دانشگاه صنعتی اصفهان
دانشکده علوم ریاضی

پروژه کارشناسی ریاضیات و کاربردها گرایش هندسه و توپولوژی

عنوان

نظریه اشتراک در توپولوژی دیفرانسیل

پژوهشگر

مهران کارخیران خوزانی

استاد راهنما

دکتر سجاد لکزیان

چکیده

در این پروژه سعی بر آن بوده که حول محوریت مفهومی به نام تراگذری که در توپولوژی دیفرانسیل مطرح میشود، احکام و حقایقی به مرجعیت کتاب توپولوژی دیفرانسیل اثر ویکتور گیلمن و آلن پولاک، مورد بحث قرار گیرند. طبیعی است که به سبب بیان توضیحات تکمیلی یا حاشیه گویی هایی نسبت به خط اصلی بحث، مطالبی را مربوط به آنالیز چند متغیره از کتاب مبانی آنالیز ریاضی والتر رودین و همچنین نکاتی تکمیلی در جبرخطی را از کتاب جبرخطی پیشرفته اثر توماس اسکات بلیث و ادموند فردریک رابرتسون، مورد استفاده قرار داده ایم.

از آنجایی که مفهوم تراگذری با برخی اشیاء هندسی یعنی منیفلد ها و توابع میان آنها سر و کار مستقیمی دارد، در فصل اول این نوشتار، ابتدا به معرفی منیفلدهای هموار، زیرمجموعه های بخصوصی از فضاهای اقلیدسی، جهت وجود و بکارگیری ابزارهای دیفرانسیلی روی آنها پرداخته ایم و سپس برای شناسایی بهتر این اشیاء بطور موضعی، منیفلد را در یک نقطه، با زیرفضایی خطی از فضای اقلیدسی محیطی، موسوم به فضای مماس، تقریب زده ایم. کمی بعد، توابع میان منیفلدها را مطرح کرده و مشتق را برای برخی از آنها، بعنوان یک تابع خطی مشخص میان فضاهای مماس به دامنه و هم‌دامنه، تعریف نموده ایم. در ادامه ی این فصل، چند بخش به بررسی حالاتی که میتواند برای بُعد خطی دامنه و هم‌دامنه ی مشتق توابع میان منیفلدها و همچنین یک به یکی یا پوشایی آنها رخ دهد پرداخته شده، که همه و همه، ابزارهایی را برای رسیدن به هدف، فراهم آورده اند. در دو بخش پایانی فصل نیز تعریف اولیه از تراگذری را برای یک نگاشت هموار میان منیفلد ها نسبت به زیرمنیفلدی از فضای هم‌دامنه، ارائه کرده و نهایتاً در قضیه ی پایداری، مشاهده میکنیم خاصیت تراگذری یک نگاشت به یک زیرمنیفلد، تحت دگردیسی های کوچک برای آن نگاشت، پایدار میماند و از بین نمیرود.

در آغاز فصل دوم، تعریف خود از منیفلد را به گونه ای گسترش داده ایم که دامنه ی بیشتری از اشیاء هندسی را شامل شود و به نوعی اشیاء مرزدار را به حیطه ی مورد بحث خود افزوده ایم. پس از آن به مشخصه سازی برخی منیفلدهای یک بعدی پرداخته و از این نقطه نظر، اثبات موریس هیرش از قضیه ی نقطه ثابت براوئر را تشریح نموده ایم. و در نهایت، به عنوان هسته ی مرکزی این تحقیق، به اثبات این مطلب پرداخته ایم که میتوان نگاشت دلخواهی که ممکن است هر رفتاری نسبت به یک زیرمنیفلد از فضای هم‌دامنه اش داشته باشد را تحت دگردیسی مورد نیاز، به تابعی تبدیل کرد که الزاماً به آن زیرمنیفلد، تراگذر باشد، و حتی از این قوی تر، بسته به وجود برخی شروط، تحدید تابع جدید به روی بخشی از دامنه، برابر با نگاشت اولیه باشد، که این حکم را تحت نام قضیه ی تراگذری-هموتوپی و توسیع آن در پایان کار ارائه کرده ایم.

واژگان کلیدی منیفلد، مشتق و مماس، تراگذری، هموتوپی و پایداری، نظریه اشتراک

فهرست مطالب

فصل ۱

منیفلدها و نگاشت های هموار

در این فصل ابتدا به تعریف منیفلد و مفاهیم مرتبط با آن از جمله مشتق و مماس، همچنین خواصی از نگاشت‌هایی میان منیفلدها مانند ایمرشن و سابمرشن ها پرداخته خواهد شد و سپس با بیان تعریفی از مفهوم تراگذری و بررسی ویژگی دلخواهی به نام پایداری در مورد مفاهیم یاد شده، بحث خود را در این بخش خاتمه میبخشیم.

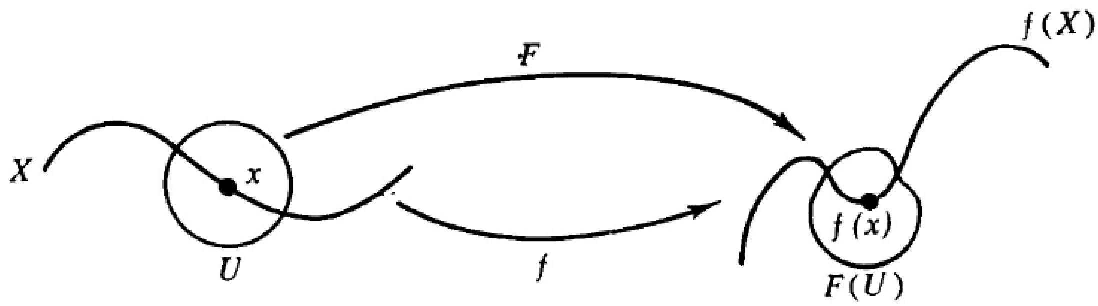
۱.۱ برخی تعاریف

تعریف ۱.۱.۱. نگاشت $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ که U زیر مجموعه ای باز از $\mathbb{R}^n$ میباشد را از رده ی C^r گویند هر گاه تمام مولفه های f مشتقات جزئی پیوسته تا مرتبه ی r داشته باشند. به همین ترتیب، f را هموار یا C^∞ نامیم چنانچه تمامی مشتقات جزئی آن از هر مرتبه ای موجود و پیوسته باشد.

حال تعریف همواری را به توابعی با دامنه ی دلخواه از زیر مجموعه های $\mathbb{R}^n$ گسترش میدهیم.

تعریف ۲.۱.۱. نگاشت $f : X \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ که X زیر مجموعه ای دلخواه از $\mathbb{R}^n$ میباشد را هموار از رده‌ی C^r گویند هر گاه برای هر $x \in X$، وجود داشته باشد یک همسایگی U از x در $\mathbb{R}^n$ و یک نگاشت C^r مانند $F : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ بطوریکه $F|_{X\cap U} = f|_{X\cap U}$.

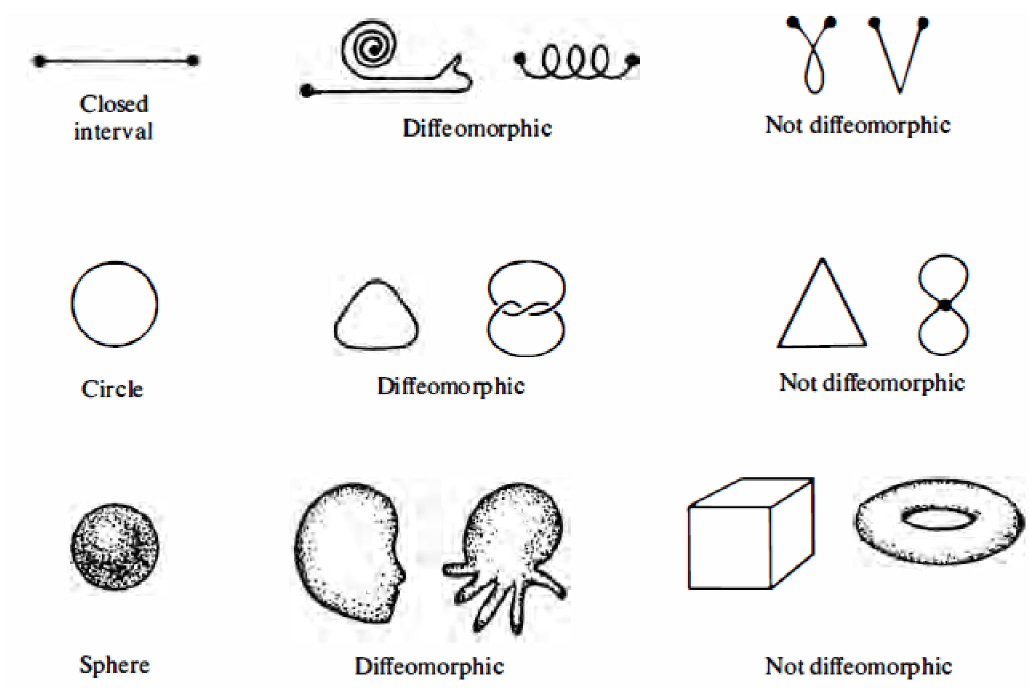
در مباحث آتی نیازمند به این هستیم که برخی اشیاء هندسی را هم ارز با یکدیگر در نظر بگیریم، تعریف زیر در این راستا به ما کمک خواهد کرد.



شکل ۱.۱: نگاشتی هموار

تعریف ۳.۱.۱. نگاشت هموار $f : X \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow Y \subset \mathbb{R}^m$ را یک دیفیومورفیسم گوییم هر گاه f یک‌به‌یک و پوشا بوده و وارون آن یعنی $f^{-1} : Y \longrightarrow X$ نیز هموار باشد. همچنین X و Y را دیفیومورف نامیم در صورتی که چنین تابع f میان آنها موجود باشد.

طبق اهداف ما، مجموعه های دیفیومورف، هم ارز هستند به این معنی که کپی ای از یکی را در فضایی دیگر متصور هستیم. بطور شهودی مثال هایی در شکل ۲.۱ آورده شده است.



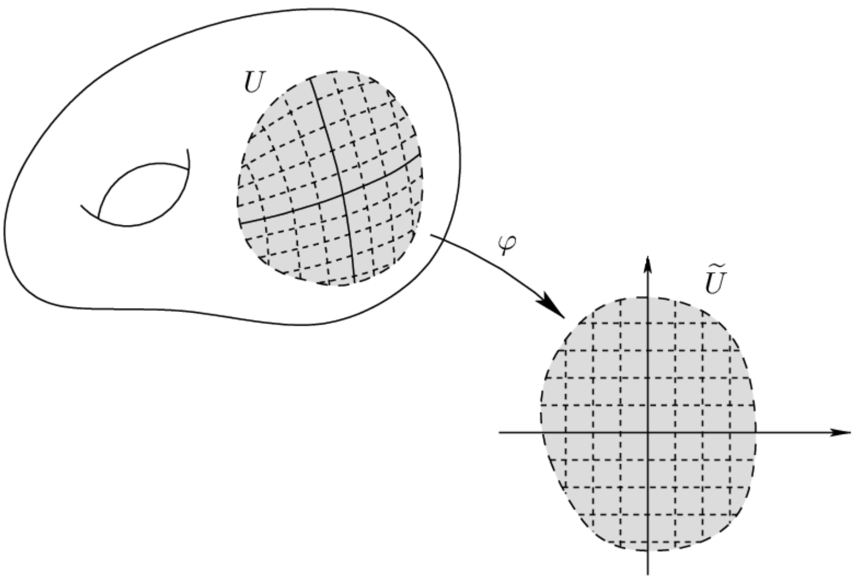
شکل ۲.۱: اشکال دیفیومورف و غیر دیفیومورف

اکنون به تعریف مفهومی اساسی یعنی منیفلد k بعدی نشانده شده در $\mathbb{R}^N$ میپردازیم.

تعریف ۴.۱.۱. در نظر میگیریم X زیرمجموعه ای از $\mathbb{R}^N$ باشد. گوییم X یک منیفلد در $\mathbb{R}^N$ از بُعد k است، چنانچه برای هر $x \in X$، یک دیفیومورفیسم $\phi : U \longrightarrow X \cap V$ وجود داشته باشد بطوریکه U زیرمجموعه‌ی بازی از $\mathbb{R}^k$ بوده و V یک همسایگی باز از x در $\mathbb{R}^N$ باشد.

در تعریف اخیر چند نام گذاری به کار میبریم که به شرح زیر است:

- مجموعه ای چون $X \cap V$ را یک همسایگی x در X گوییم.
- دیفیومورفیسم ϕ را یک پارامتری سازی (پیمایش) برای همسایگی $X \cap V$ نامیم.
- $\phi^{-1} : X \cap V \longrightarrow U$ یک دستگاه مختصات روی $X \cap V$ نامیده میشود.
- زمانی که ϕ^{-1} را بصورت مختصاتی $\phi^{-1}(v) = (x_1(v), ..., x_k(v))$ مینویسیم، k تابع هموار $x_1, ..., x_k$ بر $X \cap V$ را توابع مختصاتی مینامیم. برخی اوقات $x_1, ..., x_k$ را مختصات موضعی روی $X \cap V$ گوییم و هر نقطه ی نوعی از آن را بصورت $(x_1, ..., x_k)$ در نظر میگیریم.
- بُعد k از X را معمولاً با $\dim X$ نشان میدهیم.



شکل ۳.۱: منیفلدی هموار به همراه یک دستگاه مختصات موضعی

حال به منظور ساختن منیفلد هایی جدید با استفاده از منیفلد های شناخته شده، میتوان ضرب دکارتی آنها را در نظر گرفت. بنابراین به قضیه ی زیر توجه میکنیم.

قضیه ۱.۱.۱. چنانچه X و Y دو منیفلد باشند، در این صورت خواهیم داشت، $X \times Y$ نیز یک منیفلد با $\dim X \times Y = \dim X + \dim Y$ است.

برای روشن شدن منظورمان از واژه های زیرمنیفلد و زیرمجموعه ی باز از یک منیفلد، تعاریف زیر را به کار میبریم.

تعریف ۵.۱.۱. چنانچه دو منیفلد X و Z را در $\mathbb{R}^N$ داشته باشیم به قسمی که $Z \subset X$ ، در این صورت گوییم Z یک زیر منیفلد X است.

همچنین منظور از زیر مجموعه ی باز $V \subset X$ از منیفلد X ، آن است که یک زیر مجموعه ی باز $\tilde{V} \subset \mathbb{R}^N$ بطوری وجود دارد که داشته باشیم $V = X \cap \tilde{V}$.

بنابراین طبق تعریف فوق داریم هر زیر مجموعه ی باز از منیفلد دلخواه X، زیر منیفلدی از X است.

۲.۱ مشتق و مماس

به منظور تعریف فضای مماس بر یک منیفلد در نقطه ای خاص و همچنین مشتق توابع میان دو منیفلد، ابتدا به بیان تعاریف و نکاتی از حسابان چند متغیره میپردازیم.

تعریف ۱.۲.۱. نگاشت $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ که U زیرمجموعه ای باز از $\mathbb{R}^n$ است را در نظر میگیریم. گوییم f در $x \in U$ مشتق پذیر است، چنانچه تابعی خطی از $\mathbb{R}^n$ به $\mathbb{R}^m$ مانند $A \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ وجود داشته باشد به قسمی که تساوی

$$\lim_{h \to ۰} \frac{||f(x+h) - f(x) - Ah||}{||h||} = ۰$$

برقرار باشد.

در این صورت A را مشتق کلی f در $x \in U$ نامیم و با $f'(x) = A$ نمایش میدهیم. طبق مشاهده ای در حسابان میدانیم چنین A در صورت وجود، یکتاست پس $f'(x)$ خوش تعریف است.

گزاره ۱.۲.۱. چنانچه تمامی مشتقات جزئی مرتبه اول تابع مفروض $f : U(\text{open}) \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ موجود و پیوسته باشند، آنگاه $f'(x)$ به ازای هر $x \in U$ موجود بوده و علاوه بر آن، چنانچه روی $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ به ازای هر $A \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$، نرم

$$||A|| = \sup_{||x|| \leq ۱} ||Ax||$$

را تعریف کنیم، آنگاه خواهیم داشت تابع

$$f' : U \longrightarrow L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$$
$$x \mapsto f'(x)$$

پیوسته است.

بسادگی میتوان دید برقراری تساوی برای حد ذکر شده در تعریف ۱.۲.۱، نتیجه میدهد به ازای هر $h \in \mathbb{R}^n$، حد

$$\lim_{t \to ۰} \frac{f(x+th) - f(x)}{t}$$

موجود بوده و برابر است با $f'(x)(h)$. بنابراین تعریف زیر را داریم.

تعریف ۲.۲.۱. فرض کنیم $f : U(\text{open}) \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ تابعی هموار باشد، در این صورت برای $x \in U$ دلخواه و $h \in \mathbb{R}^n$ دلخواه، مشتق f در نقطه ی x در جهت h را بصورت

$$df_x(h) = \lim_{t \to ۰} \frac{f(x+th) - f(x)}{t}$$

تعریف میکنیم. طبق توضیحات اخیر میدانیم $df_x(h)$ موجود و خوش تعریف است. پس میتوانیم به ازای یک $x \in U$ ثابت، تابع

$$df_x : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$$
$$h \mapsto df_x(h)$$

را معرفی کنیم که با مشاهدات اخیر، df_x همان $f'(x)$ است.

از آنجایی که طبق حسابان میدانیم چنانچه f را بصورت $f(p) = (f_1(p), ..., f_m(p))$ بنویسیم آنگاه ماتریس نمایش $f'(x)$ نسبت به پایه های استاندارد $\mathbb{R}^n$ و $\mathbb{R}^m$ برابر است با

$$[f'(x)] = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(x) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix}$$

که ماتریس ژاکوبی f در x نام دارد، بنابراین مطابق با تساوی $df_x = f'(x)$ داریم df_x تابعی خطی است و $[df_x] = [f'(x)]$.

اما از مزیت های در نظر گرفتن df_x بعنوان یک تابع خطی، میتوان برقراری قاعده ی زنجیره ای را برای مشتق توابع چند متغیره نام برد که در قضیه ی زیر می آوریم.

قضیه ۱.۲.۱. فرض کنیم $U \subset \mathbb{R}^n$ و $V \subset \mathbb{R}^m$ زیرمجموعه هایی باز بوده و داشته باشیم $f : U \longrightarrow V$ و $g : V \longrightarrow \mathbb{R}^l$ نگاشت هایی هموار باشند. در این صورت، قاعده ی زنجیره ای بیان میدارد برای هر $x \in U$ داریم

$$d(g \circ f)_x = dg_{f(x)} \circ df_x.$$

پس هر گاه دیاگرامی به صورت

$$\begin{tikzcd} & V \arrow[dr, "g"] & \\ U \arrow[ur, "f"] \arrow[rr, "g\circ f"] & & \mathbb{R}^l \end{tikzcd}$$

را که با مفروضات قضیه داشته باشیم، آنگاه دیاگرام

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{R}^m \arrow[dr, "dg_{f(x)}"] & \\ \mathbb{R}^n \arrow[ur, "df_x"] \arrow[rr, "d(g\circ f)_x"] & & \mathbb{R}^l \end{tikzcd}$$

جابجایی خواهد بود. که منظور از دیاگرام جابجایی از نگاشت ها، آن است که هر گاه دو دنباله با مجموعه های ابتدایی و انتهایی نظیر یکسان را در نظر بگیریم، ترکیب توابع آنها نیز برابر باشد.

حال به گزاره ای ساده در مورد مشتق توابع خطی اشاره میکنیم.

گزاره ۱.۲.۲. چنانچه $f : U(\text{open}) \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$، خود یک نگاشت خطی باشد، آنگاه به ازای هر $x \in U$ داریم $df_x = f$. بطور خاص، چنانچه f تابع همانی از U بتوی $\mathbb{R}^n$ باشد، آنگاه df_x به ازای هر $x \in U$، تابع همانی از $\mathbb{R}^n$ به $\mathbb{R}^n$ است.

از آنجایی که مشتق هر تابع در یک نقطه، بهترین تقریب خطی برای آن تابع، حول نقطه ی مد نظر است، میتوانیم در مورد منیفلدها، با استفاده از مشتق، بهترین فضای خطی حول یک نقطه ی خاص از منیفلد را تقریب بزنیم. بدین منظور، تعریف زیر را برای مفهوم یاد شده، با نام فضای مماس، ارائه میکنیم.

تعریف ۱.۲.۳. فرض کنیم $X \subset \mathbb{R}^N$ یک k-منیفلد (منیفلد k بعدی) باشد و نقطه ی مفروض $x \in X$ را داشته باشیم. حال از آنجایی که میدانیم X را میتوان بطور موضعی حول x، پارامتری سازی کرد، دیفیومورفیسم $\phi : U(\text{open}) \subset \mathbb{R}^k \longrightarrow V \subset \mathbb{R}^N$ که V یک همسایگی x در X است و الزاماً وجود دارد را در نظر میگیریم و برای سادگی فرض میکنیم $x = \phi(\circ)$. طبق همواری ϕ روی U میدانیم $d\phi_\circ : \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}^N$ موجود است. حال فضای مماس X در x را که با $T_x(X)$ نمایش میدهیم، بصورت تصویر $d\phi_\circ$، یعنی $Im(d\phi_\circ)$، تعریف میکنیم که از خطی بودن $d\phi_\circ$ داریم، $T_x(X)$ یک زیر فضای برداری (خطی) $\mathbb{R}^N$ میباشد، و هر بردار $v \in T_x(X)$ را یک بردار مماس به X در نقطه ی x مینامیم.

به منظور خوش تعریفی تعریف فوق، لازم است تحقیق کنیم که $T_x(X)$ وابسته به انتخاب پارامتری سازی‌های مختلف نباشد. در نظر گیریم $\phi : U_۱ \longrightarrow V_۱$ و $\psi : U_۲ \longrightarrow V_۲$ دو پارامتری سازی موضعی از X حول x باشند. با تحدید دامنه های ϕ و ψ به ترتیب به مجموعه های $\phi^{-۱}(V_۱ \cap V_۲)$ و $\psi^{-۱}(V_۱ \cap V_۲)$ طبق دیفیومورفیسم بودن ϕ و ψ و لذا همئومورفیسم بودنشان میدانیم هر دوی مجموعه‌های ذکر شده، مجموعه‌هایی باز در $U_۱$ و $U_۲$ میباشند، یعنی $\tilde{U_۱}, \tilde{U_۲}(\text{open}) \subset \mathbb{R}^k$ بطوری موجودند که $\phi^{-۱}(V_۱ \cap V_۲) = U_۱ \cap \tilde{U_۱}$ و $\psi^{-۱}(V_۱ \cap V_۲) = U_۲ \cap \tilde{U_۲}$ پس طبق باز بودن $U_۱$، $U_۲$، $\tilde{U_۱}$ و $\tilde{U_۲}$ داریم $\phi^{-۱}(V_۱ \cap V_۲)$ و $\psi^{-۱}(V_۱ \cap V_۲)$ زیر مجموعه های باز $\mathbb{R}^k$ میباشند و لذا ϕ و ψ تحدید شده نیز دامنه های باز داشته و هموار بوده و با در نظر گیری $V_۱ \cap V_۲$ بعنوان هم دامنه ی آنها، هر دو، دیفیومورفیسم میباشند. پس از این به بعد فرض میکنیم $U_۱$ و $U_۲$ به قدری کوچک هستند که $\phi(U_۱) = \psi(U_۲)$. اما از طرفی دیگر، از آنجایی که $H = \psi^{-۱} \circ \phi : U_۱ \longrightarrow U_۲$

و $K = \phi^{-1} \circ \psi : U_2 \longrightarrow U_1$ دیفیومورفیسم هستند، با برقراری روابط $\phi = \psi \circ H$ و $\psi = \phi \circ K$ و با استفاده از مشتق پذیری H و K، همچنین استفاده از قاعده ی زنجیره ای (قضیه ی ۱.۲.۱) خواهیم داشت، $d\phi_0 = d\psi_0 \circ dH_0$ و $d\psi_0 = d\phi_0 \circ dK_0$. که از این دو رابطه به ترتیب نتیجه میشود $Im(d\phi_0) \subset Im(d\psi_0)$ و $Im(d\psi_0) \subset Im(d\phi_0)$، لذا $Im(d\phi_0) = Im(d\psi_0)$، که این بدین معنی است که تعریف فضای مماس به انتخاب پارامتری سازی وابسته نیست و $T_x(X)$ با در نظر گیری هر پارامتری سازی موضعی حول x، یکتا است.

حال پس از اثبات یک لم، نتیجه خواهیم گرفت که بُعد زیر فضای برداری $T_x(X)$ از $\mathbb{R}^N$، برابر است با k، یعنی همان $\dim X$.

لم ۱.۲.۱. با مفروضات تعریف ۳.۲.۱، داریم $d\phi_0 : \mathbb{R}^k \longrightarrow T_x(X)$ یک یکریختی فضاهای برداری است.

اثبات. از دیفیومورفیسم بودن ϕ و در نتیجه هموار ی $\Phi := \phi^{-1} : V \longrightarrow U$، توسیع هموار $\tilde{\Phi} : W \longrightarrow \mathbb{R}^k$ را در نظر میگیریم که $W(\text{open}) \subset \mathbb{R}^N$، $x \in W$ و $\tilde{\Phi}\big|_{V\cap W} = \Phi|_{V\cap W}$. از طرفی دیگر طبق پیوستگی ϕ و باز بودن $V \cap W$ در V، میدانیم $\phi^{-1}(V \cap W)$ در U باز است، لذا داریم $\phi^{-1}(V \cap W) = U \cap \tilde{U}$، که $\tilde{U}$ زیرمجموعه ای باز از $\mathbb{R}^k$ میباشد. همچنین میدانستیم U در $\mathbb{R}^k$ باز است، بنابراین با داشتن زیرمجموعه ی باز $\phi^{-1}(V \cap W) \subset \mathbb{R}^k$ میتوان نوشت

$$\phi^{-1}(V \cap W) \xrightarrow{\phi} V \cap W \xrightarrow{\tilde{\Phi}} \mathbb{R}^k$$

که در نتیجه تابع

$$\begin{aligned} \tilde{\phi} \colon \phi^{-1}(V \cap W) &\longrightarrow V \cap W \\ p &\mapsto \phi(p) \end{aligned}$$

یک دیفیمورفیسم خواهد بود بطوریکه $\tilde{\Phi} \circ \tilde{\phi} = Id$. اما طبق تساوی $d\tilde{\phi}_0 = d\phi_0$، و این که داریم $\tilde{\phi}$ در $0 \in \phi^{-1}(V \cap W)$ و $\tilde{\Phi}$ در $x = \phi(0) \in V \cap W$ مشتق پذیر اند، از قاعده ی زنجیره ای نتیجه میشود $d\tilde{\Phi}_x \circ d\phi_0 = Id$، که Id همان تابع همانی عضو $L(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^k)$ است. بنابراین از آنجایی که برای $d\phi_0$ وارون چپ یافت شد، خواهیم داشت، $d\phi_0$ یک به یک است و لذا با محدود کردن همدامنه ی آن به $T_x(X) = Im(d\phi_0)$، داریم $d\phi_0 : \mathbb{R}^k \longrightarrow T_x(X)$ یک یکریختی فضاهای برداری است و حکم ثابت است. □

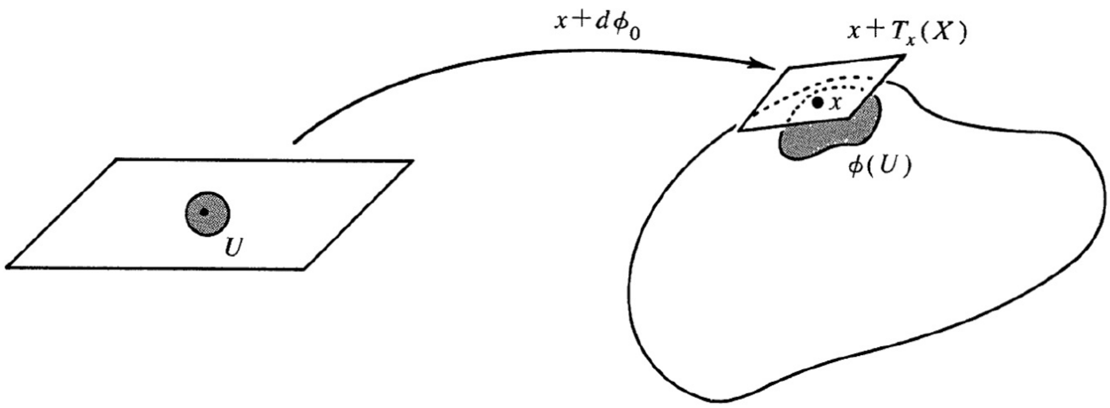
نتیجه ۱.۲.۱. بُعد زیر فضای برداری $T_x(X) \subset \mathbb{R}^N$ برابر است با $k = \dim X$.

اثبات. در لم ۱.۲.۱ دیدیم، دو فضای برداری $T_x(X)$ و $\mathbb{R}^k$ یکریختند، بنابراین طبق قضیه ای از جبر خطی داریم $\dim T_x(X) = \dim \mathbb{R}^k = k$. □

نکته ی حائز اهمیت دیگر این است که ما با هدف تقریب خطی مناسب از یک منیفلد در نقطه ای خاص، مفهوم فضای مماس را معرفی کردیم، اما میبینیم که در حالت کلی در $T_x(X)$ حتی خود x هم واقع نمیشود، ولی باید بیان داشت این تعریف به منظور در دست داشتن یک زیر فضای برداری از $\mathbb{R}^N$ ارائه شده است، مگر نه به منظور تعریفی شهودی تر برای تقریب منیفلد، میتوان مفهوم زیر را ارائه داد.

تعریف ۴.۲.۱. برای k-منیفلد $X \subset \mathbb{R}^N$، تعریف میکنیم، منظور از فضای مماس هندسی بر X در نقطه ی $x \in X$، عبارت است از $x + T_x(X) \subset \mathbb{R}^N$.

این مفهوم در شکل ۴.۱ به تصویر کشیده شده است.



شکل ۴.۱: فضای مماس هندسی

حال به دنبال تعمیم تعریف مشتق برای نگاشتی هموار میان دو منیفلد هستیم، بدین منظور از ایده‌ی تعریف تابعی خطی میان دو زیر فضای برداری مماس بر منیفلدهایمان در نقاطی خاص کمک گرفته و به تعریف زیر میپردازیم.

تعریف ۵.۲.۱. فرض کنیم $X \subset \mathbb{R}^N$ و $Y \subset \mathbb{R}^M$، به ترتیب، منیفلدهایی k و l بعدی باشند و نگاشت هموار $f : X \longrightarrow Y$ را داشته باشیم. برای نقطه ی مفروض $x \in X$، پارامتری سازی هایی دلخواه مانند

$\phi : U(\text{open}) \subset \mathbb{R}^k \longrightarrow X$ و $\psi : V(\text{open}) \subset \mathbb{R}^l \longrightarrow Y$ را به ترتیب حول نقاط $x \in X$ و $y = f(x) \in Y$ در نظر میگیریم. حال مشتق f در x را که با df_x نمایش میدهیم، بصورت

$$df_x := d\psi_0 \circ dh_0 \circ d\phi_0^{-1}$$

تعریف میکنیم که در آن $h = \psi^{-1} \circ f \circ \phi$.

توجه میکنیم در تعریف بالا طبق همواری f و هموراری و پیوستگی ψ^{-1} میدانیم چنانچه U را به قدر کافی کوچک در نظر گیریم، آنگاه به ازای توسیع هموار F از f و Ψ از ψ^{-1}، داریم $h = \psi^{-1} \circ f \circ \phi = \Psi \circ F \circ \phi$، و در نتیجه h روی یک مجموعه ی باز به قدر کافی کوچک، برابر با ترکیب سه تابع هموار با دامنه های باز بوده که قاعده ی زنجیره ای تضمین میکند dh_0 موجود است. همچنین با استدلالی مشابه استدلال خوش تعریفی یا همان یکتایی فضای مماس به ازای پارامتری سازی های متفاوت، در اینجا نیز میتوان مشاهده کرد، تعریف df_x، به انتخاب پارامتری سازی های ϕ و ψ وابسته نبوده و خوش تعریف است.

لازم به ذکر است، همانطور که در دیاگرام های زیر مشاهده میکنیم، نگاشت خطی df_x از فضای $T_x(X)$ بتوی $T_{f(x)}(Y)$ تعریف شده است.

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "h=\psi^{-1}\circ f\circ\phi"] \arrow[d, "\phi"'] & V \arrow[d, "\psi"] \\ X \arrow[r, "f"'] & Y \end{tikzcd}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^k \arrow[r, "dh_0"] \arrow[d, "d\phi_0"'] & \mathbb{R}^l \arrow[d, "d\psi_0"] \\ T_x(X) \arrow[r, "df_x"'] & T_{f(x)}(Y) \end{tikzcd}$$

اکنون طبق آنچه که مرتبط با نگاشت هایی از یک زیرمجموعه ی باز بتوی زیرمجموعه ای دلخواه از فضای

اقلیدسی بعنوان قاعده ی زنجیره ای بیان کردیم، حال به حکمی مشابه در مورد نگاشت های میان منیفلدها در قضیه ی زیر میپردازیم.

قضیه ۱.۲.۲. چنانچه $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ توابعی هموار از منیفلدها باشند، آنگاه داریم

$$d(g \circ f)_x = dg_{f(x)} \circ df_x.$$

اثبات. با داشتن نقطه ی $x \in X$، پارامتری سازی های $\phi : U \longrightarrow X$، $\psi : V \longrightarrow Y$ و $\eta : W \longrightarrow Z$ را به ترتیب حول نقاط $x \in X$، $y = f(x) \in Y$ و $z = g(y) \in Z$ در نظر میگیریم. حال طبق دیاگرام جابجایی زیر، با قرار دادن $h = \psi^{-1} \circ f \circ \phi$ و $j = \eta^{-1} \circ g \circ \psi$، میتوان نوشت $j \circ h = \eta^{-1} \circ (g \circ f) \circ \phi$.

$$\begin{tikzcd}
U \arrow[r, "h=\psi^{-1}\circ f\circ\phi"] \arrow[d, "\phi"'] & V \arrow[r, "j=\eta^{-1}\circ g\circ\psi"] \arrow[d, "\psi"] & W \arrow[d, "\eta"] \\
X \arrow[r, "f"'] & Y \arrow[r, "g"'] & Z
\end{tikzcd}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{tikzcd}
U \arrow[r, "j\circ h"] \arrow[d, "\phi"'] & W \arrow[d, "\eta"] \\
X \arrow[r, "g\circ f"'] & Z
\end{tikzcd}$$

اما از آنجایی که f و g هموار بودند، توسیع های هموار $F : I \longrightarrow J$ و $G : H \longrightarrow K$ برای آنها وجود دارند. توجه میکنیم که لزوماً $x \in I$ و $y \in H$ که در نتیجه $F(x) = f(x) = y \in J$ پس $J \cap H \neq \emptyset$، همچنین مشخص است $J \cap H$ در J باز است، لذا طبق پیوستگی F داریم $F^{-1}(J \cap H)$ در I و در نتیجه در

$\mathbb{R}^N$ که $I \subset \mathbb{R}^N$، باز است. حال با تعریف

$$\begin{aligned} \tilde{F}\colon F^{-1}(J\cap H) &\longrightarrow J\cap H \\ p &\mapsto F(p) \end{aligned}$$

میتوان گفت، $G\circ\tilde{F}$ توسیعی هموار از $g\circ f$ میباشد، زیرا به ازای هر $p\in X\cap F^{-1}(J\cap H)$ داریم

$$\begin{aligned} p\in X\cap F^{-1}(J\cap H)\subset X\cap I \Rightarrow \tilde{F}(p) &= F(p) = f(p) \\ &\Rightarrow (G\circ\tilde{F})(p) = G(f(p)), \quad f(p)\in Y\cap H \\ &\Rightarrow (G\circ\tilde{F})(p) = g(f(p)) = (g\circ f)(p), \end{aligned}$$

یعنی $(G\circ\tilde{F})\Big|_{X\cap F^{-1}(J\cap H)} = (g\circ f)|_{X\cap F^{-1}(J\cap H)}$، و همچنین از همواری F، همواری $\tilde{F}$ نتیجه شده و طبق قضیه ی ۱.۲.۱ داریم $G\circ\tilde{F}$ هموار است. حال میتوان $g\circ f$ را تابعی هموار بین منیفلدهای X و Z در نظر گرفت، و با تعریف $k := \eta^{-1}\circ(g\circ f)\circ\phi$ و همانطور که دیدیم، برقراری رابطه ی $k = j\circ h$، مطابق با تعریف مشتق ۵.۲.۱ بنویسیم

$$\begin{aligned} d(g\circ f)_x &= d\eta_0\circ dk_0\circ d\phi_0{}^{-1} \\ &= d\eta_0\circ d(j\circ h)_0\circ d\phi_0{}^{-1} \\ &= d\eta_0\circ dj_0\circ dh_0\circ d\phi_0{}^{-1} \\ &= (d\eta_0\circ dj_0\circ d\psi_0{}^{-1})\circ(d\psi_0\circ dh_0\circ d\phi_0{}^{-1}) \\ &= dg_{f(x)}\circ df_x \\ &\Rightarrow d(g\circ f)_x = dg_{f(x)}\circ df_x \end{aligned}$$

و اثبات کامل است. $\square$

۳.۱　قضیهٔ تابع وارون و ایمرشن‌ها

همانطور که تا کنون قابل برداشت بوده است، هدف ما از بیان مباحث و تعاریف متوالی، این بوده که دست کم بصورت موضعی، زمینه ای را برای انتقال نقطه نظرمان از نگاشت های هموار، به جبرخطی و نگاشت‌های خطی میان فضاهای برداری، فراهم آوریم. لذا در بخش های آتی این فصل سعی داریم به مطالعه ی چنین ارتباط هایی در مورد نگاشت های هموار میان منیفلد ها پرداخته، و البته به کار بردن نگاشت هموار، بجای نگاشت های پیوسته که در توپولوژی غیر دیفرانسیلی مطرح اند، به این دلیل است که رفتار موضعی این گونه توابع، به واسطه ی مشتقشان، در حد یک دیفیومورفیسم، کاملا قابل شناسایی است.

تعریف ۱.۳.۱. چنانچه X و Y دو منیفلد با بعد برابر بوده و نقطه ی $x \in X$ مفروض باشد، نگاشت هموار $f : X \longrightarrow Y$ را یک دیفیومورفیسم موضعی در x گوییم هر گاه، همسایگی U از x در X و V از $y = f(x)$ در Y به گونه ای موجود باشند که $f(U) = V$ و $f|_U$ یک دیفیومورفیسم باشد.

گزاره ۱.۳.۱. اگر f یک دیفیومورفیسم موضعی در x باشد، در این صورت، نگاشت مشتق آن در x، یعنی $df_x : T_x(X) \longrightarrow T_{f(x)}(Y)$، یک ایزومورفیسم خطی است.

اثبات. با مفروضات تعریف ۵.۲.۱ میدانیم تساوی

$$df_x = d\psi_\circ \circ dh_\circ \circ d\phi_\circ^{-1} \tag{۱.۱}$$

را داریم که $h = \psi^{-1} \circ f \circ \phi$، و همچنین با به قدر کافی کوچک گرفتن دامنه های ϕ و ψ، در این صورت h برابر با یک دیفیومورفیسم $\tilde{h}$ با دامنه و برد باز در $\mathbb{R}^k$ خواهد بود، که k، بُعد مشترک X و Y است. اما بسادگی به واسطه ی قاعده ی زنجیره ای نتیجه میشود، مشتق یک دیفیومورفیسم با دامنه و برد باز در فضاهای اقلیدسی، که در اینجا $d\tilde{h}_\circ$ مد نظر است، یک ایزومورفیسم خطی است. همچنین داریم $dh_\circ = d\tilde{h}_\circ$، پس طبق تساوی ۱.۱، df_x ترکیب سه ایزومورفیسم خطی میباشد که نتیجه میدهد خود نیز یک ایزومورفیسم است و حکم ثابت است. □

حال سعی بر بیان این موضوع داریم که عکس گزاره ی فوق نیز برقرار است، اما پیش از چنین نتیجه ای، یک یادآوری از قضیه ی مهمی در آنالیز ریاضی به نام قضیه ی تابع وارون، به عمل می آوریم.

قضیه ۱.۳.۱. فرض کنیم f، یک نگاشت با مشتق کلی پیوسته، از یک بازه ی باز $E \subset \mathbb{R}^n$ بتوی $\mathbb{R}^n$ باشد. چنانچه به ازای یک $x \in E$، $f'(x) = df_x$ وارون پذیر باشد و قرار دهیم $y = f(x)$، آنگاه

۱. زیر مجموعه های باز U و V از $\mathbb{R}^n$ بطوری وجود دارند که $x \in U$، $y \in V$، $f(U) = V$ و f روی U یک به یک است؛

۲. اگر g، وارون f، تعریف شده روی V باشد(که توسط (۱) وجود دارد)، یعنی

$$g(f(p)) = p \qquad\qquad (p \in U),$$

آنگاه g روی V مشتق پیوسته خواهد داشت.

اکنون به خوبی میتوانیم به عکس گزاره ی ۱.۳.۱ بپردازیم.

نتیجه ۱.۳.۱. فرض کنیم نگاشت هموار $f : X \longrightarrow Y$ را میان منیفلدها بطوری داشته باشیم که df_x در نقطه‌ی مفروض $x \in X$ یک ایزومورفیسم باشد، در این صورت خواهیم داشت f یک دیفیومورفیسم موضعی در x است.

اثبات. مطابق تعریف ۵.۲.۱، با مفروضات ذکر شده، در نظر میگیریم $df_x = d\psi_۰ \circ dh_۰ \circ d\phi_۰^{-۱}$، اما طبق ایزومورفیسم بودن df_x، $d\psi_۰$ و $d\phi_۰^{-۱}$، خواهیم داشت که $dh_۰$ نیز یک ایزومورفیسم از $\mathbb{R}^k$ به $\mathbb{R}^k$ است. لذا از قضیه ی ۱.۳.۱، h یک دیفیومورفیسم موضعی در ۰ است و بنابراین با تحدید دیفیومورفیسم های ϕ و ψ به مجموعه‌های باز مناسب، میتوان گفت روی همسایگی هایی از x و $f(x)$ داریم f برابر با ترکیب دیفیومورفیسم‌ها بصورت $f = \psi \circ h \circ \phi^{-۱}$ خواهد بود که نتیجه میدهد f یک دیفیومورفیسم موضعی در x است.

□

همانطور که از جبرخطی میدانیم، مشتق df_x را که یک نگاشت خطی است، میتوان با ماتریسی از اعداد نمایش داد. این تابع خطی، دقیقا زمانی وارون پذیر است که دترمینان ماتریس نمایش آن، ناصفر باشد. بنابراین قضیه ی تابع وارون بیان میدارد که بررسی این که آیا f، همسایگی ای از x را بطور پوشا و دیفیومورفیسم به همسایگی ای از $f(x)$ میبرد یا خیر، به سوالی به مراتب ساده تر کاهش میابد، و آن این است که آیا دترمینان یک ماتریس، صفر است یا خیر؟!

لازم به ذکر است که قضیه ی تابع وارون، در حالت کلی، بیانگر یک حکم موضعی است و تنها رفتار f را در یک همسایگی x توصیف میکند. حتی اگر df_x به ازای هر $x \in X$ وارون پذیر باشد، ما نمیتوانیم لزوما نتیجه بگیریم که f یک دیفیومورفیسم سراسری بین فضاهای X و Y است، و تنها میتوان ادعا کرد f در هر $x \in X$، دیفیومورفیسم موضعی است. اما بطور کل برای چنین توابعی تعریف زیر را به کار میبریم.

تعریف ۱.۳.۲. تابع هموار $f : X \longrightarrow Y$ را یک دیفیومورفیسم موضعی گویند هر گاه به ازای هر $x \in X$، f در x دیفیومورفیسم موضعی باشد.

نمونه ای مرسوم از یک دیفیومورفیسم موضعی که دیفیمورفیسمی سراسری نیست، نگاشت $f : \mathbb{R}^1 \longrightarrow \mathbb{S}^1$ با دستور $f(t) = (\cos t, \sin t)$ میباشد که به علت متناوب بودن توابع مثلثاتی و عدم یک به یکی f، نمیتواند دیفیومورفیسم سراسری باشد.

بعنوان یک بازنگاری از قضیه ی تابع وارون بوسیله ی مختصات های موضعی میتوان گفت:

گزاره ۱.۳.۲. اگر df_x یک ایزومورفیسم باشد، آنگاه پارامتری سازی های $\phi : U \longrightarrow X$ و $\psi : U \longrightarrow Y$ به ترتیب حول $x \in X$ و $f(x) \in Y$ با دامنه های باز مشترک در $\mathbb{R}^k$ موجودند که رابطه ی $\psi^{-1} \circ f \circ \phi = Id$ برقرار باشد، یا به عبارتی دیگر، دیاگرام جابجایی زیر را داشته باشیم.

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ {\scriptstyle\phi}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle\psi} \\ U & \xrightarrow[Id]{} & U \end{array}$$

حکم اخیر را با جمله ای به این ترتیب که مختصات های موضعی حول x و $f(x)$ موجودند بطوریکه $f(x_1, \dots, x_k) = (x_1, \dots, x_k)$ نیز بیان میکنند. حال به منظور هم ارز دانستن موضعی f، با تابع همانی، به تعریف زیر توجه میکنیم.

تعریف ۱.۳.۳. دو نگاشت $f : X \longrightarrow Y$ و $f' : X' \longrightarrow Y'$ را هم ارز گوییم هر گاه دو دیفیومورفیسم $\alpha : X' \longrightarrow X$ و $\beta : Y' \longrightarrow Y$ به گونه ای وجود داشته باشند که $\beta^{-1} \circ f \circ \alpha = f'$، یا به عبارتی دیگر،

دیاگرام زیر جابجایی باشد.

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ {\scriptstyle\alpha}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle\beta} \\ X' & \xrightarrow[f']{} & Y' \end{array}$$

در چنین شرایطی، عبارت " f و f' در حد دیفیومورفیسم یکی هستند " نیز به کار می‌رود.

با اصطلاحات فوق، قضیه ی تابع وارون را میتوان بدینگونه بیان داشت:

گزاره ۱.۳.۳. اگر df_x یک ایزومورفیسم باشد، آنگاه f در x، موضعاً با تابع همانی هم ارز است.

حتی برای بیان ساده تر از گزاره ی اخیر میتوانیم به نکات زیر توجه کنیم.

تذکر ۱.۳.۱. یک نگاشت خطی، هم ارز با تابع همانی است، اگر و تنها اگر ایزومورفیسم باشد.

بدین ترتیب، بیان ساده تر از قضیه ی تابع وارون به همراه تلفیق با گزاره ی ۱.۳.۱، به شرح زیر است.

گزاره ۱.۳.۴. f دقیقاً زمانی بطور موضعی با همانی هم ارز است که df_x اینگونه باشد.

تا اینجای کار، در این بخش به نگاشت های هموار میان منیفلد های با بعد برابر پرداخته شد و قضیه ای اساسی در این خصوص، به نام قضیه ی تابع وارون، بررسی گردید. اما چنانچه منیفلد هایی با بعدهای نامساوی داشته باشیم، شرایط متفاوتی رخ میدهد که در ادامه ی بخش به تحقیق درباره ی نگاشتی همچون $f : X \longrightarrow Y$ معطوف میشویم که X و Y، منیفلدهایی با شرط $\dim X \leq \dim Y$ میباشند. حال با چنین شرطی، بهترین انتظار که به لحاظ دیفرانسیلی میتوان از f داشت، این است که $df_x : T_x(X) \longrightarrow T_{f(x)}(Y)$ یک به یک باشد. پس این بحث را با تعریف زیر آغاز میکنیم.

تعریف ۱.۳.۴. فرض کنیم میان منیفلد های X و Y، نگاشت هموار $f : X \longrightarrow Y$ را داشته باشیم، همچنین نامساوی $\dim X \leq \dim Y$ برقرار باشد، در این صورت گوییم f یک ایمرشن در $x \in X$ است، هر گاه $df_x : T_x(X) \longrightarrow T_{f(x)}(Y)$ یک به یک باشد.

تعریف ۱.۳.۵. اگر f در هر $x \in X$ یک ایمرشن باشد، بطور کلی، f را یک ایمرشن گوییم.

تعریف ۱.۳.۶. منظور از ایمرشن کانونی، همان نگاشت شمول استاندارد از $\mathbb{R}^k$ به $\mathbb{R}^l$ با $k \leq l$ است که هر $(a_1, \ldots, a_k) \in \mathbb{R}^k$ را به $(a_1, \ldots, a_k, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^l$ می‌نگارد.

در حقیقت در قضیه ی بعد، به نام قضیه ی ایمرشن موضعی، مشخص میشود که در حد دیفیومورفیسم، ایمرشن کانونی، موضعاً تنها ایمرشن است.

قضیه ۱.۳.۲. فرض کنیم $f : X \longrightarrow Y$ یک ایمرشن در x باشد و قرار دهیم $y = f(x)$. آنگاه مختصات‌های موضعی حول x و y وجود خواهند داشت بطوریکه $f(x_1, \ldots, x_k) = (x_1, \ldots, x_k, 0, \ldots, 0)$. به عبارتی دیگر، f حول x، موضعاً هم ارز با ایمرشن کانونی میباشد.

اثبات. پارامتری سازی های موضعی $\phi : U \longrightarrow X$ و $\psi : V \longrightarrow Y$ را به ترتیب حول نقاط x و y، و تابع $g : U \longrightarrow V$ را بطوری در نظر میگیریم که دیاگرام زیر جابجایی باشد.

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ \phi \uparrow & & \uparrow \psi \\ U & \xrightarrow[g]{} & V \end{array}$$

همچنین فرض کنیم $x = \phi(0)$ و $y = \psi(0)$. حال g را به گونه ای تکمیل میکنیم که قضیه ی تابع وارون قابل اجرا باشد. میدانیم $df_x = d\psi_0 \circ dg_0 \circ d\phi_0^{-1}$، بنابراین از یک به یکی df_x، $d\psi_0$ و $d\phi_0^{-1}$، نتیجه میشود $dg_0 : \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}^l$ یک به یک است، از این رو چنانچه $\mathscr{A}$ و $\mathscr{A}'$ به ترتیب پایه های استاندار $\mathbb{R}^k$ و $\mathbb{R}^l$ باشند، خواهیم داشت $[dg_0]_{\mathscr{A}}^{\mathscr{A}'}$ دارای ستون های مستقل خطی بوده، پس رتبه ی ستونی آن کامل است و لذا حاصلضربی از ماتریس های مقدماتی مانند $E_{l\times l}$ وجود دارد به قسمی که فرم سطری پلکانی کاهش یافته ی $l \times k$ زیر بدست آید.

$$E[dg_0]_{\mathscr{A}}^{\mathscr{A}'} = \left(\begin{array}{c} \mathbf{I_k} \\ \hline \mathbf{0} \end{array}\right) \tag{۲.۱}$$

که I_k ماتریس همانی $k \times k$ میباشد. پس نتیجه میشود اگر ستون های E^{-1} را بعنوان پایه ی جدید $\mathbb{R}^l$ با نام $\mathscr{B}'$ در نظر گیریم، آنگاه ماتریس نمایش dg_0 نسبت به پایه های $\mathscr{A}$ و $\mathscr{B}'$ بصورت زیر است.

$$
\begin{aligned}
[dg_\circ]^{\mathscr{B}'}_{\mathscr{A}} &= [Id]^{\mathscr{B}'}_{\mathscr{A}'}[dg_\circ]^{\mathscr{A}'}_{\mathscr{A}}[Id]^{\mathscr{A}}_{\mathscr{A}} = ([Id]^{\mathscr{A}'}_{\mathscr{B}'})^{-1}[dg_\circ]^{\mathscr{A}'}_{\mathscr{A}}[Id]^{\mathscr{A}}_{\mathscr{A}} \\
&= (E^{-1})^{-1}[dg_\circ]^{\mathscr{A}'}_{\mathscr{A}} I = E[dg_\circ]^{\mathscr{A}'}_{\mathscr{A}} = \left(\begin{array}{c} \mathbf{I_k} \\ \hline \mathbf{0} \end{array}\right)
\end{aligned}
$$

بنابراین با تغییر پایه ی $\mathbb{R}^l$، ماتریس نمایش $dg_\circ$ نسبت به پایه های $\mathscr{A}$ و $\mathscr{B}'$، به فرم ۲.۱ در آمد.

حال تابع $G : U \times \mathbb{R}^{l-k} \longrightarrow \mathbb{R}^l$ را با دستور $G(x,z) = g(x) + (\circ, z)$ تعریف میکنیم، که G زیرمجموعه‌ای باز از $\mathbb{R}^l$ را بتوی $\mathbb{R}^l$ مینگارد و ماتریس نمایش تبدیل خطی $dG_\circ$، برابر I_l خواهد بود. با این اوصاف، با به کار گیری قضیه ی تابع وارون، نتیجه خواهیم گرفت G یک دیفیومورفیسم موضعی از $\mathbb{R}^l$ در $\circ$ است. توجه میکنیم که دستور G ایجاب میکند $g = G \circ (\text{canonical immersion})$.

از آنجایی که ψ و G دیفیومورفیسم های موضعی در $\circ \in \mathbb{R}^l$ هستند، میتوان نتیجه گرفت، با تحدید دامنه و بردهایشان، $G \circ \psi$ نیز یک دیفیومورفیسم موضعی در $\circ$ بوده و همچنین میتواند بعنوان یک پارامتری سازی موضعی حول y در نظر گرفته شود. علاوه بر اینها با به قدر کافی کوچک گرفتن U و V، طبق تساوی پاراگراف قبل و مراجعه به دیاگرام جابجایی ابتدای اثبات، خواهیم داشت دیاگرام زیر جابجایی است.

$$
\begin{array}{ccc}
X & \xrightarrow{f} & Y \\
\phi \big\uparrow & & \big\uparrow \psi\circ G \\
U & \xrightarrow[\text{canonical immersion}]{} & V
\end{array}
$$

$\square$

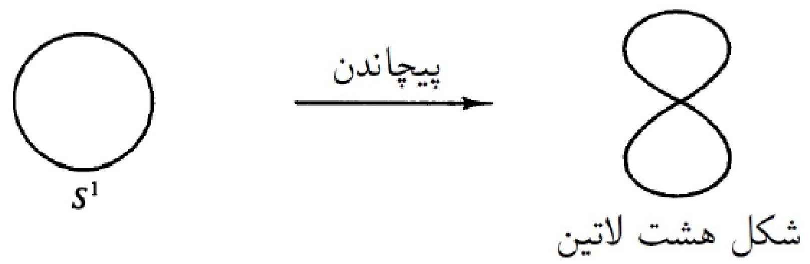
یک نتیجه ی واضح و مفید از قضیه ی فوق، به شرح زیر است.

نتیجه ۱.۳.۲. چنانچه f یک ایمرشن در x باشد، آنگاه در یک همسایگی از x ایمرشن خواهد بود.

نکته ای حائز اهمیت این است که شرط ایمرشن بودن، ذاتاً یک شرط موضعی اکید است. برای مثال، زمانی که X و Y، بعد یکسان داشته باشند، ایمرشن ها همان دیفیومورفیسم های موضعی اند. در حالی که، دیفیومورفیسم‌های واقعی باید در دو شرطی که یکی شرط دیفرانسیلی موضعی و دیگری شرط توپولوژیکی سراسری

است صدق کنند: باید دیفیومورفیسمی موضعی بوده و خاصیت یک به یکی و پوشایی را داشته باشند. بنابراین به منظور قوی تر کردن ایمرشن برای اینکه از خود، خصوصیات سراسری مطلوبی را نشان دهد، باید شروط توپولوژیکی را به اطلاعات دیفرانسیلی موضعی، بیافزاییم.

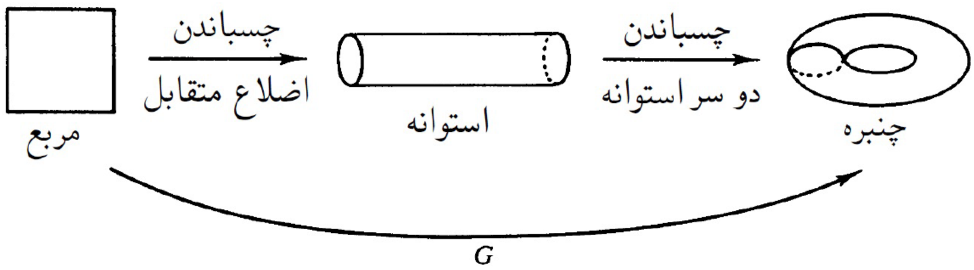
از موارد مهم در مورد ایمرشن ها، تصویر آنها است. تصویر ایمرشن کانونی $\mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}^l$، مثالی واضح از یک زیرمنیفلد میباشد. اما در حالت کلی لزومی ندارد که تصویر یک ایمرشن دلخواه مانند $f : X \longrightarrow Y$، یک زیرمنیفلد از Y باشد. برای مشاهده ی علت این اتفاق، در نظر میگیریم که از قضیه ی ایمرشن موضعی نتیجه میشود برای هر $x \in X$، همسایگی کوچکی از x مانند W وجود دارد که f روی آن برابر با ترکیب توابعی یک به یک و هموار است پس میتوان ادعا کرد f، همسایگی W از x را بطور دیفیومورف، به $f(W)$ مینگارد. به نظر میرسد حول هر $x \in X$، یک پارامتری سازی مناسب یافت شده است و خبر از k-منیفلد بودن $f(X)$ را میدهد اما نکته اینجاست که در استدلال فوق، $f(W)$ لزوماً یک همسایگی باز از $f(x) \in f(X)$ نمیباشد، در حالی که در تعریف منیفلد، برد پارامتری سازی ها نیز همسایگی هایی باز بودند. بعنوان مثال، در نظر میگیریم، نگاشتی که دایره را به شکل هشت لاتین میپیچاند(تصویر ۵.۱). این یک ایمرشن از $\mathbb{S}^۱$ به $\mathbb{R}^۲$ است، اما تصویرش زیر منیفلد $\mathbb{R}^۲$ نیست. البته در این مثال، مشکل از یک به یک نبودن این ایمرشن ناشی شده است اما زمانی که یک ایمرشن یک به یک هم در دست داشته باشیم، باز لزومی ندارد که تصویرش یک منیفلد باشد. مثلاً، همین تصویر هشت لاتین را به نوعی دیگر با یک ایمرشن یک به یک که در تصویر ۶.۱ مشاهده میکنیم میتوان بدست آورد.



شکل ۵.۱: ایمرشنی از $\mathbb{S}^۱$ به $\mathbb{R}^۲$

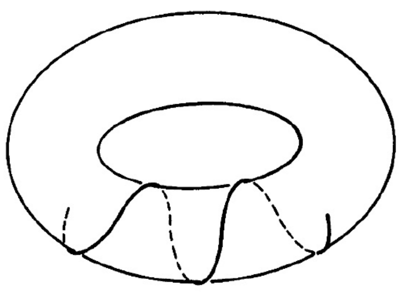
به عنوان موردی ناهنجار تر میتوان به مثال آتی توجه کرد. دیفیوموفیسم موضعی $g : \mathbb{R}^۱ \longrightarrow \mathbb{S}^۱$ با دستور $g(t) = (\cos ۲\pi t, \sin ۲\pi t)$ را در نظر میگیریم. تعریف میکنیم $G : \mathbb{R}^۲ \longrightarrow \mathbb{S}^۱ \times \mathbb{S}^۱$ با ضابطه ی $G(x, y) = (g(x), g(y))$. G یک دیفیومورفیسم موضعی از صفحه به روی چنبره است. در واقع، G را میتوان روش ساختن چنبره از روی مربع واحد در صفحه، با چسباندن اضلاع روبرو به یکدیگر تعبیر کرد(شکل ۷.۱).

شکل ۶.۱: ایمرشنی یک به یک از $\mathbb{R}^1$ به $\mathbb{R}^2$



شکل ۷.۱

حال نگاشتی از $\mathbb{R}^1$ به چنبره را، با تحدید کردن G به یک خط راست گذرا از مبدا در صفحه ی $\mathbb{R}^2$ با شیب گنگ، تعریف میکنیم. از آنجایی که G یک دیفیومورفیسم موضعی است، طبق گزاره ی ۱.۳.۱، این نگاشت یک ایمرشن خواهد بود که $\mathbb{R}^1$ را به دور چنبره میچرخاند(شکل ۸.۱). علاوه بر این، طبق گنگ بودن شیب خط، میتوان نشان داد ایمرشن مذکور، یک به یک بوده و تصویر آن زیر مجموعه ای چگال از چنبره است در حالی که یک زیر منیفلد آن نیست!



شکل ۸.۱

آنچه مشخص است، در این مثال ها، فشرده نبودن دامنه سبب میشود نقاط بسیار زیادی نزدیک به بینهایت

در $\mathbb{R}^1$ را به محدوده ی کوچکی از تصویر، بنگاریم، و این است که باعث بر هم خوردن توپولوژی در تصویر یک ایمرشن یک به یک شده و رفتار نامناسب از خود نشان میدهد. به منظور رفع این مشکل، مشابه توپولوژی‌عمومی، نقاط نزدیک به بینهایت را در خارج از یک زیرمجموعه ی فشرده از فضا در نظر گرفته و شرطی مرتبط با فشردگی، بر روی ایمرشن های یک به یک اعمال کرده و خوش رفتاری هایی را استنتاج مینماییم، بدین منظور به تعاریف و قضایای زیر خواهیم پرداخت.

تعریف ۱.۳.۷. نگاشت $f : X \longrightarrow Y$ را سره نامیم هر گاه تصویر معکوس هر مجموعه ی فشرده در Y، در X فشرده باشد.

بطور شهودی، یک نگاشت سره، نقاط نزدیک به بینهایت در X را به نقاط نزدیک به بینهایت در Y مینگارد.

تعریف ۱.۳.۸. هر ایمرشن که یک به یک و سره باشد را یک نشاننده گوییم.

حال با افزودن محدودیت های توپولوژیکی سراسری به شرط موضعی ایمرشن بودن، میتوان اثباتی از یک تعمیم سراسری قضیه ی ایمرشن موضعی را در زیر، تحقیق کرد.

قضیه ۱.۳.۳. نشاننده ای مانند $f : X \longrightarrow Y$، X را بطور دیفیومورف به روی یک زیرمنیفلد Y مینگارد.

اثبات. در توضیحات پس از قضیه ی ۱.۳.۲ دیدیم برای اثبات منیفلد بودن $f(X)$ کافی است داشته باشیم که تصویر هر زیرمجموعه ی باز W از X تحت f، در $f(X)$ باز است. به برهان خلف فرض کنیم $f(W)$ در $f(X)$ باز نمیباشد، آنگاه طبق نقیض شرط باز بودن یک مجموعه در زیرفضای توپولوژیکی از $\mathbb{R}^M$، خواهیم داشت،

$$\exists y \in f(W); \forall B(y,\epsilon) \cap f(X) \nsubseteq f(W)$$
$$\Rightarrow \exists \{y_n\}_{n=1}^{\infty} \subset f(X); \forall n, y_n \notin f(W), y_n \to y$$

حال از آنجایی که مجموعه ی $K := \{y, y_n\}$ متشکل از یک دنباله به همراه حد آن میباشد، از توپولوژی‌عمومی میدانیم $K \subset Y$ فشرده است، و چونکه f نگاشتی سره میباشد داریم، $f^{-1}(K) \subset X$ فشرده است. همچنین از یک به یکی f نتیجه میشود تصویر معکوس هر y_n، دقیقاً یک نقطه مانند $x_n \in X$ بوده و به همین صورت، $x \in X$ بطور یکتا وجود دارد که $f(x) = y$ و داریم $x \in W$. حال طبق فشرده بودن $f^{-1}(K) = \{x, x_n\}$

در X، نتیجه میشود زیر دنباله ای از $\{x_n\}$ به نقطه ای مانند $z \in X$ همگرا است. آنگاه طبق همواری و در نتیجه پیوستگی f داریم $f(x_{n_k}) \to f(z)$ یعنی $y_{n_k} \to f(z)$ اما طبق $y_n \to y = f(x)$ و میل کردن هر زیردنباله از یک دنباله ی همگرا، به حد دنباله ی اصلی، داریم $f(z) = f(x)$. پس از یک به یکی f نتیجه میشود $z = x$. حال بنا بر باز بودن W در X و $x_{n_k} \to x$ داریم به ازای یک i به اندازه ی کافی بزرگ، $x_i \in W$، اما داشتیم $f(x_i) = y_i$ پس $y_i \in f(W)$ در حالی که طبق انتخاب y_n ها، برای هر $n \in \mathbb{N}$، $y_n \notin f(W)$ پس به تناقض رسیدیم که از آن ناشی شده است که فرض کردیم $f(W) \subset f(X)$ باز نمیباشد. نتیجتاً داریم $f(X)$ یک منیفلد است.

حال، دیفیومورفیسم بودن $f : X \longrightarrow f(X)$، بسادگی قابل اثبات است، زیرا میدانیم f یک به یک، پوشا و هموار است، همچنین وارون آن یعنی $f^{-1} : f(X) \longrightarrow X$، خوش تعریف بوده و f^{-1} نیز ترکیب توابعی هموار مطابق با دیاگرام قضیه ی ۲.۳.۱ میباشد پس خود نیز نگاشتی هموار خواهد بود.

□

گزاره ۵.۳.۱. چنانچه $f : X \longrightarrow Y$ یک ایمرشن یک به یک بوده و X منیفلدی فشرده باشد، آنگاه f یک نشاننده است.

اثبات. باید نشان دهیم f نگاشتی سره است. در نظر میگیریم $K \subset Y$ فشرده باشد، چون Y یک فضای توپولوژیک هاسدورف است، K زیر مجموعه ای بسته از آن خواهد بود، اما طبق همواری و در نتیجه پیوستگی f میتوان گفت $f^{-1}(K) \subset X$ بسته است و از آنجا که X فشرده میباشد داریم، زیرمجموعه ای بسته همچون $f^{-1}(K)$ از فضای فشرده ی X، فشرده است و چون K دلخواه بود، نتیجه میشود f یک نگاشت سره میباشد.

□

۴.۱ سابمرشن‌ها

در ادامه به بررسی حالت مهم $\dim X \geq \dim Y$ برای نگاشت $f : X \longrightarrow Y$ خواهیم پرداخت، که قویترین شرط قابل اعمال بر مشتق آن عبارت است از پوشا بودن $df_x : T_x(X) \longrightarrow T_{f(x)}(Y)$.

تعریف ۱.۴.۱. نگاشت هموار $f : X \longrightarrow Y$ را یک سابمرشن در $x \in X$ گوییم هر گاه df_x پوشا باشد. همچنین نگاشتی که در همه ی نقاط X سابمرشن باشد را بطور خلاصه، یک سابمرشن نامیم.

تعریف ۲.۴.۱. نگاشت استاندارد تصویر از $\mathbb{R}^k$ به $\mathbb{R}^l$ که $k \geq l$ و درآن داریم $(a_1, \ldots, a_k) \mapsto (a_1, \ldots, a_l)$ را سابمرشن کانونی گوییم.

مشابه حالت ایمرشن، هر سابمرشن بطور موضعی در حد دیفیومورفیسم، همان سابمرشن کانونی است که در زیر، تحت عنوان قضیه ی سابمرشن موضعی بیان میکنیم.

قضیه ۱.۴.۱. فرض کنیم $f : X \longrightarrow Y$ یک سابمرشن در $x \in X$ بوده و $y = f(x)$. آنگاه مختصات های موضعی حول x و y موجودند بطوریکه $f(x_1, \ldots, x_k) = (x_1, \ldots, x_l)$. یعنی f ، موضعاً حول x هم ارز با سابمرشن کانونی خواهد بود.

اثبات. دقیقاً مشابه اثبات قضیه ی ۲.۳.۱ ، پارامتری سازی های موضعی $\phi : U \longrightarrow X$ و $\psi : V \longrightarrow Y$ را به ترتیب حول نقاط x و y، و تابع $g : U \longrightarrow V$ را بطوری در نظر میگیریم که دیاگرام زیر جابجایی باشد.

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ \phi\uparrow & & \uparrow\psi \\ U & \xrightarrow[g]{} & V \end{array}$$

همچنین فرض کنیم $x = \phi(0)$ و $y = \psi(0)$. حال g را به گونه ای تکمیل میکنیم که قضیه ی تابع وارون قابل اجرا باشد. از آنجایی که $dg_0 : \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}^l$ پوشا است، پس با تغییر پایه ی $\mathbb{R}^k$، میتوان فرض کرد

$$[dg_0] = \left(\mathbf{I_k}\middle|\mathbf{0}\right).$$

حال تابع

$$\begin{aligned} G :& U \longrightarrow \mathbb{R}^k \\ & a \mapsto (g(a), a_{l+1}, \ldots, a_k) \end{aligned}$$

را تعریف میکنیم که در آن $a = (a_1, \ldots, a_k)$، آنگاه خواهیم داشت $[dG_0] = \mathbf{I_k}$. بنابراین طبق قضیه ی تابع وارون، G حول ۰ یک دیفیومورفیسم موضعی است، لذا G^{-1} بعنوان یک دیفیومورفیسم از یک همسایگی

باز U' حول ۰، به U وجود خواهد داشت که رابطه ی $g = (\text{canonical submersion}) \circ G$ و سپس تساوی $g \circ G^{-1} = (\text{canonical submersion})$ برقرار میباشد، همچنین در نهایت، دیاگرام های جابجایی زیر حاصل خواهند شد که حکم قضیه است.

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ {\scriptstyle \phi\circ G^{-1}}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle \psi} \\ U' & \xrightarrow[g\circ G^{-1}]{} & V \end{array}$$

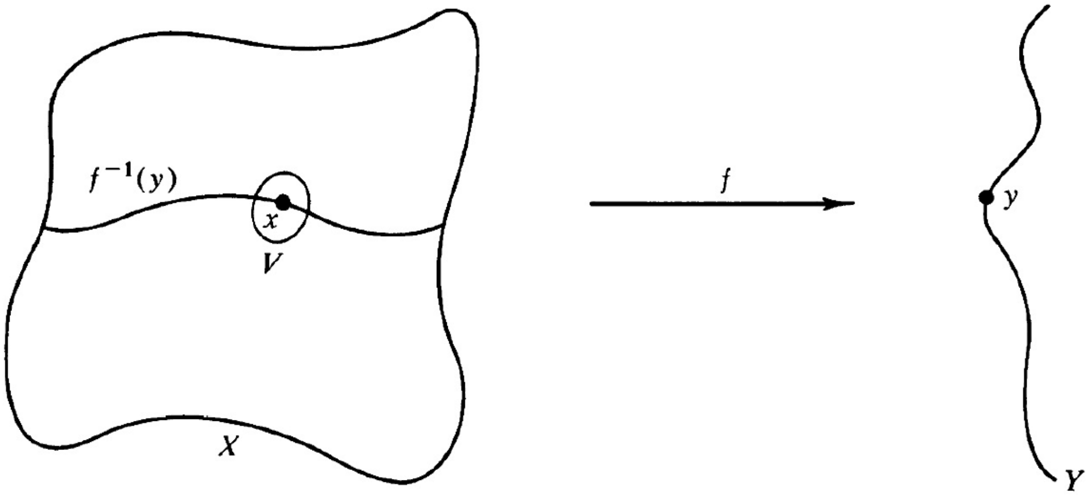
$$\Downarrow$$

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ {\scriptstyle \phi\circ G^{-1}}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle \psi} \\ U' & \xrightarrow[\text{canonical submersion}]{} & V \end{array}$$

$\square$

نتیجه ۱.۴.۱. چنانچه f یک سابمرشن در x باشد، آنگاه در سراسر یک همسایگی از x، سابمرشن خواهد بود.

یکی از پیامد های قضیه ی مشخصه سازی موضعی، دلالت بر ماهیت هندسی جوابهای معادلات تابعی میکند. اگر y یک نقطه از Y باشد و $f : X \longrightarrow Y$ را داشته باشیم آنگاه جوابهای معادله ی $f(x) = y$، یک زیرمجموعه از X را تشکیل میدهند که تصویر معکوس y نام دارد و با $f^{-1}(y)$ نمایش داده میشود. برای یک f دلخواه، این مجموعه لزوماً خاصیت هندسی مشخصی ندارد اما فرض کنیم f یک سابمرشن در $x \in f^{-1}(y)$ باشد. مختصات های موضعی حول x و y را به نحوی انتخاب میکنیم که $f(x_1, \dots, x_k) = (x_1, \dots, x_l)$ و y متناظر $(0, \dots, 0)$ باشد. بنابراین اطراف x، اعضای $f^{-1}(y)$ بصورت $(0, \dots, 0, x_{l+1}, \dots, x_k)$ خواهند بود. به عبارت دقیق تر، اگر V نمایش دهنده ی همسایگی x باشد که روی آن، مختصات موضعی $(x_1, \dots, x_k)$ تعریف شده است، در این صورت $f^{-1}(y) \cap V$ برابر با مجموعه ی نقاطی خواهد بود که دارای $x_1 = 0$، ...، $x_l = 0$ هستند. همچنین توابع x_{l+1}، ...، x_k تشکیل یک دستگاه مختصات روی $f^{-1}(y) \cap V$ خواهند داد که یک زیرمجموعه ی باز از $f^{-1}(y)$ میباشد و در شکل ۹.۱ ، تعبیر هندسی این موضوع نمایش داده شده است.



شکل ۹.۱

تعریف ۳.۴.۱. برای یک نگاشت هموار میان منیفلدها مانند $f : X \longrightarrow Y$، یک نقطه ی $y \in Y$ را یک مقدار منظم برای f گوییم هر گاه $df_x : T_x(X) \longrightarrow T_y(Y)$ در هر نقطه ی x که $f(x) = y$، پوشا باشد.

اما استدلال ارائه شده ی اخیر همراه با تعریف فوق، منجر به اثبات قضیه ی زیر، موسوم به قضیه ی تصویر معکوس، خواهد شد.

قضیه ۲.۴.۱. اگر y یک مقدار منظم از نگاشت $f : X \longrightarrow Y$ باشد، آنگاه تصویر معکوس $f^{-1}(y)$ یک زیرمنیفلد X با بعد $\dim f^{-1}(y) = \dim X - \dim Y$ خواهد بود.

تعریف ۴.۴.۱. یک نقطه ی $y \in Y$ که مقدار منظم f نباشد را یک مقدار بحرانی گوییم.

در نتیجه، مجموعه جواب $\{x : f(x) = y\}$، چنانچه y مقداری بحرانی باشد، پیچیده تر از پیش خواهد بود.

توجه داریم مطابق تعریف مقدار منظم، نتیجه ای منطقی این است که چنانچه یک $y \in Y$، عضو تصویر $f(X)$ نباشد آنگاه مقداری منظم خواهد بود، که این موضوع را حالت خاصی از تعریف در نظر میگیریم و در زمانی که به بررسی این موضوع میپردازیم که چه نقاطی عضو $f(X)$ نیستند، اطلاعاتمان از مقادیر منظم و همچنین نتیجه ی اخیر به کار خواهد آمد.

به جهت اهمیت بحث، تعریف منظم بودن را برای هر حالت ممکن از بعد منیفلدها مجدداً بیان میکنیم. اگر $\dim X \geq \dim Y$، آنگاه منظم بودن یک مقدار y به معنی سابمرشن بودن f در هرنقطه ی $x \in f^{-1}(y)$ است،

در صورتی که $\dim X = \dim Y$، منظور آن است که f در هر نقطه ی تصویر معکوس، یک دیفیومورفیسم موضعی باشد، و در نهایت در حالت $\dim X \leq \dim Y$، تمامی نقاط $f(X)$، بحرانی خواهند بود و تنها نقاطی منظم اند که هیچگاه توسط f اختیار نشوند.

مشخصاً، ساخت زیرمنیفلدها با استفاده از قضیه ی تصویر معکوس، بسیار ساده تر از یافتن پارامتری سازی‌های موضعی مناسب است، بدین منظور به مثال زیر توجه میکنیم.

مثال ۱.۴.۱. نگاشت $f : \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}$ با دستور $f(x) = |x|^۲ = x_۱^۲ + \cdots + x_k^۲$ را در نظر میگیریم. مشتق df_a در نقطه ی $a = (a_۱, \ldots, a_k)$ دارای ماتریس $(۲a_۱, \ldots, ۲a_k)$ میباشد، بنابراین $df_a : \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}$، پوشا است مگر در حالتی که $f(a) = ۰$، پس هر عدد حقیقی ناصفر، یک مقدار منظم از f خواهد بود. بخصوص، بدون تلاش نشان دادیم $S^{k-۱} = f^{-۱}(۱)$ یک منیفلد $k - ۱$ بعدی است.

مثال ۲.۴.۱. یک کاربرد قوی از قضیه، مربوط به گروه متعامد $O(n)$ یا همان گروه تبدیلات خطی حافظ فاصله از $\mathbb{R}^n$ میباشد. توجه میکنیم که $M(n)$، فضای همه ی ماتریس های $n \times n$، با تغییر آرایش، چیزی جز $\mathbb{R}^{n^۲}$ نمیباشد پس منیفلد است. $O(n)$ گروه تمام ماتریس هایی است که در معادله ی $AA^t = I$ صدق میکنند که A^t ترانهاده ی A و I ماتریس همانی است. خواهیم دید که $O(n)$ یک منیفلد است. میدانیم برای هر ماتریس A داریم AA^t یک ماتریس متقارن است. فضای برداری $S(n)$، متشکل از تمام ماتریس های متقارن $n \times n$ بوضوح زیرمنیفلدی از $M(n)$، دیفیومورف با $\mathbb{R}^k$ است که $k = n(n+۱)/۲$ و نگاشت $f : M(n) \longrightarrow S(n)$، با دستور $f(A) = AA^t$ هموار است. اما داریم $O(n) = f^{-۱}(I)$، لذا به منظور اثبات منیفلد بودن گروه متعامد، کافی است نشان دهیم I یک مقدار منظم f است، در نتیجه مشتق f در ماتریس نوعی A را محاسبه میکنیم.

$$
\begin{aligned}
df_A(B) &= \lim_{s \to ۰} \frac{f(A+sB) - f(A)}{s} \\
&= \lim_{s \to ۰} \frac{(A+sB)(A+sB)^t - AA^t}{s} \\
&= \lim_{s \to ۰} \frac{AA^t + sBA^t + sAB^t + s^۲ BB^t - AA^t}{s} \\
&= \lim_{s \to ۰} (BA^t + AB^t + sBB^t) \\
&= BA^t + AB^t
\end{aligned}
$$

حال سوال اینجاست که آیا $df_A : T_AM(n) \longrightarrow T_{f(A)}S(n)$ محاسبه شده در فوق، به ازای هر A عضو $f^{-1}(I) = O(n)$، پوشا است؟

به واسطه ی مشخصه سازی $M(n)$ و $S(n)$ توسط فضاهای اقلیدسی میتوان تساوی $T_AM(n) = M(n)$ و $T_{f(A)}S(n) = S(n)$ را در نظر گرفت. حال مسأله ی ما این خواهد بود که آیا به ازای هر $C \in S(n)$، یک $B \in M(n)$ یافت میشود که تساوی $df_A(B) = C$ برقرار شود یا به عبارتی داشته باشیم $BA^t + AB^t = C$؟ از آنجایی که C متقارن است، میتوان نوشت $C = \frac{1}{2}C + \frac{1}{2}C^t$، همچنین میدانیم $BA^t = \frac{1}{2}C$ بر حسب B جواب دارد زیرا داشتیم $AA^t = I$ پس با انتخاب $B = \frac{1}{2}CA$، خواهیم داشت

$$df_A(B) = (\frac{1}{2}CA)A^t + A(\frac{1}{2}CA)^t = \frac{1}{2}C(AA^t) + \frac{1}{2}(AA^t)C^t = \frac{1}{2}C + \frac{1}{2}C^t = C$$

پس B مطلوب را یافتیم و بنابراین f یک سابمرشن در هر $A \in f^{-1}(I)$ میباشد که نتیجه میشود I یک مقدار منظم از f است، لذا طبق قضیه، $O(n)$ یک زیرمنیفلد $M(n)$ با بعد

$$\dim O(n) = \dim M(n) - \dim S(n) = n^2 - \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$$

خواهد بود.

شایان ذکر است، $O(n)$ علاوه بر منیفلد بودن، یک گروه جبری نیز میباشد. میتوان نشان داد عمل های آن، یعنی ضرب

$$O(n) \times O(n) \longrightarrow O(n)$$
$$(A, B) \mapsto AB$$

و عمل وارون گرفتن

$$O(n) \longrightarrow O(n)$$
$$A \mapsto A^{-1} = A^t,$$

هر دو نگاشت‌هایی هموار میان منیفلدها هستند.

تعریف ۱.۴.۵. یک گروه جبری که منیفلد نیز میباشد را گروه لی نامیم هر گاه عمل های آن، هموار باشند.

حال صورت های دیگر از قضیه ی اخیر را که در بخش های بعدی کاربرد دارند در نظر میگیریم. یک صورت کابردی بدین ترتیب است که فرض کنیم g_1 ،...، g_l توابعی هموار و حقیقی مقدار روی منیفلد X با بعد $k \geq l$ باشند. خواهیم دید که تحت چه شرایطی، مجموعه ی Z شامل صفرهای مشترک این توابع، شیئ هندسی معناداری میباشد. بدین منظور، تابع $g = (g_1, \ldots, g_l) : X \longrightarrow \mathbb{R}^l$ را در نظر میگیریم. میدانیم اگر ۰ یک مقدار منظم g باشد، آنگاه $Z = g^{-1}(0)$ زیرمنیفلدی از X خواهد بود.

شرط منظم بودن برای ۰ را میتوان مستقیماً از توابع g_i جستجو کرد. از آنجایی که هر g_i یک نگاشت هموار از X به $\mathbb{R}$ است، مشتقش در یک نقطه ی x، برابر نگاشت خطی $d(g_i)_x : T_x(X) \longrightarrow \mathbb{R}$ خواهد بود، یعنی $d(g_i)_x$ یک تابعک خطی روی فضای برداری $T_x(X)$ میباشد. علاوه بر این، سریعاً دریافت میشود که $dg_x : T_x(X) \longrightarrow \mathbb{R}^l$ پوشا است اگر و تنها اگر l تابعک $d(g_1)_x$ ،...، $d(g_l)_x$ مستقل خطی روی $T_x(X)$ باشند، که بطور خلاصه گوییم l تابع g_1 ،...، g_l در x مستقل هستند. حال میتوان قضیه ی تصویر معکوس را به شرح زیر، بازنویسی کرد.

گزاره ۱.۴.۱. چنانچه برای توابع هموار و حقیقی مقدار g_1 ،...، g_l روی X، در هر $x \in X$ که تمام $g_i(x)$ها برابر ۰ است، استقلالشان را داشته باشیم، آنگاه مجموعه ی Z متشکل از صفرهای مشترک این توابع، یک زیرمنیفلد از X با بعد $\dim X - l$ خواهد بود.

تعریف ۱.۴.۶. همبعد یک زیر منیفلد دلخواه Z از X را بصورت $codimZ = \dim X - \dim Z$ تعریف میکنیم.

وابستگی همبعد، به نه فقط خود Z بلکه به منیفلد محیطی X ، از تعریف مشخص است. بنابراین طبق گزاره‌ی قبل، l تابع مستقل روی X، تشکیل یک زیر منیفلد با همبعد

$$codimZ = \dim X - \dim Z = \dim X - (\dim X - l) = l$$

خواهد داد.

به لحاظ تاریخی، اهمیت بحث صفرهای مشترک مجموعه ای از توابع، قابل درک است، بطوریکه هندسه جبری کلاسیک، به بررسی ماهیت چنین مجموعه های بدست آمده از چندجمله ای ها در فضاهای اقلیدسی میپردازد.

حال به این موضوع توجه میکنیم که در چه صورتی عکس گزاره ی اخیر برقرار است، یعنی چه زیرمنیفلدی مانند Z از X، لزوماً بدست آمده از توابع مستقل خواهد بود.

گزاره ۲.۴.۱ (عکس جزئی ۱)**.** چنانچه y یک مقدار منظم از نگاشت هموار $f : X \longrightarrow Y$ باشد، آنگاه زیرمنیفلد تصویر معکوس $f^{-1}(y)$ میتواند از توابع مستقل بدست آید.

گزاره ۳.۴.۱ (عکس جزئی ۲)**.** هر زیرمنیفلد Z از X بطور موضعی بوسیله ی توابع مستقل بدست می آید، یعنی چنانچه $z \in Z$ را داشته باشیم آنگاه l تابع مستقل g_1، ...، g_l تعریف شده بر یک همسایگی باز W از z در X وجود خواهد داشت بطوریکه $Z \cap W$ برابر مجموعه ی صفرهای مشترک g_i ها باشد. (توجه داریم به علت زیرمنیفلد بودن $Z \cap W$ در منیفلد W ، این حکم را عکس گزاره ی ۱.۴.۱ خواندیم.)

حال بطور خاص، با در نظر گیری X بعنوان هر فضای اقلیدسی دلخواه، خواهیم داشت هر منیفلد داده شده، قابل تعریف بطور موضعی توسط گردایه ای از توابع مستقل در فضای اقلیدسی است، اگر چه این حکم لزوماً بطور سراسری برقرار نیست.

گزاره ۴.۴.۱. چنانچه Z، تصویر معکوس یک مقدار منظم $y \in Y$ تحت نگاشت هموار $f : X \longrightarrow Y$ باشد، در این صورت هسته یا همان کرنل مشتق $df_x : T_x(X) \longrightarrow T_y(Y)$ در هر نقطه ی $x \in Z$، دقیقاً برابر با صفحه ی مماس بر Z یعنی $T_x(Z)$ خواهد بود.

اثبات. از آنجایی که f بر Z ثابت است، داریم df_x بر $T_x(Z)$ صفر خواهد بود، اما $df_x : T_x(X) \longrightarrow T_y(Y)$ پوشا است، بنابراین بُعد هسته ی df_x باید برابر با

$$\dim T_x(X) - \dim T_y(Y) = \dim X - \dim Y = \dim Z$$

باشد، لذا $T_x(Z)$ زیرفضایی برداری از هسته خواهد بود که بعدهای برابر دارند پس لزوماً باید داشته باشیم

$$T_x(Z) = \ker(df_x).$$

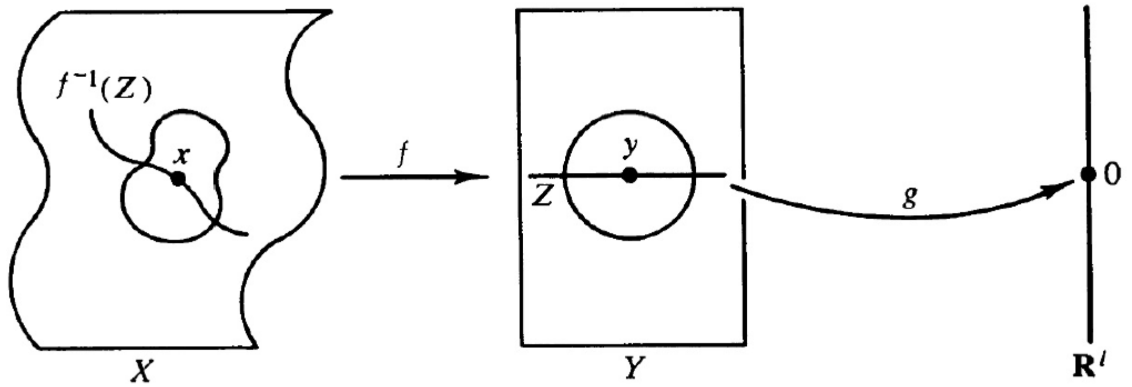
□

۵.۱ تراگذری

مشاهده کردیم مجموعه جواب معادله ی $f(x) = y$، زمانی که y مقداری منظم از نگاشت $f : X \longrightarrow Y$ باشد، تشکیل یک منیفلد هموار میدهد. حال مجموعه نقاطی از X را در نظر میگیریم که مقدار تابعی آنها لزوماً برابر با مقدار ثابتی نشود، بلکه در یک شرط هموار دلخواه صدق کند. بنابراین فرض کنیم Z زیرمنیفلدی از Y باشد، در این صورت، مجموعه جوابهای رابطه ی $f(x) \in Z$ را بررسی میکنیم که چه زمانی $f^{-1}(Z)$ شیئ هندسی مطلوبی است. بدین منظور، به تعریف مفهوم دیفرانسیلی دیگری در راستای تعمیم مفهوم منظم بودن میپردازیم که فضای کلی ادامه ی بحث در این پروژه را در بر خواهد گرفت.

اینکه $f^{-1}(Z)$ یک منیفلد است، مسأله ای موضعی است. یعنی منیفلد بودن آن معادل میشود با اینکه به ازای هر نقطه ی $x \in f^{-1}(Z)$، یک همسایگی U از آن در X موجود باشد بطوریکه $f^{-1}(Z) \cap U$ یک منیفلد باشد. این مشاهده به ما این امکان را میدهد که برای مطالعه ی رابطه ی $f(x) \in Z$، به حالت ساده تری که قبلاً بررسی شد رجوع کنیم، یعنی زمانی که Z تک نقطه ای باشد. برای اینکه اگر $y = f(x)$، میتوان Z را طبق گزاره‌ی ۳.۴.۱ در یک همسایگی از y بصورت صفرهای مشترک گردایه ای از توابع مستقل g_1، ...، g_l بنویسیم که l، همبعد Z در Y میباشد. سپس در اطراف x، تصویر معکوس $f^{-1}(Z)$، برابر با مجموعه صفرهای $g_1 \circ f$، ... ، $g_l \circ f$ خواهد بود زیرا چنانچه به ازای یک $x_0 \in X$، برای هر i داشته باشیم $(g_i \circ f)(x_0) = 0$، نتیجه میدهد $g_i(f(x_0))$ها برابر صفر هستند، لذا $f(x_0)$، یک صفر مشترک g_iها است، بنابراین طبق استدلال بالا، $f(x_0)$ عضو یک همسایگی مشخص از y در Z خواهد بود، یعنی $f(x_0) \in Z$ و لذا $x_0 \in f^{-1}(Z)$. اما اکنون g را بعنوان سابمرشن $(g_1, \ldots, g_l)$، تعریف شده حول y، مطابق شکل ۱۰.۱ قرار میدهیم. حال برای نگاشت $g \circ f : W \longrightarrow \mathbb{R}^l$ میتوان طبق گزاره های قبلی بیان داشت، در صورتی که 0 یک مقدار منظم از آن باشد آنگاه $(g \circ f)^{-1}(0)$ یک منیفلد خواهد بود. اگر چه g را نگاشتی دلخواه در نظر گرفتیم اما میتوان شرط منظم بودن 0 را بطور صرفاً وابسته به f و Z بازنویسی کرد. از آنجایی که $d(g \circ f)_x = dg_y \circ df_x$، آنگاه نگاشت خطی $d(g \circ f)_x : T_x(X) \longrightarrow \mathbb{R}^l$ پوشا خواهد بود اگر و تنها اگر dg_y، تصویر df_x را به $\mathbb{R}^l$ ببرد. اما طبق سابمرشن بودن g، $dg_y : T_y(Y) \longrightarrow \mathbb{R}^l$ یک تبدیل خطی پوشا است که هسته ی آن برابر با زیرفضای $T_y(Z)$ میباشد.

بنابراین dg_y تنها در صورتی یک زیر فضای $T_y(Y)$ را بطور پوشا به $\mathbb{R}^l$ میبرد که مجموع آن زیرفضا با $T_y(Z)$، برابر با کل فضای $T_y(Y)$ شود. لذا نتیجه میگیریم $g \circ f$ در $x \in f^{-1}(Z)$ یک سابمرشن خواهد بود اگر و تنها اگر $Image(df_x) + T_y(Z) = T_y(Y)$.



شکل ۱۰.۱

تعریف ۱.۵.۱. نگاشت هموار $f : X \longrightarrow Y$ را تراگذر به زیرمنیفلد $Z \subset Y$ گوییم هر گاه به ازای همه‌ی xهای عضو تصویر معکوس Z تحت f، تساوی $Image(df_x) + T_y(Z) = T_y(Y)$ برقرار باشد و به اختصار مینویسیم $f \pitchfork Z$.

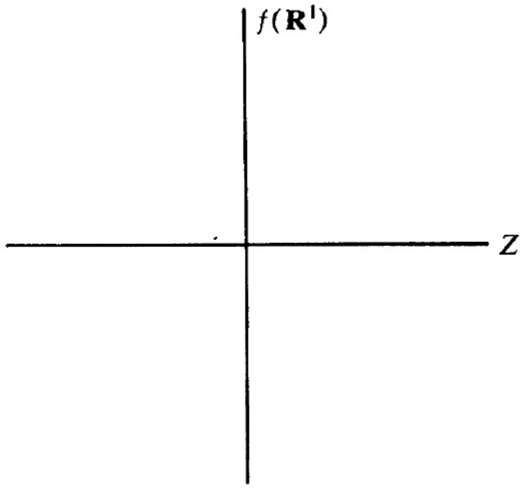
در مجموع تا اینجا، استدلال های اخیر و تعریف ذکر شده، حاکی از به اثبات رسیدن قضیه ی زیر است.

قضیه ۱.۵.۱. چنانچه نگاشت هموار $f : X \longrightarrow Y$، تراگذر به زیرمنیفلد $Z \subset Y$ باشد، آنگاه تصویر معکوس $f^{-1}(Z)$، زیرمنیفلدی از X خواهد بود. علاوه بر این، همبعد $f^{-1}(Z)$ در X، برابر با همبعد Z در Y میباشد.

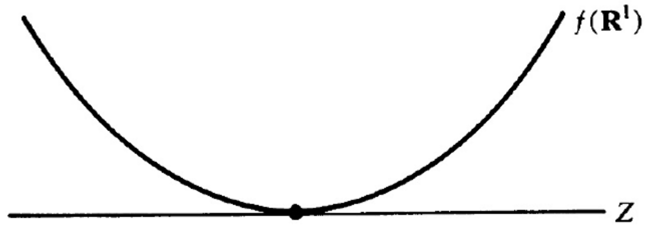
در مورد ادعای مرتبط با همبعد، شایان ذکر است که $f^{-1}(Z)$ را بطور موضعی بعنوان مجموعه صفرهای l تابع مستقل $g_1 \circ f$ ،...، $g_l \circ f$ در نظر گرفتیم، بنابراین همبعد $f^{-1}(Z)$ در X برابر l است، که در ابتدا نیز l را بعنوان همبعد Z در Y قرار داده بودیم.

تذکر ۱.۵.۱. توجه داریم زمانی که $Z = \{y\}$، صفحه ی مماس بر آن، زیرفضای صفر از $T_y(Y)$ است. بنابراین f تراگذر به y خواهد بود چنانچه به ازای هر $x \in f^{-1}(y)$ داشته باشیم $df_x(T_x(X)) = T_y(Y)$، که به معنای منظم بودن y برای f میباشد. در نتیجه میتوان بیان داشت، تراگذری مفهومی است که منظم بودن را به عنوان حالتی خاص در بر میگیرد.

مثال ۱.۵.۱. بعنوان مثالی ساده برای تفهیم تراگذری، نگاشت $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^۲$ با دستور $f(t) = (۰, t)$ را در نظر میگیریم و قرار میدهیم Z برابر باشد با محور xهای $\mathbb{R}^۲$. اما در مقابل، نگاشت $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^۲$ با دستور $g(t) = (t, t^۲)$، تراگذر به Z نمیباشد، که این دو مثال را در اشکال ۱۱.۱ و ۱۲.۱ مشاهده میکنیم.



شکل ۱۱.۱



شکل ۱۲.۱

حال به موقعیتی مهم میپردازیم که حالت خاصی از تراگذری میباشد و از نظر تصور، ملموس تر است. چنانچه بحث اخیر را در مورد نگاشت شمول i در نظر گیریم و دو زیرمنیفلد $X \subset Y$ و $Z \subset Y$ را داشته باشیم، آنگاه به سادگی درمیابیم که عضویت یک نقطه ی $x \in X$ در تصویر معکوس $i^{-۱}(Z)$، معادل است با اینکه x عضو اشتراک $X \cap Z$ باشد. همچنین مشتق $di_x : T_x(X) \longrightarrow T_x(Y)$، نگاشت شمول $T_x(X)$ در $T_x(Y)$ خواهد بود. بنابراین $i \pitchfork Z$ اگر و تنها اگر، برای هر $x \in X \cap Z$ داشته باشیم $T_x(X) + T_x(Z) = T_x(Y)$.

توجه داریم که این استدلال و تساوی مذکور، نسبت به X و Z متقارن است پس در چنین شرایطی میتوان تعریف زیر را در نظر گرفت.

تعریف ۱.۵.۲. دو زیر منیفلد $X \subset Y$ و $Z \subset Y$ را تراگذر گوییم هر گاه به ازای هر x عضو اشتراک آنها، تساوی $T_x(X) + T_x(Z) = T_x(Y)$ برقرار باشد و مینویسیم $X \pitchfork Z$.

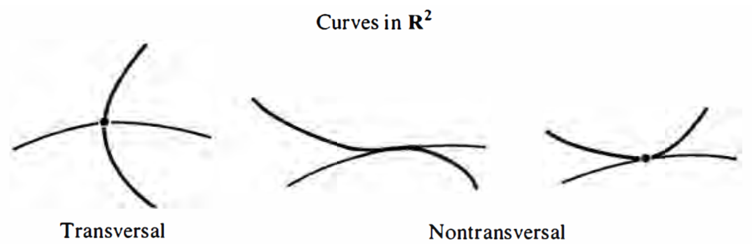
قضیه ۱.۵.۲. اشتراک دو زیرمنیفلد تراگذر از Y، مجدداً یک زیرمنیفلد خواهد بود. علاوه بر این،

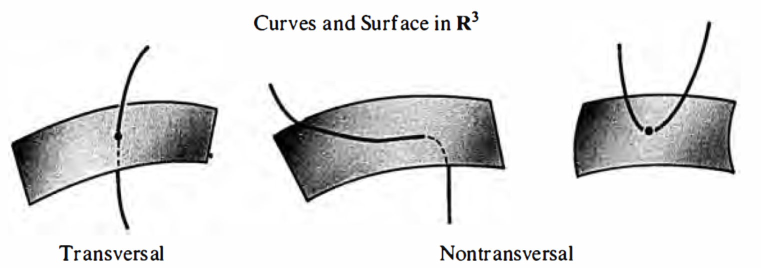
$$codim(X \cap Z) = codim(X) + codim(Z).$$

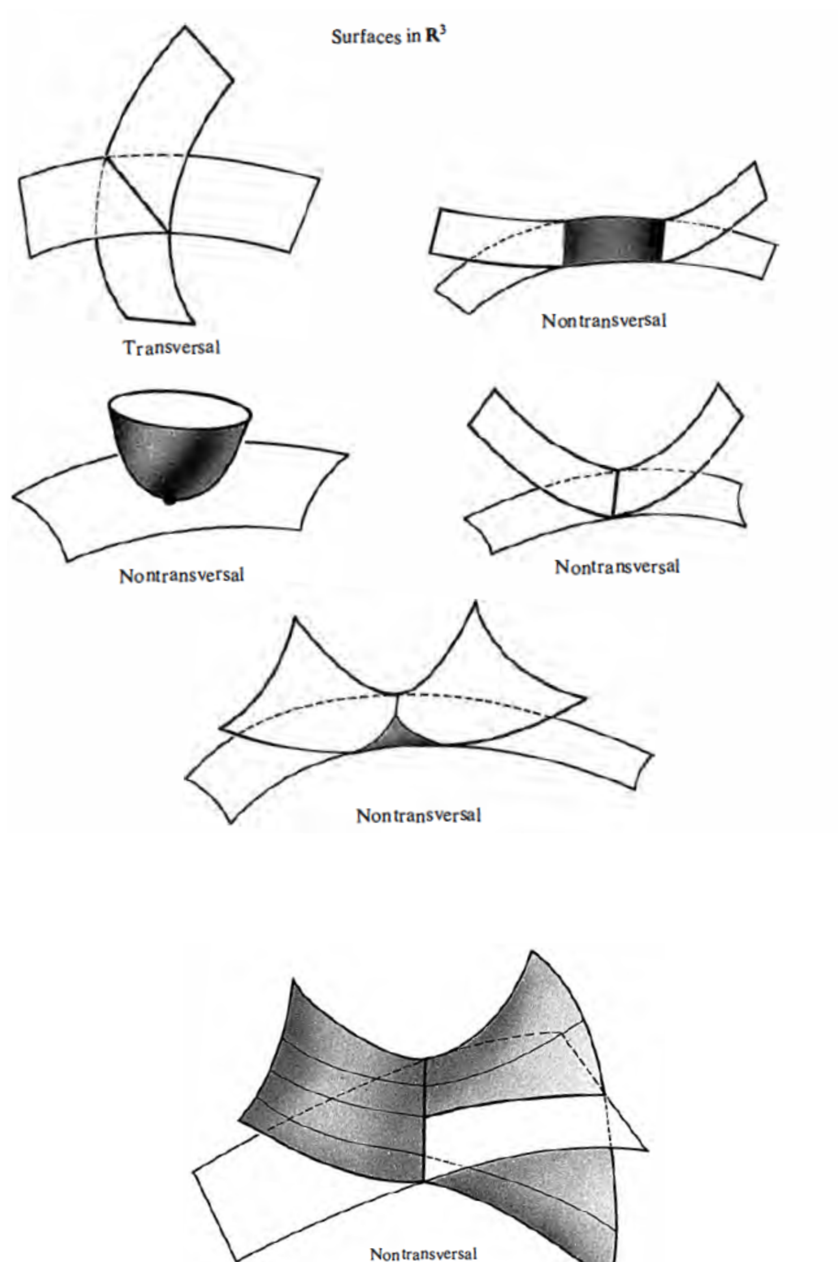
شایان ذکر است که تراگذری X و Z به منیفلد محیطی Y نیز وابسته است. بعنوان مثال، دو محور مختصات مفروض در $\mathbb{R}^۲$ به هم تراگذرند، این در حالی است که چنانچه بعنوان زیرمنیفلدهایی از $\mathbb{R}^۳$ در نظر گرفته شوند، به یکدیگر تراگذر نخواهند بود.

بطور کل، چنانچه بعدهای X و Z در مجموع، حداقل به بعد Y نرسد، آنگاه تنها در صورتی تراگذر هستند که هیچ اشتراکی نداشته باشند. مثلاً فرض کنیم X و Y، خم هایی در $\mathbb{R}^۳$ باشند، آنگاه $X \pitchfork Y$ نتیجه میدهد $X \cap Y = \emptyset$.

اما مثال هایی شهودی از این بحث، در اشکال زیر ترسیم شده اند.





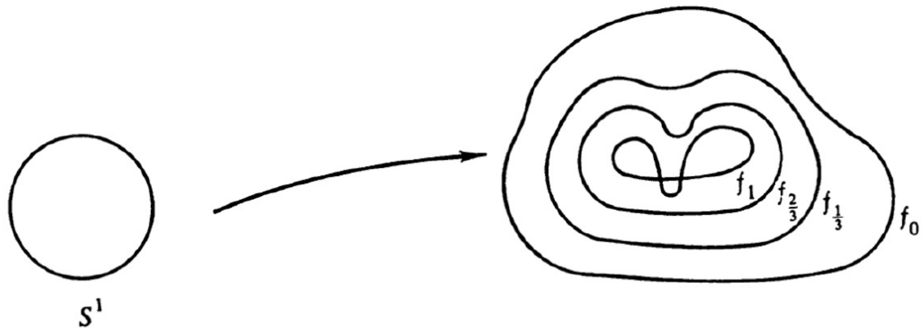


شکل ۱۳.۱

در ادامه، مفهوم تراگذری نقشی اساسی از جنبه ی توپولوژیکی بحث خواهد داشت، لذا باید توجه کرد که برقراری این شرط، همانطور که در مثالهای بالا مشهود است، در موقعیت های مطمئن رخ میدهد، چرا که هر محل مقطع از منیفلدها که کمی حالت مماس به خود گیرد، شرط مربوطه را نقض خواهد کرد.

۶.۱ هموتوپی و پایداری

بسیاری از خصوصیات یک نگاشت، هنگامی که در حالتی هموار تغییر شکل یابد، مشابه قبل باقی میمانند. بلحاظ شهودی، همانطور که در شکل ۱۴.۱ میبینیم، یک نگاشت هموار $f_1 : X \longrightarrow Y$، تغییر شکلی از نگاشت دیگر $f_0 : X \longrightarrow Y$ است، هر گاه بتوان آنها را توسط خانواده ای هموار از نگاشت های $f_t : X \longrightarrow Y$ به همدیگر تبدیل کرد. فرمول بندی دقیق از این موضوع، به مفهومی اساسی در توپولوژی منجر خواهد شد که در ادامه به آن میپردازیم.



شکل ۱۴.۱

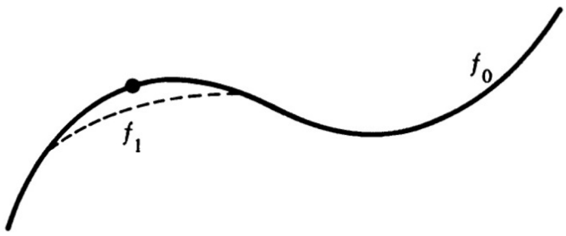
تعریف ۱.۶.۱. چنانچه I نشان دهنده ی بازه ی واحد $[0,1]$ در $\mathbb{R}$ باشد، دو نگاشت f_0 و f_1 را هموتوپیک گوییم، هر گاه یک نگاشت هموار $F : X \times I \longrightarrow Y$ بطوری موجود باشد که $F(x,0) = f_0(x)$ و $F(x,1) = f_1(x)$، در این صورت به اختصار مینویسیم $f_0 \sim f_1$. همچنین F را یک هموتوپی میان f_0 و f_1 نامیم.

هموتوپی، یک رابطه ی هم ارزی روی نگاشت های هموار از X به Y میباشد، و کلاس هم ارزی مناسبی که یک نگاشت، شامل آن میشود را **کلاس هموتوپی** گویند. برای تشخیص خانواده ای از نگاشت های هموار که f_0 و f_1 را به هم مربوط میسازند کافی است $f_t : X \longrightarrow Y$ را بصورت $f_t(x) = F(x,t)$ تعریف کنیم.

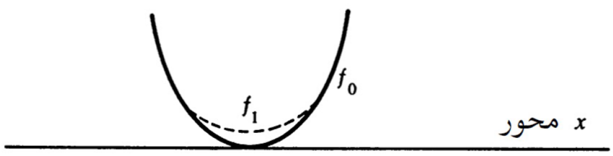
در جهان حقیقی درک مشاهدات و اندازه گیری های فیزیکی، هیچ کمیت پیوسته یا رابطه ی تابعی، بطور کامل مشخص نمیگردد. بنابراین تنها خصوصیات فیزیکی نگاشت ها که معنی دار خواهند بود، طبیعتاً آنهایی هستند که با تغییر شکل آرام نگاشت، همچنان معتبر بمانند. اینگونه خواص را **خصوصیات پایدار** مینامیم و گردایه ای از نگاشت ها که دارای ویژگی پایدار مشخصی هستند را یک **کلاس پایدار** از نگاشت ها گوییم.

تعریف ۱.۶.۲. یک خاصیت مربوط به نگاشت ها، پایدار است هرگاه چنانچه $f_\circ : X \longrightarrow Y$ دارای آن خصوصیت باشد، بتوانیم نتیجه بگیریم که به ازای هر هموتوپی $f_t : X \longrightarrow Y$ از $f_\circ$، یک $\epsilon > \circ$ وجود دارد بطوریکه برای $t < \epsilon$، f_t واجد خصوصیت مذکور است.

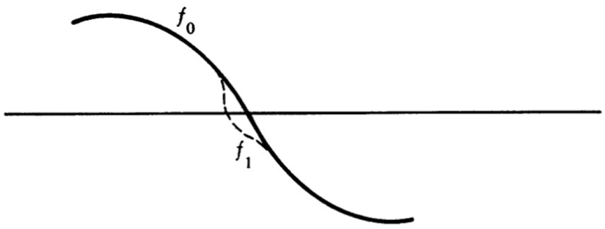
مثال ۱.۶.۱. خم هایی در صفحه را بعنوان نگاشت هموار از $\mathbb{R}$ به $\mathbb{R}^۲$ در نظر میگیریم. این خاصیت که یک خم از مبدأ عبور کند، پایدار نیست زیرا با کوچکترین تکان میتواند این خاصیت از بین برود و خم مد نظر از ۰ گذر نکند. به همین صورت خاصیت اشتراک داشتن با محور xها نیز در حالت کلی ناپایدار است. اما اشتراک تراگذر با محور x، پایدار است، که هر سه مثال اخیر به خوبی در شکل های زیر قابل مشاهده اند.



شکل ۱.۱۵: عبور از یک نقطه، ناپایدار



شکل ۱.۱۶: برخورد غیر تراگذر، ناپایدار



شکل ۱.۱۷: برخورد تراگذر، پایدار

چنین موقعیتی بسیار کلیت دارد، چرا که شرط طبیعی اشتراک داشتن، پایدار نیست و در جهان فیزیکی، معنی‌دار نخواهد بود. اما بالعکس، تراگذری مفهومی است که در نگاه اول، غیر شهودی بنظر میرسد اما در نهایت مشخص میشود که از جمله خصوصیات هندسی پایدار است که در اطرافمان تجربه میکنیم.

حال تحت قضیه ای موسوم به قضیه ی پایداری خواهیم دید که تمام خصوصیات دیفرانسیلی مربوط به نگاشت‌های $X \longrightarrow Y$ که تا کنون به آنها پرداخته ایم، چنانچه X فشرده باشد، پایدارند.

قضیه ۱.۶.۱ (قضیهٔ پایداری). کلاس های زیر از توابع هموار از یک منیفلد فشرده ی X بتوی منیفلد Y، کلاس‌های پایدار اند:

۱. دیفیومورفیسم های موضعی.

۲. ایمرشن ها.

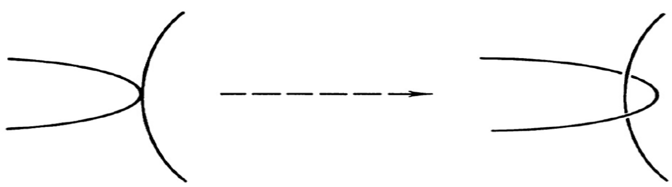
۳. سابمرشن ها.

۴. نگاشت های تراگذر به هر زیرمنیفلد $Z \subset Y$.

۵. نشاننده ها.

۶. دیفیومورفیسم ها.

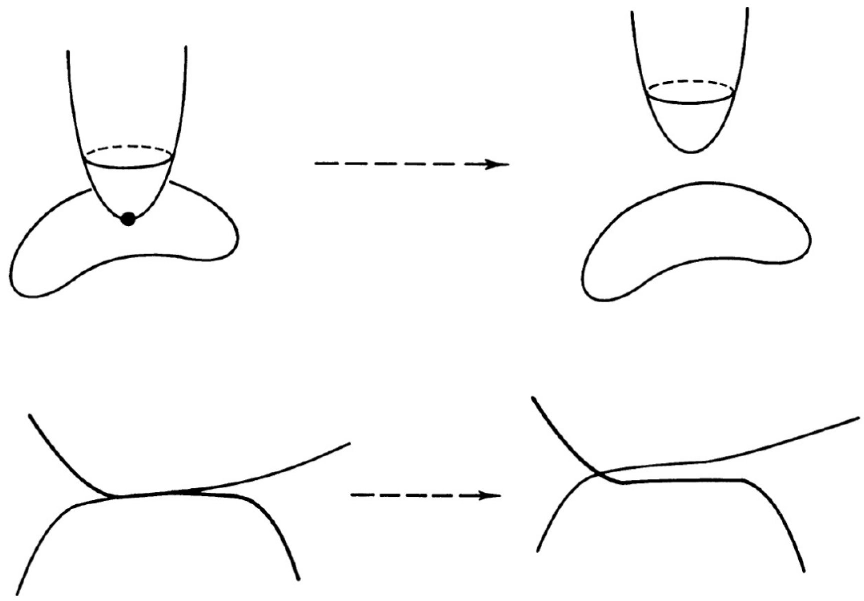
شایان ذکر است که مفهوم پایداری، بینش جدیدی را نسبت به تراگذری فراهم می آورد. بعنوان مثال، دلیل رسمی اینکه چرا دو خم در فضای سه بعدی نمیتوانند اشتراک تراگذر داشته باشند مگر اینکه کلا اشتراک نداشته باشند بدین ترتیب بود که $۳ > ۱ + ۱$. اما دلیل هندسی تری نیز وجود دارد. چنانچه دو خم دارای اشتراک را در نظر گیریم، همانطور که در شکل ۱۸.۱ مشخص است، با کمی تغییر شکل یکی از آنها، به کل میتوان اشتراک داشتنشان را نقض کرد.



شکل ۱۸.۱

اکنون طبق این استدلال میتوان دلیلی برای احکام مشابه از منظر بُعد، در ارتباط با تعریف اصلی تراگذری ارائه داد. چنانچه $\dim X + \dim Z < \dim Y$ و $f : X \longrightarrow Y$ نقاطی از $Z \subset Y$ را اختیار کند، میتوان به نوعی تغییر شکل در f ایجاد کرد که تصویر آن کلا Z را قطع نکند. بنابراین هیچ نگاشت f نمیتوان یافت که اشتراک پایدار با Z داشته باشد.

علاوه بر این، اشتراک های غیر تراگذر دیگر که از نظر بُعد مشکلی ندارند، از نقطه نظر مشابه در شکل زیر بررسی شده اند.



شکل ۱۹.۱

اثبات قضیهٔ پایداری. پایداری چهار کلاس اول، به روشی مشابه ثابت خواهند شد. دیفیومورفیسم های موضعی، ایمرشن هایی در حالت خاص $\dim X = \dim Y$ هستند، بنابراین اثبات را با کلاس ۲ آغاز میکنیم. چنانچه f_t یک هموتوپی از ایمرشن $f_\circ$ باشد، بدنبال $\epsilon > \circ$ هستیم که برای هر $(x,t) \in X \times [\circ, \epsilon) \subset X \times I$ داشته باشیم $d(f_t)_x$ یک به یک است. اما فشردگی X نتیجه میدهد هر همسایگی باز از $X \times \{\circ\}$ در $X \times I$، شامل $X \times [\circ, \epsilon]$ خواهد بود در صورتی که ϵ به قدر کافی کوچک باشد. بنابراین تنها کافی است نشان دهیم هر نقطه‌ی $(x_\circ, \circ)$ دارای یک همسایگی U در $X \times I$ است بطوریکه $d(f_t)_x$ به ازای هر $(x,t) \in U$ یک به یک باشد. اما از آنجایی که این ادعا، موضعی است، کفایت میکند حالتی را بررسی کنیم که X بازی در $\mathbb{R}^k$ و Y بازی از

$\mathbb{R}^l$ باشد. همچنین یک به یکی $d(f_\circ)_{x_\circ}$ نتیجه میدهد که ماتریس ژاکوبی $l \times k$ آن یعنی

$$\left(\frac{\partial (f_\circ)_i}{\partial x_j}(x_\circ)\right)$$

حاوی یک زیرماتریس $k \times k$ با دترمینان ناصفر است. اما هر مشتق جزئی $\frac{\partial (f_t)_i}{\partial x_j}(x)$ بعنوان تابعی روی $X \times I$، پیوسته است. همچنین از آنجایی که تابع دترمینان نیز پیوسته میباشد،باید همان زیرماتریس $k \times k$، برای همه ی نقاط (x,t) در یک همسایگی $(x_\circ, \circ)$ همانطور که ادعا شده بود، ناتکین باشد.

برای کلاس ۵ کافی است نشان دهیم چنانچه $f_\circ$ یک به یک باشد، آنگاه f_t نیز به ازای مقادیر کوچک t، یک به یک است. بدین منظور، نگاشت هموار $G : X \times I \longrightarrow Y \times I$ را با دستور $G(x,t) = (f_t(x), t)$ تعریف میکنیم. حال به برهان خلف اگر ۵ درست نباشد، دنباله ی $t_i \to \circ$ و نقاط متمایز $x_i, y_i \in X$ وجود خواهند داشت بطوریکه $G(x_i, t_i) = G(y_i, t_i)$. از آنجایی که X فشرده است، زیردنباله های همگرای $x_i \to x_\circ$ و $y_i \to y_\circ$ موجودند. بنابراین $G(x_\circ, \circ) = \lim G(x_i, t_i) = \lim G(y_i, t_i) = G(y_\circ, \circ)$. اما $G(x_\circ, \circ) = f_\circ(x_\circ)$ و $G(y_\circ, \circ) = f_\circ(y_\circ)$، پس چنانچه $f_\circ$ یک به یک باشد باید داشته باشیم $x_\circ = y_\circ$. حال بطور موضعی در فضای اقلیدسی کار میکنیم. ماتریس $dG_{(x_\circ,\circ)}$ برابر است با

$$\left(\begin{array}{ccc|c} & & & a_1 \\ & d(f_\circ)_{x_\circ} & & \vdots \\ & & & a_l \\ \hline \circ & \dots & \circ & 1 \end{array}\right)$$

که a_j ها اهمیت ندارند. چونکه $d(f_\circ)_{x_\circ}$ یک به یک است، ماتریس آن باید k سطر مستقل داشته باشد. بنابراین ماتریس $dG_{(x_\circ,\circ)}$ دارای $k+1$ سطر مستقل است، لذا $dG_{(x_\circ,\circ)}$ نگاشت خطی یک به یکی خواهد بود. نتیجتاً، G یک ایمرشن حول $(x_\circ, \circ)$ بوده و طبق قضیه ی ایمرشن موضعی ۲.۳.۱ باید در یک همسایگی $(x_\circ, \circ)$ یک به یک باشد. اما به ازای یک i بزرگ، (x_i, t_i) و (y_i, t_i) هر دو عضو این همسایگی خواهند بود که در تناقض با یک به یکی G در این همسایگی است.

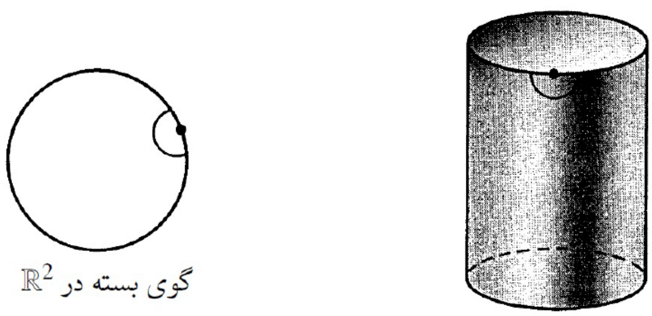
□

فصل ۲

تراگذری و اشتراک

۱.۲ منیفلدهای مرزدار

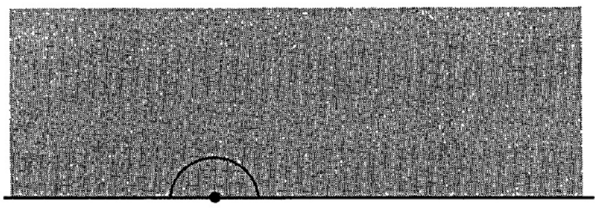
در این بخش قصد داریم گستره ی دانشمان را از کلاس شیئ های هندسی، بوسیله ی مطالعه ی منیفلدهای مرزدار، توسیع دهیم. برای مثال، فضاهایی مانند گوی بسته در $\mathbb{R}^n$ را در نظر خواهیم گرفت که داری مرز S^{n-1} است یا به همین صورت، رویه ی استوانه ای فشرده ی $S^1 \times [0, 1]$ در $\mathbb{R}^3$ که مطابق با شکل ۱.۲ توسط دو کپی از دایره، محصور شده است.



شکل ۱.۲: استوانه ی فشرده و گوی بسته

میدانیم از این دست فضاهای نامبرده، نمیتوانند منیفلد هایی هموار باشند زیرا در نقاط روی مرزشان، همسایگی‌های دیفیومورف با مجموعه های باز در فضای اقلیدسی وجود ندارند. ساده ترین مثال، نیم-فضای بالایی $\mathbb{R}^k$ است

که با $\mathbb{H}^k$ نمایش میدهیم و همانند شکل ۲.۲، شامل تمام نقاط با مختص آخر نامنفی میباشد. مرز $\mathbb{H}^k$، $\mathbb{R}^{k-1}$ تحت نشاننده ی معمولش در $\mathbb{R}^k$ خواهد بود. حال بدلیل سادگی این فضا، $\mathbb{H}^k$ را بعنوان مدلی مطلوب، در نظر میگیریم.



شکل ۲.۲

تعریف ۱.۱.۲. زیرمجموعه ی X از $\mathbb{R}^N$ را یک منیفلد مرزدار k-بعدی گوییم هر گاه هر نقطه ی X دارای یک همسایگی دیفیومورف با مجموعه ای باز در $\mathbb{H}^k$ باشد. مشابه قبل، چنین دیفیومورفیسمی را یک پارامتری‌سازی موضعی از X نامیم، و تصویر مرز $\mathbb{H}^k$ تحت پارامتری سازی های موضعی موجود، نقاط مرز X که با ∂X نشان‌میدهیم را تشکیل خواهد داد. همچنین متمم مرز را درون X نامیم، پس $Int(X) = X - \partial X$.

لازم به ذکر است که نباید مرز و درون X که در بالا تعریف شدند را با مرز و درون توپولوژیکی X بعنوان زیرمجموعه ای از $\mathbb{R}^N$ اشتباه بگیریم. اگر چه در مواردی که داشته باشیم $\dim X = N$، معمولاً این مفاهیم، منطبق خواهند شد ولی در مواقع $\dim X < N$، ارتباطی میان آنها وجود ندارد. پس در این بحث، از این کلمات در معنای منیفلدی استفاده میکنیم. همچنین توجه داریم که در مورد تعریف پیشین از منیفلد، میتوانیم آن دسته را نیز بعنوان منیفلدهای مرزداری در نظر گیریم که دارای مرز تهی اند. اما همچنان کلمه ی بدون پسوند "منیفلد" را برایشان به کار میگیریم و بعضاً برای تأکید بیشتر، از عبارت "منیفلد بدون مرز" استفاده خواهیم کرد.

توجه داریم که ضرب دو منیفلد مرزدار، در حالت کلی، لزوماً منیفلد مرزدار دیگری نخواهد بود، مثلاً مربع $[0,1] \times [0,1]$. اما دست کم، گزاره ی زیر را در نظر میگیریم.

گزاره ۱.۱.۲. حاصلضرب یک منیفلد بدون مرز X و یک منیفلد مرزدار Y، منیفلد مرزدار دیگری خواهد بود. علاوه بر این،

$$\partial(X \times Y) = X \times \partial Y$$

و

$$\dim(X \times Y) = \dim X + \dim Y.$$

اثبات. چنانچه $U \subset \mathbb{R}^k$ و $V \subset \mathbb{H}^l$ باز باشند، آنگاه $U\times V \subset \mathbb{R}^k\times\mathbb{H}^l = \mathbb{H}^{k+l}$ باز خواهد بود.علاوه‌براین اگر $X \longrightarrow U : \phi$ و $Y \longrightarrow V : \psi$ پارامتری سازی های موضعی باشند، آنگاه $\phi\times\psi : U\times V \longrightarrow X\times Y$ نیز پارامتری سازی موضعی مطلوب برای منیفلد مرزدار بودن $X \times Y$ است. □

مهم ترین کاربرد این مشاهده، در فضای نگاشتی هموتوپی $X \times I$ از یک منیفلد بدون مرز X خواهد بود.

گفتنی است که فضاهای مماس و مشتق ها همچنان در مورد منیفلدهای مرزدار قابل تعریفند.

تعریف ۲.۱.۲. در نظر گیریم $g : U(\text{open}) \subset \mathbb{H}^k \longrightarrow \mathbb{R}^l$ نگاشتی هموار بوده و u، یک نقطه ی درونی دلخواه از U باشد، آنگاه مشتق dg_u مطابق معمول تعریف میشود. اما اگر $u \in \partial U$، در این صورت همواری g به معنی آن است که میتوان g را به یک نگاشت هموار $\tilde{g}$ تعریف شده روی یک همسایگی باز از u در $\mathbb{R}^k$ توسیع داد، در این صورت dg_u را برابر با $d\tilde{g}_u : \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}^l$ تعریف میکنیم.

به منظور خوش تعریفی تعریف فوق، لازم است نشان دهیم چنانچه $\tilde{\tilde{g}}$ نیز یک توسیع موضعی از g باشد آنگاه $d\tilde{g}_u = d\tilde{\tilde{g}}_u$. قرار دهیم u_i دنباله ای از نقاط در $Int(U)$ باشد که به u همگراست. از آنجایی که $\tilde{g}$ و $\tilde{\tilde{g}}$ هر دو روی $Int(U)$ برابر با g هستند، پس $d\tilde{g}_{u_i} = d\tilde{\tilde{g}}_{u_i}$. حال با استفاده از پیوستگی این مشتق ها نسبت به u_i، با درنظرگیری $u_i \to u$، خواهیم داشت $d\tilde{g}_u = d\tilde{\tilde{g}}_u$، که به دنبالش بودیم.

تذکر ۱.۱.۲. توجه داریم که حتی در نقاط مرزی، مشتق dg_u همچنان یک نگاشت خطی از همه ی $\mathbb{R}^k$ بتوی $\mathbb{R}^l$ است.

بدیهی است که مشتق گیری از نگاشت های هموار تعریف شده بر نیم-فضاها، همچنان از قاعده ی زنجیره‌ای پیروی میکند. این مسأله ما را قادر میسازد که مشتق گیری از منیفلدهای مرزدار را دقیقا مانند منیفلدهای بدون‌مرز توسیع دهیم.

تعریف ۳.۱.۲. چنانچه $X \subset \mathbb{R}^N$ یک منیفلد مرزدار k-بعدی باشد، فضای مماس $T_x(X)$ را در نقطه ی دلخواه $x \in X$ بصورت تصویر مشتق هر پارامتری سازی موضعی حول x تعریف میکنیم.

مشابه قبل میتوان دریافت که $T_x(X)$، یک زیرفضای خطی k-بعدی از $\mathbb{R}^N$ است که حتی در نقاط مرزی نیز تعریف آن مستقل از انتخاب پارامتری سازی خواهد بود. همچنین برای یک نگاشت هموار $f : X \longrightarrow Y$ از دو منیفلد مرزدار، مشتق در هر نقطه ی x میتواند مشابه قبل بعنوان تبدیل خطی $df_x : T_x(X) \longrightarrow T_{f(x)}(Y)$ تعریف شود و علاوه بر این، قاعده ی زنجیره ای برقرار خواهد ماند.

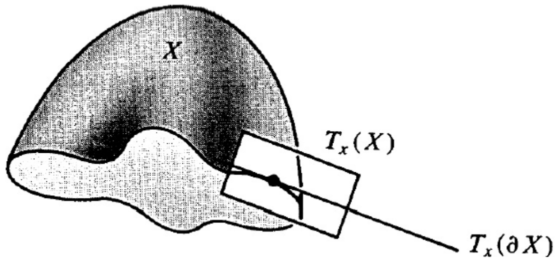
گزاره ۲.۱.۲. چنانچه X یک منیفلد مرزدار باشد، آنگاه $Int(X)$ یک منیفلد بدون مرز هم بُعد با X خواهدبود.

اثبات. هر نقطه ی درونی X در برد یک پارامتری سازی موضعی قرار دارد که دامنه اش برابر با یک مجموعه ی باز از $\mathbb{H}^k$ است که کاملا در $Int(\mathbb{H}^k)$ واقع میباشد و بنابراین مجموعه ای باز از $\mathbb{R}^k$ نیز خواهد بود. □

گزاره ۳.۱.۲. اگر X یک منیفلد مرزدار k-بعدی باشد آنگاه ∂X یک منیفلد بدون مرز $(k-۱)$-بعدی خواهدبود.

اثبات. ادعای کلیدی که به اثبات آن میپردازیم این است که چنانچه یک x، نسبت به یک مختصات موضعی، نقطه‌ای مرزی بود، نسبت به بقیه ی مختصات ها نیز نقطه ای مرزی میباشد. اگر $x \in \partial X$، آنگاه یک پارامتری‌سازی موضعی $\phi : U(\text{open}) \subset \mathbb{H}^k \longrightarrow V(\text{open}) \subset X$ وجود خواهد داشت. حال کافی است نشان دهیم $\phi(\partial U) = \partial V$، زیرا در این صورت ϕ به یک دیفیومورفیسم از $\partial U = U \cap \partial\mathbb{H}^k$، یک باز در $\mathbb{R}^{k-۱}$، و $\partial V = \partial X \cap V$، یک همسایگی از x در ∂X، تحدید خواهد شد. طبق تعریف، $\phi(\partial U) \subset \partial V$، پس به تحقیق $\partial V \subset \phi(\partial U)$ میپردازیم. یعنی اگر $\psi : W(\text{open}) \subset \mathbb{H}^k \longrightarrow V$ یک پارامتری سازی دلخواه باشد، باید نشان دهیم $\psi(\partial W) \subset \phi(\partial U)$، یا بطور معادل، $\phi^{-۱} \circ \psi(\partial W) \subset \partial U$. بنابراین قرار میدهیم $g = \phi^{-۱} \circ \psi : W \longrightarrow U$ و فرض میکنیم یک $w \in \partial W$ به یک نقطه ی درونی $u = g(w)$ از U نگاشته شود. از آنجایی که ϕ و ψ هر دو دیفیومورفیسم هستند، g باید یک دیفیومورفیسم از W به روی یک زیرمجموعه‌ی باز $g(W)$ از U باشد. حال طبق قاعده ی زنجیره ای نتیجه میگیریم مشتق وارونش یعنی $d(g^{-۱})_u$ دو سویی است. اما چونکه $u \in Int(U)$، بنابراین $g(W)$ شامل یک همسایگی از u خواهد بود که در $\mathbb{R}^k$ باز میباشد. با اعمال قضیه ی تابع وارون روی نگاشت $g^{-۱}$ تعریف شده روی این زیرمجموعه ی باز از $\mathbb{R}^k$، درمیابیم که تصویر $g^{-۱}$ حاوی یک همسایگی باز از w در $\mathbb{R}^k$ است که در تناقض با عضویت w در ∂W میباشد. □

مانند شکل ۳.۲، مشاهده میشود که اگر $x \in \partial X$، آنگاه فضای مماس به مرز یعنی $T_x(\partial X)$، یک زیرفضای خطی از $T_x(X)$ با همبعد ۱ خواهد بود.



شکل ۳.۲

تعریف ۴.۱.۲. برای نگاشت هموار f، تعریف شده روی منیفلد مرزدار X، نماد ∂f را بعنوان تابع تحدید f روی ∂X معرفی میکنیم و منظور از مشتق ∂f در x، همان تحدید df_x به زیرفضای $T_x(\partial X)$ خواهد بود.

تمام تعاریفی که بر مبنای مشتق نگاشت ها داشتیم، در اینجا نیز در مورد منیفلدهای مرزدار، معنی دار هستند ولی برای تعمیم قضایای اساسی فصل قبل، گاهی نیاز به اعمال محدودیت های بیشتری میباشد. بطور مثال، علاقمند به شروطی هستیم که اگر $f : X \longrightarrow Y$، زیرمنیفلد Z از Y را بپوشاند آنگاه $f^{-1}(Z)$ یک منیفلد مرزدار باشد و همچنین داشته باشیم $\partial f^{-1}(Z) = f^{-1}(Z) \cap \partial X$. اما تراگذری f به تنهایی کفایت نمیکند و شرط کامل، فرض اضافه ای از تراگذری در امتداد مرز را میطلبد.

مثال ۱.۱.۲. با در نظر گیری

$$f : \mathbb{H}^{۲} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x_{۱}, x_{۲}) \mapsto x_{۲}$$

و

$$Z = \{۰\},$$

آنگاه $f^{-1}(Z) = \partial \mathbb{H}^{۲}$ منیفلدی بدون مرز خواهد بود.

قضیه ۱.۱.۲. فرض کنیم f نگاشتی هموار از یک منیفلد مرزدار X به روی منیفلد بدون مرز Y باشد و بدانیم که $f : X \longrightarrow Y$ و $\partial f : \partial X \longrightarrow Y$ تراگذر نسبت به زیرمنیفلد بدون مرز $Z \subset Y$ هستند. در این صورت، تصویر معکوس $f^{-1}(Z)$، یک منیفلد با مرز $\partial\{f^{-1}(Z)\} = f^{-1}(Z) \cap \partial X$ خواهد بود و همبعد آن در X، برابر همبعد Z در Y است.

اثبات. تحدید f به منیفلد بدون مرز $Int(X)$، تراگذر به Z میباشد، پس بنا به قضیه ی ۱.۵.۱، خواهیم داشت $f^{-1}(Z) \cap Int(X)$ یک منیفلد بدون مرز با همبعد صحیح است. پس تنها به بررسی $f^{-1}(Z)$ در همسایگی یک نقطه ی $x \in f^{-1}(Z) \cap \partial X$ نیازمندیم. مطابق معمول، مسأله را به حالتی که Z تک نقطه ای باشد کاهش میدهیم. برای این کار، سابمرشن ϕ از یک همسایگی $f(x)$ در Y به روی $\mathbb{R}^l$ را در نظر میگیریم بطوریکه در این همسایگی داشته باشیم $Z = \phi^{-1}(0)$. در اینجا $l = codimZ$. اکنون، $\phi \circ f$ تعریف شده بر یک همسایگی x در X میباشد و اشتراک $f^{-1}(Z)$ با آن همسایگی برابر است با $(\phi \circ f)^{-1}(0)$. حال، $\phi \circ f$ را اینطور به فضای اقلیدسی بازگشت میزنیم که یک پارامتری سازی موضعی $h : U(\text{open}) \subset \mathbb{H}^k \longrightarrow X$ حول x در نظر میگیریم و قرار میدهیم $g = \phi \circ f \circ h$. از آنجایی که $h : U \longrightarrow h(U)$ یک دیفیومورفیسماست، مجموعه ی $f^{-1}(Z)$ یک منیفلد مرزدار در همسایگی x خواهد بود اگر و تنها اگر $(f \circ h)^{-1}(Z) = g^{-1}(0)$ یک منیفلد مرزدار اطراف $u = h^{-1}(x) \in \partial U$ باشد. اما دقیقاً مانند حالت بدون مرز، فرض تراگذری

$$df_x(T_x(X)) + T_{f(x)}(Z) = T_{f(x)}(Y)$$

اینطور ترجمه میشود که x یک نقطه ی منظم از $\phi \circ f$ باشد یا بطور معادل، g در u منظم باشد. طبق تعریف، هموازی g به معنی آن است که میتوان آن را به یک نگاشت هموار $\tilde{g}$ تعریف شده روی همسایگی بازی از u در $\mathbb{R}^k$ توسیع داد. از آنجایی که $d\tilde{g}_u = dg_u$، $\tilde{g}$ نیز در u منظم خواهد بود. چونکه $\tilde{g}$ یک نگاشت از منیفلدهای بدون مرز است، تصویر معکوس $\tilde{g}^{-1}(0)$ که با همسایگی بازی از نقطه ی منظم u اشتراک دارد، یک زیرمنیفلد بی مرز S از $\mathbb{R}^k$ است.

طبق اینکه $g^{-1}(0) = S \cap \mathbb{H}^k$ در یک همسایگی u، باید نشان دهیم $S \cap \mathbb{H}^k$ یک منیفلد مرزدار است. اینجاست که تراگذری روی ∂f اهمیت پیدا میکند. آخرین تابع مختصاتی روی $\mathbb{R}^k$ که به S تحدید شده باشد را با π نشان میدهیم، $\pi : S \longrightarrow \mathbb{R}$. در این صورت، $S \cap \mathbb{H}^k = \{s \in S : \pi(s) \geq 0\}$. ادعا میکنیم، ۰ یک مقدار منظم برای π است، برای اینکه اگر چنین نباشد، یک $s \in S$ وجود خواهد داشت بطوریکه $\pi(s) = 0$ و $d\pi_s = 0$. البته $\pi(s) = 0$ به معنی آن است که $s \in S \cap \partial\mathbb{H}^k$. همچنین طبق اینکه $\pi : \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}$ خطی است، پس $d\pi_s = \pi$. بنابراین عبارت $d\pi_s = 0$ روی $T_s(S)$، به این معنی خواهد بود که آخرین مختص از هر بردار در $T_s(S)$، صفر است یا بطور معادل، $T_s(S) \subset T_s(\partial\mathbb{H}^k) = \mathbb{R}^{k-1}$.

حال طبق $S = \tilde{g}^{-1}(0)$، میدانیم هسته ی $dg_s = d\tilde{g}_s : \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}$، برابر $T_s(S)$ است. پس همچنین

مشتق ∂g در s، تحدید $dg_s : \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}$ به $\mathbb{R}^{k-1}$ است. بنابراین اگر هسته ی dg_s مشمول در $\mathbb{R}^{k-1}$ باشد، آنگاه دو نگاشت خطی $dg_s : \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}$ و $d(\partial g)_s : \mathbb{R}^{k-1} \longrightarrow \mathbb{R}$ باید هسته های برابر داشته باشند. اما شروط تراگذری ایجاب میکند که هر دو نگاشت، پوشا باشند، از این رو رابطه ی استاندارد بُعدها برای نگاشت‌های خطی نتیجه میدهد هسته ی dg_s، دارای بعد $k-1$ است، در حالیکه هسته ی $d(\partial g)_s$، $k-2$ بعدی است. چون به تناقض رسیدیم، نتیجه میگیرم ۰ یک مقدار منظم برای g است و در نهایت، لم زیر، اثبات قضیه را تکمیل میکند. □

لم ۱.۱.۲. فرض کنیم S منیفلدی بدون مرز بوده و $\pi : S \longrightarrow \mathbb{R}$ یک نگاشت هموار با مقدار منظم ۰ باشد. در این صورت، زیرمجموعه ی $\{s \in S : \pi(s) \geq 0\}$، یک منیفلد مرزدار با مرز $\pi^{-1}(0)$ خواهد بود.

اثبات. مجموعه ای که به ازای نقاط آن داشته باشیم $\pi > 0$، در S باز است و بنابراین یک زیرمنیفلد با بعد یکسان با S خواهد بود. بنابراین فرض کنیم $\pi(s) = 0$. از آنجایی که π در s منظم است، بطور موضعی اطراف s هم‌ارز با سابمرشن کانونی میباشد و اما این لم برای سابمرشن کانونی برقرار است. □

لم فوق، بطور مستقل از قضیه نیز ارزشمند است.

مثال ۲.۱.۲. قرار دهیم $S = \mathbb{R}^n$ و $\pi(s) = 1 - |s|^2$. طبق لم میتوان نتیجه گرفت گوی بسته و یکه ی $\{s \in \mathbb{R}^n : |s| \leq 1\}$ منیفلدی مرزدار است.

اما در پایان این بخش، قضیه ی تعمیم یافته ی سارد را به شرح زیر بیان میکنیم.

قضیه ۲.۱.۲ (قضیهٔ سارد). برای هر نگاشت هموار f از یک منیفلد مرزدار X بتوی منیفلد بدون مرز Y، تقریباًهمه‌ی نقاط Y مقداری منظم از هر دو نگاشت $f : X \longrightarrow Y$ و $\partial f : \partial X \longrightarrow Y$ خواهند بود.

۲.۲ یک-منیفلدها و برخی نتایج

در حد دیفیومورفیسم، تنها منیفلدهای مرزدار فشرده، همبند و یک بعدی، بازه ی های بسته یا دوایر هستند. این گزاره، از واقعیت هایی است که واضح و روشن بوده اما دارای اثباتی پیچیده و تکنیکی میباشد. هر چند ایده ی کلی آن بدین صورت است که از نقطه ای خاص شروع کرده و با سرعت ثابت بر روی خم حرکت میکنیم، چونکه

منیفلد فشرده است، تا همیشه نمیتوان نقاط جدیدی را طی کرد، پس یا به نقطه ی شروع بازمیگردیم که در این صورت، خم ما همان دایره خواهد بود، و یا به نقطه ای مرزی میرسیم که دیفیومورف با بازه است. پس ادعای فوق، به شرح زیر میباشد.

قضیه ۲.۲.۱. هر منیفلد مرزدار، فشرده، همبند و یک بعدی، دیفیومورف با $[0, 1]$ یا S^1 خواهد بود.

از آنجایی که هر یک-منیفلد مرزدار فشرده، اجتماع مجزا از تعداد متناهی مؤلفه ی همبندی است، به نتیجه‌ای واضح میرسیم که دارای کاربردهای دور از انتظار تری است.

نتیجه ۲.۲.۱. هر منیفلد مرزدار فشرده ی یک بعدی، در مرز خود شامل تعدادی زوج نقطه میباشد.

قضیه ۲.۲.۲. اگر X یک منیفلد مرزدار فشرده باشد، آنگاه هیچ نگاشت هموار $g : X \longrightarrow \partial X$ بطوریکه $\partial g : \partial X \longrightarrow \partial X$ همانی باشد وجود ندارد. یعنی هیچ retraction از X به روی مرزش موجود نیست.

اثبات. فرض کنیم چنین g یافت شود و طبق قضیه ی ۲.۱.۲، در نظر گیریم $z \in \partial X$ یک مقدار منظم آن باشد. در این صورت، $g^{-1}(z)$ یک زیرمنیفلد مرزدار X خواهد بود و همبعد $g^{-1}(z)$ در X برابر با همبعد $\{z\}$ در ∂X، مساوی $\dim X - 1$ است. پس $g^{-1}(z)$، تک بعدی و فشرده است. اما چون $\partial g = identity$،

$$\partial g^{-1}(z) = g^{-1}(z) \cap \partial X = \{z\},$$

که در تناقض با نتیجه ی ۲.۲.۱ میباشد. $\square$

حال میتوانیم قضیه ای مشهور از براوئر، که معمولاً با ابزارهای پیچیده ی توپولوژی جبری ثابت میشود را در اینجا با به کار گیری تراگذری، ثابت کنیم که البته این اثبات، منتسب به موریس هیرش میباشد.

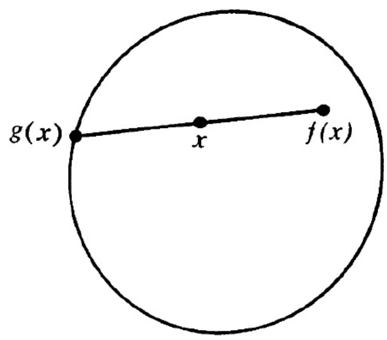
قضیه ۲.۲.۳ (قضیهٔ نقطه-ثابت براوئر). هر نگاشت هموار f از گوی بسته ی یکه ی $B^n \subset \mathbb{R}^n$ به داخل خودش، دارای یک نقطه ثابت است، یعنی یک $x \in B^n$ وجود دارد بطوریکه $f(x) = x$.

اثبات. به برهان خلف فرض کنیم f بدون نقطه ثابت باشد. به ساخت یک ریترکشن $g : B^n \longrightarrow \partial B^n$ میپردازیم. چونکه $f(x) \neq x$، دو نقطه ی x و $f(x)$ یک خط تشکیل میدهند. قرار میدهیم $g(x)$ برابر با نقطه‌ای مرزی از گوی باشد که روی خط واصل x و $f(x)$ قرار دارد و البته چنانچه روی این خط از $f(x)$ به

سمت x حرکت‌کنیم، پس از آن به $g(x)$ برسیم(شکل ۴.۲). اگر $x \in \partial B^n$، داریم $g(x) = x$. بنابراین $g : B^n \longrightarrow B^n$، همانی روی ∂B^n است. حال کافی است نشان دهیم g هموار نیز میباشد که در این صورت به تناقض با قضیه ی ریترکشن ۲.۲.۲ برسیم و اثبات کامل شود. چونکه x در پاره‌خط میان $f(x)$ و $g(x)$ قرار دارد، میتوان بردار $g(x) - f(x)$ را t برابر بردار $x - f(x)$ در نظر گرفت که $t \geq ۱$. بنابراین $g(x) = tx + (۱ - t)f(x)$. چنانچه t بطور هموار به x وابسته باشد، آنگاه g هموار خواهد بود. ضرب نقطه‌ای طرفین تساوی اخیر را در نظر میگیریم. چونکه $|g(x)| = ۱$، به رابطه ی

$$t^۲|x - f(x)|^۲ + ۲tf(x).[x - f(x)] + |f(x)|^۲ - ۱ = ۰$$

دست خواهیم یافت، که معادله ای درجه دو بر حسب t میباشد و یک ریشه ی منحصر به فرد مثبت دارد. البته ریشه ای با $t \leq ۰$ نیز وجود خواهد داشت که متناظر با برخورد خط مورد نظر در نقطه ای دیگر از گوی میباشد. پس از آنجایی که ریشه ی رابطه ی فوق نتیجه میدهد t بر حسب توابع هموراری از x نوشته میشود، به تناقض ذکرشده رسیدیم. □

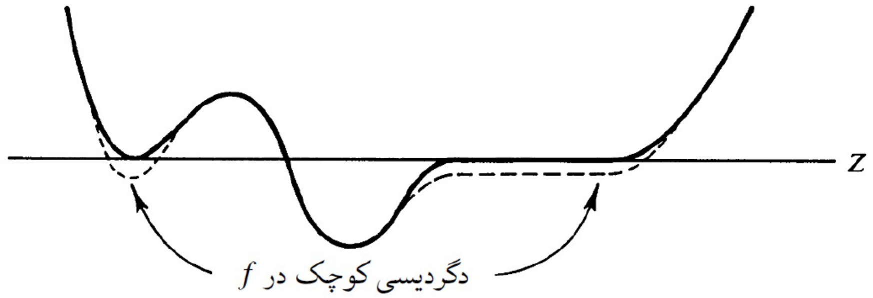


شکل ۴.۲

۳.۲ تراگذری

تا اینجا در مورد تراگذری و پایداری، در بخش های اخیر به این موضوع پرداخته شد که تحت تغییر های کوچک و هموار در یک تابع، میتوان خاصیت تراگذر بودن به یک زیرمنیفلد را، دست کم زمانی که دامنه ی نگاشتمان

منیفلدی فشرده باشد، حفظ کرد. اما از نقطه نظری دیگر، که با کمک قضیه ی سارد به بررسی آن میپردازیم، میتوان بیان داشت که تراگذری یک کیفیت جنریک است، به این معنی که هر نگاشت هموار دلخواه $f : X \longrightarrow Y$ که نسبت به زیرمنیفلد $Z \subset Y$ ممکن است هر گونه رفتاری داشته باشد را با تغییرهای به دلخواه کوچک میتوان به نگاشتی تراگذر به Z تبدیل کرد. بلحاظ فیزیکی نیز پایداری بدین معنی است که نگاشت های تراگذر، قابل مشاهده در عالم طبیعی میباشند و از این قوی تر، جنریک بودن این خاصیت به ما میگوید که تنها نگاشت های قابل مشاهده، همین نگاشت های تراگذر هستند. پس با این آگاهی، تقریبا همه ی نگاشت ها تراگذرند. (شکل ۵.۲).



شکل ۵.۲

با توضیحات اخیر درمیابیم ابزاری کلیدی در مورد تراگذری، خانواده ی نگاشت ها میباشند. فرض کنیم $f_s : X \longrightarrow Y$ خانواده ای از نگاشت های هموار بوده که با پارامتر s، متغیر در S، اندیس گذاری شده باشند. طبق آنچه که در مورد هموتوپی ها گفته شد، نگاشت $F : X \times S \longrightarrow Y$ تعریف شده بصورت $F(x, s) = f_s(x)$ را در نظر میگیریم. حال انتظار داریم که این خانواده، با فرض منیفلد بودن S و همواری F، بطور هموار تغییر کند. با این شرایط، قضیه ی مرکزی این بخش به شرح زیر خواهد بود.

قضیه ۱.۳.۲ (قضیهٔ تراگذری). فرض کنیم $F : X \times S \longrightarrow Y$ یک نگاشت هموار از منیفلدها باشد که تنها X دارای مرز است و در نظر گیریم Z زیرمنیفلد بدون مرز دلخواهی از Y باشد. چنانچه هم F و هم ∂F تراگذر به Z باشند، آنگاه برای تقریباً هر $s \in S$، هر دوی f_s و ∂f_s تراگذر به Z خواهند بود.

اثبات. طبق قضیه ی ۱.۱.۲ میدانیم تصویر معکوس $W = F^{-1}(Z)$ یک زیرمنیفلد مرزدار از $X \times S$ است و $\partial W = W \cap \partial(X \times S)$. قرار میدهیم $\pi : X \times S \longrightarrow S$ نگاشت تصویر استاندارد باشد. نشان خواهیمداد هر گاه $s \in S$ یک مقدار منظم نگاشت تحدید شده ی $\pi : W \longrightarrow S$ باشد، آنگاه $f_s \pitchfork Z$، و چنانچه s یک

مقدار منظم برای S $\partial\pi : \partial W \longrightarrow S$ باشد، در این صورت $\partial f_s \pitchfork Z$. اما طبق قضیه ی سارد (۲.۱.۲)، تقریباً هر $s \in S$، یک مقدار منظم برای هر دو نگاشت مذکور است، پس حکم قضیه به اثبات خواهد رسید.

به منظور بررسی $f_s \pitchfork Z$، فرض کنیم $f_s(x) = z \in Z$. چونکه $F(x,s) = z$ و $F \pitchfork Z$، پس میدانیم

$$dF_{(x,s)}[T_{(x,s)}(X \times S)] + T_z(Z) = T_z(Y),$$

یعنی به ازای هر بردار $a \in T_z(Y)$، یک بردار $b \in T_{(x,s)}(X \times S)$ بطوری وجود دارد که

$$dF_{(x,s)}(b) - a \in T_z(Z).$$

اما ما بدنبال یک بردار $v \in T_x(X)$ هستیم که

$$d(f_s)_x(v) - a \in T_z(Z).$$

از آنجایی که داریم

$$T_{(x,s)}(X \times S) = T_x(X) \times T_s(S),$$

نتیجه میشود بردارهایی مانند $w \in T_x(X)$ و $e \in T_s(S)$ وجود دارند که رابطه ی $b = (w,e)$ برقرار شود. حال چنانچه e برابر با صفر باشد کار تمام است، زیرا تحدید F به $X \times \{s\}$ همان f_s است پس خواهیم داشت

$$dF_{(x,s)}(w, \circ) = (df_s)_x(w).$$

اما e لزوماً صفر نیست پس به واسطه ی تابع تصویر π، سعی به از بین بردن آن داریم. طبق این که

$$d\pi_{(x,s)} : T_x(X) \times T_s(S) \longrightarrow T_s(S)$$

نگاشت تصویر به روی مؤلفه ی دوم است، شرط منظم بودن که $d\pi_{(x,s)}$، فضای $T_{(x,s)}(W)$ را به روی $T_s(S)$ مینگارد، بیان میدارد برداری به فرم (u,e) در $T_{(x,s)}(W)$ وجود دارد. اما برای $F : W \longrightarrow Z$، داریم

$dF_{(x,s)}(u,e) \in T_z(Z)$. نتیجتاً بردار

$$v = w - u \in T_x(X)$$

مطلوب ما است، زیرا

$$d(f_s)_x(v) - a = dF_{(x,s)}[(w,e) - (u,e)] - a = [dF_{(x,s)}(w,e) - a] - dF_{(x,s)}(u,e)$$

و هر دو بردار اخیر، اعضای $T_z(Z)$ میباشند. همچنین با استدلالی دقیقاً مشابه، میتوان نشان داد زمانی که s مقداری منظم از $\partial\pi$ باشد، داریم $\partial f_s \pitchfork Z$. $\square$

مثال ۱.۳.۲. از قضیه ی تراگذری فوق، سریعاً دریافت میشود زمانی که منیفلد هدف Y یک فضای اقلیدسی $\mathbb{R}^M$ است، نگاشت های تراگذر، جنریک هستند. زیرا چنانچه $f : X \longrightarrow \mathbb{R}^M$ هر نگاشت هموار باشد، با درنظرگیری S بعنوان یک گوی باز از $\mathbb{R}^M$ و سپس تعریف

$$F : X \times S \longrightarrow \mathbb{R}^M$$
$$(x,s) \mapsto f(x) + s$$

به ازای یک $x \in X$ ثابت، F انتقالی از گوی S بوده و بوضوح یک سابمرشن است. بنابراین، تراگذر به هر زیرمنیفلد Z از $\mathbb{R}^M$ خواهد بود. اما بر اساس قضیه ی اخیر، برای تقریباً هر $s \in S$، نگاشت $f_s(x) = f(x)+s$ تراگذر به Z میباشد. لذا f به راحتی با یک عامل جمعی به دلخواه کوچک s میتواند به تابعی تراگذر تغییر شکل یابد.

حال با ایده ای مشابه آنچه که در مثال بالا مطرح شد، میخواهیم به حالتی جامع تر بپردازیم که Y یک منیفلد هدف دلخواه و البته بدون مرز باشد. بنابراین جنریک بودن تراگذری را بدین صورت جستجو میکنیم که Y خود در یک فضای اقلیدسی $\mathbb{R}^M$ جای دارد و بررسی میکنیم که یک نگاشت $f : X \longrightarrow Y$ داده شده چگونه در بین خانواده ای از توابع که X را بتوی $\mathbb{R}^M$ مینگارند، تغییر میابد. تمام چیزی که نیاز داریم آن است که به طریقی، این توابع را به روی Y تصویر کنیم تا خانواده ای مطلوب از نگاشت ها که X را بتوی Y میبرند داشته باشیم. بدین

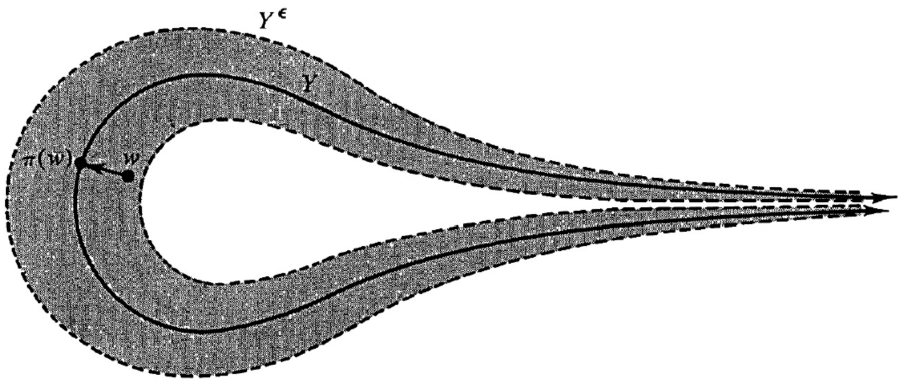
منظور، لازم است کمی از هندسه ی Y را نسبت به محیط اطرافش شناسایی کنیم و اما مطابق معمول به سراغ روشن ترین حالت، یعنی حضور فشردگی میرویم.

قضیه ۲.۳.۲ (قضیهٔ ϵ-همسایگی). برای یک منیفلد بدون مرز فشرده ی Y در $\mathbb{R}^M$ و عدد مثبت دلخواه ϵ، قرارمیدهیم Y^ϵ نشان دهنده ی مجموعه ی بازی از نقاط $\mathbb{R}^M$ باشد که هر یک فاصله ی کوچکتر از ϵ با Y دارند. اگر ϵ به قدر کافی کوچک باشد آنگاه هر نقطه ی $w \in Y^\epsilon$، دارای یک نزدیک ترین نقطه ی منحصر به فرد در Y میباشد که با $\pi(w)$ نمایش میدهیم. علاوه بر این، نگاشت $\pi : Y^\epsilon \longrightarrow Y$ یک سابمرشن خواهد بود.

اما در صورتی که Y فشرده نباشد نیز همچنان سابمرشنی همچون $\pi : Y^\epsilon \longrightarrow Y$ یافت میشود که روی Y همانی باشد ولی در این حالت لازم است ϵ تابعی هموار و مثبت روی Y باشد و Y^ϵ بصورت

$$Y^\epsilon := \{w \in \mathbb{R}^M : \exists y \in Y, |w-y| < \epsilon(y)\}$$

تعریف شود. این تعبیر را در شکل ۶.۲ مشاهده میکنیم.



شکل ۶.۲

اثبات این قضیه را کمی به تعویق انداخته و ابتدا به احکام و نتایجی دیگر اشاره میکنیم.

نتیجه ۱.۳.۲. فرض کنیم $f : X \longrightarrow Y$ یک نگاشت هموار بوده که Y بدون مرز است. در این صورت، گوی بازی همچون S در یک فضای اقلیدسی و همچنین یک نگاشت هموار $F : X \times S \longrightarrow Y$ بطوری

وجودخواهند داشت که $F(x,\circ) = f(x)$ و برای هر $x \in X$ ثابت، نگاشت

$$S \longrightarrow Y$$
$$s \mapsto F(x,s)$$

یک سابمرشن میباشد. بخصوص، هم F و هم ∂F سابمرشن هستند.

اثبات. قرار دهیم S گوی واحد در $\mathbb{R}^M$ باشد که $Y \subset \mathbb{R}^M$. از حکم قضیه ی اخیر استفاده کرده و تعریف میکنیم

$$F(x,s) = \pi[f(x) + \epsilon(f(x))s].$$

از آنجایی که $\pi : Y^\epsilon \longrightarrow Y$، روی Y همانی میباشد خواهیم داشت

$$F(x,\circ) = \pi[f(x) + \epsilon(f(x))\circ] = \pi[f(x)] = f(x) \Rightarrow F(x,\circ) = f(x).$$

برای x ثابت نیز نگاشت

$$S \longrightarrow Y^\epsilon \qquad (۱.۲)$$
$$s \mapsto f(x) + \epsilon(f(x))s$$

سابمرشن است و از آنجایی که ترکیب دو سابمرشن، باز هم سابمرشنی دیگر خواهد بود، پس برای نگاشت

$$S \longrightarrow Y$$
$$s \mapsto F(x,s)$$

که ترکیب π و تابع ۱.۲ است، حکم برقرار میباشد. F و ∂F نیز باید سابمرشن باشند زیرا تحدید آنها به زیرمنیفلد $\{x\} \times S$ سابمرشن است و میدانیم این زیرمنیفلد از هر نقطه ی $X \times S$ و یا $(\partial X) \times S$ میگذرد، یعنی در نقطه ی بخصوص (x,s)، مشتق F یا ∂F، تحدیدشان به زیرفضای $T_{(x,s)}(\{x\} \times S)$ از $T_{(x,s)}(X \times S)$ یا

$T_{(x,s)}((\partial X)\times S)$، پوشا هستند پس در کل دامنه شان پوشا خواهند بود. □

اکنون حکم دلخواهی که از ابتدای بخش به دنبال آن بودیم، یعنی این که تراگذری جنریک است را با استفاده از گزاره های اخیر میتوان نتیجه گرفت و صورت مورد نیاز از این واقعیت را در قضیه ی زیر می آوریم.

قضیه ۳.۳.۲ (قضیهٔ تراگذری-هموتوپی). برای هر نگاشت هموار $f: X \longrightarrow Y$ و زیرمنیفلد بدون مرز Z از منیفلد بدون مرز Y، یک نگاشت هموار $g: X \longrightarrow Y$، هموتوپیک با f بطوری وجود دارد که

$$g \pitchfork Z, \quad \partial g \pitchfork Z.$$

اثبات. برای خانواده از نگاشت های F که در نتیجه ی ۱.۳.۲ وجود آن ثابت شد، قضیه ی تراگذری ۱.۳.۲ ایجاب میکند که برای تقریباً هر $s \in S$، داریم

$$f_s \pitchfork Z, \quad \partial f_s \pitchfork Z.$$

اما هر f_s با f هموتوپیک است که هموتوپی متناظر، عبارت میباشد از

$$\begin{aligned} &X\times I \longrightarrow Y\\ &(x,t)\mapsto F(x,ts),\end{aligned}$$

و حکم ثابت است. □

حال در راستای اثبات قضیه ی ϵ-همسایگی، به معرفی مفاهیمی مشابه و کاربردی در نظریه ی منیفلد های هموار میپردازیم که در اینجا به کمک ما خواهد آمد.

تعریف ۱.۳.۲. فرض کنیم Y منیفلدی در $\mathbb{R}^M$ باشد. میدانیم فضاهای مماس به Y در نقاط مختلف، زیرفضاهای برداری از $\mathbb{R}^M$ هستند که در حالت کلی با یکدیگر برخورد دارند. کلاف مماس $T(Y)$ را بعنوان یک جداسازی از این فضاها تعریف میکنیم که زیرمجموعه ای از $Y\times\mathbb{R}^M$ بصورت زیر است:

$$T(Y) := \{(y,v)\in Y\times\mathbb{R}^M : v\in T_y(Y)\}.$$

تذکر ۲.۳.۱. $T(Y)$ حاوی یک کپی طبیعی $Y_\circ$ از Y، متشکل از نقاط $(y, \circ)$ میباشد. همچنین در راستای عمود به $Y_\circ$ نیز کپی هایی از هر فضای مماس $T_y(Y)$ بصورت مجموعه ی $\{(y, v) : \text{with y fixed}\}$ در آن نشانده شده است.

تعریف ۲.۳.۲. اگر منیفلد $Y \subset \mathbb{R}^M$ مفروض باشد، به ازای هر $y \in Y$، فضای نرمال Y در y را که با $N_y(Y)$ نشان میدهیم، برابر با مکمل متعامد $T_y(Y)$ در $\mathbb{R}^M$ تعریف میکنیم. همچنین کلاف نرمال $N(Y)$ را بصورت مجموعه ی

$$N(Y) := \{(y, v) \in Y \times \mathbb{R}^M : v \in N_y(Y)\}$$

در نظر خواهیم گرفت.

تذکر ۲.۳.۲. توجه داریم که برخلاف $T(Y)$، $N(Y)$ در ذات منیفلد Y نیست، بلکه به رابطه ی میان Y و فضای محیطی $\mathbb{R}^M$ نیز بستگی دارد.

یادآوری ۲.۳.۱. فرض کنیم W یک زیرفضا از فضای ضرب داخلی V باشد. مکمل متعامد W را بصورت زیر تعریف میکنیم:

$$W^\perp := \{v \in V : \forall w \in W, < v, w >= \circ\}.$$

همچنین توجه داریم که $W^\perp$، خود یک زیرفضایی از V خواهد بود.

حال به منظور اثبات این واقعیت که $N(Y)$ یک منیفلد است، به یادآوری مفهوم و احکامی مقدماتی از جبرخطی میپردازیم.

یادآوری ۲.۳.۲. در نظر گیریم $A : \mathbb{R}^M \longrightarrow \mathbb{R}^k$ یک نگاشت خطی باشد. در این صورت، ترانهاده ی آن یعنی $A^t : \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}^M$ یک تبدیل خطی است که توسط رابطه ی ضرب داخلی

$$\forall v \in \mathbb{R}^M, \forall w \in \mathbb{R}^k, < Av, w >=< v, A^t w >$$

مشخصه سازی میشود.

تذکر ۲.۳.۳. چنانچه ماتریس تبدیل خطی A نسبت به پایه های استاندارد، بصورت (a_{ij}) باشد، آنگاه ماتریس A^t برابر با (a_{ji}) خواهد بود.

تذکر ۲.۳.۴. اگر A پوشا باشد، آنگاه $\mathbb{R}^k$ بطور ایزومورفیسم توسط A^t به روی مکمل متعامد هسته ی A، نگاشت خواهد شد.

اثبات. به منظور بررسی یک به یکی، در نظر میگیریم برای یک $w \in \mathbb{R}^k$ داشته باشیم $A^t w = ۰$، آنگاه به ازای هر $v \in \mathbb{R}^M$، رابطه ی

$$< Av, w >=< v, A^t w >=< v, ۰ >= ۰$$

برقرار است، پس $w \perp A(\mathbb{R}^M)$، لذا از پوشایی A نتیجه میشود $w \perp \mathbb{R}^k$، پس لزوماً $w = ۰$ و A^t یک به یک میباشد.

و اما برای پوشایی، بطور مشابه اگر یک $v \in \ker(A)$ را دلخواه در نظر گیریم، آنگاه $Av = ۰$ پس

$$\forall w \in \mathbb{R}^k, ۰ =< ۰, w >=< Av, w >=< v, A^t w >,$$

لذا $A^t(\mathbb{R}^k) \perp \ker(A)$. بنابراین، $Image(A^t) \subset \ker(A)^\perp$ وتا اینجا خواهیم داشت A^t، $\mathbb{R}^k$ را بطور یک‌به‌یک، بتوی مکمل متعامد هسته ی A مینگارد. اما طبق قضیه ی رتبه-پوچی داریم

$$rank(A) + nullity(A) = \dim \mathbb{R}^M \Rightarrow k + \dim \ker A = M \Rightarrow \dim \ker A = M - k,$$

پس بعد $\ker A^\perp$ برابر خواهد بود با k یعنی همان بعد $A^t(\mathbb{R}^k) = Image(A^t)$ که در این صورت طبق رابطه ی $Image(A^t) \subset \ker(A)^\perp$ نتیجه میشود $Image(A^t) = \ker(A)^\perp$ و پوشایی A^t نیز به اثبات میرسد. □

گزاره ۲.۳.۱. اگر $Y \subset \mathbb{R}^M$ یک منیفلد باشد، آنگاه $N(Y)$ نیز منیفلدی از بعد M خواهد بود و تابع تصویر

$$\sigma : N(Y) \longrightarrow Y$$
$$(y, v) \mapsto y$$

یک سابمرشن است.

اثبات. Y را بطور موضعی با معادلات تعریف میکنیم. حول هر نقطه ی Y، یک مجموعه ی باز $\tilde{U}$ از $\mathbb{R}^M$ و یک سابمرشن $\phi : \tilde{U} \longrightarrow \mathbb{R}^k$ که $k = \dim Y$ را بطوری میابیم که $U = Y \cap \tilde{U} = \phi^{-1}(۰)$. مجموعه ی $N(U)$

برابر است با $N(Y)\cap(U\times\mathbb{R}^M)$، بنابراین در $N(Y)$ باز است. برای هر $y\in U$، $d\phi_y:\mathbb{R}^M\longrightarrow\mathbb{R}^k$ پوشا است و دارای هسته ی $T_y(Y)$ میباشد. در نتیجه مطابق با تذکر ۴.۳.۲، ترانهاده ی آن، $\mathbb{R}^k$ را بطور ایزومورفیسم به روی $N_y(Y)$ مینگارد. همچنین نگاشت

$$\psi:U\times\mathbb{R}^k\longrightarrow N(U)$$
$$(y,v)\mapsto(y,d\phi_y{}^t(w)),$$

دو سویی خواهد بود و یک نشاننده از $U\times\mathbb{R}^k$ بتوی $Y\times\mathbb{R}^M$ میباشد. نتیجتاً، $N(U)$ یک منیفلد پارامتری شده بوسیله ی ψ با بعد $\dim U+k=\dim Y+codimY=M$ است. اما چونکه هر نقطه ی $N(Y)$ دارای چنین همسایگی میباشد، خود نیز یک منیفلد خواهد بود. از طرفی دیگر طبق آن که $\sigma\circ\psi:U\times\mathbb{R}^k\longrightarrow U$ سابمرشن استاندارد است، σ نیز سابمرشن میباشد. □

اکنون ابزار مورد نیاز برای بررسی درستی قضیه ی ۲.۳.۲ فراهم آمده است که در زیر، به این موضوع خواهیم‌پرداخت.

اثبات قضیهٔ ϵ-همسایگی. نگاشت

$$h:N(Y)\longrightarrow\mathbb{R}^M$$
$$(y,v)\mapsto y+v$$

را در نظر میگیریم. توجه میکنیم که h در تمام نقاط $Y\times\{\circ\}$ واقع در $N(Y)$ منظم است زیرا $(y,\circ)$ به دو منیفلد مکمل طبیعی $N(Y)$ تعلق دارد، یکی $Y\times\{\circ\}$ و دیگری $\{y\}\times N_y(Y)$. لذا مشتق h در $(y,\circ)$، فضای مماس به $Y\times\{\circ\}$ در $(y,\circ)$ را به روی $T_y(Y)$، و فضای مماس به $\{y\}\times N_y(Y)$ در $(y,\circ)$ را به روی $N_y(Y)$ مینگارد. بنابراین دارای برد

$$T_y(Y)+N_y(Y)=\mathbb{R}^M$$

خواهد بود و لذا پوشا میباشد.

حال از آنجایی که h، $Y\times\{\circ\}$ را بطور دیفیومورفیسم به روی Y مینگارد و در هر $(y,\circ)$ منظم است، آنگاه

باید یک همسایگی از $Y \times \{0\}$ را بطور دیفیومورفیسم به روی یک همسایگی از Y در $\mathbb{R}^M$ نگارد. اکنون هر همسایگی از Y شامل یک Y^ϵ خواهد بود. بنابراین، $h^{-1} : Y^\epsilon \longrightarrow N(Y)$ قابل تعریف بوده و

$$\pi = \sigma \circ h^{-1}$$

سابمرشن مطلوب قضیه است. □

حال قصد داریم حالتی قوی تر از قضیه ی تراگذری-همتوپی ۲.۳.۳ را مورد بررسی قرار دهیم، لذا به تعریف زیر توجه خواهیم کرد.

تعریف ۲.۳.۳. نگاشت $f : X \longrightarrow Y$ را تراگذر به Z روی یک زیر مجموعه ی C از X گوییم هر گاه شرط‌سابق تراگذری

$$df_x T_x(X) + T_{f(x)}(Z) = T_{f(x)}(Y)$$

در هر نقطه ی $x \in C \cap f^{-1}(Z)$ برقرار باشد.

قضیه ۲.۳.۴ (قضیهٔ توسیع). فرض کنیم Z یک زیرمنیفلد بسته از Y بوده که هر دو بدون مرز هستند و C زیرمجموعه ای بسته از X است. چنانچه $f : X \longrightarrow Y$ نگاشتی هموار با $f \pitchfork Z$ روی C و $\partial f \pitchfork Z$ روی $C \cap \partial X$ باشد، آنگاه یک نگاشت هموار هموتوپیک با f مانند $g : X \longrightarrow Y$ وجود خواهد داشت بطوریکه

$$g \pitchfork Z, \quad \partial g \pitchfork Z,$$

و همچنین روی یک همسایگی از C رابطه ی $f = g$ برقرار خواهد بود.

پیش از اثبات این قضیه، یک لم را مطرح میکنیم.

لم ۲.۳.۱. اگر U یک همسایگی باز از مجموعه ی بسته ی C در X باشد، آنگاه تابع هموار $\gamma : X \longrightarrow [0, 1]$ وجود خواهد داشت که در خارج از U متحد با ۱، و روی یک همسایگی از C برابر با ۰ باشد.

اثبات قضیه. ابتدا نشان میدهیم روی یک همسایگی از C داریم $f \pitchfork Z$. اگر $x \in C$ اما $x \notin f^{-1}(Z)$، آنگاه طبق بسته بودن Z، $X - f^{-1}(Z)$ یک همسایگی از x است که روی آن بطور خودکار $f \pitchfork Z$.

اما اگر $x \in f^{-1}(Z)$، آنگاه یک همسایگی W از $f(x)$ در Y و یک سابمرشن $\phi : W \longrightarrow \mathbb{R}^k$ بطوری وجود خواهند داشت که در یک نقطه ی $x' \in f^{-1}(Z \cap W)$، دقیقاً زمانی که $\phi \circ f$ در x' منظم باشد، داشته باشیم $f \pitchfork Z$. اما $\phi \circ f$ در x منظم است و بنابر نتیجه ی ۱.۴.۱ از قضیه ی سابمرشن موضعی، در یک همسایگی x منظم خواهد بود. لذا روی یک همسایگی از هر نقطه ی $x \in C$ داریم $f \pitchfork Z$ و بنابراین روی یک همسایگی U از C خواهیم داشت $f \pitchfork Z$. قرار دهیم γ همان تابع موجود در لم قبل باشد و در نظر گیریم $\tau = \gamma^2$. چونکه $d\tau_x = 2\gamma(x) d\gamma_x$، پس زمانی که $\tau(x) = 0$، داریم $d\tau_x = 0$. حال نگاشت $F : X \times S \longrightarrow Y$ که در اثبات قضیه ی تراگذری-هموتوپی ۳.۳.۲ استفاده کردیم را با تعریف

$$G : X \times S \longrightarrow Y$$
$$(x, s) \mapsto F(x, \tau(x)s),$$

اصلاح میکنیم. حال به اثبات ادعای $G \pitchfork Z$ میپردازیم. فرض کنیم که $(x, s) \in G^{-1}(Z)$ و داشته باشیم $\tau(x) \neq 0$. آنگاه نگاشت

$$S \longrightarrow Y$$
$$r \mapsto G(x, r)$$

یک سابمرشن است، زیرا ترکیب دیفیومورفیسم $r \mapsto \tau(x)r$ با سابمرشن $r \mapsto F(x, r)$ میباشد. نتیجتاً، G در (x, s) منظم است و لذا خواهیم داشت $G \pitchfork Z$ در (x, s). اما زمانی که $\tau(x) = 0$، $dG_{(x,s)}$ را در هر عضو

$$(v, w) \in T_x(X) \times T_s(S) = T_x(X) \times \mathbb{R}^M$$

محاسبه میکنیم. چنانچه نگاشت

$$m : X \times S \longrightarrow X \times S$$
$$(x, s) \mapsto (x, \tau(x)s)$$

را جهت روشن شدن بحث تعریف کنیم، آنگاه مشتق آن برابر خواهد بود با

$$dm_{(x,s)}(v, w) = (v, \tau(x).w + d\tau_x(v).s)$$

که $\tau(x), d\tau_x(v) \in \mathbb{R}$ اسکالرهایی هستند که در بردار های $w, s \in \mathbb{R}^M$ ضرب میشوند. حال قاعده ی زنجیره‌ای را روی $G = F \circ m$ اعمال کرده و $\tau(x)$ و $d\tau_x$ را با ۰ جایگزین خواهیم کرد، لذا داریم

$$dG_{(x,s)}(v, w) = (dF_{m(x,s)} \circ dm_{(x,s)})(v, w) = dF_{(x,0)}(v, 0).$$

اکنون چون F زمانی که به $X \times \{0\}$ تحدید شود برابر با f خواهد بود، از تساوی فوق نتیجه میگیریم

$$dG_{(x,s)}(v, w) = df_x(v). \tag{۲.۲}$$

اما اگر $\tau(x) = 0$ آنگاه $x \in U$ و $Z \pitchfork f$ در x، بنابراین طبق رابطه ی ۲.۲ که نتیجه میدهد df_x و $dG_{(x,s)}$ تصویر یکسان دارند، خواهیم داشت $G \pitchfork Z$ در (x, s). همچنین استدلال مشابه نشان میدهد $\partial G \pitchfork Z$. حال از قضیه ی تراگذری ۱.۳.۲ میتوان یک s انتخاب کرد که $g(x) = G(x, s)$ در شروط $g \pitchfork Z$ و $\partial g \pitchfork Z$ صدق کند. همانطور که میدانیم مثل قبل، g با f هموتوپیک است. علاوه بر این، چنانچه x عضو همسایگی از C باشد که روی آن $\tau = 0$، آنگاه

$$g(x) = G(x, s) = F(x, 0s) = F(x, 0) = f(x).$$

□

حال بعنوان حالتی خاص و مهم از قضیه ی اخیر، میتوان به علت بسته بودن ∂X در X، حکم زیر را نتیجه گرفت.

نتیجه ۲.۳.۲. چنانچه برای تابع $f : X \longrightarrow Y$، نگاشت مرزی $\partial f : \partial X \longrightarrow Y$ تراگذر به Z باشد، آنگاه یک نگاشت هموتوپیک با f مانند $g : X \longrightarrow Y$ وجود خواهد داشت بطوریکه $\partial g = \partial f$ و $g \pitchfork Z$.

به منظور توجه بیشتر به مرز، میتوان نتیجه ی فوق را در شکل مفید دیگری تعبیر کرد.

گزاره ۲.۳.۲. فرض کنیم $h : \partial X \longrightarrow Y$ نگاشتی تراگذر به Z باشد، آنگاه چنانچه h به نگاشتی تعریف شده روی کل منیفلد، بصورت $X \longrightarrow Y$ توسیع یابد، در این صورت به نگاشتی که روی کل X تراگذر به Z باشد نیز توسیع خواهد یافت.

اثبات. در نظر میگیریم $H : X \longrightarrow Y$ توسیع مذکور در فرض باشد، آنگاه با بکارگیری نتیجه ی ۲.۳.۲ روی H، به تابع $G : X \longrightarrow Y$ دست میابیم که روی کل X، $G \pitchfork Z$ و روی ∂X، $\partial G = \partial H$. لذا طبق $\partial H = H|_{\partial X} = h$ داریم

$$G\big|_{\partial X} = \partial G = \partial H = h$$

و حکم برقرار است. □

Abstract

Transversality is a notion really related to some geometric objects, named manifolds and smooth mappings between them. That's why we have discussed in Chapter 1 about these objects; and some other essential tools to introduce transversality in terms of them, like tangent spaces or derivative of a smooth mapping between manifolds as some special subsets of Euclidean space, which are not necessarily open. Nevertheless, in the last section of this chapter we have proved the stability of this property for small deformations which occur in mappings. Eventually, Chapter 2 begins by adding boundaries to manifolds. We have classified one-manifolds and presented Hirsch's proof of the Brouwer fixed-point theorem. Then the transversality theorem is derived, implying that transversal intersections are generic.

Keywords Manifolds, Derivatives and Tangents, Transversality, Homotopy and Stability, Intersection theory

Isfahan University of Technology
Department of Mathematical Sciences
Faculty of Pure Mathematics
Geometry And Topology

Intersection theory in differential topology

Bachelor of Science Thesis in Mathematics

By:

Mehran Karkheiran Khouzani

Supervisor:

Dr. Sajjad Lakzian

September 2024