

تکلیف سری دوم درس ریاضی عمومی ۱

۱. فرض کنید $\{a_n\}$ دنباله ای از اعداد مثبت است که سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}$ همگراست، نشان دهید سری

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n^2 + a_n}$$

نیز همگراست.

۲. همگرایی یا واگرایی سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(\sinh(n))}{n^3}$ را تعیین کنید.

۳. همگرایی یا واگرایی هر یک از سری‌های زیر را با ذکر دلیل تعیین کنید.

الف) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{\cosh(n)}$ ب) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1 + \cos(n)}{n^2}$

ج) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2 + 2n + 1}}$ د) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n + 3^n}{n!}$

ه) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2 + 2n}}$ و) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{e^n}$

۴. فرض کنید $a > 0$ عددی ثابت باشد. به ازای چه مقادیری از a سری $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n + 1}{a^n + n!}$ همگراست؟ (با

ذکر دلیل)

۵. دامنه همگرایی سری‌های توان زیر را تعیین کنید.

الف) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n (x-1)^n}{\cosh(n)}$ ب) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x-5)^n}{3^n (n+1)}$

۶. نشان دهید عدد $c \in (0, \infty)$ وجود دارد که $e^c \tanh(c) = 1$.

۷. نشان دهید تابع $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ با دستور زیر بر \mathbb{R} پیوسته است.

$$f(x) = \begin{cases} x^{\frac{1}{x}} & x > 0 \\ \ln(1 + x^2) & x \leq 0 \end{cases}$$

۸. نشان دهید تابع $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ با دستور زیر بر \mathbb{R} پیوسته است.

$$f(x) = \begin{cases} e^{\sinh x} & x \geq 0 \\ \cosh(\ln(1 - x)) & x < 0 \end{cases}$$

۹. (الف) نشان دهید تابع $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ با ضابطه

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^{x^2} - 1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

در $x = 0$ پیوسته است.

(ب) نشان دهید تابع f روی \mathbb{R} پیوسته است.

۱۰. تابع $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ با شرط $f(xy) = f(x) + f(y)$ ، برای هر $x, y \in (0, \infty)$ را در نظر

بگیرید. اگر این تابع در $x = 1$ پیوسته باشد نشان دهید که بر تمام نقاط بازه $(0, \infty)$ پیوسته خواهد بود.