باسمه تعالی

# گزیده‌ی مسائل آمار و احتمال مهندسی

## نیمسال اول سال تحصیلی ۹۷-۹۸
## (سری اول - احتمال)

**دکتر امیر نادری**

دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه صنعتی اصفهان

---

۱. اگر پیشامدهای $A$ و $B$ مستقل با احتمال مثبت باشند، نشان دهید $A \cap B \neq \emptyset$.

۲. گزاره‌های زیر را اثبات و یا با یک مثال نقض کنید:

الف) اگر $E$ مستقل از $F$ و $E$ مستقل از $G$ باشد، آن‌گاه $E$ مستقل از $F \cup G$ است.

ب) اگر $E$ مستقل از $F$ و $E$ مستقل از $G$ باشد و $F \cap G = \emptyset$، آن‌گاه $E$ مستقل از $F \cup G$ است.

ج) اگر $E$ مستقل از $F$ و $F$ مستقل از $G$ و $E$ مستقل از $F \cap G$ باشد، آن‌گاه $G$ مستقل از $E \cap F$ است.

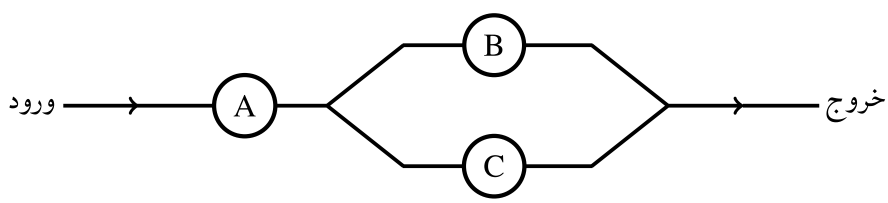
۳. فرض کنید $A$ و $B$ دو پیشامد مستقل باشند به طوری که احتمال آن‌که هر دو پیشامد اتفاق بیفتد برابر $\frac{۱}{۸}$ و احتمال آن‌که هیچ یک از دو پیشامد اتفاق نیفتد برابر $\frac{۳}{۸}$ باشد. احتمال پیشامد $A$ و احتمال پیشامد $B$ را بیابید.

۴. هرگاه $P(A) = \frac{۱}{۴}$، $P(B) = \frac{۲}{۳}$ و $A$ و $B$ مستقل باشند، $P((A \cup B)^c)$، $P(A \cap B^c)$، $P(A|A \cup B)$ و $P(A|A \cap B)$ را به دست آورید.

۵. فرض کنید $S$ یک فضای نمونه باشد و $A \subseteq S$ و $B \subseteq S$. اگر $P(A) > ۰$، نشان دهید:

الف) $B \subset A$ نتیجه می‌دهد: $P(B|A) = \dfrac{P(B)}{P(A)}$ ب) $A \subset B$ نتیجه می‌دهد: $P(B|A) = ۱$

۶. یک سیستم شامل ۳ جزء است که مانند شکل زیر به یک‌دیگر متصل شده‌اند:




سیستم کار می‌کند اگر $A$ و یکی از اجزای $B$ یا $C$ کار کنند. هرگاه اجزاء مستقل از یک‌دیگر کار کنند و احتمال کار کردن هر جزء برابر با ۰٫۹ باشد، احتمال این‌که سیستم کار کند را به دست آورید.

۷. کیسه ۱ شامل ۳ توپ قرمز و ۷ توپ آبی و کیسه ۲ شامل ۶ توپ قرمز و ۴ توپ آبی است. یک کیسه به طور تصادفی انتخاب و یک توپ از آن برداشته می‌شود.

الف) احتمال آن‌که توپ قرمز باشد را بیابید.

ب) با فرض این‌که توپ برداشته شده قرمز باشد، احتمال شرطی‌که آن توپ از کیسه‌ی دوم باشد را به دست آورید.

۸. فرض کنید $x = ۱,۲,۳,۴,۵ \quad p(x) = \frac{x}{۱۵}$ تابع احتمال $X$ باشد. $P(۱ \leq X \leq ۲)$، $P(\frac{۱}{۲} < X < \frac{۵}{۲})$ و $P(X = ۱ \text{ یا } X = ۲)$ را محاسبه کنید.

۹. فرض کنید
$$f(x) = \begin{cases} \frac{۱}{x^۲}, & ۱ < x < \infty \\ ۰, & \text{سایر نقاط} \end{cases}$$
تابع چگالی احتمال $X$ باشد. اگر $A_۱ = (۱,۲)$ و $A_۲ = (۴,۵)$، آنگاه $P(A_۱ \cup A_۲)$ و $P(A_۱ \cap A_۲)$ را به دست آورید.

۱۰. هرگاه $X$ دارای تابع احتمال زیر باشد، مقدار $c$ را بیابید.
$$p(x) = \begin{cases} c\left(\frac{۲}{۳}\right)^x, & x = ۱,۲,۳,\cdots \\ ۰, & \text{سایر نقاط} \end{cases}$$

۱۱. هرگاه $X$ یک متغیر تصادفی با تابع چگالی احتمال زیر باشد، مقدار $c$ را بیابید.
$$f(x) = \begin{cases} c\,(۱ - x^۲), & -۱ < x < ۱ \\ ۰, & \text{سایر نقاط} \end{cases}$$

۱۲. هرگاه متغیر تصادفی $X$ دارای تابع توزیع زیر باشد، تابع احتمال $X$ را بیابید.
$$F(x) = \begin{cases} ۰, & x < -۱ \\ \frac{۱}{۳}, & -۱ \leq x < ۰ \\ \frac{۲}{۳}, & ۰ \leq x < ۱ \\ ۱, & x \geq ۱ \end{cases}$$

۱۳. فرض کنید $X$ دارای تابع چگالی احتمال
$$f(x) = \begin{cases} ۱ - |x - ۱|, & ۰ \leq x \leq ۲ \\ ۰, & \text{سایر نقاط} \end{cases}$$
باشد.

الف) تابع توزیع $X$ را بیابید. ب) $P(\frac{۱}{۲} < X < \frac{۳}{۲})$ را به دست آورید.

۱۴. برای هر یک از توابع چگالی احتمال $X$ تعریف شده در زیر، $P(|X| < ۱)$ و $P(X^۲ < ۹)$ را محاسبه کنید.

الف)
$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^۲}{۱۸}, & -۳ < x < ۳ \\ ۰, & \text{سایر نقاط} \end{cases}$$

ب)
$$f(x) = \begin{cases} \frac{x+۲}{۱۸}, & -۲ < x < ۴ \\ ۰, & \text{سایر نقاط} \end{cases}$$

۱۵. فرض کنید
$$f(x) = \begin{cases} \frac{۴ - x}{۱۶}, & -۲ < x < ۲ \\ ۰, & \text{سایر نقاط} \end{cases}$$
تابع چگالی احتمال متغیر تصادفی $X$ باشد.

الف) اگر $Y=|X|$، $P(Y\leq 1)$ را محاسبه کنید. ب) اگر $Z=X^2$، $P(Z\leq \frac{1}{4})$ را به دست آورید.

۱۶. فرض کنید $X$ دارای تابع احتمال $p(x)$ تعریف شده در جدول زیر باشد:

| $x$ | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |
|---|---|---|---|---|
| $p(x)$ | ۰/۷ | ۰/۲ | ۰/۰۶ | ۰/۰۴ |

$E(X)$ و $E\left(\frac{1}{X}\right)$ را محاسبه کنید. آیا $E\left(\frac{1}{X}\right)$ با $\frac{1}{E(X)}$ برابر است؟

۱۷. اگر $f(x)$ تابع چگالی احتمال $X$ باشد، میانگین و واریانس $X$ را در هریک از حالات زیر بیابید:

الف) $f(x)=\begin{cases} 6x(1-x), & 0<x<1 \\ 0, & \text{سایر نقاط} \end{cases}$ ب) $f(x)=\begin{cases} \frac{2}{x^3}, & 1<x<\infty \\ 0, & \text{سایر نقاط} \end{cases}$

۱۸. فرض کنید $f(x)=\begin{cases} 2x, & 0<x<1 \\ 0, & \text{سایر نقاط} \end{cases}$ تابع چگالی احتمال $X$ باشد.

الف) $E(\sqrt{X})$ را بیابید.

ب) تابع توزیع و تابع چگالی احتمال $Y=\sqrt{X}$ را به دست آورید.

ج) $E(Y)$ را بیابید و جواب خود را با جواب قسمت (الف) مقایسه کنید.

۱۹. فرض کنید $X$ دارای تابع احتمال $p(x)$ باشد که در نقاط ۱−، ۰ و ۱ مثبت و در سایر نقاط ۰ است.

الف) اگر $p(0)=\frac{1}{2}$، $E(X^2)$ را بیابید.

ب) اگر $p(0)=\frac{1}{2}$ و $E(X)=\frac{1}{6}$، $p(-1)$ و $p(1)$ را بیابید.

۲۰. متغیر تصادفی $X$ را در نظر بگیرید. هرگاه به ازای تمام مقادیر $a$، $E((X-a)^2)$ موجود باشد، نشان دهید $E((X-a)^2)$ مینیمم خود را در $a=E(X)$ اختیار می‌کند.

۲۱. اگر $E(X)=1$ و $Var(X)=5$، محاسبه کنید:

الف) $E((2+X)^2)$ ب) $Var(4+3X)$

۲۲. هرگاه $X$ دارای توزیع $U(2,10)$ باشد، میانگین $X$، واریانس $X$ و $E((X+2)^3)$ را بیابید.

۲۳. هرگاه $X$ دارای توزیع پواسون با پارامتر $\lambda$ باشد و $Y=\frac{1}{X+1}$، تابع احتمال $Y$ را به دست آورید و با استفاده از آن میانگین $Y$ را بیابید.

۲۴. فرض کنید $X$ دارای توزیع دوجمله‌ای با پارامترهای $n$ و $p$ و میانگین ۳ و واریانس ۲ باشد. $P(X\leq 1)$ را به دست آورید.

۲۵. فرض کنید $X$ دارای توزیع دوجمله‌ای با پارامترهای $n=2$ و $p=\alpha$ و $Y$ دارای توزیع دوجمله‌ای با پارامترهای $n=4$ و $p=\alpha$ باشد و $P(X\geq 1)=\frac{5}{9}$. مقدار $P(Y\geq 1)$ را محاسبه کنید.

۲۶. فرض کنید $X$ دارای توزیع دوجمله‌ای با پارامترهای $n = ۵۰$ و $p = \frac{۱}{۲۵}$ باشد. $P(X \leq ۱)$ را با استفاده از تقریب پواسون به دست آورید.

۲۷. هرگاه $X$ دارای توزیع پواسون باشد به نحوی که $P(X = ۱) = P(X = ۲)$، $P(X = ۴)$ را به دست آورید.

۲۸. هرگاه $X$ دارای توزیع $N(۷۵, ۱۰۰)$ باشد، مقادیر $P(۷۰ < X < ۱۰۰)$ و $P(X < ۶۰)$ را به دست آورید.

۲۹. هرگاه $X$ دارای توزیع $N(\mu, \sigma^۲)$ باشد، مقدار $a$ را به گونه‌ای بیابید که $P\left(\left|\frac{X - \mu}{\sigma}\right| < a\right) = ۰/۹$.

۳۰. هرگاه $X$ دارای توزیع $N(\mu, \sigma^۲)$ باشد به گونه‌ای که $P(X < ۹۴) = ۰/۹۵$ و $P(X < ۸۹) = ۰/۹$، مقادیر $\mu$ و $\sigma^۲$ را بیابید.

۳۱. طول عمر موتورهای ساخته شده در یک کارخانه (بر حسب سال) دارای توزیع نرمال با میانگین $\mu = ۱۰$ و انحراف معیار $\sigma = ۲$ است. اگر کارخانه موتورهای خود را به مدت ۵ سال ضمانت کرده باشد، این کارخانه چند درصد موتورهایی را که فروخته است باید تعویض کند؟ مدت ضمانت را چه اندازه تعیین کند تا فقط ۵ درصد از موتورهای فروخته شده تعویض گردند؟

۳۲. اگر $X$ دارای توزیع $N(۰, \sigma^۲)$ باشد، $\sigma^۲$ را به نحوی بیابید که $P(X^۲ < ۱) = ۰/۸$.

۳۳. فرض کنید متغیرهای تصادفی $X$ و $Y$ دارای تابع احتمال توأم $p(x,y)$ تعریف شده در جدول زیر باشند:

$x$

| | $p(x,y)$ | ۰ | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | ۰ | ۰/۰۵ | ۰/۱ | ۰/۱ | ۰/۰۴ | ۰/۰۱ |
| $y$ | ۱ | ۰/۰۵ | ۰/۲ | ۰/۱ | ۰/۰۳ | ۰/۰۲ |
| | ۲ | ۰/۰۵ | ۰/۱ | ۰/۰۵ | ۰/۰۵ | ۰/۰۵ |

الف) $P(X > ۲, Y > ۱)$ و $P(Y \leq ۱)$ را محاسبه کنید.

ب) توابع احتمال کناری $X$ و $Y$ را بیابید.

ج) ضریب همبستگی $X$ و $Y$ را به دست آورید.

د) میانگین و واریانس شرطی $Y$ به شرط $X = ۱$ را بیابید.

۳۴. فرض کنید متغیرهای تصادفی $X$ و $Y$ دارای تابع احتمال توأم $p(x,y)$ تعریف شده در جدول زیر باشند:

$y$

| | $p(x,y)$ | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |
|---|---|---|---|---|---|
| | $-۱$ | $\frac{۱}{۱۶}$ | $\frac{۲}{۱۶}$ | $\frac{۱}{۱۶}$ | ۰ |
| $x$ | ۰ | $\frac{۱}{۱۶}$ | ۰ | $\frac{۱}{۱۶}$ | $\frac{۲}{۱۶}$ |
| | ۱ | $\frac{۲}{۱۶}$ | $\frac{۱}{۱۶}$ | $\frac{۲}{۱۶}$ | $\frac{۳}{۱۶}$ |

قرار دهید $Z = X + Y$ و $W = X^۲$.

الف) تابع احتمال $Z$ را بیابید. ب) تابع احتمال توأم $Z$ و $W$ را بیابید.

۳۵. هرگاه X و Y متغیرهای تصادفی پیوسته با تابع چگالی احتمال توأم زیر باشند:

$$f(x,y)=\begin{cases} ۱-\frac{x}{۳}-\frac{y}{۳}, & ۰\le x\le ۲\ ,\ ۰\le y\le ۱ \\ ۰, & \text{سایر نقاط} \end{cases}$$

الف) توابع احتمال کناری $X$ و $Y$ را بیابید.

ب) $P(۱\le X\le ۲\ ,\ ۰\le Y\le ۰/۵)$ را به دست آورید.

ج) تابع توزیع $X$ را بیابید و با استفاده از آن $P(۰/۵\le X\le ۱/۵)$ را محاسبه کنید.

۳۶. فرض کنید:

$$f(x|y)=\begin{cases} \frac{c_۱ x}{y^۲}, & ۰<x<y \\ & ۰<y<۱ \\ ۰, & \text{سایر نقاط} \end{cases} \quad \text{و} \quad f_Y(y)=\begin{cases} c_۲ y^۴, & ۰<y<۱ \\ ۰, & \text{سایر نقاط} \end{cases}$$

الف) $c_۱$ و $c_۲$ را بیابید. ب) تابع چگالی احتمال توأم $X$ و $Y$ را بیابید.

ج) $P\left(\frac{۱}{۴}<X<\frac{۱}{۲}\,\middle|\,Y=\frac{۵}{۸}\right)$ را محاسبه کنید. د) $P\left(\frac{۱}{۴}<X<\frac{۱}{۲}\right)$ را به دست آورید.

۳۷. فرض کنید $X$ و $Y$ دارای تابع چگالی احتمال توأم زیر باشند:

$$f(x,y)=\begin{cases} x+y, & ۰<x<۱\ ,\ ۰<y<۱ \\ ۰, & \text{سایر نقاط} \end{cases}$$

ضریب همبستگی $X$ و $Y$ را بیابید.

۳۸. فرض کنید $X$ یک متغیر تصادفی با واریانس مثبت باشد. هرگاه $Y=۳X$، ضریب همبستگی $X$ و $Y$ را بیابید.

۳۹. فرض کنید $X$ و $Y$ دارای تابع چگالی احتمال توأم زیر باشند:

$$f(x,y)=\begin{cases} ۲, & ۰<x<y<۱ \\ ۰, & \text{سایر نقاط} \end{cases}$$

الف) میانگین و واریانس شرطی $X$ به شرط $Y=y$ را بیابید.

ب) $P\left(۰<X<\frac{۱}{۲}\,\middle|\,Y=\frac{۳}{۴}\right)$ را محاسبه کنید. ج) $P\left(۰<X<\frac{۱}{۲}\right)$ را به دست آورید.

۴۰. نشان دهید متغیرهای تصادفی گسسته $X$ و $Y$ با تابع احتمال توأم زیر مستقل هستند.

$$p(x,y)=\frac{۱}{۱۶},\quad x=۱,۲,۳,۴\quad,\quad y=۱,۲,۳,۴$$

۴۱. نشان دهید متغیرهای تصادفی $X$ و $Y$ با تابع چگالی احتمال توأم زیر مستقل هستند.

$$f(x,y)=\begin{cases} ۱۲xy(۱-y), & ۰<x<۱\ ,\ ۰<y<۱ \\ ۰, & \text{سایر نقاط} \end{cases}$$

۴۲. هرگاه $X$ و $Y$ و $Z$ متغیرهای تصادفی مستقل و هم‌توزیع هریک دارای تابع چگالی احتمال

$$f(x)=\begin{cases} \frac{1}{x^2}, & 1<x<\infty \\ 0, & \text{سایر نقاط} \end{cases}$$

باشند، احتمال این‌که حداکثر یکی از این متغیرهای تصادفی دارای مقدار بیشتر از ۴ باشد را بیابید.

۴۳. اگر $X$ و $Y$ یک نمونه‌ی تصادفی از توزیعی با تابع چگالی احتمال $f(x)=\begin{cases} 2x, & 0<x<1 \\ 0, & \text{سایر نقاط} \end{cases}$ باشد، $P(X<Y \mid X<2Y)$ را محاسبه کنید.

۴۴. فرض کنید متغیرهای تصادفی $X$ و $Y$ دارای تابع چگالی احتمال توأم زیر باشند:

$$f(x,y)=\begin{cases} cx, & 0\le y\le x\le 1 \\ 0, & \text{سایر نقاط} \end{cases}$$

الف) $c$ را بیابید.
ب) $P\left(Y>\frac{1}{2}\right)$ را محاسبه کنید.
ج) توابع چگالی احتمال کناری $X$ و $Y$ را بیابید.
د) توزیع $Y$ به شرط $X=\frac{1}{2}$ را بیابید.
هـ) $P(Y<\frac{1}{4} \mid X=\frac{1}{2})$ را به دست آورید.

۴۵. متغیرهای تصادفی $X$ و $Y$ دارای تابع احتمال توأم $p(x,y)$ تعریف شده در زیر هستند:

| | $p(x,y)$ | $x$: ۳ | ۴ | ۶ | ۷ |
|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | ۵ | $\frac{1}{4}$ | $0$ | $0$ | $\frac{1}{4}$ |
| | ۹ | $0$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{4}$ | $0$ |

الف) کواریانس $X$ و $Y$ را بیابید.
ب) آیا $X$ و $Y$ مستقل هستند؟
ج) چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

۴۶. فرض کنید متغیرهای تصادفی $X$ و $Y$ دارای تابع احتمال توأم زیر باشند:

$$p(x,y)=\begin{cases} \frac{x+y}{21}, & x=1,2,3\ ,\ \ y=1,2 \\ 0, & \text{سایر نقاط} \end{cases}$$

الف) میانگین و واریانس شرطی $X$ به شرط $Y=1$ را بیابید.
ب) ضریب همبستگی $X$ و $Y$ را بیابید.

۴۷. هرگاه $X$ دارای توزیع دوجمله‌ای با پارامترهای $n=100$ و $p=\frac{1}{2}$ باشد، مقدار $P(X=50)$ را با استفاده از قضیه‌ی حد مرکزی به طور تقریبی به دست آورید.

۴۸. هرگاه $X_1$، $X_2$، ... ، $X_{10}$ یک نمونه‌ی تصادفی از توزیع پواسون با پارامتر ۱ باشد، $P\left(\sum_{i=1}^{10} X_i > 15\right)$ را با استفاده از قضیه‌ی حد مرکزی به طور تقریبی محاسبه کنید.

۴۹. هرگاه $X_1$، $X_2$، ... ، $X_{10}$ یک نمونه‌ی تصادفی از توزیع $U(0, 1)$ باشد، $P\left(\sum_{i=1}^{10} X_i > 7\right)$ را با استفاده از قضیه‌ی حد مرکزی به طور تقریبی محاسبه کنید.

۵۰. فرض کنید $X_1$، $X_2$، ... ، $X_{15}$ یک نمونه‌ی تصادفی از توزیعی با تابع چگالی احتمال

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2 , & 0 < x < 1 \\ 0 , & \text{سایر نقاط} \end{cases}$$

باشد. مقدار $P\left(9 < \sum_{i=1}^{15} X_i < 12\right)$ را با استفاده از قضیه‌ی حد مرکزی به طور تقریبی محاسبه کنید.