سوال یک و پاسخ آن

مطلوبست محاسبه‌ی تبدیل لاپلاس زیر

$$f(x)=\frac{e^x\sin(x-۲)}{x-۲}$$

حل چون

$$\left|\frac{\sin(x-۲)}{x-۲}\right|=\frac{|\sin(x-۲)|}{|x-۲|}\leq\frac{|x-۲|}{|x-۲|}=۱$$

بنابراین تابع $f(x)=\dfrac{\sin(x-۲)}{x-۲}$ کراندار و در نتیجه از مرتبه‌ی نمایی است. از طرف دیگر چون $\lim\limits_{x\to ۲}\dfrac{\sin(x-۲)}{x-۲}=۱$، تابع f در $[۰,+\infty]$ پیوسته است (نقطه $x=۲$ ناپیوستگی قابل رفع است، کافی است $f(۲)=۱$ تعریف شود.) با توجه به سری مک‌لورن $\sin x=\sum\limits_{n=۰}^{+\infty}\dfrac{(-۱)^n}{(۲n+۱)!}x^{۲n+۱}$ داریم

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}\left[\frac{\sin(x-۲)}{x-۲}\right] &= \mathscr{L}\left[\frac{۱}{x-۲}\sum_{n=۰}^{+\infty}\frac{(-۱)^n}{(۲n+۱)!}(x-۲)^{۲n+۱}\right]\\
&= \mathscr{L}\left[\sum_{n=۰}^{+\infty}\frac{(-۱)^n}{(۲n+۱)!}(x-۲)^{۲n}\right]\\
&= \sum_{n=۰}^{+\infty}\frac{(-۱)^n}{(۲n+۱)!}\mathscr{L}\left[(x-۲)^{۲n}\right]\\
&= \sum_{n=۰}^{+\infty}\frac{(-۱)^n}{(۲n+۱)!}\mathscr{L}\left[\sum_{k=۰}^{۲n}\binom{۲n}{k}۲^{۲n-k}x^k\right]\\
&= \sum_{n=۰}^{+\infty}\frac{(-۱)^n}{(۲n+۱)!}\sum_{k=۰}^{۲n}\binom{۲n}{k}۲^{۲n-k}\mathscr{L}\left[x^k\right]\\
&= \sum_{n=۰}^{+\infty}\sum_{k=۰}^{۲n}\frac{(-۱)^n\binom{۲n}{k}۲^{۲n-k}k!}{(۲n+۱)!}\frac{۱}{s^{k+۱}}.
\end{aligned}$$

بنابراین با توجه به فرمول $\mathscr{L}\left[e^{ax}f(x)\right]=F(s-a)$ داریم

$$\mathscr{L}\left[e^x\frac{\sin(x-۲)}{x-۲}\right]=\sum_{n=۰}^{+\infty}\sum_{k=۰}^{۲n}\frac{(-۱)^n\binom{۲n}{k}۲^{۲n-k}k!}{(۲n+۱)!}\frac{۱}{(s-۱)^{k+۱}}.$$

سؤال ۲

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{(s+2)e^{-\pi s}}{s^2+4s+13}\right] =$$

$$= u_\pi(x)\,\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s+2}{s^2+4s+13}\right]\Bigg|_{x\to x-\pi}$$ ۵ نمره

$$= u_\pi(x)\,\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s+2}{(s+2)^2+9}\right]\Bigg|_{x\to x-\pi}$$ ۳ نمره

$$= u_\pi(x)\left\{e^{-2x}\,\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^2+9}\right]\right\}\Bigg|_{x\to x-\pi}$$ ۴ نمره

$$= u_\pi(x)\left\{e^{-2x}\cos 3x\right\}\Big|_{x\to x-\pi}$$ ۳ نمره

۲+۱

$$= u_\pi(x)\,e^{-2(x-\pi)}\cos 3(x-\pi)$$

$$= -u_\pi(x)\,e^{-2(x-\pi)}\cos 3x$$

سؤال ۳

$$L(y'')+2L(y')+L(y)=L(\delta(x))-L(\delta(x-2))$$ 1

$$L(y'')=s^2Y(s)-sy(0)-y'(0)$$ 1

$$L(y')=sY(s)-y(0)$$ 1

$$L(\delta(x))=e^{-0s}=1$$ 2

$$L(\delta(x-2))=e^{-2s}$$ 2

$$s^2Y(s)-\cancel{sy(0)}^{0}-\cancel{y'(0)}^{0}+2sY(s)-\cancel{2y(0)}^{0}+Y(s)=1-e^{-2s}$$ 1

$$Y(s)(s^2+2s+1)=1-e^{-2s}$$

$$Y(s)=\frac{1-e^{-2s}}{1+s^2+2s}=\frac{1-e^{-2s}}{(s+1)^2}$$ 1 1

$$y(x)=L^{-1}\left(\frac{1}{(s+1)^2}\right)-L^{-1}\left(\frac{e^{-2s}}{(s+1)^2}\right)=xe^{-x}-u_2(x)e^{-(x-2)}(x-2)$$ 1

$$L^{-1}\left(\frac{1}{(s+1)^2}\right)=e^{-x}x$$ 2

$$L^{-1}\left(\frac{e^{-2s}}{(1+s)^2}\right)=u_2(x)e^{-(x-2)}(x-2)$$ 2

$$y = xe^{x} - 2e^{x}\int_0^x e^{-t}y(t)\,dt = xe^{x} - 2\int_0^x e^{x-t}y(t)\,dt$$ ۳

$$= xe^{x} - 2\,e^{x} * y(x)$$

$$\Rightarrow Y(s) = \frac{1}{(s-1)^2} - 2\,\mathcal{L}(e^{x})\cdot\mathcal{L}(y(x))$$

$$\Rightarrow Y(s) = \frac{1}{(s-1)^2} - 2\,\frac{Y(s)}{s-1} \Rightarrow \left(1+\frac{2}{s-1}\right)Y(s) = \frac{1}{(s-1)^2}$$

$$\Rightarrow \frac{s+1}{s-1}\,Y(s) = \frac{1}{(s-1)^2} \Rightarrow Y(s) = \frac{1}{(s-1)(s+1)}$$ ۶

$$\Rightarrow Y(s) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-1} - \frac{1}{s+1}\right) = \frac{\frac{1}{2}}{s-1} - \frac{\frac{1}{2}}{s+1}$$

$$\Rightarrow y(x) = \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s-1}\right) - \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s+1}\right)$$ ۶

$$\Rightarrow \boxed{y(x) = \frac{1}{2}\left(e^{x} - e^{-x}\right)}$$

جمع = ۳ + ۶ + ۶ = ۱۵

سوال ۵)

$$2x^2y'' - xy' + (1+x)y = 0$$

نقطه $x=0$ نقطه غیر عادی معادله است و داریم

$$y'' \underbrace{- \frac{1}{2x}}_{p(x)} y' + \underbrace{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}\right)}_{q(x)} y = 0$$

$$xp(x) = \underbrace{-\frac{1}{2}}_{p_0}$$

$$x^2q(x) = \underbrace{\frac{1}{2}}_{q_0} + \underbrace{\frac{1}{2}}_{q_1} x$$

حال چون توابع $xp(x)$ و $x^2q(x)$ توابع تحلیلی اند بنابراین نقطه $x=0$ نقطه غیر عادی منظم معادله فوق است.

بنابراین معادله دارای جوابی به فرم $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r}$ می باشد.

معادله شاخص معادله فوق به صورت زیر می باشد

$$F(r) = r(r-1) + p_0 r + q_0 = r(r-1) - \frac{1}{2}r + \frac{1}{2}$$

$$= r^2 - \frac{3}{2}r + \frac{1}{2} = (r-1)(r-\frac{1}{2})$$

ریشه های معادله فوق عبارتند از

$$r_1 = 1 \quad , \quad r_2 = \frac{1}{2}$$

حال از رابطه بازگشتی زیر دنباله a_n را محاسبه می کنیم

$$F(n+r)a_n = -\sum_{k=0}^{n-1}\left[(r+k)p_{n-k} + q_{n-k}\right]a_k \qquad n=1,2,\dots$$

در رابطه بازگشتی فوق تمام جملات سمت راست ۰ هستند مگر جمله شامل $q_1 = \frac{1}{2}$ باشد در نتیجه داریم

$$(n+r-1)(n+r-\frac{1}{2})a_n = -\left[(r+n-1)p_1 + q_1\right]a_{n-1}$$

حال چون $p_1 = 0$ ، $q_1 = \frac{1}{2}$ داریم

$$(r+n-1)(r+n-\frac{1}{2})a_n = -\frac{1}{2}a_{n-1} \qquad n=1,2,\dots$$

$$a_n = \frac{-\frac{1}{2}a_{n-1}}{(r+n-1)(r+n-\frac{1}{2})} \xrightarrow{r=1} a_n = -\frac{2a_{n-1}}{2n(2n+1)} \quad \Big| \quad n=1,2,\dots$$

$$a_1 = -\frac{2}{3!}a_0 \qquad \xrightarrow{a_0=1} a_n = \frac{(-1)^n 2^n}{\;} \quad , \quad y = \sum a_n x^{n+1}$$

حل آزمون پایان‌ترم درس معادلات دیفرانسیل، نیمسال دوم ۹۸_۹۷

۱. با استفاده از روش مقدار ویژه - بردار ویژه جواب عمومی دستگاه معادله‌ی داده شده را تعیین کنید.

$$X' = \begin{pmatrix} ۳ & ۰ & ۱ \\ -۲ & ۵ & -۲ \\ -۱ & ۰ & ۱ \end{pmatrix} X$$

حل.

$$(A - rI) = \begin{pmatrix} ۳-r & ۰ & ۱ \\ -۲ & ۵-r & -۲ \\ -۱ & ۰ & ۱-r \end{pmatrix}$$

$$\det(A - rI) = (۵ - r)\det \begin{pmatrix} ۳-r & ۱ \\ -۱ & ۱-r \end{pmatrix} = (۵-r)(r-۲)^۲ = ۰$$

$$\Longrightarrow r_۱ = ۵, r_۲ = r_۳ = ۲$$

(۲ نمره)

$$r_۱ = ۵ \Longrightarrow (A-۵I)V^{(۱)} = \begin{pmatrix} -۲ & ۰ & ۱ \\ -۲ & ۰ & -۲ \\ -۱ & ۰ & -۴ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_۱ \\ v_۲ \\ v_۳ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ۰ \\ ۰ \\ ۰ \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} -۲v_۱ + v_۳ = ۰ \\ -۲v_۱ - ۲v_۳ = ۰ \\ -v_۱ - ۴v_۳ = ۰ \end{cases}$$

$$v_۱ = v_۳ = ۰ \Longrightarrow X^{(۱)} = e^{۵t} \begin{pmatrix} ۰ \\ ۱ \\ ۰ \end{pmatrix}$$

(۴ نمره)

$$r_۲ = ۲ \Longrightarrow (A-۲I)V^{(۲)} = \begin{pmatrix} ۱ & ۰ & ۱ \\ -۲ & ۳ & -۲ \\ -۱ & ۰ & -۱ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_۱ \\ v_۲ \\ v_۳ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ۰ \\ ۰ \\ ۰ \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} v_۱ + v_۳ = ۰ \\ -۲v_۱ + ۳v_۲ - ۲v_۳ = ۰ \\ -v_۱ - v_۳ = ۰ \end{cases}$$

$$v_{۱}=-v_{۳},v_{۲}=\frac{۲}{۳}(v_{۱}+v_{۳})=۰\Longrightarrow X^{(۲)}=e^{۲t}\begin{pmatrix}۱\\۰\\-۱\end{pmatrix}$$

(۴ نمره)

$$r_{۲}=۲\Longrightarrow(A-۲I)^{۲}V^{(۳)}=\begin{pmatrix}۰&۰&۰\\-۶&۹&-۶\\۰&۰&۰\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v_{۱}\\v_{۲}\\v_{۳}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}۰\\۰\\۰\end{pmatrix}\Longrightarrow\left\{-۶v_{۱}+۹v_{۲}-۶v_{۳}=۰\right.$$

$$v_{۱}=۰,v_{۳}=۱\Longrightarrow v_{۲}=\frac{۲}{۳}\Longrightarrow X^{(۳)}=e^{۲t}\begin{pmatrix}۱&۰&۰\\۰&۱&۰\\۰&۰&۱\end{pmatrix}\begin{pmatrix}۰\\\frac{۲}{۳}\\۱\end{pmatrix}+e^{۲t}t\begin{pmatrix}۱&۰&۱\\-۲&۳&-۲\\-۱&۰&-۱\end{pmatrix}\begin{pmatrix}۰\\\frac{۲}{۳}\\۱\end{pmatrix}$$

$$X^{(۳)}=e^{۲t}\begin{pmatrix}t\\\frac{۲}{۳}\\۱-t\end{pmatrix}$$

(۴ نمره)

$$X(t)=C_{۱}e^{۵t}\begin{pmatrix}۰\\۱\\۰\end{pmatrix}+C_{۲}e^{۲t}\begin{pmatrix}۱\\۰\\-۱\end{pmatrix}+C_{۳}e^{۲t}\begin{pmatrix}t\\\frac{۲}{۳}\\۱-t\end{pmatrix}$$

(۱ نمره)

پاسخ سئوال ۷

$X' = \begin{pmatrix}-1 & 1\\ -2 & 1\end{pmatrix} X + \begin{pmatrix}0\\ \cos t\end{pmatrix} \qquad P_A(r) = \det(A-r) = \begin{vmatrix}-1-r & 1\\ -2 & 1-r\end{vmatrix}$

$= r^2+1 = 0 \Rightarrow r = \pm i \qquad \alpha = 0,\ \beta = 1$

۲ نمره

$(A-iV) = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix}-1-i & 1\\ -2 & 1-i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v_1\\ v_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases}-(1+i)v_1 + v_2 = 0\\ -2v_1 + (1-i)v_2 = 0\end{cases}$

معادله دوم $(1-i)$ برابر اولی است پس اضافی است

$\Rightarrow v_2 = (1+i)v_1 \quad v_1 \neq 0 \Rightarrow V = \begin{pmatrix}v_1\\ (1+i)v_1\end{pmatrix} = v_1\begin{pmatrix}1\\ 1+i\end{pmatrix} \qquad V_1 = \begin{pmatrix}1\\ 1+i\end{pmatrix}$

بردار ویژه مختلط متناظر

$V = \begin{pmatrix}1\\ 1+i\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix} + i\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix} = \underbrace{V_1}_{\text{حقیقی}} + i\underbrace{V_2}_{\text{موهومی}}$

۳ نمره

جواب مختلط $X(t) = e^{it}\begin{pmatrix}1\\ 1+i\end{pmatrix} = (\cos t + i\sin t)\left(\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix} + i\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}\cos t\\ \cos t - \sin t\end{pmatrix} + i\begin{pmatrix}\sin t\\ \cos t + \sin t\end{pmatrix}$

$\Rightarrow X_1(t) = \begin{pmatrix}\cos t\\ \cos t - \sin t\end{pmatrix}, \quad X_2(t) = \begin{pmatrix}\sin t\\ \cos t + \sin t\end{pmatrix}$

جواب های مستقل خطی حقیقی معادله همگن متناظر

۵ نمره

$\psi(t) = \begin{pmatrix}\cos t & \sin t\\ \cos t - \sin t & \cos t + \sin t\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}\cos t & \sin t\\ \cos t - \sin t & \cos t + \sin t\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_1'\\ u_2'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ \cos t\end{pmatrix}$

$\cancel{X_p = \psi(t)\, U(t)}$

$X_p = \psi(t)\, U(t)$

$\Rightarrow \begin{cases}\cos t\, u_1' + \sin t\, u_2' = 0 & (1)\\ (\cos t - \sin t)u_1' + (\cos t + \sin t)u_2' = \cos t & (2)\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\cos t\, u_1' + \sin t\, u_2' = 0\\ -\sin t\, u_1' + \cos t\, u_2' = \cos t\end{cases}$

۵ نمره

از $u_1' = \dfrac{\begin{vmatrix}0 & \sin t\\ \cos t & \cos t\end{vmatrix}}{1} = \begin{vmatrix}0 & \sin t\\ \cos t & \cos t\end{vmatrix} = -\sin t\cos t = -\frac{1}{2}\sin 2t \Rightarrow \boxed{u_1 = \frac{1}{4}\cos 2t}$

$u_2' = \dfrac{\begin{vmatrix}\cos t & 0\\ -\sin t & \cos t\end{vmatrix}}{1} = \cos^2 t \Rightarrow u_2' = \dfrac{1+\cos 2t}{2} \Rightarrow \boxed{u_2(t) = \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\sin 2t}$

$X(t) = c_1 X_1(t) + c_2 X_2(t) + X_p$