

(۱) فرض کنید $p(x)$ چندجمله‌ای درونیاب یک تابع در نقاط $x = -1, 0, 1$ باشد. نقطه $(3, 6)$ را به این نقاط می‌افزاییم. اگر $q(x)$ چندجمله‌ای درونیاب در نقاط $x = -1, 0, 1, 3$ باشد آنگاه با فرض $p(3) = 5$ ، مقدار $|p(2) - q(2)|$ را به دست آورید.

(۲) اگر $x_2 = x_1 + h$ ، $x_1 = x_0 + h$ و $h > 0$ در این صورت الف) نشان دهید

$$\max_{0 \leq x \leq x_2} |(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)| = \frac{2\sqrt{3}}{9} h^3.$$

ب) اگر $f(x) = \tan \frac{\pi x}{3}$ آنگاه حداکثر خطای درونیابی خطی و درونیابی درجه دوم برای تابع f در بازه $[-1, 1]$ را به دست آورید.

(۳) طول گام تقسیم‌بندی را به گونه‌ای بیابید که خطای مطلق درونیابی قطعه‌ای خطی برای توابع زیر حداکثر $\frac{1}{4} \times 10^{-6}$ باشد.

الف) تابع $J_0(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(x \sin t) dt$ در بازه $[-1, 1]$.

ب) تابع $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}(\cos x + \sin x)$ در بازه $[-1, 1]$.

(۴) ثابت کنید فرمول مشتق‌گیری زیر از مرتبه خطای برشی $O(h^2)$ می‌باشد.

$$f'(x_0) \cong \frac{1}{2h} [-3f(x_0) + 4f(x_0 + h) - f(x_0 + 2h)].$$

(۵) بازه $[1, 10]$ را به چند زیربازه مساوی تقسیم کنیم به گونه‌ای که خطای روش سیمسون مرکب برای یافتن تقریبی از $\int_1^{10} 2(x \ln x - \ln x) dx$ حداکثر $\frac{1}{4} \times 10^{-5}$ شود.

(۶) مقادیر A و B و C را به گونه‌ای بیابید که قاعده انتگرال‌گیری زیر برای تمام توابعی به شکل $d_1 + d_2 \sin x + d_3 \cos x$ که در آن $d_1, d_2, d_3 \in \mathbb{R}$ دقیق باشد.

$$\int_0^{\pi} f(x) dx = A f(0) + B f\left(\frac{\pi}{2}\right) + C f(\pi).$$

(۷) با استفاده از روش گاوس دو نقطه‌ای مقدار $\int_0^2 \cosh(x-1)^2 dt$ را تقریب بزنید.

(۸) الف) جدول زیر را برای تابع $y = f(x)$ در نظر بگیرید. اگر مقدار $\int_0^{1/2} f(x) dt$ با استفاده از روش سیمپسون و به ازای $h = 0/3$ برابر با $0/46$ و به ازای $h = 0/6$ برابر با $0/52$ باشد، مقادیر a و b را بیابید.

x_k	y_k
0	a
0/3	1-b
0/6	b
0/9	1-b
1/2	a

۹) مرتبه‌ی خطای فرمول مشتق‌گیری عددی زیر را به کمک بسط تیلور به دست آورید و سپس مقدار $f'(0/6)$ را با استفاده از داده‌های جدول سوال قبل بیابید.

$$f'(x) = \frac{f(x_0) - f(x_0 - h)}{h}$$

۱۰) الف) تعداد تقسیمات بازه‌ی انتگرالگیری به زیربازه‌هایی با طول مساوی را چنان بیابید که خطای محاسبه‌ی تقریبی $\int_1^4 e^{-x^2} dx$ با روش ذوزنقه‌ای کمتر از 10^{-4} باشد.
ب) با n به دست آمده از بند (الف)، مقدار $\int_1^4 e^{-x^2} dx$ را با استفاده از روش ذوزنقه‌ای محاسبه نمایید.

۱۱) در محاسبه مقدار تقریبی انتگرال زیر با استفاده از روش رامبرگ، مقدار $T_{\pi/6}$ را با شرط اینکه محاسبات تا پنج رقم اعشار گرد می‌شوند محاسبه نمایید.

$$\int_{\pi/4}^{\pi/2} \csc x \, dx$$

۱۲) الف) تجزیه LU ماتریس زیر را در صورت وجود بیابید.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 1 \\ 1 & 3 & 5 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

ب) با چه تغییری در ماتریس قسمت (الف)، می‌توان از همگرایی روش ژاکوبی برای حل دستگاه $AX = b$ با بردار سمت راست $b = [-1 \ 0 \ 2]^T$ مطمئن بود.

ج) دو تکرار از روش گاوس سیدل را برای حل دستگاه قسمت (ب) با نقطه شروع $X^{(0)} = (1 \ 2 \ -1)^T$ محاسبه نمایید و سپس مقدار $\|X^{(2)} - X^{(1)}\|_{\infty}$ را بیابید.

د) دستگاه $AX = b$ را با استفاده از روش حذفی با محورگیری جزئی حل کنید.

۱۲) با فرض $h = 0/1$ ، با استفاده از روش رونگه کوتای مرتبه دو و چهار، تقریبی از $y(1/2)$ برای مساله مقدار اولیه‌ی زیر بیابید.

$$y' = -ty^2 - 1, \quad y(1) = 2.$$