\}$ زیرمجموعه ای از فضای $\mathbb{R}^۳$ را مشخص می‌کند که در بسیاری از حالات به صورت یک خم(منحنی) در فضا مشاهده می‌شود. این خم را خم به معادلات پارامتری $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}, t \in I$ یا خم به معادله برداری $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$, $t \in I$ می‌نامیم. خم‌ها را معمولا با نماد C نمایش می‌دهیم.



مثال. هر یک از خمهای پارامتری زیر را در صفحه مشخص کنید.

الف) $C : \begin{cases} x = e^t \\ y = e^{-t} \end{cases}, t \in \mathbb{R}$

جواب. توجه کنیم که

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad x, y > ۰, \quad x(t)y(t) = e^t e^{-t} = ۱.$$

بنابراین خم فوق قسمتی از منحنی $y = \frac{۱}{x}$ در ناحیه $x > ۰$ است.

ب) $C : \begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases}, t \in [۰, ۲\pi]$

جواب. توجه کنیم که

$$\forall t \in [۰, ۲\pi] \quad x^۲(t) + y^۲(t) = (\cos t)^۲ + (\sin t)^۲ = ۱.$$

بنابراین خم فوق همان دایره $x^۲ + y^۲ = ۱$ در صفحه xoy است.

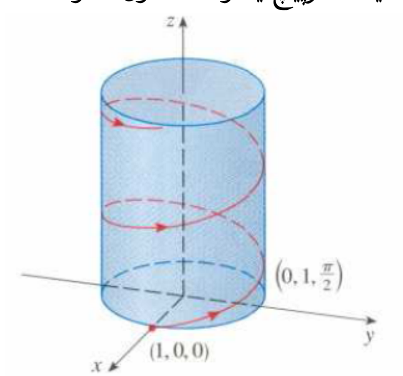
مثال. خم C به معادلات پارامتری $t \in \mathbb{R}$, $\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \\ z = t \end{cases}$ مفروض است.

الف) اگر C' تصویر این خم بر صفحه xoy باشد، آنگاه C' را در صفحه تعیین کنید.

ب) خم C را در فضا توصیف کنید.

جواب. (الف): فرض کنیم $P(\cos t, \sin t, t)$ نقطه ای دلخواه متناظر با پارامتر t روی خم C بوده و Q تصویر این نقطه بر صفحه xoy باشد. بنابراین مختصات Q عبارت است از $(\cos t, \sin t, ۰)$. در نتیجه C' دارای معادلات پارامتری $t \in \mathbb{R}$, $\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases}$ در صفحه xoy است. بنابر مثال قبل، این منحنی همان دایره $x^۲ + y^۲ = ۱$ در صفحه است.

(ب): باتوجه به قسمت (الف)، هر نقطه از منحنی C بر رویه استوانه‌ای استوار شده بر دایره $x^۲ + y^۲ = ۱$ در صفحه xoy و با محور استوانه به موازات محور z خواهد بود. از آنجا که تغییرات z بر حسب پارامتر t خطی است، با افزایش t متغیر z نیز متناسب با t افزایش یافته، بنابر این منحنی C در فضا یک مارپیچ یکنواخت حول استوانه $x^۲ + y^۲ = ۱$ خواهد بود.



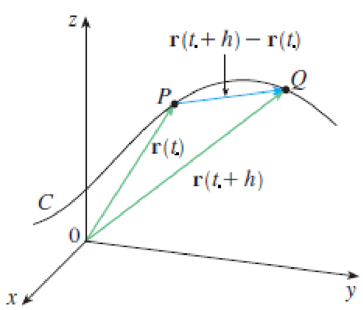
خط مماس بر خم‌های پارامتری

فرض کنیم C خمی به معادله برداری $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$، $t \in I$ باشد و توابع $x(t)$، $y(t)$ و $z(t)$ بر I مشتق‌پذیر باشند. همچنین فرض کنیم $P, Q \in C$ نقاط نظیر $t_۰, t_۰ + h \in I$ باشند. در این صورت بردار $\frac{۱}{h}(\vec{r}(t_۰ + h) - \vec{r}(t_۰))$ یک بردار هادی برای خط گذرنده از دو نقطه P و Q خواهد بود. اکنون اگر $h \to ۰$، آنگاه نقطه Q بر روی خم C به سمت نقطه P و درنتیجه خط گذرنده از این دو نقطه به خط مماس بر خم C در نقطه P میل می‌کند. از طرفی

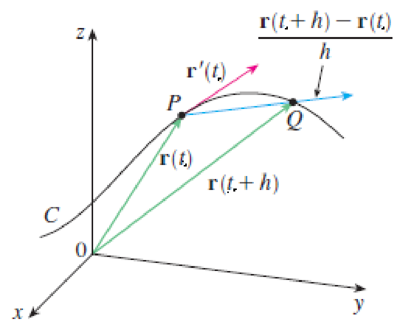
$$\lim_{h \to ۰} \frac{۱}{h}(\vec{r}(t_۰ + h) - \vec{r}(t_۰)) = \begin{pmatrix} \lim_{h\to ۰} \frac{۱}{h}(x(t_۰ + h) - x(t_۰)) \\ \lim_{h\to ۰} \frac{۱}{h}(y(t_۰ + h) - y(t_۰)) \\ \lim_{h\to ۰} \frac{۱}{h}(z(t_۰ + h) - z(t_۰)) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} x'(t_\circ) \\ y'(t_\circ) \\ z'(t_\circ) \end{pmatrix} = \vec{r'}(t_\circ).$$

بنابراین بردار $\vec{r'}(t_\circ) = x'(t_\circ)\vec{i} + y'(t_\circ)\vec{j} + z'(t_\circ)\vec{k}$ یک بردار هادی برای خط مماس بر C در نقطه P خواهد بود. بردار $\vec{r'}(t_\circ)$ را بردار سرعت یا بردار مماس بر C در نقطه P می‌نامیم.



(a) The secant vector $\overrightarrow{PQ}$



(b) The tangent vector $\mathbf{r}'(t)$

مثال. خم C به معادله برداری $\vec{r}(t) = \cosh t\vec{i} + \sinh t\vec{j} + (t+1)\vec{k}$ ، $t \in \mathbb{R}$ مفروض است. معادله خط مماس بر C در نقطه $P(1,0,1)$(نظیر $t=0$) را تعیین کنید.

جواب. فرض کنیم L خط مماس بر خم C در نقطه P باشد. با توجه به توضیحات قبل $\vec{r'}(0)$ یک بردار هادی برای این خط است. پس

$$\vec{r'}(t) = \sinh t\vec{i} + \cosh t\vec{j} + \vec{k} \Longrightarrow \vec{r'}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \| \quad L,$$
$$P(1,0,1) \quad \in \quad L$$

در نتیجه معادلات پارامتری خط L عبارت است از: $L: \begin{cases} x = 1 \\ y = s \\ z = s+1 \end{cases}$ ، $s \in \mathbb{R}$.

مثال. خم C به معادله برداری $\vec{r}(t) = \cos t\vec{i} + \sin t\vec{j} + \cos 2t\vec{k}$ ، $t \in \mathbb{R}$ مفروض است.

الف) نشان دهید C بر یک رویه درجه ۲ در فضا قرار دارد.

ب) نقطه یا نقاطی از خم C را تعیین کنید که خط مماس بر C در این نقطه یا نقاط تمامی بر رویه فوق قرار گیرند.

جواب. (الف): با توجه به معادله برداری خم C داریم $x(t) = \cos t$ ، $y(t) = \sin t$ و $z(t) = \cos ۲t$. در نتیجه

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad x(t)^۲ - y(t)^۲ = (\cos t)^۲ - (\sin t)^۲ = \cos ۲t = z(t).$$

پس معادلات پارامتری خم C در معادله رویه درجه دو (زین اسبی) $S : x^۲ - y^۲ = z$ صدق می‌کند. یعنی خم فوق کاملا بر رویه S قرار دارد.

(ب): فرض کنیم P نقطه‌ای روی خم C نظیر پارامتر t بوده و L_p خط مماس بر خم C در این نقطه باشد. بنابر این

$$\vec{r'}(t) = (-\sin t)\vec{i} + (\cos t)\vec{j} + (-۲\sin ۲t)\vec{k} \quad \| \quad L_p,$$
$$P(\cos t, \sin t, \cos ۲t) \quad \in \quad L_p$$

در نتیجه معادلات پارامتری خط L_p عبارت است از:

$$L_p : \begin{cases} x = (-\sin t)s + \cos t \\ y = (\cos t)s + \sin t \\ z = (-۲\sin ۲t)s + \cos ۲t \end{cases} \quad , \quad s \in \mathbb{R}$$

می‌دانیم خط L_p بر رویه S قرار دارد اگر و تنها اگر معادلات پارامتری آن در معادله رویه صدق کند. به این ترتیب

$$\begin{aligned} L_p \subset S &\iff \forall s \in \mathbb{R}; \quad (x(s), y(s), z(s)) \in S \iff x(s)^۲ - y(s)^۲ = z(s) \\ &\iff \forall s \in \mathbb{R}; \quad ((-\sin t)s + \cos t)^۲ - ((\cos t)s + \sin t)^۲ = (-۲\sin ۲t)s + \cos ۲t \\ &\iff \forall s \in \mathbb{R}; \quad ((\sin t)^۲ - (\cos t)^۲)s^۲ + \underbrace{(-۴\sin t\cos t + ۲\sin ۲t)}_{\circ}\, s \\ &\quad + \quad \underbrace{((\cos t)^۲ - (\sin t)^۲ - \cos ۲t)}_{\circ} = \circ \\ &\iff \forall s \in \mathbb{R}; \quad ((\sin t)^۲ - (\cos t)^۲)s^۲ = \circ \\ &\iff (\sin t)^۲ - (\cos t)^۲ = \circ \iff \tan^۲ t = ۱ \iff t = k\pi \pm \frac{\pi}{۴}. \end{aligned}$$

بنابر این در نقاط نظیر به مقادیر $t = k\pi \pm \frac{\pi}{۴}$، خطوط مماس بر منحنی C کاملا بر رویه S قرار خواهند گرفت.

صفحه مماس و خط عمود بر یک رویه

یادآوری: یک صفحه مانند π در فضای $\mathbb{R}^۳$ توسط یک نقطه مانند $P_\circ(x_\circ, y_\circ, z_\circ)$ روی آن و یک بردار ناصفر مانند $\vec{n} =$

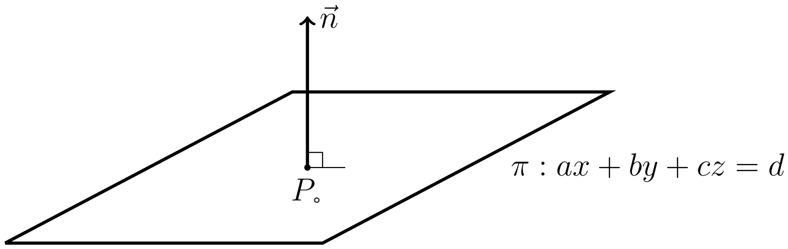
$a\vec{i}+b\vec{j}+c\vec{k}$ عمود بر آن مشخص می‌شود. بردار $\vec{n}$ را بردار نرمال یا بردار قائم بر صفحه π می‌نامیم. در این حالت معادله صفحه π به صورت زیر بدست می آید

$$a(x-x_{\circ})+b(y-y_{\circ})+c(z-z_{\circ})=\circ.$$

معادله فوق را می‌توان با ساده‌سازی به صورت زیر نیز نوشت

$$ax+by+cz=d,$$

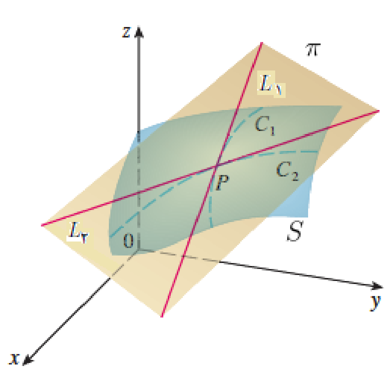
که در آن $d=ax_{\circ}+by_{\circ}+cz_{\circ}$.



تعریف

فرض کنیم S رویه‌ای در فضا و $P\in S$ نقطه‌ای بر این رویه باشد. در این صورت صفحه π در فضا و گذرنده از نقطه P را صفحه مماس بر S در این نقطه نامیم، هرگاه برای هر خم C واقع بر S و گذرنده از P، خط مماس بر C در نقطه P در صفحه π قرار گیرد.

در صورت وجود چنین صفحه‌ای خط گذرنده از نقطه P و عمود بر این صفحه را خط عمود بر رویه در نقطه P می‌نامیم.



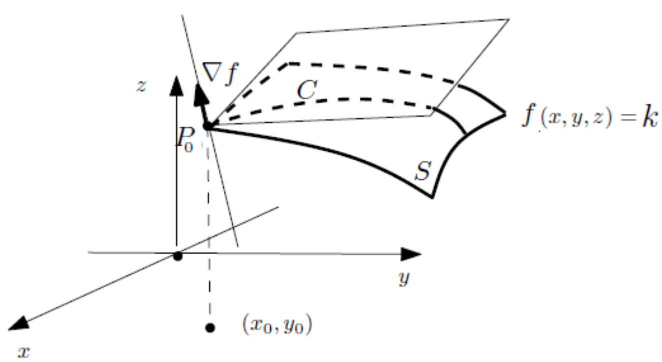
با استفاده از تذکر زیر می‌توانیم بردار نرمال صفحه مماس و بردار هادی خط عمود بر یک رویه را معرفی کنیم.

تذکر. فرض کنیم S رویه‌ای در فضا به معادله $S: f(x,y,z)=k$ بوده و f تابعی مشتق پذیر باشد. اکنون فرض کنیم C خمی

به معادله برداری $\vec{r}(t)=x(t)\vec{i}+y(t)\vec{j}+z(t)\vec{k}$، $t\in I$ واقع بر رویه S و گذرنده از نقطه $P_\circ(x_\circ,y_\circ,z_\circ)\in S$ باشد. در این صورت $t_\circ\in I$ وجود دارد که $P_\circ=(x(t_\circ),y(t_\circ),z(t_\circ))$. فرض کنیم توابع $x=x(t)$، $y=y(t)$، $z=z(t)$ نیز مشتق‌پذیر باشند. در این صورت

$$\begin{aligned}
C\subset S \qquad &\Rightarrow \forall t\in I;\quad f(x(t),y(t),z(t))=k\\
&\Rightarrow \frac{d}{dt}f(x(t),y(t),z(t))=\circ\\
&\Rightarrow f_x(P_\circ)x'(t_\circ)+f_y(P_\circ)y'(t_\circ)+f_z(P_\circ)z'(t_\circ)=\circ\\
&\Rightarrow \vec{\nabla}f(P_\circ)\cdot\vec{r'}(t_\circ)=\circ\\
&\Rightarrow \vec{\nabla}f(P_\circ)\perp\vec{r'}(t_\circ).
\end{aligned}$$

در نتیجه اگر π صفحه‌ای گذرنده از $P_\circ$ با بردار نرمال $\vec{\nabla}f(P_\circ)$ باشد آنگاه خط مماس بر C در نقطه $P_\circ$ در این صفحه قرار خواهد گرفت. از آنجا که این خاصیت برای هر منحنی واقع بر S و گذرنده از $P_\circ$ رخ می‌دهد، پس طبق تعریف، صفحه مزبور صفحه مماس بر S در $P_\circ$ خواهد بود. به همین ترتیب، بردار $\vec{\nabla}f(P_\circ)$ یک بردار هادی برای خط عمود بر رویه در نقطه $P_\circ$ است.



مثال. رویه S به معادله $x^۲+y^۲-z^۲=۱$ مفروض است. معادله صفحه مماس و خط عمود بر این رویه را در نقطه $P(۲,۲,\sqrt{۷})$ به دست آورید.

جواب. فرض کنیم π صفحه مماس و L خط عمود بر رویه فوق در نقطه P باشند. در این صورت باتوجه به تذکر قبل داریم

$$\vec{\nabla}f(P)\perp\pi,\quad \vec{\nabla}f(P)\|L.$$

از طرفی

$$\vec{\nabla} f = \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ۲x \\ ۲y \\ -۲z \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{\nabla} f(P) = \begin{pmatrix} ۴ \\ ۴ \\ -۲\sqrt{۷} \end{pmatrix}.$$

به این ترتیب

$$\left.\begin{array}{rcl} \vec{\nabla} f(P) = ۴\vec{i} + ۴\vec{j} - ۲\sqrt{۷}\vec{k} & \perp & \pi \\ P(۲, ۲, \sqrt{۷}) & \in & \pi \end{array}\right\} \Rightarrow \pi : ۴(x - ۲) + ۴(y - ۲) - ۲\sqrt{۷}(z - \sqrt{۷}) = ۰.$$

همچنین

$$\begin{array}{rcl} \vec{\nabla} f(P) = ۴\vec{i} + ۴\vec{j} - ۲\sqrt{۷}\vec{k} & \| & L \\ P(۲, ۲, \sqrt{۷}) & \in & L \end{array}$$

در نتیجه معادلات پارامتری خط L عبارت است از:

$$L : \begin{cases} x = ۴t + ۲ \\ y = ۴t + ۲ & \qquad t \in \mathbb{R} \\ z = -۲\sqrt{۷}t + \sqrt{۷} \end{cases}$$

مثال. فرض کنید C خم حاصل از تلاقی رویه های $x^۲ + y^۲ + z^۲ = ۹$ و $xy + z = ۰$ باشد. معادلات پارامتری خط مماس بر C را در نقطه $P(۲, ۱, -۲)$ بدست آورید.

جواب. فرض کنیم $S_۱ : f_۱(x, y, z) = x^۲ + y^۲ + z^۲ = ۹$ و $S_۲ : f_۲(x, y, z) = xy + z = ۰$ رویه های فوق باشند. در این صورت $C = S_۱ \cap S_۲$. فرض کنیم L خط مماس بر منحنی C در نقطه P بوده و $\pi_۱$ و $\pi_۲$ به ترتیب صفحات مماس بر $S_۱$ و $S_۲$ در این نقطه باشند. در این صورت $L \subset \pi_۱ \cap \pi_۲$. از طرفی

$$\left.\begin{array}{rcl} \vec{\nabla} f_۱(P) & \perp & \pi_۱ \\ \vec{\nabla} f_۲(P) & \perp & \pi_۲ \end{array}\right\} \Longrightarrow \left.\begin{array}{rcl} \vec{\nabla} f_۱(P) & \perp & L \\ \vec{\nabla} f_۲(P) & \perp & L \end{array}\right\} \Longrightarrow \vec{v} = \vec{\nabla} f_۱(P) \times \vec{\nabla} f_۲(P) \| L.$$

به این ترتیب با محاسبه بردارهای گرادیان، داریم

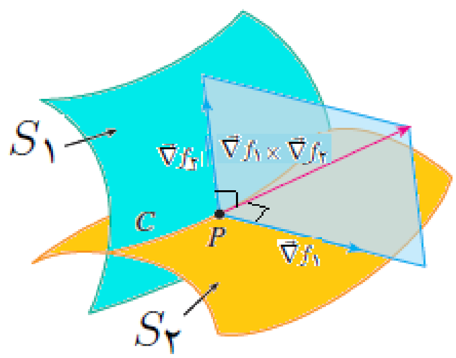
$$\begin{array}{rcl} \vec{\nabla} f_۱ & = & (۲x)\vec{i} + (۲y)\vec{j} + (۲z)\vec{k} \Rightarrow \vec{\nabla} f_۱(P) = ۴\vec{i} + ۲\vec{j} - ۴\vec{k}, \\ \vec{\nabla} f_۲ & = & y\vec{i} + x\vec{j} + \vec{k} \Rightarrow \vec{\nabla} f_۱(P) = \vec{i} + ۲\vec{j} + \vec{k}. \end{array}$$

درنتیجه

$$\vec{v}=\vec{\nabla}f_۱(P)\times\vec{\nabla}f_۲(P)=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ ۴ & ۲ & -۴\\ ۱ & ۲ & ۱\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}۲ & -۴\\ ۲ & ۱\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}۴ & -۴\\ ۱ & ۱\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}۴ & ۲\\ ۱ & ۲\end{vmatrix}\vec{k}$$

بنابراین $\vec{v}=۱۰\vec{i}-۸\vec{j}+۶\vec{k}$. در نتیجه معادلات پارامتری خط L عبارت است از:

$$\left.\begin{array}{ll}\vec{v}=۱۰\vec{i}-۸\vec{j}+۶\vec{k} & \parallel\ \ L\\ P(۲,۱,-۲) & \in\ \ L\end{array}\right\}\Longrightarrow L:\begin{cases}x=۱۰t+۲\\ y=-۸t+۱\ \ , \quad t\in\mathbb{R}\\ z=۶t-۲\end{cases}$$



تمرین‌های بخش خم های پارامتری، صفحه مماس و خط عمود بر رویه.

۱. رویه S به معادله $z=e^{x^۲+y^۲}$ را درنظر بگیرید.

الف) نشان دهید S یک رویه دوار است.

ب) معادله صفحه مماس بر رویه S در نقطه $P(\frac{\sqrt{۲}}{۲},\frac{\sqrt{۲}}{۲},e)$ را بنویسید.

ج) اگر خم C حاصل تلاقی رویه S و صفحه $z=e$ باشد، معادله خط مماس بر C در نقطه P را بنویسید.

۲. رویه S به معادله $x^۲+y^۲-z^۲=۱$ مفروض است.

الف) معادله صفحه مماس و خط عمود بر S در نقطه $(۱,۱,۱)\in S$ را به دست آورید.

ب)نشان دهید کلیه خطوط عمود بر S محور z را قطع می‌کند.

۳. فرض کنید $f:\mathbb{R}^۲\to\mathbb{R}$ تابعی مشتق‌پذیر بوده و S رویه‌ای به معادله $f(\frac{x}{z},\frac{y}{z})=۰$ باشد. نشان دهید کلیه صفحات مماس بر S از مبدا مختصات عبور می‌کنند.