بسم اللّه الرحمن الرحیم

نظریه کلاسیک ناورداها

مصطفی عین اله زاده

دانشگاه صنعتی اصفهان

اسفند 1403

1- مفهوم ناوردا

ناوردا: کمیت یا فرمولی که توسط اعمال یا تغییرات مشخصی ثابت بماند.

تعریف دقیق‌تر ریاضی:

عمل گروه: یک عمل گروه G روی مجموعه‌ی X، یک نگاشت به صورت

$$G \times X \to X, \ \ (g, x) \mapsto g \cdot x$$

و دارای خواص زیر است:

$$\forall x \in X: \ \ 1_G \cdot x = x,$$
$$\forall g_1, g_2 \in G, \ \ x \in X: \ \ (g_1 g_2) \cdot x = g_1 \cdot (g_2 \cdot x).$$

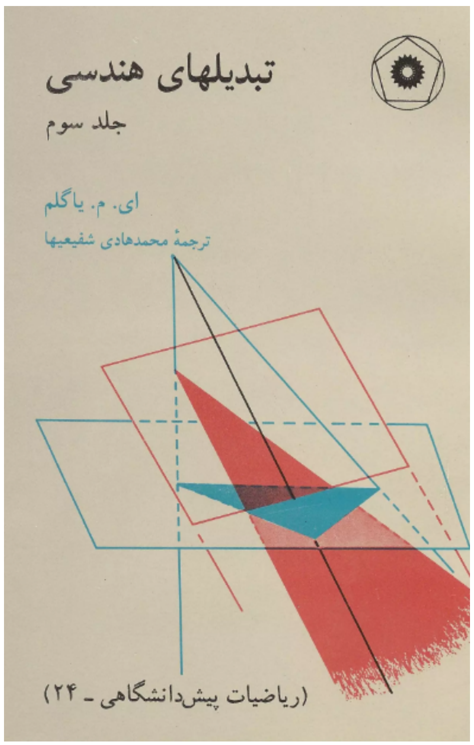
تابع ناوردا: فرض کنید یک عمل از گروه G روی فضای X داده شده است. تابع f روی X را یک *ناوردا* تحت این عمل می گوییم، هرگاه برای هر $x \in X$ و $g \in G$:

$$f(gx) = f(x).$$

ناورداها در همه جا: هندسه، جبر، ترکیبیات، فیزیک، ...

2- ناورداها در هندسه

هندسه چیست؟ (مقدمه سه جلد کتاب تبدیلات هندسی یاگلوم)



اکنون می‌توانیم یك هندسه را چنین تعریف کنیم: یك هندسه نظامی است که سر و کارش با آن ویژگیهایی از شکلهاست که بر اثر تبدیلهای یك‌گروه از تبدیلها تغییر نکنند. این تعریف تأکیدی است بر این‌که نه‌فقط یك هندسه، بلکه هندسه‌های زیادی وجود دارند؛ و برای به‌دست آوردن یك‌هندسه تنها نیاز به‌انتخاب یك گروه از تبدیلها داریم. هندسهٔ حرکات وهندسهٔ تشابهات دومورد از هندسه‌هایی هستند که در دبیرستان دیده‌ایم. درپیوست این‌کتاب نشان خواهیم دادکه هندسهٔ هذلولوی هم

می‌تواند با این تعبیر جدید به‌مثابهٔ یك‌هندسه نگریسته شود.

تعریف یك هندسه به‌صورت مطالعهٔ آن ویژگیهای شکلها که بر اثر تبدیلهای متعلق به‌یك گروه خاص عوض نمی‌شوند به‌ریاضیدان آلمانی ف. کلاین منسوب است. با اینکه این تعریف کلیترین تعریف نیست (برخی از زمینه‌های مهم هندسه را در بر نمی‌گیرد)، ثابت شده است که بسیار مفید بوده ونقش مهمی در بسط دانش داشته است. به‌ویژه مفهوم یك‌گروه از تبدیلها، اکنون یکی از مهمترین مفاهیم ریاضیات جدید شده است.*

مطالعه‌ی بیشتر:

Felix Klein - The Erlangen Program, 1872

I.M. Yaglom - Felix Klein and Sophus Lie: Evolution of the Idea of Symmetry in the Nineteenth Century, 1988

Felix Klein (1849-1925)

3- ناورداها در جبر

تغییر متغیرهای سادهی به فرم $x \to x + \lambda$ را در نظر بگیرید. اثر این تغییر متغیر روی یک چندجملهای درجه 2 به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} p(x) = x^2 + bx + c\ , \quad \Longrightarrow p(x+\lambda) &= (x+\lambda)^2 + b(x+\lambda) + c \\ &= x^2 + (b+2\lambda)x + \left(c + b\lambda + \lambda^2\right) \end{aligned}$$

بنابراین پیدا کردن یک ناوردا برای چندجملهایهای درجه 2، که تحت تغییر متغیر انتقال تغییر نکند، معادل با یافتن همه کمیت های $f(b,c)$ است که دارای خاصیت زیر باشد:

$$\forall \lambda,\ \ f(b,c) = f\left(b+\lambda, c + b\lambda + \lambda^2\right)$$

با اندکی محاسبه میتوانیم همهی این ناورداها را تعیین کنیم:

$$f(b,c) = F\left(b^2 - 4c\right),\ \ F \text{ تابع دلخواه}$$

بنابراین همه این ناورداها، توسط ناوردای آشنای $\Delta = b^2 - 4c$ تولید می شوند. در واقع فقط یک **ناوردای پایه** داریم!

حالت کلی‌تر:

تعیین کمیت های وابسته به فرم های درجه d با تعداد n متغیر که تحت زیرگروه مشخصی از تغییر متغیرهای خطی، ناوردا باشد.

- **فرم درجه** d: چندجمله‌ای همگن درجه d
- $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$: گروه ماتریس‌های وارون‌پذیر $n \times n$ با درایه‌های در میدان $\mathbb{F}$ (تغییر متغیرهای خطی n بعدی)
- $\mathrm{SL}_n(\mathbb{F})$: گروه ماتریس‌های $n \times n$ با دترمینان 1 با درایه‌های در میدان $\mathbb{F}$ (تغییر متغیرهای خطی n بعدی حافظ حجم)

در نتیجه به عنوان مثال یک تغییر متغیر در $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ به صورت زیر است:

$$x \to ax + by,\ \ y \to cx + dy,\ \ \det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = 1,\ \ a, b, c, d \in \mathbb{R}.$$

مثال: ناورداهای پایه‌ی فرم‌های دو متغیره برای تغییر متغیرهای $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$:

$$F_2(x,y) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2,$$
$$\Delta = B^2 - AC$$

$$F_3(x,y) = Ax^3 + 3Bx^2y + 3Cxy^2 + Dy^3,$$
$$\Delta = 3B^2C^2 + 6ABCD - 4B^3D - 4C^3A - A^2D^2$$

$$F_4(x,y) = Ax^4 + 4Bx^3y + 6Cx^2y^2 + 4Dxy^3 + Ey^4,$$
$$i = AE - 4BD + 3C^2,$$
$$j = ACE + 2BCD - C^3 - B^2E - AD^2$$

سیلوستر (سال 1881) تا درجه 12 را بررسی کرده است. به عنوان نمونه او نشان داده است که درجه 12، حداقل 109 ناوردای پایه دارد! تحقیقات در این زمینه ادامه دارد...

گزاره‌های کلی‌تر:

قضیه (Gordan 1868): تعداد متناهی ناوردا برای فرم‌های دومتغیره‌ی درجه d وجود دارد که همه‌ی ناورداهای چندجمله‌ای دیگر را می‌توان با عبارت‌های چندجمله‌ای برحسب این ناورداها بیان کرد.

قضیه (Jordan 1876): بیشترین درجه‌ی ناورداهای پایه‌ی فرم‌های دومتغیره‌ی درجه d، حداکثر d^6 است.

قضیه (Hilbert 1890):
حلقه‌ی چندجمله‌ای‌های ناوردای همه‌ی نمایش‌های مختلط و حقیقی یک گروه جبری کاهشی (شامل GL_n، SL_n، O_n، Sp_{2n} و گروه‌های متناهی و گروه‌های فشرده) دارای یک مجموعه مولد متناهی است.

کاهشی: reductive

David Hilbert (1862-1943)

4- نظریه ناورداها

در **نظریه ناورداها (Invariant Theory)** ناورداهای چندجمله‌ای عمل خطی گروه‌ها بررسی می‌شود.

عمل خطی یک گروه: فرض کنید V یک فضای برداری روی میدان $\mathbb{F}$ است. منظور از یک عمل خطی گروه G روی V، یک عمل به صورت

$$(g, v) \mapsto g \cdot v,$$

است که برای هر $g \in G$، دارای خواص زیر باشد:

$$\forall v_1, v_2 \in V: \; g \cdot (v_1 + v_2) = g \cdot v_1 + g \cdot v_2,$$
$$\forall v \in V, \; \alpha \in \mathbb{F}: \quad g \cdot (\alpha v) = \alpha (g \cdot v).$$

به صورت معادل یک عمل خطی G روی V توسط یک همریختی $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ تعریف می‌شود و به آن یک نمایش گروه G نیز می‌گویند.

چند نماد:

- $\mathrm{GL}(V)$: گروه تبدیلات خطی وارون‌پذیر از V به خودش.
- $\mathbb{F}[V]$: حلقه‌ی چندجمله‌ای‌های روی V
- $\mathbb{F}[V]^G$: مجموعه‌ی چندجمله‌ای‌های روی V که تحت یک عمل مشخص G ناوردا هستند.

حالت خاص: $V = \mathbb{F}^n$. در این حالت یک عمل خطی G روی $\mathbb{F}^n$ معادل با ارائه‌ی یک همریختی $\rho : G \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$ است. حلقه چندجمله‌ای های روی $\mathbb{F}^n$ هم برابر با حلقه‌ی چندجمله‌ای‌های n-متغیره است که با $\mathbb{F}[x_1, \ldots , x_n]$ نشان داده می‌شود.

از این به بعد ما خودمان را به نظریه ناورداهای گروه‌های متناهی روی فضاهای برداری متناهی‌البعد روی میدان‌های مشخصه صفر محدود می کنیم.

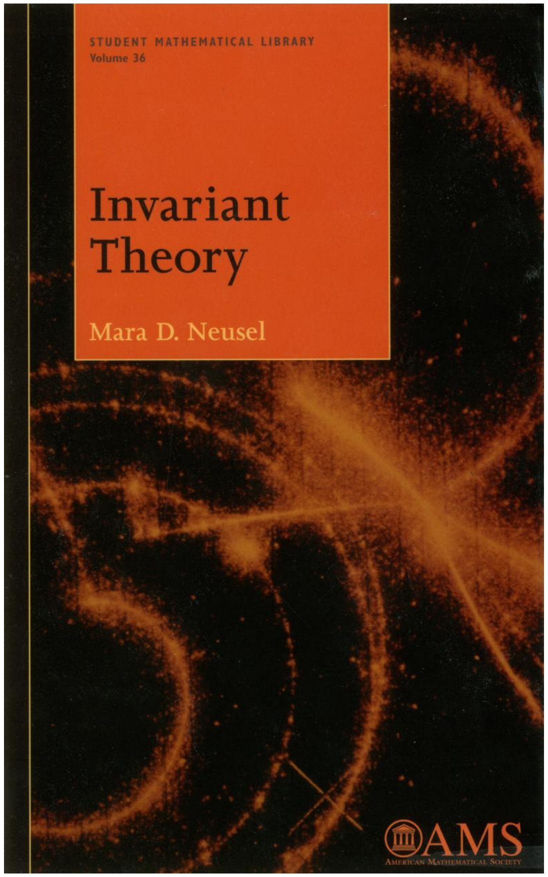
مسائل اصلی نظریه ناورداها:

- چطور ناوردا بسازیم؟
- چطور (تعداد، بعد) ناورداها را بشماریم؟
- آیا همه‌ی ناورداها را می‌توان با تعداد متناهی ناوردا (**ناورداهای پایه**) تولید کرد؟
- چطورناورداهای پایه را تعیین کنیم؟
- یافتن خواص ناوردهای پایه (مثل دنباله‌ی درجات، بزرگترین درجه و ...)؟

قرارداد:

- $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ یا $\mathbb{C}$
- V فضای برداری n-بعدی روی $\mathbb{F}$ (در مثال‌ها معمولاً $V = \mathbb{F}^n$)
- $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ یک نمایش گروه متناهی G روی V

5- یک منبع خوب برای شروع



Mara Neusel - *Invariant Theory*,
Student Mathematical Library, Volume 36,
American Mathematical Soc., 2007

کتابی با پیش نیازهای اندک ریاضی، شامل نتایج اساسی نظریه ناورداهای گروه‌های متناهی و مثال های کاربردی زیاد (در فیزیک، مهندسی، ترکیبیات، آنالیز عددی و نظریه کد)

6- خواص ابتدایی حلقه ناورداها

تعریف: عمل G روی چندجمله‌ای‌های روی V:

$$f \in \mathbb{F}[V],\ g \in G: \qquad gf(v) := f\big(g^{-1}v\big).$$

تحت این عمل، چندجمله‌ای‌های خطی به چندجمله‌ای‌های خطی تبدیل می‌شوند و در نتیجه، یک چندجمله‌ای همگن به چندجمله‌ای همگن با درجه مساوی تبدیل می‌شود.

چندجمله‌ای‌های ناوردا = چندجمله‌ای‌های ثابت تحت عمل G

خواص مجموعه‌ی چندجمله‌ای‌های ناوردا:

- تحت جمع و ضرب بسته است و شامل چندجمله‌ای‌های ثابت است.
- همه‌ی قسمت‌های همگن یک چندجمله‌ای ناوردا، ناوردا هستند.

در نتیجه $R = \mathbb{F}[V]^G$ یک $\mathbb{F}$-جبر مدرج است که جمع مستقیمی از مؤلفه‌های همگن خود (اشتراک با مجموعه‌های چندجمله‌ای‌های همگن از درجه d با نماد $\mathbb{F}[V]_{(d)}$) است:

$$\mathbb{F}[V] = \mathbb{F}[V]_{(0)} \oplus \mathbb{F}[V]_{(1)} \oplus \mathbb{F}[V]_{(2)} \oplus \cdots,$$
$$R = R_{(0)} \oplus R_{(1)} \oplus R_{(2)} \oplus \cdots,\ \ R_{(d)} = R \cap \mathbb{F}[V]_{(d)}\ .$$

گزاره: حلقه‌ی $R = \mathbb{F}[V]^G$ دارای یک مولد مینیمال همگن است. تعداد و درجات این مجموعه‌ی مولد به صورت یکتا تعیین می شود.

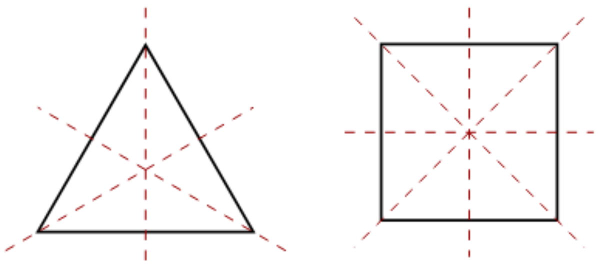
یک روش ساده برای محاسبه مولد مینیمال: از درجه 1 شروع می‌کنیم و یک پایه برای $R_{(1)}$ مانند $f_1, \ldots, f_k$ پیدا می‌کنیم.

بعد در درجه‌ی 2 همه‌ی ترکیب‌های خطی $f_1^2, f_2^2, \ldots, f_1f_2, \ldots$ را به عنوان ناوردا داریم. با محاسبه‌ی همه‌ی عناصر دیگر $R_{(2)}$، یک مجموعه‌ی مستقل خطی $f_{k+1}, \ldots, f_l$ به ناورداهای قبلی اضافه می‌کنیم تا با اضافه کردن ترکیب خطی‌های آنها کل $R_{(2)}$ ساخته شود.

این روند را در درجات بالاتر ادامه می‌دهیم. دانستن اینکه این روند از جایی به بعد ناوردای جدید نمی‌دهد و کران مناسبی برای توقف، به ما کمک می‌کند. (بیشترین درجه‌ی ناورداهای پایه)

7- چند مثال از ناورداهای گروه‌های متناهی

1- $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R}) \supseteq D_{2n}$: گروه همه‌ی تقارن‌های n-ضلعی منتظم به مرکز مبدأ با محور تقارن محور x



$$\mathbb{R}[x,y]^{D_4} = \mathbb{R}\left[x^2, y^2\right],$$
$$\mathbb{R}[x,y]^{D_6} = \mathbb{R}\left[x^2+y^2, x^3+3xy^2\right],$$
$$\mathbb{R}[x,y]^{D_8} = \mathbb{R}\left[x^2+y^2, x^4+6x^2y^2+y^4\right], \ \ldots$$

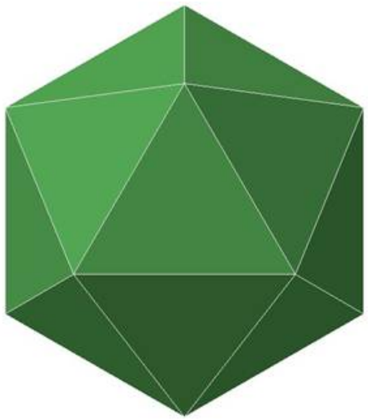
در همه‌ی حالت‌ها هیچ رابطه‌ای بین دو ناوردای پایه وجود ندارد! در نتیجه همه‌ی این حلقه‌ها با حلقه‌ی چندجمله‌ای‌های دومتغیره $\mathbb{R}[X,Y]$ یکریخت هستند.

2- $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R}) \supseteq D_{2n} \supseteq C_n$: گروه همه‌ی دوران‌های به مرکز مبدأ و زاویه‌ی مضرب $\dfrac{2\pi}{n}$ (دوران‌های n-ضلعی منتظم به مرکز مبدأ)

$$\mathbb{R}[x,y]^{C_2} = \mathbb{R}\left[x^2, xy, y^2\right] \cong \mathbb{R}[X,Y,Z] \,/\, \left(Y^2 - XZ\right),$$

$$\begin{aligned}\mathbb{R}[x,y]^{C_3} &= \mathbb{R}\left[x^2+y^2, x^3+3xy^2, 3x^2y+y^3\right] \\ &\cong \mathbb{R}[X,Y,Z] \,/\, \left(X^3 - Y^2 - Z^2\right), \ \ldots\end{aligned}$$

3- $H_3 \subseteq \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$: گروه 120 عضوی تقارن‌های 20 وجهی منتظم P به مرکز مبدأ



رئوس P: $\{\pm p_1, \ldots, \pm p_6\}$

مرکز وجوه P: $\{\pm q_1, \ldots, \pm q_{10}\}$

$$\mathbb{R}[x, y, z]^{H_3} = \mathbb{R}[f, g, h],$$

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2,$$

$$g(x, y, z) = \prod_{i=1}^{6} \langle p_i, (x, y, z) \rangle,$$

$$h(x, y, z) = \prod_{j=1}^{10} \langle q_j, (x, y, z) \rangle.$$

در این حالت f, g, h هیچ رابطه‌ای با هم ندارند و در نتیجه

$$\mathbb{R}[x, y, z]^{H_3} \cong \mathbb{R}[X, Y, Z].$$

چندجمله‌ای‌های متقارن:

گروه جایگشت‌های $\{1, 2, \ldots, n\}$ (S_n) روی بردارهای $\mathbb{R}^n$ با جایگشت مختصات به صورت طبیعی عمل می‌کند. به چندجمله‌ای‌های ناوردا تحت این عمل، **چندجمله‌ای‌های متقارن** می‌گویند.

چندجمله‌ای‌های متقارن مقدماتی:

$$\begin{aligned} s_1(x_1, \ldots, x_n) = & \quad x_1 + x_2 + \cdots + x_n, \\ s_2(x_1, \ldots, x_n) = & \quad x_1x_2 + x_1x_3 + \cdots + x_{n-1}x_n, \\ & \vdots \\ s_n(x_1, \ldots, x_n) = & \quad x_1 \cdots x_n. \end{aligned}$$

قضیه (وارینگ-گاوس): هر چندجمله‌ای متقارن n-متغیره، یک چندجمله‌ای بر حسب چندجمله‌ای‌های متقارن مقدماتی است و این نمایش یکتاست. به عبارت دیگر

$$\mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]^{S_n} = \mathbb{R}[s_1, s_2, \ldots, s_n],$$

و چندجمله‌ای‌های $s_1, \ldots, s_n$ مستقل جبری هستند.

مثال:

$$x^2 + y^2 = (x+y)^2 - 2xy = s_1^2 - 2s_2.$$

8- روش های ساخت ناورداهای چندجمله ای

مدارهای عمل یک گروه: مدارهای عمل گروه G روی فضای X، مجموعه‌های به صورت زیر است:

$$o[x] = \{gx : \; g \in X\}.$$

$f \in \mathbb{F}[V]$ دلخواه با مدار $o[f] = \{f_1, \ldots, f_k\}$.

جمع مداری:

$$o(f) := f_1 + \cdots + f_k \in \mathbb{F}[V]^G.$$

کلاس های چِرن مداری:

$$c_i(f) = s_i(f_1, \ldots, f_k) \in \mathbb{F}[V]^G, \; i = 1, \ldots, k$$

$$\begin{gathered} c_1(f) = o(f) = f_1 + \cdots + f_k, \\ c_2(f) = f_1 f_2 + f_1 f_3 + \cdots + f_{k-1} f_k, \\ \vdots \\ c_{\mathrm{top}}(f) = c_k(f) = f_1 \cdots f_k. \end{gathered}$$

توجه: اندازه‌ی همه‌ی مدارهای یک عضو، حداکثر به اندازه‌ی $|G|$ است. در نتیجه برای چندجمله‌ای همگن درجه d مانند f، درجه‌ی همه‌ی کلاس‌های چرن آن، حداکثر $d|G|$ است.

گزاره: کلاس‌های چرن چندجمله‌ای‌های خطی (همگن درجه 1)، $\mathbb{F}[V]^G$ را تولید می‌کند.

کران نوتر (E. Noether 1916): بیشترین درجه‌ی یک مجموعه‌ی مولد مینیمال برای $\mathbb{F}[V]^G$، حداکثر $|G|$ است.

قضیه (E. Noether): حلقه‌ی $\mathbb{F}[V]^G$ دارای یک مجموعه‌ی مولد متناهی است.

(اثبات نوتر برای حالت کلی‌تر مشخصه‌ی ناصفر هم کار می‌کند.)

Emmy Noether (1882-1935)

9- دستگاه پارامترها

تعریف: توسیع حلقه‌ای $S \subseteq R$ را **متناهی** می‌گویند، هرگاه $r_1, \dots, r_m \in R$ موجود باشد، که
$$R = r_1 S + \cdots + r_m S.$$
توسیع متناهی $S \subseteq R$ را **آزاد** می‌گویند، هرگاه $r_1, \dots, r_m \in R$ موجود باشد، به صورتی که
$$R = r_1 S \oplus \cdots \oplus r_m S.$$
(یعنی هر عضو R نمایش یکتایی به صورت $r_1 x_1 + \cdots + r_m x_m$ دارد که $x_1, \dots, x_m \in S$)

گزاره: توسیع $\mathbb{F}[\vec{V}]^G \subseteq \mathbb{F}[\vec{V}]$ متناهی است. در نتیجه $\operatorname{trdeg}_{\mathbb{F}}\left(\mathbb{F}[\vec{V}]^G\right) = n$. یعنی اندازه‌ی بزرگترین مجموعه مستقل جبری $\mathbb{F}[\vec{V}]^G$ (روی $\mathbb{F}$) برابر با n است.

نرمال‌سازی نوتر : R یک $\mathbb{F}$ جبر حوزه صحیح مدرج و دارای مولد متناهی و $\operatorname{trdeg}_{\mathbb{F}}(R) = n$. در این صورت مجموعه‌ی مستقل جبری $f_1, \dots, f_n$ (روی $\mathbb{F}$) از عناصر همگن R وجود دارد که توسیع
$$\mathbb{F}[f_1, \dots, f_n] \subseteq R$$
متناهی است. به مجموعه‌ی $\{f_1, \dots, f_n\}$ یک **دستگاه پارامترها** می‌گویند.

نکته: فرض کنید $\{f_1, \ldots, f_n\} \subseteq \mathbb{F}[V]^G$ مجموعه‌ای از چندجمله‌ای‌های همگن ناوردا باشد. این مجموعه یک دستگاه پارامترها برای $\mathbb{F}[V]^G$ است، اگر و فقط اگر یک دستگاه پارامترها برای $\mathbb{F}[V]$ باشد.

محک زیر نتیجه‌ای از قضیه‌ی معروف «صفرهای هیلبرت» است:

قضیه: مجموعه‌ی $\{f_1, \ldots, f_n\} \subseteq \mathbb{F}[x_1, \ldots, x_n]$ از چندجمله‌ای‌های همگن، یک سیستم پارامترها است، اگر و فقط اگر مجموعه‌ی جوابهای دستگاه معادلات

$$f_1(x_1, \ldots, x_n) = \ldots = f_n(x_1, \ldots, x_n) = 0,$$

در $\mathbb{C}^n$، برابر با $\{(0, 0, \ldots, 0)\}$ باشد.

نتیجه: اگر $l_1, \ldots, l_n$ یک n-تایی عمومی از چندجمله‌ای‌های خطی روی V باشد. در این‌صورت

$$c_{\text{top}}(l_1), \ldots, c_{\text{top}}(l_n)$$

یک دستگاه پارامترها برای $\mathbb{F}[V]^G$ است.

10- تجزیه‌ی هیروناکا

قضیه: حلقه‌ی $\mathbb{F}[V]^G$ یک حلقه‌ی کوهن-مکولی (Cohen-Macaulay) است، یعنی برای هر دستگاه پارامترهای $f_1, \ldots, f_n \in \mathbb{F}[V]^G$، توسیع $\mathbb{F}[f_1, \ldots, f_n] \subseteq \mathbb{F}[V]^G$ آزاد است.

تجزیه هیروناکا (Hironaka 1956): برای هر دستگاه پارامتر $f_1, \ldots, f_n \in \mathbb{F}[V]^G$، چندجمله‌ای‌های ناوردای $g_1, \ldots, g_m$ وجود دارد که

$$\mathbb{F}[V]^G = \mathbb{F}[f_1, \ldots, f_n]g_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{F}[f_1, \ldots, f_n]g_m.$$

به $\{g_1, \ldots, g_m\}$ یک **دستگاه پارامتر ثانویه** می‌گویند.(همیشه یکی از g_iها را می‌توان برابر 1 گرفت.)

مثال: عمل جایگشتی $G = A_n \subseteq S_n$ را روی $\mathbb{R}^n$ در نظر بگیرید. چندجمله‌ای‌های متقارن مقدماتی $s_1, \ldots, s_n$ تحت A_n ناوردا هستند و مستقل جبری، پس یک دستگاه پارامترها می‌دهند. داریم:

$$\mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]^{A_n} = \mathbb{R}[s_1, \ldots, s_n] \oplus \mathbb{R}[s_1, \ldots, s_n]\nabla(x_1, \ldots, x_n),$$

$$\nabla(x_1, \ldots, x_n) = \prod_{i<j}(x_i - x_j).$$

11- سری پوانکاره

سری پوانکاره: سری پوانکاره $\mathbb{F}$-جبر مدرج $R = \bigoplus_d R_{(d)}$، به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$P(R,t) = \dim_{\mathbb{F}} R_{(0)} + \dim_{\mathbb{F}} R_{(1)}\ t + \dim_{\mathbb{F}} R_{(2)}\ t^2 + \ \cdots .$$

(تابع مولد دنباله‌ی بعدهای مؤلفه‌های R)

قضیه (Molien 1897):

$$P\big(\mathbb{F}[V]^G, t\big) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\frac{1}{\det(1-t\rho(g))}.$$

بسط لوران $P\big(\mathbb{F}[V]^G, t\big)$ **در** $t=1$**:**

$$P\big(\mathbb{F}[V]^G, t\big) = \frac{1}{|G|}\left(\frac{1}{(1-t)^n} + \frac{r}{2}\frac{1}{(1-t)^{n-1}} + \ \cdots\right),$$

r : تعداد شبه‌بازتاب‌ها در میان $\rho(g)$ها.

- $f_1, \dots, f_n$ یک دستگاه پارامترها برای $\mathbb{F}[V]^G$ با دنباله‌ی درجات $d_1, \dots, d_n$
- $g_1, \dots, g_m$ یک دستگاه پارامتر ثانویه برای $f_1, \dots, f_n$ با درجات $e_1, \dots, e_m$

تجزیه هیروناکا برای سری پوانکاره:

$$P\left(\mathbb{F}[V]^G, t\right) = \frac{t^{e_1} + \cdots + t^{e_m}}{\left(1 - t^{d_1}\right) \cdots \left(1 - t^{d_n}\right)}.$$

نتیجه:

$$\deg(f_1) \cdots \deg(f_n) = m\ |G|,$$

در حالت $m = 1$، $\mathbb{F}[V]^G = \mathbb{F}[f_1, \dots, f_n]$ با حلقه‌ی چندجمله‌ای‌ها یکریخت است.

12- قضیه شواله-شفارد- تاد

شبه بازتاب: تبدیل خطی مرتبه‌ی متناهی $T \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ که یک روی یک زیرفضای $n-1$ بعدی $H \subseteq \mathbb{F}^n$ به صورت همانی عمل می‌کند. (در نتیجه T یک بردار ویژه‌ی خارج H با مقدار ویژه‌ی ریشه‌ی واحد دارد)

گروه شبه‌بازتابی (بازتابی مختلط): گروه خطی $G \subseteq \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ که توسط شبه بازتاب‌ها تولید می‌شود.

قضیه (Chevalley 1955 – Shephard,Todd 1954): حلقه‌ی ناورداهای گروه خطی متناهی $G \subseteq \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ با حلقه‌ی چندجمله‌ای‌ها یکریخت است، اگر و فقط اگر G یک گروه شبه بازتابی باشد.

درحالت گروه خطی متناهی حقیقی $G \subseteq \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$، حلقه‌ی $\mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]^G$ یک حلقه‌ی چندجمله‌ای‌هاست، اگر و فقط اگر G با یک گروه بازتابی (تولید شده توسط بازتاب‌ها) مزدوج باشد.

13- رده‌بندی گروه‌های بازتابی مختلط متناهی

گروه شبه‌بازتابی تحویل‌ناپذیر: گروه شبه‌بازتابی بدون زیرفضای نابدیهی ناوردا

رده‌بندی گروه‌های شبه‌بازتابی متناهی تحویل‌ناپذیر: 3 رده‌ی نامتناهی و 34 گروه استثنائی

	نام	مرتبه ($\lvert G\rvert$)	بعد ($\dim V$)	درجات ناورداهای پایه
1	S_{n+1}	$(n+1)!$	n	$2, 3, \ \dots, n+1$
2	$G(m,p,n)$	$m^n n! \,/\, p$	n	$m, 2m, \ \dots, (n-1)m, \ mn \,/\, p$
3	$\mathbb{Z}_m$	m	1	m

Dolgachev, Igor. *Reflection groups in algebraic geometry.* Bulletin of the American Mathematical Society 45.1 (2008): 1-60.

	نام	مرتبه ($\|G\|$)	بعد ($\dim V$)	درجات ناورداهای پایه
1	$3[3]3$	24	2	$4, 6$
2	$3[4]3$	72	2	$6, 12$
3	$3[6]2$	48	2	$4, 12$
4	$\langle 3, 3, 3\rangle_2$	144	2	$12, 12$
5	$4[3]4$	96	2	$8, 12$
6	$4[6]2$	192	2	$8, 24$
7	$4[4]3$	288	2	$12, 24$
8	$\langle 4, 3, 2\rangle_{12}$	576	2	$24,24$
9	$\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_3)$	48	2	$6, 8$
10	$\langle 4, 3, 2\rangle_2$	96	2	$8, 12$
11	$3[8]2$	144	2	$6, 24$
12	$\langle 4, 3, 2\rangle_6$	288	2	$12, 24$
13	$5[3]5$	600	2	$20, 30$
14	$5[6]2$	1200	2	$20, 60$
15	$5[4]3$	1800	2	$30, 60$
16	$\langle 5, 3, 2\rangle_{30}$	3600	2	$60, 60$
17	$3[5]3$	360	2	$12, 30$

	نام	مرتبه ($\|G\|$)	بعد ($\dim V$)	درجات ناورداهای پایه
18	$3[10]2$	720	2	$12, 60$
19	$\langle 5, 3, 2\rangle_2$	240	2	$12, 20$
20	H_3	120	3	$2, 6, 10$
21	$J_3(4)$	336	3	$4, 6, 14$
22	L_3	648	3	$6, 9, 12$
23	M_3	1296	3	$6, 12, 18$
24	$J_3(5)$	2160	3	$6, 12, 30$
25	F_4	1152	4	$2, 6, 8, 12$
26	N_4	7680	4	$4, 8, 12, 20$
27	H_4	14440	4	$2, 12, 20, 30$
28	EN_4	$64 \cdot 6!$	4	$8, 12, 20, 24$
29	L_4	$216 \cdot 6!$	4	$12, 18, 24, 30$
30	K_5	$72 \cdot 6!$	5	$4, 6, 10, 12, 18$
31	K_6	$108 \cdot 9!$	5	$4, 6, 10, 12, 18$
32	E_6	$72 \cdot 6!$	6	$2, 5, 6, 8, 9, 12$
33	E_7	$8 \cdot 9!$	7	$2, 6, 8, 10, 12, 14, 18$
34	E_8	$192 \cdot 9!$	8	$2, 8, 12, 14, 18, 20, 24, 30$

تشکر از توجه شما!