

تکلیف سری اول درس ریاضی عمومی ۱

۱. با استفاده از استقرای ریاضی روابط زیر را ثابت کنید.

$$۱ + ۲ + \dots + n = \frac{n(n+1)}{۲} \quad (\text{الف})$$

$$۱^۲ + ۲^۲ + \dots + n^۲ = \frac{n(n+1)(۲n+1)}{۶} \quad (\text{ب})$$

$$۱^۳ + ۲^۳ + \dots + n^۳ = \left(\frac{n(n+1)}{۲}\right)^۲ \quad (\text{ج})$$

۲. روابط زیر را ثابت کنید.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{۱ + ۲ + \dots + n}{n^۲} = \frac{۱}{۲} \quad (\text{الف})$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{۱ + ۲^۲ + \dots + n^۲}{n^۳} = \frac{۱}{۳} \quad (\text{ب})$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{۱ + ۲^۳ + \dots + n^۳}{n^۴} = \frac{۱}{۴} \quad (\text{ج})$$

۳. همگرایی یا واگرایی هر یک از دنباله های زیر را بررسی کنید و در صورت همگرایی مقدار حد را بدست آورید.

$$a_n = \sqrt[n]{۳^n + ۵^n + ۷^n + ۹^n} \quad (\text{الف})$$

$$a_n = \sqrt[n^۲ - n^۳] + n \quad (\text{ب})$$

$$a_n = \frac{n!}{n^n} \quad (\text{ج})$$

$$a_n = \sqrt{n^۳ + ۳n} - \sqrt{n^۳ - n} \quad (\text{د})$$

۴. مقدار $a > ۰$ را به گونه ای تعیین کنید که دنباله $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ با دستور $a_n = \frac{a^n}{a^n + ۱}$ همگرا باشد و برای این مقدار a ، حد دنباله را به دست آورید.

۵. فرض کنید $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ و $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ دو دنباله همگرا از اعداد حقیقی مثبت باشند.

(الف) نشان دهید دنباله $c_n = \frac{na_n}{a_nb_n + n}$ همواره همگرا است.

(ب) با مثالی نشان دهید دنباله $d_n = \frac{na_n}{na_nb_n + ۱}$ می تواند واگرا باشد.

۶. همگرایی یا واگرایی سری زیر را برحسب مقادیر p مشخص نمایید.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n^p + 1} - \sqrt{n^p}).$$

۷. کلیه مقادیر $a > 0$ را تعیین کنید که سری عددی $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{a^n + 1}$ همگرا باشد.

۸. فرض کنید $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ یک سری همگرا با جملات نامنفی باشد. همگرایی یا واگرایی هر یک از سری‌های زیر را بررسی کنید.

الف) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{a_n + 1}$

ب) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 + a_n}$

۹. همگرایی یا واگرایی سری‌های زیر را تحقیق نمایید.

الف) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1^2 + 2^2 + \dots + n^2}$

ب) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[n]{n}}{n^2}$

ج) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{n}}}$

د) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n^2}$

۱۰. دنباله $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ به صورت $f_n = \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}$ تعریف شده است. الف) نشان دهید برای هر $n \in \mathbb{N}$ و اینکه برای هر $n \in \mathbb{N}$ $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$ عددی صحیح است.

ب) نشان دهید سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{f_n}$ همگرا است.