به نام خدا

امتحان میان ترم معادلات دیفرانسیل

(۲۱ اسفند ۱۳۹۶)

پاسخ سوالات

....

۱. نشان دهید که اگر $y_۱$ و $y_۲$ جواب‌های معادله‌ی $P(x)y'' + Q(x)y' + R(x)y = G(x)$ باشند، آن‌گاه $y_۱ - y_۲$ جوابی از معادله‌ی $P(x)y'' + Q(x)y' + R(x)y = ۰$ است.

حل فرض کنید $L[y] = P(x)y'' + Q(x)y' + R(x)y$. در این صورت طبق فرض داریم $L[y_۱] = G(x)$ و $L[y_۲] = G(x)$. چون L یک عملگر خطی است داریم

$$L[y_۱ - y_۲] = L[y_۱] - L[y_۲] = G(x) - G(x) = ۰$$

بنابراین $L[y_۱ - y_۲] = ۰$، یعنی $y_۱ - y_۲$ یک جواب از معادله دیفرانسیل همگن $P(x)y'' + Q(x)y' + R(x)y = ۰$ است.

---

۲. اعداد α و β را طوری تعیین کنید که $\mu = x^\alpha y^\beta$ یک عامل انتگرال‌ساز معادله دیفرانسیل زیر باشد. جواب عمومی معادله را به دست آورید.

$$(3y^2 + 10x^2y)\,dx - (2xy + 6x^3)\,dy = 0$$

حل عبارت $\mu = x^\alpha y^\beta$ را در معادله ضرب می‌کنیم و α و β را طوری تعیین می‌کنیم که معادله دیفرانسیل حاصل کامل شود

$$(3x^\alpha y^{\beta+2} + 10x^{\alpha+2}y^{\beta+1})\,dx - (2x^{\alpha+1}y^{\beta+1} + 6x^{\alpha+3}y^\beta)\,dy = 0.$$

اگر قرار دهیم $M = 3x^\alpha y^{\beta+2} + 10x^{\alpha+2}y^{\beta+1}$ و $N = -2x^{\alpha+1}y^{\beta+1} - 6x^{\alpha+3}y^\beta$ داریم

$$\begin{aligned} M_y &= 3(\beta+2)x^\alpha y^{\beta+1} + 10(\beta+1)x^{\alpha+2}y^\beta \\ N_x &= -2(\alpha+1)x^\alpha y^{\beta+1} - 6(\alpha+3)x^{\alpha+2}y^\beta. \end{aligned}$$ ۵

برای این که معادله دیفرانسیل کامل باشد باید داشته باشیم $M_y = N_x$. در نتیجه برای این که معادله دیفرانسیل کامل باشد (با متحد قرار دادن دو عبارت فوق) باید داشته باشیم

$$\begin{cases} 3(\beta+2) = -2(\alpha+1) \\ 10(\beta+1) = -6(\alpha+3) \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 2\alpha + 3\beta = -8 \\ 3\alpha + 5\beta = -14 \end{cases} \Longrightarrow \alpha = 2, \quad \beta = -4.$$ ۵

از این‌رو $\mu = x^2y^{-4}$ یک عامل انتگرال‌ساز برای معادله است. با ضرب آن در معادله داریم

$$(3x^2y^{-2} + 10x^4y^{-3})\,dx - (2x^3y^{-3} + 6x^5y^{-4})\,dy = 0$$

بنابراین با کامل کردن دیفرانسیل‌ها خواهیم داشت

$$d(x^3y^{-2}) + d(2x^5y^{-3}) = 0$$

۵

و جواب عمومی معادله عارت است از

$$x^3y^{-2} + 2x^5y^{-3} = c.$$

دانشگاه صنعتی اصفهان

نام و نام خانوادگی: .... شماره دانشجوئی: .... [redacted] نام درس: ....

گروه درس: .... نام استاد: .... تاریخ: .... نمره: ....

---

(۴) $xy'' - (x+1)y' + y = x^2 e^x, \quad x>0.$

معادله همگن: $xy'' - (x+1)y' + y = 0$

$P(x)=x,\ Q(x)=-(x+1),\ R(x)=1 \Rightarrow P(x)+Q(x)+R(x) = x-(x+1)+1=0$ — ۲ نمره

$\Rightarrow$ یک جواب معادله همگن $y_1=e^x \Rightarrow$ جواب مستقل خطی دوم به کمک روش کاهش مرتبه $y_2 = vy_1 = ve^x$

$$v=\int \frac{1}{y_1^2} e^{-\int p(x)dx} dx$$

شکل نرمال معادله: $y'' - \left(\frac{x+1}{x}\right)y' + \frac{1}{x}y = 0$ یا $y'' - \left(1+\frac1x\right)y' + \frac1x y=0$

$\Rightarrow p(x) = -\left(1+\frac1x\right) \Rightarrow v=\int \frac{1}{(e^x)^2} e^{-\int -(1+\frac1x)dx} dx$ — ۳ نمره

$$=\int \frac{1}{e^{2x}} e^{\int(1+\frac1x)dx}dx = \int \frac{1}{e^{2x}} e^{x+\ln x}dx = \int x e^{-x}dx$$

$$= -xe^{-x} + \int e^{-x}dx = -(x+1)e^{-x} \Rightarrow y_2 = ve^x = -(x+1)e^{-x}\cdot e^x = -x-1$$

$\Rightarrow$ جواب عمومی معادله همگن $y_h = c_1y_1+c_2y_2 = c_1e^x + c_2(-x-1)$ — ۱ نمره

جواب خاص معادله ناهمگن $y_p = u_1y_1+u_2y_2,\quad u_1=\int\frac{-gy_2}{W(y_1,y_2)},\quad u_2=\int \frac{gy_1}{W(y_1,y_2)}$ — ۲ نمره

به کمک روش تغییر پارامتر — ۱ نمره

شکل نرمال معادله: $y'' - \left(1+\frac1x\right)y' + \frac1x y = xe^x \Rightarrow g(x) = xe^x$

$$\Rightarrow u_1=\int \frac{-xe^x\cdot(-x-1)}{xe^x}\,dx=\int (x+1)\,dx=\frac{1}{2}x^2+x$$

۲ نمره

$$u_2=\int \frac{xe^x\cdot e^x}{xe^x}\,dx=\int e^x\,dx=e^x$$

$$\Rightarrow y_p=u_1y_1+u_2y_2=\left(\frac{1}{2}x^2+x\right)e^x+e^x(-x-1)=\frac{1}{2}x^2e^x-e^x$$

۱ نمره

$$=\left(\frac{1}{2}x^2-1\right)e^x$$

جواب عمومی معادله داده شده: $y_g=y_h+y_p=c_1e^x+c_2(-x-1)+\left(\frac{1}{2}x^2-1\right)e^x$

۳ نمره

دانشگاه صنعتی اصفهان

نام و نام خانوادگی: .... شماره دانشجوئی: .... نام درس: ....

گروه درس: .... نام استاد: .... تاریخ: .... نمره: ....

---

۵) $y''+2y'+5y = xe^{-x}\cos x + e^{-x}\sin^2 x + 1$

معادله همگن تکمیل، $y''+2y'+5y=0 \Rightarrow$ معادله شاخص $r^2+2r+5=0$

$\Rightarrow r_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1-5} = -1 \pm 2i$

۲ نمره

تابع سمت راست $g(x) = xe^{-x}\cos x + e^{-x}\sin^2 x + 1$

$= xe^{-x}\cos x + e^{-x}\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)+1$

$= xe^{-x}\cos x + \frac{1}{2}e^{-x} - \frac{1}{2}e^{-x}\cos 2x + 1$

۱ نمره

معادله ۱: $y''+2y'+5y = xe^{-x}\cos x \Rightarrow y_{p_1} = x^{s_1}e^{-x}[(Ax+B)\cos x + (Cx+D)\sin x]$

$= x^0 e^{-x}[(Ax+B)\cos x + (Cx+D)\sin x]$

$s_1=0$

۳ نمره

معادله ۲: $y''+2y'+5y = \frac{1}{2}e^{-x} \Rightarrow y_{p_2} = Ex^{s_2}e^{-x} = Ex^0e^{-x}$

$s_2=0$

۲ نمره

معادله ۳: $y''+2y'+5y = -\frac{1}{2}e^{-x}\cos 2x \Rightarrow y_{p_3} = x^{s_3}e^{-x}(F\cos 2x + G\sin 2x)$

$= x^1 e^{-x}(F\cos 2x + G\sin 2x)$

$s_3=1$

۳ نمره

معادله ۴: $y''+2y'+5y=1 \Rightarrow y_{p_4} = Hx^{s_4} = Hx^0 = H = \frac{1}{5}$

$s_4=0$

۲ نمره

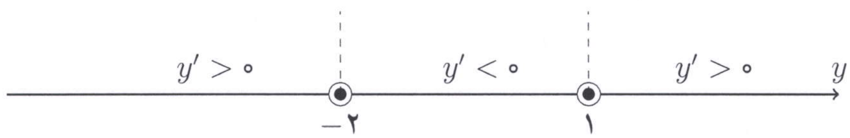
شکل کلی یک جواب خاص $y_p = y_{p_1}+y_{p_2}+y_{p_3}+y_{p_4}$

۲ نمره

۳. نقاط تعادل و نوع پایداری آن‌ها را روی خط فاز برای معادله دیفرانسیل زیر مشخص کنید؛ جواب‌های معادله را برای شرایط اولیه متفاوت رسم کنید (با استدلال کامل).

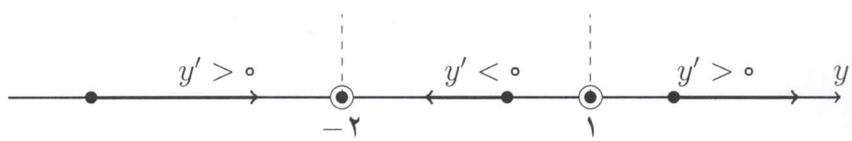
$$\frac{dy}{dt} = (y - ۱)(y + ۲), \qquad -\infty < y_۰ < +\infty$$

مقادیر $y = ۱$ و $y = -۲$ مقادیر تعادلی از معادله هستند. ابتدا خط فاز را رسم می‌کنیم و مقادیر تعادلی $y = ۱$ و $y = -۲$، که در آن‌ها $\frac{dy}{dt}$ برابر صفر می‌شود، را مشخص می‌کنیم. سپس فاصله‌هایی که در آن‌ها $y' > ۰$ یا $y' < ۰$ را روی خط مشخص می‌کنیم.



چون در فاصله‌ی سمت چپ $y = -۲$ داریم $y' > ۰$، پس جواب معادله دیفرانسیل y که مقدار آن کمتر از -۲ باشد وقتی به $y = -۲$ نزدیک می‌شود صعودی است. پس یک پیکان بر روی خط که در این فاصله به -۲ اشاره کند رسم می‌کنیم. به همین ترتیب برای سایر فاصله‌ها عمل می‌کنیم. این اطلاعات در خط فاز زیر ثبت شده‌اند.

۵ نمره



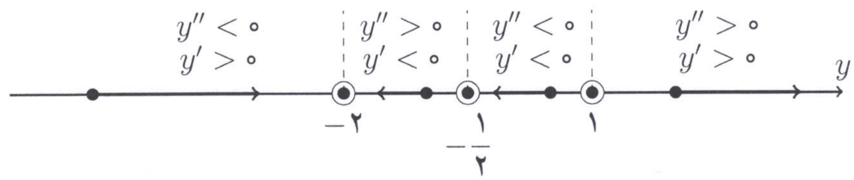
بنابراین $y = -۲$ نقطه‌ی تعادلی پایدار و $y = ۱$ نقطه‌ی تعادلی ناپایدار است.

اکنون فواصلی را مشخص می‌کنیم که $y'' > ۰$ یا $y'' < ۰$. با مشتق‌گیری از معادله نسبت به t داریم

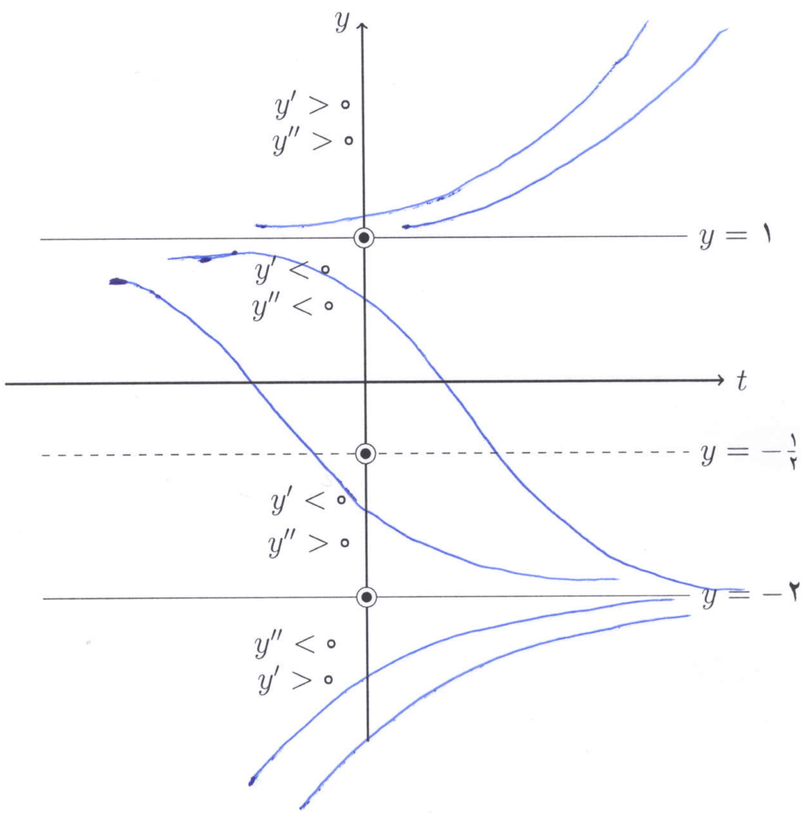
$$\begin{aligned}\frac{d^۲y}{dt^۲} &= \frac{d}{dy}((y - ۱)(y + ۲))\frac{dy}{dt} \\ &= \frac{d}{dy}(y^۲ + y - ۲)\frac{dy}{dt} \\ &= (۲y + ۱)\frac{dy}{dt}.\end{aligned}$$

از رابطه‌ی بالا ملاحظه می‌کنیم که x'' در $y = -۲$، $y = -\frac{۱}{۲}$، و $y = ۱$ تغییر علامت می‌دهد. این اطلاعات در مورد تغییر علامت y'' را به خط فاز اضافه می‌کنیم.

۵ نمره



دسته‌ای از منحنی‌های جواب را در صفحه‌ی yt رسم می‌کنیم. خطوط افقی $y = -2$، $y = -\frac{1}{2}$، و $y = 1$ صفحه را به سه نوار افقی افراز می‌کند که در آن‌ها علامت‌های y' و y'' را می‌دانیم. اطلاعات مربوط به علامت‌های y' و y'' مشخص می‌کند که منحنی جواب در چه قسمت‌هایی از نوار صعودی یا نزولی است و تقعر آن به بالا یا پایین است.



۵ نمره