

تکلیف سری چهارم درس ریاضی عمومی ۱

۱. تابع $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ با ضابطه $f(x) = e^x + x^3$ مفروض است. نشان دهید f بر \mathbb{R} وارون پذیر بوده و تابع وارون تابعی مشتق پذیر است. مطلوب است محاسبه مقدار $(f^{-1})'(1)$.

۲. فرض کنید تابع f بر $(1, +\infty)$ پیوسته و بر $(1, +\infty)$ مشتق پذیر باشد. اگر $f(1) = 0$ و برای هر $x \in (1, +\infty)$ داشته باشیم $\frac{1}{x} \leq f'(x) \leq \frac{1}{x}$ نشان دهید

$$\forall x \geq 1 \quad 1 - \frac{1}{x} \leq f(x) \leq \ln(x).$$

۳. فرض کنید $f, g : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ دو تابع پیوسته و مشتق پذیر بر $(0, +\infty)$ باشند با این خاصیت که برای هر $x > 0$ ، $f'(x) \leq g'(x)$ اگر $f(0) \leq g(0)$ نشان دهید برای هر $x \geq 0$ ، $f(x) \leq g(x)$.

۴. اکستریم مطلق تابع $f(x) = \tanh(x^3 + x)$ را بر بازه $[-1, 1]$ به دست آورید.

۵. اکستریم های مطلق تابع f با ضابطه ی

$$f(x) = \begin{cases} |x|^x & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$

را بر بازه $[-1, 1]$ به دست آورید.

۶. الف) ثابت کنید معادله $x + \tan(x) = 0$ در $(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$ دقیقاً یک جواب دارد.
ب) اکستریم های نسبی و مطلق تابع با ضابطه ی $f(x) = x \sin(x)$ را در $[0, \frac{\pi}{4}]$ به دست آورید.

۷. اگر $F(x) = \int f(x) dx$ ، آنگاه انتگرال نامعین $\int f(1 - 2x) dx$ را محاسبه کنید.

۸. انتگرال‌های زیر را محاسبه نمایید.

الف) $\int x\sqrt{x^2+1} dx$

ب) $\int \frac{\sqrt{x^2+1}}{x} dx$

ج) $\int \frac{1}{x\sqrt{x^2+1}} dx$

د) $\int x \tan^{-1}(x) dx$

ه) $\int e^{\sqrt{x}} dx$

و) $\int \frac{x^2-x+1}{x^3-x^2} dx$

ز) $\int \frac{e^x}{e^{2x}-1} dx$

ح) $\int \ln(x^2+2x+2) dx$

ط) $\int \frac{1}{(1+x^2)^2} dx$

ی) $\int \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}+1} dx$

ک) $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}-1} dx$