تکلیف سری سوم درس ریاضی عمومی ۱

۱. مشتق توابع زیر را بدست آورید.

(آ) $f(x) = \ln|x|, x \in \mathbb{R} - \{0\}$

(ب) $f(x) = \arccos \frac{1}{|x|}, |x| > 1$

(ج) $f(x) = \log_x 2, x > 0, x \neq 0$

(د) $f(x) = \log_x \cos x, x \in (0, \pi/2) - \{1\}$

---

۲. مقادیر a, b, c و d را به نحوی تعیین کنید که تابع زیر روی $\mathbb{R}$ مشتق‌پذیر باشد.

$$f(x) = \begin{cases} ax + b, & x \leq 0 \\ cx^2 + dx, & 0 < x \leq 1 \\ 1 - \frac{1}{x}, & x > 1 \end{cases}$$

---

۳. فرض کنید $f'(x) = \frac{1}{x}$ و $f(2) = 9$. مقدار حد زیر را بدون استفاده از قاعده هوپیتال به دست آورید.

$$\lim_{x \to 2} \frac{f(x^2 + 5) - f(9)}{x - 2}.$$

---

۴. فرض کنید تابع $f : \mathbb{R} \to (0, +\infty)$ برای هر $x, y \in \mathbb{R}$ در رابطه‌ی $f(x + y) = f(x).f(y)$ صدق کند.

الف) نشان دهید $f(0) = 1$

ب) نشان دهید اگر f در صفر پیوسته باشد، آنگاه تابع f همه جا پیوسته است.

ج) نشان دهید اگر f در صفر مشتق پذیر باشد و $f'(0) = 1$ ، آنگاه تابع f همه جا مشتق پذیر است و $f'(x) = f(x)$.

---

۵. تابع $f(x) = \frac{e^x}{x}$ را در نظر بگیرید.

الف) مینیمم مطلق تابع $f(x)$ در بازه $(0, +\infty)$ را بدست آورید.

ب) آیا تابع f روی $(0, +\infty)$ دارای ماکزیمم مطلق است؟ چرا؟

---

۶. نشان دهید تابع $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ با ضابطه‌ی $f(x)=x+e^x+۱$ بر $\mathbb{R}$ وارون پذیر است، دامنه تابع وارون را تعیین کنید. نشان دهید تابع وارون بر $\mathbb{R}$ مشتق پذیر است. مقدار $(f^{-۱})'(۲)$ را محاسبه کنید.

---

۷. فرض کنید تابع $f:(۰,+\infty)\to\mathbb{R}$ برای هر $x,y\in\mathbb{R}$ در رابطه‌ی $f(xy)=f(x)+f(y)$ صدق کند.
الف) نشان دهید $f(۱)=۰$
ب) نشان دهید اگر f در $x=۱$ مشتق پذیر باشد ، آنگاه تابع f بر $(۰,+\infty)$ مشتق پذیر است. ضابطه تابع مشتق را به دست آورید.

---

۸. نشان دهید تابع f با ضابطه زیر بر $\mathbb{R}$ مشتق‌پذیر است و ضابطه‌ی تابع مشتق را بیابید.

$$f(x)=\begin{cases} x^۳\ln(x) & x>۰ \\ x^۲۳^x & x\leq ۰ \end{cases}$$

---

۹. فرض کنید تابع $f:[۱,۲]\to\mathbb{R}$ بر $[۱,۲]$ پیوسته و بر $(۱,۲)$ مشتق‌پذیر باشد. اگر $f(۱)=۱$ و $f(۲)=۲$ نشان دهید نقطه‌ای چون $c\in(۱,۲)$ موجود است که مماس بر نمودار f در این نقطه از مبدا مختصات عبور می‌کند.

---

۱۰. فرض کنید $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ برای هر $x,y\in\mathbb{R}$ در شرط $|f(x)-f(y)|\leq(x-y)^۲$ صدق کند. نشان دهید f تابع ثابت است.

---

۱۱. فرض کنید $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ بر $[a,b]$ پیوسته و f'' در (a,b) موجود و همواره مثبت باشد. نشان دهید

$$\forall x,y\in[a,b],\qquad f\left(\frac{x+y}{۲}\right)\leq\frac{۱}{۲}(f(x)+f(y))$$

---

۱۲. نشان دهید هر یک از معادلات زیر در بازه $[۰,\pi/۲]$ دقیقا یک ریشه دارند.

$$\sin(\cos x)=x$$

و

$$\cos(\sin x) = x$$

بعلاوه، اگر x_1 ریشه معادله اول و x_2 ریشه معادله دوم باشد، نشان دهید $x_2 < x_1$.

---

۱۳. فرض کنید $a > 0$ و تابع f بر بازه $[a, b]$ پیوسته و بر بازه (a, b) مشتقپذیر باشد. اگر

$$f(a)/a = f(b)/b$$

آنگاه نشان دهید عدد $c \in (a, b)$ موجود است بطوریکه $cf'(c) = f(c)$.

---

۱۴. برای اعداد صحیح مثبت m, n اکسترمم های نسبی تابع

$$f(x) = x^m(1 - x)^n$$

را بدست آورید.