پاسخ پرسش‌های آزمون پایان‌ترم درس ریاضی عمومی ۲ - ترم اول ۹۹-۹۸

۱. الف) ماکزیمم و می‌نیمم مطلق تابع $f(x,y) = ۳x^۲ + ۲y^۲ - ۴y$ را روی ناحیه‌ی بین منحنی $y = x^۲$ و خط $y = ۴$ در صفحه‌ی xy به دست آورید. (۱۵ نمره)

ب) ماکزیمم مقدار تابع $f(x,y,z) = -x\ln x - y\ln y - z\ln z$ را تحت قید $x + y + z = ۱$ به دست آورید. (۱۵ نمره)

حل. الف) ابتدا نقاط بحرانی f بر $\mathbb{R}^۲$ را تعیین می‌کنیم. با توجه به مشتق‌پذیری f بر $\mathbb{R}^۲$، این نقاط جواب‌های دستگاه $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = ۰$ هستند.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = ۶x = ۰ \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = ۴y - ۴ = ۰ \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = ۰ \\ y = ۱ \end{cases}$$

البته این نقطه کاندید اکسترمم موضعی و در نتیجه اکسترمم مطلق است. برای اکسترمم‌های روی مرزها دو روش وجود دارد.

روش اول: با پارامتری مرزها، ابتدا برای پارامتری سهمی بصورت $(t, t^۲)$ برای $-۲ < t < ۲$ خواهیم داشت: $f(t) = ۲t^۴ - t^۲$ پس $f'(t) = ۸t^۳ - ۲t = ۰$ دارای جواب $t = ۰$ و $t = \pm\frac{۱}{۲}$ است که بترتیب نقاط $(۰,۰)$ و $(\frac{۱}{۲}, \frac{۱}{۴})$ و $(\frac{-۱}{۲}, \frac{۱}{۴})$ را نتیجه می‌دهد.

با پارامتری پاره‌خط $y = ۴$ بصورت $(t, ۴)$ برای $-۲ < t < ۲$، $f(t) = ۳t^۲ + ۱۶$ را خواهیم داشت. در نتیجه $f'(t) = ۶t = ۰$ که دارای جواب $t = ۰$ و نقطه‌ی $(۰, ۴)$ است. دیگر کاندیداهای اکسترمم نقاط برخورد سهمی و پاره‌خط یعنی $(-۲, ۴)$ و $(۲, ۴)$ است.

روش دوم: با استفاده از ضرایب لاگرانژ، ابتدا اکسترمم‌های مقید $f(x)$ را تحت قید $g_۱(x,y) = y - x^۲ = ۰$ و سپس تحت قید $g_۲(x,y) = y - ۴ = ۰$ می‌یابیم.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = \lambda \dfrac{\partial g_۱}{\partial x} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = \lambda \dfrac{\partial g_۱}{\partial y} \\ g_۱(x,y) = ۰ \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} ۶x = -۲\lambda x \\ ۴y - ۴ = \lambda \\ y - x^۲ = ۰ \end{cases}$$

معادله‌ی اول جواب $x = ۰$ یا $\lambda = -۳$ را می‌دهد. در معادله‌ی سوم $x = ۰$ جواب $y = ۰$ را حاصل می‌کند. همچنین در

معادله دوم $\lambda = -3$، جواب $y = \frac{1}{4}$ را حاصل می‌کند که با جایگذاری در معادله‌ی سوم جواب $x = \pm\frac{1}{2}$ را نتیجه می‌دهد.
یعنی کاندیداها در این حالت $(0,0)$، $(\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$ و $(\frac{-1}{2}, \frac{1}{4})$ خواهند بود.

برای قید دوم نیز داریم:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = \lambda \dfrac{\partial g_2}{\partial x} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = \lambda \dfrac{\partial g_2}{\partial y} \\ g_2(x,y) = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 6x = 0 \\ 4y - 4 = \lambda \\ y - 4 = 0 \end{cases}$$

معادله‌ی اول $x = 0$ و معادله‌ی سوم $y = 4$ را نتیجه می‌دهد. یعنی در اینحالت $(0,4)$ کاندیدا است. در اینحالت مجدداً نقاط برخورد سهمی و خط یعنی $(2,4)$ و $(-2,4)$ نیز برای اکسترمم کاندیدا هستند.

در نتیجه خواهیم داشت:

(x,y)	$f(x,y)$
$(0,0)$	0
$(0,1)$	-2 (مینیمم مطلق)
$(\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$	$\frac{-1}{8}$
$(\frac{-1}{2}, \frac{1}{4})$	$\frac{-1}{8}$
$(0,4)$	16
$(2,4)$	28 (ماکزیمم مطلق)
$(-2,4)$	28 (ماکزیمم مطلق)

ب) با استفاده از روش ضرایب لاگرانژ، اکسترمم‌های تابع $f(x,y,z) = -x\ln x - y\ln y - z\ln z$ را تحت شرط $g(x,y,z) = x + y + z - 1 = 0$ به دست می‌آوریم.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = \lambda \dfrac{\partial g}{\partial x} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = \lambda \dfrac{\partial g}{\partial y} \\ g(x,y,z) = 1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} -\ln x - 1 = \lambda \\ -\ln y - 1 = \lambda \\ -\ln z - 1 = \lambda \\ x + y + z = 1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \ln x + 1 = \ln y + 1 = \ln z + 1 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$$

چون تابع $\ln$ یک به یک است، معادله اول نتیجه می‌دهد $x = y = z$ که با توجه به معادله‌ی دوم به جواب $x = y = z = \frac{1}{3}$ و به طور معادل به نقطه‌ی $p = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ با $f(p) = \ln 3$ می‌رسیم که تنها اکسترمم مقید برای این سوال است. این مقدار ماکزیمم مقید است، چون هرگاه دو تا از متغیرها مثلاً y, x به سمت صفر میل کنند و در نتیجه z به سمت یک میل کند تابع f به سمت

صفر میل می‌کند که از $\ln ۳$ کمتر است. در نتیجه $\ln ۳ > ۰$ مینیمم مقید نیست.

---

۲. هرگاه D ناحیه‌ای در صفحه xy باشد که بین خم‌های $۳x+y^۲=۰$، $۳x+y^۲=۱$، $y+(۳x+y^۲)^۲=۲$ و $y+(۳x+y^۲)^۲=۴$ محدود شده باشد، مقدار $\iint_D ydA$ را محاسبه کنید. (۱۵ نمره)

حل. با تغییر متغیر $u=۳x+y^۲$ و $v=y+(۳x+y^۲)^۲$ داریم:

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}=\det\begin{pmatrix} ۳ & ۲y \\ ۶(۳x+y^۲) & ۱+۴y(۳x+y^۲) \end{pmatrix}=۳$$

پس با توجه به اینکه $\frac{\partial(x,y)}{\partial(x,y)}=\frac{۱}{\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}}=\frac{۱}{۳}$ ، $۰\le u\le ۱$، $۲\le v\le ۴$ و $y=v-u^۲$ خواهیم داشت:

$$\iint_D ydA=\int_۲^۴\int_۰^۱ \frac{۱}{۳}(v-u^۲)du\ dv=\frac{۱}{۳}\int_۲^۴[vu-\frac{u^۳}{۳}]_۰^۱\ dv=\frac{۱}{۳}[\frac{v^۲}{۲}-\frac{v}{۳}]_۲^۴=\frac{۱۶}{۹}$$

۳.حجم بین دو رویه‌ی $z=x^۲+y^۲$ و $z=\frac{۱}{۲}(x^۲+y^۲+۱)$ را به دست آورید. (۱۵ نمره)

حل. این حجم بعنوان یک ناحیه‌ی z−ساده بصورت $x^۲+y^۲\le z\le \frac{۱}{۲}(x^۲+y^۲+۱)$ برای (x,y) متعلق به تصویر دایره تلاقی این دو سهمیگون ر وی صفحه‌ی xy، یعنی دایره به مرکز مبداء و شعاع یک است. با استفاده از تغییر متغیر استوانه‌ای داریم:

$$V=\int_۰^{۲\pi}\int_۰^۱\int_{r^۲}^{\frac{۱}{۲}(r^۲+۱)} r\ dz\ dr\ d\theta=\int_۰^{۲\pi}\int_۰^۱(-\frac{۱}{۲}r^۳+\frac{۱}{۲}r)\ dr\ d\theta=\int_۰^{۲\pi}[-\frac{۱}{۸}r^۴+\frac{۱}{۴}r^۲]_۰^۱\ d\theta=\frac{\pi}{۴}$$

---

۴. فرض کنید $C_۱$ قسمتی از منحنی $y=-x^۳$ باشد که $(-۱,۱)$ را به $(۰,۰)$ وصل می‌کند و $C_۲$ قسمتی از منحنی $y=x^۳$ باشد که نقطه‌ی $(۰,۰)$ را به نقطه $(۱,۱)$ متصل می‌سازد. اگر $C_۳$ پاره‌خط واصل $(۱,۱)$ به $(-۱,۱)$ باشد و $C:=C_۱\cup C_۲\cup C_۳$ که در جهت خلاف عقربه‌های ساعت پیموده شود، صحت قضیه‌ی گرین را برای انتگرال خط $\oint_C -xy^۲\ dx+x^۲y\ dy$ بررسی کنید.(۲۰ نمره)

حل. برای طرف اول قضیه‌ی گرین، ابتدا انتگرال خط را برای هریک از قطعات منحنی بدست می‌آوریم:

با پارامتری $-1 \le t \le 0$ داریم: $C_1 : \begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = -t^3 \end{cases}$

$$I_1 = \oint_{C_1} -xy^2 dx + x^2 y\, dy = \int_{-1}^{0} (-(t)(t^6)(1) + (t^2)(-t^3)(-3t^2))dt = \frac{-1}{4}$$

با پارامتری $0 \le t \le 1$ داریم: $C_2 : \begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = t^3 \end{cases}$

$$I_2 = \oint_{C_2} -xy^2 dx + x^2 y\, dy = \int_{0}^{1} (-(t)(t^6)(1) + (t^2)(t^3)(3t^2))dt = \frac{1}{4}$$

با پارامتری $-1 \le t \le 1$ داریم: $C_3 : \begin{cases} x(t) = -t \\ y(t) = 1 \end{cases}$

$$I_3 = \oint_{C_3} -xy^2 dx + x^2 y\, dy = \int_{-1}^{1} (-(-t)(1)(-1) + (t^2)(1)(0))dt = 0$$

بنابراین در نهایت برای طرف اول قضیه‌ی گرین داریم:

$$\oint_C -xy^2\, dx + x^2 y\, dy = I_1 + I_2 + I_3 = 0$$

اکنون فرض کنیم D ناحیه محصور توسط منحنی C باشد. در این صورت $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -\sqrt[3]{y} \le x \le \sqrt[3]{y}\ ,\ 0 \le y \le 1\}$
بنابراین برای طرف دوم قضیه گرین داریم،

$$\begin{aligned} \iint_D (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})xdy &= \iint_D 4xy\, dxdy = \int_0^1 \int_{-\sqrt[3]{y}}^{\sqrt[3]{y}} 4xy\, dx\, dy \\ &= \int_0^1 2y((\sqrt[3]{y})^2 - (-\sqrt[3]{y})^2\, dy = 0 \end{aligned}$$

بنابراین قضیه‌ی گرین در اینجا برقرار است.

---

۵. مساحت قسمتی از سهمیگون $z = \frac{1}{3}(x^2 + y^2)$ را بیابید که زیر صفحه‌ی $z = 4$ و خارج کره‌ی $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ واقع است.

(۱۵ نمره)

حل. ابتدا تلاقی سهمیگون با کره و صفحه را به دست می‌آوریم.

$$\begin{cases} z=\dfrac{1}{3}(x^2+y^2) \\ x^2+y^2+z^2=4 \end{cases} \Longrightarrow z^2+3z-4=0 \Longrightarrow z=-4,\ z=1$$

چون صفحه‌ی $z=-4$ سهمی را قطع نمی‌کند، پس قابل قبول نیست. بنابراین تقاطع این دو رویه، دایره‌ی $x^2+y^2=3$ است.

$$\begin{cases} z=\dfrac{1}{3}(x^2+y^2) \\ z=4 \end{cases} \Longrightarrow x^2+y^2=12$$

بنابراین تقاطع این دو رویه دایره‌ی $x^2+y^2=12$ است.

در نتیجه قسمت مورد نظر از سهمیگون روی ناحیه‌ی R بین دو دایره بالا در صفحه‌ی xy تعریف شده است. بعبارتی با مختصات قطبی $R=\{(r,\theta): \sqrt{3}\le r\le\sqrt{12},\ 0\le\theta\le 2\pi\}$. در نتیجه مساحت رویه به روش زیر محاسبه می‌شود.

$$A_S=\iint_S d\sigma=\iint_R\sqrt{f_x^2+f_y^2+1}\,dA=\int_0^{2\pi}\int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{12}}\sqrt{\frac{4}{9}r^2+1}\,r\,dr\,d\theta=\int_0^{2\pi}\frac{3}{4}(\frac{4}{9}r^2+1)^{\frac{3}{2}}]_{\sqrt{3}}^{\sqrt{12}}\,d\theta=\frac{1}{2\sqrt{3}}\pi(19^{\frac{3}{2}}-7^{\frac{3}{2}})$$

---

۶. انتگرال خط $I=\oint_C F.dr$ را برای $F(x.y.z)=(x+2y^2)\mathbf{i}+(y+z^2)\mathbf{j}+(z+2x^2)\mathbf{k}$ محاسبه کنید وقتی که C مرز مثلث به رئوس $(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)$ باشد که در جهت قائم رو به بالای قسمتی از صفحه‌ی احاطه شده توسط این مثلث پیموده می‌شود.

حل. با توجه به بیان مسئله، بردار قائم یکه بر صفحه‌ی مذکور عبارتست از $\mathbf{n}=\frac{1}{\sqrt{3}}(\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k})$. بنابر قضیه استوکس

$$I=\oint_C (x+2y^2)\,dx+(y+z^2)\,dy+(z+2x^2)\,dz=\iint_S(\mathrm{curl}\mathbf{F}\cdot\mathbf{n})d\sigma$$

$$\mathrm{curl}\mathbf{F}=\nabla\times\mathbf{F}=\det\begin{pmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ x+2y^2 & y+z^2 & z+2x^2\end{pmatrix}=-2z\mathbf{i}-4x\mathbf{j}-4y\mathbf{k}$$

در نتیجه $\mathrm{curl}\mathbf{F}\cdot\mathbf{n} = -\frac{1}{\sqrt{3}}(2z+4x+4y)$ و از آنجا

$$\iint_S curl\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,d\sigma = \iint_S -\frac{1}{\sqrt{3}}(2z+4x+4y)\,d\sigma = -\frac{1}{\sqrt{3}}\iint_S (2z+4x+4y)\ d\sigma$$

برای محاسبه انتگرال اخیر توجه می‌کنیم صفحه‌ی مورد نظر دارای معادله‌ای به صورت $z=g(x,y)=1-x-y$ با

$$(x,y)\in D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1-x\}$$

است. در نتیجه

$$d\sigma=\sqrt{1+(\frac{\partial g}{\partial x})^2+(\frac{\partial g}{\partial y})^2}dx\,dy=\sqrt{3}dx\,dy$$

و نهایتاً

$$\begin{aligned}
I &= -\tfrac{1}{\sqrt{3}}\iint_S (2z+4x+4y)\ d\sigma\\
&= -\iint_D (2(1-x-y)+4x+4y)\ dx\,dy\\
&= -\int_0^1\int_0^{1-x} (2+2x+2y)\ dy\ dx\\
&= -\int_0^1 (2y+2xy+y^2)]_0^{1-x}\ dx\\
&= -\int_0^1 (-x^2-2x+3)\ dx\\
&= (\frac{x^3}{3}+x^2-3x]_0^1\\
&= -\frac{5}{3}
\end{aligned}$$