دانشکده علوم ریاضی
گروه ریاضی کاربردی

پروژه کارشناسی ریاضیات و کاربردها گرایش گراف و درجه بندی

عنوان

رتبه بندی و درجه بندی راس های گراف

پژوهشگر

یگانه امینی

استاد راهنما

دکتر مجید گازر

تابستان 1403

چکیده:

یکی از مسایل مهم در نظریه گراف ،علوم کامپیوتر وشبکه های اجتماعی،مشخص کردن اهمیت راس های یک گراف است.یکی از روش ها،رتبه بندی است که برپایه گام برداری بنا شده است. هدف ما در این مقاله ، توضیح الگوریتم رتبه بندی به دو شکل متمرکز و توزیع شده است. بدین منظور نخست مفهوم رتبه بندی در الگوریتم محاسبه ان را به صورت متمرکز توضیح میدهیم.

واژگان کلیدی: روش مونت کارلو، گام برداری تصادفی ، معیار های مرکزیت، سیستم های توزیع شده.

فهرست مطالب

فصل 1: مقدمه

۱.۰.۱ مروری بر فصل های دیگر 6

فصل2: تعاریف

۱.۲

۱.۱.۲ گراف 7

۱.۱.۲ مثال 8

۲.۱.۲ مثال 8

۲.۱.۲ طوقه..... 10

۳.۱.۲ گراف متناهی 10

۴.۱.۲ گراف ساده 10

۵.۱.۲ گراف مرکب 10

۶.۱.۲ درجه راس ها 10

۱.۱.۲ قضیه 10

فصل 3: رتبه بندی راس های گراف

۱.۳ سرآغاز و انگیزه

۱.۱.۳ مثال 11

۲.۱.۳ مثال..... 12

۱.۱.۳ تعریف 12

۲.۳ مفاهیم و نتایج مقدماتی

۱.۲.۳ مرکزیت..... 12

۱.۲.۳ تعریف 13

۱.۲.۳ مثال 13

۲.۲.۳ زنجیر مارکوف و گام برداری..... 13

۳.۲.۳ رتبه بندی..... 14

۲.۲.۳ تعریف..... 15

۱.۲.۳ قضیه..... 15

۲.۲.۳ قضیه..... 15

۲.۲.۳ مثال 15

۳.۳ سیستم های توزیع شده : مفاهیم و نتایج مقدماتی

۱.۳.۳ تعریف..... 17

۱.۳.۳ مثال..... 17

۱.۳.۳ کاربرد رتبه بندی گره های یک سیستم توزیع شده.....19
۲.۳.۳ مثال.....19
۳.۳.۳ مثال.....19

فصل ۱

مقدمه

شاید در اولین مواجه با نظریه گراف سردرگم شوید وفکر کنید موضوعی ترسناک و نامفهوم باشد.اما در اصل نظریه گراف برخلاف تصورما ،چندان کارآمد نیست امت کاربردهای مفید مهمی در علوم مختلف ویا حتی زندگی روزمره دارد.

هدف از این پروژه یک مقدمه جامع در رابطه با نظریه گراف و درجه بندی راس های گراف است.در عصر مدرن امروزی ، نظریه گراف به عنوان یک ابزار مفیدی برای تعیین کمیت وساده سازی بسیاری از بخش های متحرک سیستم های پویا در نظر گرفته می شود و با توجه به مجموعه ای از گره ها و اتصالات ، می توان هرچیزی را از طرح بندی شهر گرفته تا داده های کامپیوتری ، به صورت یه زبان ریاضی معنادار تبدیل کرد.امروزه برنامه های کاربردی زیادی برپایه نظریه گراف طراحی و توسعه یافته است.

فصل ۲

در دنیای ما ، وضعیت های فراوانی وجود دارند که می توان توسط نموداری متشکل از یک مجموعه نقاط ، به علاوه خطوطی که برخی از این نقاط را به یکدیگر متصل میکنند، به توصیف آن پرداخت . به عنوان مثال برای نشان دادن رابطه ی دوستی بین یک دسته از انسان ها می توانیم هر شخص را با یک نقطه مشخص کنیم و نقاط متناظر با هر دو دوست را با یک خط به یکدیگر وصل کنیم. یا در جای دیگر ممکن است برای نشان دادن یک شبکه ارتباطی ، از نموداری استفاده کنیم که در آن، نقاط نمایانگر مراکز ارتباطی و خطوط، نشان دهنده پیوند های ارتباطی بین مراکز باشند.توجه داشته باشید که در این گونه نمودار ها انچه بیشتر مورد توجه است این است که ایا دو نقطه داده شده ، به وسیله یک خط به یکدیگر مستقل هستند یا نه و طریقه اتصال انها اهمیتی ندارد.

تجرید ریاضی این وضعیت ها به مفهوم گراف منتهی می شود.

تعریف ۱.۱.۲: گراف : یک گراف از یک مجموعه نقاط نامتناهی راس ها V(G) و یک مجموعه یال ها E(G) که از راس ها مجزا هستند، تشکیل شده است.

یک سه تایی مرتب (V(G),E(G),$\psi(G)$) است که تشکیل شده از یک مجموعه ناتهی V(G) از راس ها، یک مجموعه E(G) _ مجزا از V(G) _از یال ها و یک تابع وقوع $\psi(G)$ که به هر یال G یک زوج نامرتب از راس های G را که الزاما متمایز نیستند نسبت میدهد .اگر e یک یال و u و v دو راس باشند به طوری که ψ_e =uv در این صورت گفته میشود که e ، راس های u و v را به یکدیگر وصل کرده است و راس های u ,v دوسر یال e نامیده می شوند.

مثال ۲.۱.۱:

G= ((V(G) ,E(G) ,ψ(G))

V(G)={V_1, V_2, V_3, V_4, V_5}

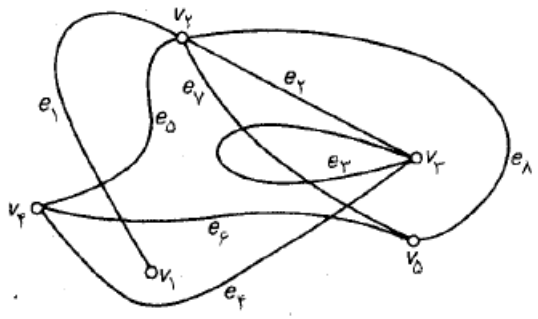
E(G)={ $e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8$}

حال $\psi(G)$ به این صورت تعریف می شوند :

$\psi_G(e_1)=v_1v_2$, $\psi_G(e_2) = v_2v_3$, $\psi_G(e_3) = v_3v_3$

$\psi_G(e_4) = v_4v_3$, $\psi_G(e_5) = v_2v_4$, $\psi_G(e_6) = v_4v_5$

$\psi_G(e_7) = v_2v_5$, $\psi_G(e_8) = v_2v_5$



G

مثال ۲.۱.۲:

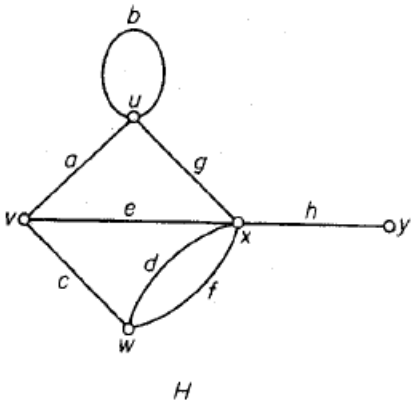
V(H)={u, v, w, x, y}

E(G)={ a, b, c, d, e, f, g, h}

حال $\psi(G)$به این صورت تعریف می شوند :

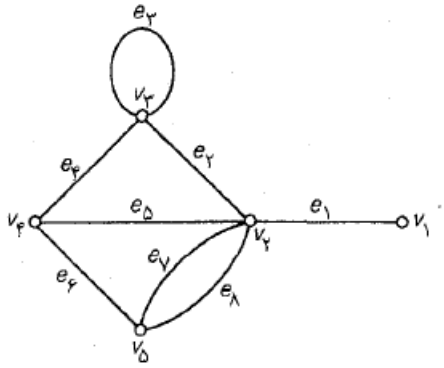
$\psi_H(a)$=uv , $\psi_H(b)$=uu , $\psi_H(c)$=uw , $\psi_H(d)$=wx

$\psi_H(e)$=vx , $\psi_H(f)$=wx , $\psi_H(g)$=ux , $\psi_H(h)$=xy



H

نکته : برای رسم یک گراف ، روش یکتایی وجود ندارد. بدین دلیل که موقعیت نسبی نقاط و خطوط که به ترتیب نمایانگر راس ها ویال های گراف هستند ، برای ما اهمیتی ندارد . به عنوان مثال نمودار دیگری از گراف در شکل امده است.



تعریف ۲.۱.۲: طوقه : گرافی که به خودش وصل شود طوقه نام دارد.(یک یال با دوسر یکسان).

یال چندگانه: گرافی که از یک راس دوبار به راس دیگر رفته باشد یال چندگانه نامیده میشود.

تعریف۲.۱.۳: گراف متناهی : اگر مجموعه راس ها و یال های یک گراف متناهی باشد ، گراف متناهی نامیده می شود.

تعریف ۲.۱.۴: گراف ساده : یک گراف ساده است ، اگر هیچ طوقه ای نداشته باشد و بین هر دو راس ان ، بیش از یک یال نباشد.

تعریف ۲.۱.۵: گراف مرکب :گرافی که ساده نباشد مرکب نامیده می شود.به عبارتی گرافی که دارای طوقه و یال چند گانه باشد گراف مرکب است.

تعریف ۲.۱.۶ : درجه راس ها : درجه راس V گراف در G، $d(V)$ برابر تعداد یال های واقع بر Vمی باشد. در این تعریف هر طوقه به عنوان دو یال شمرده میشود.

کمترین و بیشترین درجه راس های G را به ترتیب با $\delta(G)$ و $\Delta(G)$ نمایش می دهیم.

قضیه ۲.۲.۱: $\Sigma\, d(v) = 2E$

نتیجه: در هر گراف تعداد راس های فرد ، زوج است.

فصل ۳

1.3: سرآغاز و انگیزه:

در شبکه ها (گراف) به ویژه در شبکه های جهانی وب ، شبکه های اجتماعی و شبکه های زیستی و همچنین در سیستم های توزیع شده ، به منظور تعیین اهمیت گره ها ، از معیار های مرکزیت استفاده می شود. یک معیار مرکزیت ، تابعی است که به هرکدام از گره های شبکه متناسب با اهمیت ان گره ، عددی حقیقی نسبت می دهد.

معیار های مرکزیت را بر اساس روش های گوناگون از قبل مرکزیت مبتنی بر درجه ، بردار ویژه ، رتبه بندی ، و نزدیکی تعریف می کنند . در ایم میان روش رتبه بندی که برای اولین بار توسط برین ویچ ، به منظور تعیین اهمیت صفحه های وب و در حوزه الگوریتم های وب مطرح شد و موجب شکل گیری شرکت های گوگل گردید.به دلیل کاربرد های گستر ده ای که بعد ها در سایر حوزه ها ی علوم کامپیوتر پیدا کرد از اهمیت ویژه ای برخوردار است.

اکنون چند مثال را به منظور بررسی اهمیت رتبه بندی گره های یک شبکه در مسایل کاربردی دنبال می کنیم.

مثال ۱.۱.۳: **(کاربرد در شبکه وب)**

اگر صفحه های وب را معادل با گره های شبکه و آبرلینک های را که بین صفحه های وب پیوند ایجاد میکنند ، لینکهای شبکه در نظر بگیریم ، شبکه ایجاد شده را شبکه وب می نامیم .

پیمایش کنندگان صفحه های وب با جستجوی یک عبارت در موتورهای جستجو مانند گوگل یا بینگ ، غالباً با صدها یا هزاران صفحه مواجه میشوند که بررسی همهٔ این صفحه ها زمان بر و در بسیاری اوقات ناممکن است لذا باید صفحه های مذکور به شیوه ای مناسب مرتب شوند و صفحه هایی که اهمیت بیشتر دارند در ابتدای نتیجه جستجو قرار بگیرند.

مثال ۲.۱.۳: **(کاربرد در امور نظامی)**

اگر سربازان و فرماندهان یک لشگر نظامی را گره های شبکه ارتباط های بین آنها را لینکهای شبکه در نظر بگیریم ، شبکه ایجاد شده را یک شبکه نظامی می نامیم. به منظور انجام حمله نظامی و رساندن بیشترین آسیب ممکن به دشمن میتوانیم همه نیروی های دشمن را مورد حمله قرار دهیم . واضح است که این عملیات پرهزینه و زمان بر خواهد بود. از آنجا که نابودی گره های با اهمیت فرماندهان باعث از هم گسیختگی شبکه لشگر خواهد شد، لذا به جای حمله به همه گره های شبکه میتوانیم تنها به گره های مهم حمله کنیم برای این کار نیاز است که نخست گره های مهم را شناسایی کنیم.

تعریف ۱.۱.۳: رتبه بندی : رتبه بندی مبتنی بر یک زنجیره مارکوف است که در حالت متمرکز، با به توان رساندن ماتریس انتقال زنجیر مارکوف محاسبه می شود.

2.3 مفاهیم و نتایج مقدماتی

در این بخش معیار مرکزیت ، معیار مرکزیت مبتنی بر درجه ،زنجیر مارکوف ،گام برداری تصادفی،رتبه بندی و الگوریتم متمرکزمحاسبه رتبه بندی را توضیح می دهیم.

مرکزیت ۱.۲.۳ : به گره هایی از شبکه که دارای اهمیت بیشتری هستند،

گره ها مرکزی میگوییم. در واقع مفهوم مرکزیت معادل با این پرسش است : « کدام گره ها ،شبکه مرکزی هستند؟»

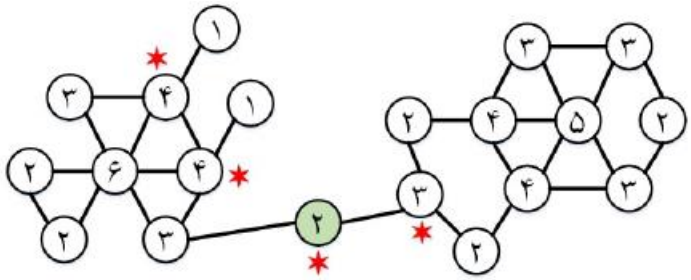
تعریف ۱.۲.۳: فرض کنید $G=(V,E)$ یک گراف باشد. هرتابع $C:V\rightarrow R$ یک معیار مرکزیت C نامیده می شود که درآن، $C(V)$ اهمیت گره $v\in V$ را نشان می دهد.

برای تعیین مرکزیت ، معیارها متفاوتی ارائه شده است و یکی از رایج ترین معیارهای مرکزیت معیار مبتنی بر درجه است که در آن، اهمیت هر گره متناسب با درجهٔ آن گره است.

در شبکه ها گره هایی که درجه بیشتری دارند ، اهمیت بیشتری برخوردارند. اما عکس این موضوع صادق نیست. به بیان دیگر گره هایی که با درجه کوچک هستند الزاما کم ارزش نیستند.

مثال ۱.۲.۳ : در شکل۱ با اینکه در جه گره خاکستری کوچک است ولی چون حذف آن موجب ناهبندی شبکه می شود، از اهمیت زیادی برخوردار است، رأس هایی مانند راس های ستاره دار در (شکل1)که حذف آنها موجب ناهبنده شدن گراف می شود،

نقاط مفصلی یا راس های برشی می گوییم.



ز نجیر مارکوف و گام برداری تصادفی ۲.۲.۳:

یک فرآیند تصادفی خانواده ای از متغیرهای تصادفی مانند$X=\{X_t:t\in T\}$با مجموعه اندیس گذار T فضای حالتS این مورد ها در نظر گرفته می شود:

الف) $T=\{0,1,2,\ldots\}$یا$T=[0\cdot\infty)$

ب) $S=R$ یا $S=N$

به این ترتیب، در یک تقسیم بندی کلی ، فرآیندهای تصادفی به چهار تقسیم می شوند : زمان گسسته -حالت گسسته، زمان گسسته- حالت پیوسته، زمان پیوسته- حالت گسسته و زمان پیوسته - حالت پیوسته. یک فرآیند تصادفی زمان گسسته - حالت گسسته را زنجیر مارکوف می نامیم هرگاه به ازای $n\in N$ و هر $j=s$ $i_0,i_1,.....,i_{n-1}$ داشته باشیم.

$$P(X_{n+1}=jX_0=i_0,.....,X_{n-1}=i_{n-1},x_n=i)=P(X_{n+1}=jx_n-i)$$

رتبه بندی ۳.۲.۳ : روش رتبه بندی در ابتدا برای تعین اهمیت به صفحه های وب مطرح شد. یک پیمایش کننده صفحهای وب را در حال شاهده صفحه Sدروب A در نظر بگیرید.

پس از مشاهدهAیکی از چهار پیشامد زیر ممکن است رخ بدهد:

1)پیمایش کننده به پیمایش صفحه های وب پایان می دهد.

2)پیمایش کننده از طریق یکی از ابر لینک ها خروجی Aوارد قسمت دیگرA میشود.
3)پیمایش کننده از طریق یکی از ابر لینک ها خروجیAوارد قسمتBمی شود.

4)پیمایش کننده وارد صفحه Cمیشودکه جز لینک های خروجیAنیست.

برای محاسبه رتبه بندی شبکه وب را توسط گراف جهت دار $D=(V,A)$ که در آن A,Vبه ترتیب مجموعه راس ها و یال ها هستند مدلسازی میکنیم:

درگرافD یک تناظر یک به یک بین راس ها و صفحه های وب ، برقرار است و از راس Uبه راسV یک یال وجود دارد اگر و تنها اگر صفحه متناظر با راس های Uدارای یک ابر لینک خروجی به صفحه متناظربا راسV باشد.فرض کنیم $n=|V|$ برای هر گرافDماتریس مربعی P_{n*n} به صورت زیر می سازیم:

$$\tilde{p}_{v,u}=\begin{cases}\begin{cases}\frac{1}{|V_O(v)|} & u\in V_O(v)\\ 0 & \text{اگرنه}\end{cases} & |V_O(v)|>0\\ \frac{1}{n} & |V_O(v)|=0\end{cases}$$

از ماتریس P برای ساخت ماتریس انتقال یک زنجیر مارکوف استفاده می کنیم.

تعریف ۲.۲.۳: فرض کنید D=(V,A) یک گراف جهتدار باشد. توزیع مانای زنجیر مارکوفی را که فضای حالت ان مجموعه V و ماتریس انتقال آن

$$P^* = \varepsilon P + (1+\varepsilon)\left(\frac{1}{n}\right)J$$

باشد ، رتبه بندی گویند.

در اینجا J یک ماتریس مربعی n*n با درایه های 1و ε عددی حقیقی در بازه(1و0) است که احتمال باقی ماندن گره را نشان می دهد.

قضیه ۱.۲.۳: فرض کنید Pماتریس انتقال یک زنجیر مارکوف باشد ، اگر P نامتناوب و تتحویل پذیر باشد ، انگاه یک بردار سطری π با شرایط $\pi P = \pi$ و $\pi I = 1$ که در آن I یک بردار ستونی است که همه درایه های آن ، I هستند .

به عبارت دیگر $\lim_{t\to\infty} P \geq 0$ که از J مستقل هستند .

قضیه ۲.۲.۳: ماتریس انتقال P در تعریف ۲.۲.۳ و در شرایط قضیه ۱.۲.۳ صادق است.

مثال ۲.۲.۳:

قرار می دهیم $\varepsilon = ./۸۵$.

ماتریس P را به این صورت می نویسیم:

$$\tilde{P} = \begin{bmatrix} ۰ & \frac{۱}{۲} & ۰ & \frac{۱}{۲} & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۱ \\ \frac{۱}{۵} & \frac{۱}{۵} & \frac{۱}{۵} & \frac{۱}{۵} & \frac{۱}{۵} \end{bmatrix}.$$

برای ساختن P براساس تعریف به صورت زیر عمل می کنیم:

$$P = \epsilon\tilde{P} + (1-\epsilon)(1/n)J = \begin{bmatrix} ۰/۰۳۰ & ۰/۴۵۵ & ۰/۰۳۰ & ۰/۴۵۵ & ۰/۰۳۰ \\ ۰/۰۳۰ & ۰/۰۳۰ & ۰/۸۸۰ & ۰/۰۳۰ & ۰/۰۳۰ \\ ۰/۸۸۰ & ۰/۰۳۰ & ۰/۰۳۰ & ۰/۰۳۰ & ۰/۰۳۰ \\ ۰/۰۳۰ & ۰/۰۳۰ & ۰/۰۳۰ & ۰/۰۳۰ & ۰/۸۸۰ \\ ۰/۲۰۰ & ۰/۲۰۰ & ۰/۲۰۰ & ۰/۲۰۰ & ۰/۲۰۰ \end{bmatrix}$$

برای محاسبه بردار مانا (بردار رتبه بندی) ، معادله $\pi P = \pi$ را تشکیل می دهیم که از ان دستگاه معادلات خطی به دست می آید:

$$\begin{cases} ۰/۰۳۰x_۱ + ۰/۰۳۰x_۲ + ۰/۸۸۰x_۳ + ۰/۰۳۰x_۴ + ۰/۲۰۰x_۵ = x_۱ \\ ۰/۴۵۵x_۱ + ۰/۰۳۰x_۲ + ۰/۰۳۰x_۳ + ۰/۰۳۰x_۴ + ۰/۲۰۰x_۵ = x_۲ \\ ۰/۰۳۰x_۱ + ۰/۸۸۰x_۲ + ۰/۰۳۰x_۳ + ۰/۰۳۰x_۴ + ۰/۲۰۰x_۵ = x_۳ \\ ۰/۴۵۵x_۱ + ۰/۰۳۰x_۲ + ۰/۰۳۰x_۳ + ۰/۰۳۰x_۴ + ۰/۲۰۰x_۵ = x_۴ \\ ۰/۰۳۰x_۱ + ۰/۰۳۰x_۲ + ۰/۰۳۰x_۳ + ۰/۸۸۰x_۴ + ۰/۲۰۰x_۵ = x_۵ \end{cases}$$

با حل معادلات دستگاه بالا به شرط $\pi I = 1$ بردار مانا به این صورت می باشد :

$$\pi \approx \begin{bmatrix} ۰/۲۴۳ & ۰/۱۶۹ & ۰/۲۰۹ & ۰/۱۶۹ & ۰/۲۰۹ \end{bmatrix}$$

3.3 سیستم های توزیع شده : مفاهیم و نتایج مقدماتی

در بخش قبل ، روش محاسبه متمرکز رتبه بندی را بررسی کردیم . چون الگوریتم روی یک سیستم متمرکز اجرا می شود ، آن را متمرکز می نامیم. در مقابل سیستم های متمرکز سیستم های توزیع شده قرار دارند.الگوریتم رتبه بندی بر روی سیستم ها ی توزیع شده نیز قابل محاسبه است.

تعریف ۱.۳.۳: یک سیستم توزیع شده مجموعه ای از گره های محاسباتی است ، که توسط یک شبکه ارتباطی به هم وصل شده اند و در صدد انجام کاری مشترک هستند.

منظور از گره محاسباتی هر وسیله ای است که قابلیت پردازش و نگهداری داده ها را داشته باشد. لذا رایانه های شخصی ، حسگرهای یک شبکه حسگر بیسیم ، پردازنده های یک سیستم چند پردازنده ای و یا تلفن های همراه ،گره های محاسباتی یک سیستم توزیع شده هستند و سیستم های توزیع شده واحد های محاسباتی در صدد انجام کاری مشترک هستند.

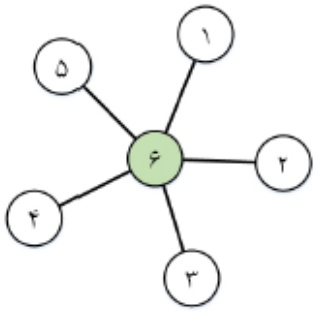
مثال ۱.۳.۳: گراف G را به صورت شکل ۳ در نظر می گیریم.که در آن هر گره معادل با یک واحد محاسباتی در یک سیستم توزیع شده است. هدف ما مجموع اعداد فهرست $\sigma = [1,2,..,10]$ است که می خواهیم محاسبه کنیم .پس σ را درسیستم توزیع شده ، توزیع و سپس مجموع ان را حساب می کنیم.

فرض کنید σ بر روی رایانه شماره 6 قرار داشته باشد به جای اینکه کل محاسبات را توسط رایانه 6 انجام دهیم ، رایانه 6 فهرست σ را به 5 زیر فهرست میشکند.(چون 5 واحد محاسبات داریم).

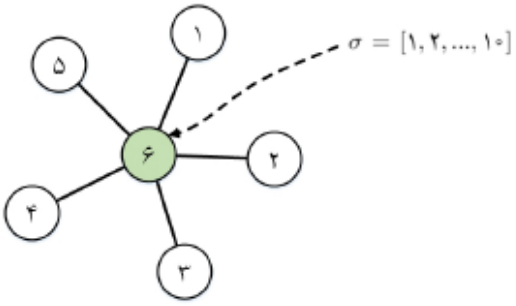
وهر زیرفهرست را به یکی از واحد های محاسباتی دیگر ارسال می کند.

در ادامه گره های 1و2و3و4و5 مجموع اعداد فهرست های خودشان را حساب و نتیجه را به گره 6 ارسال می کنند.

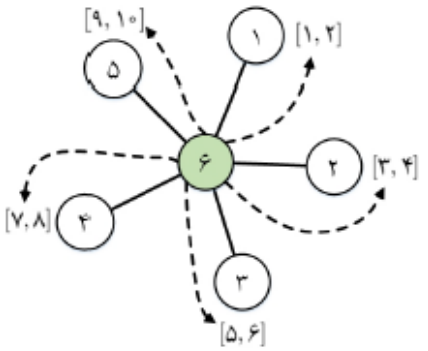
در پایان گره 6 مجموع عددهای رسیده از گره های دیگر را به عنوان خروجی اعلام می کند وکار پایان می یابد.



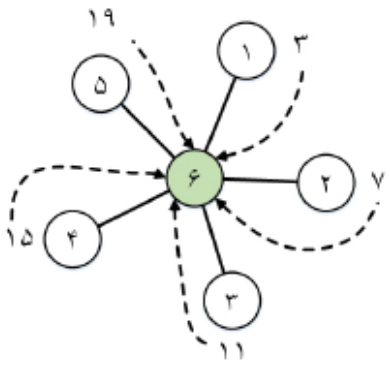
(آ) گراف G



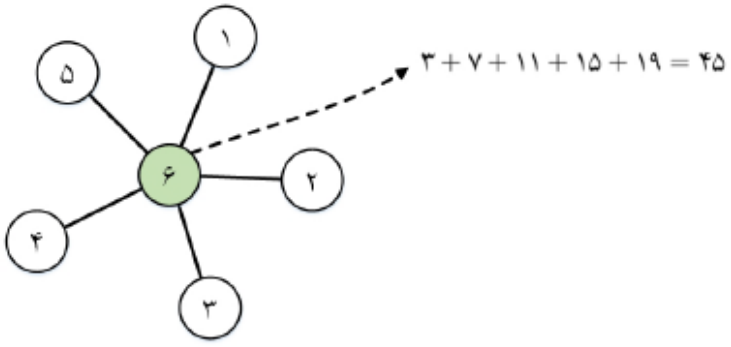
(ب) فهرست σ برای انجام محاسبات به گره ۶ ارسال می‌شود.



(ج) گره ۶، فهرست σ را به چند زیرفهرست می‌شکند و هر زیرفهرست را به یک واحد محاسباتی دیگر ارسال می‌کند.



(د) هر گره مجموع اعداد فهرست خود را محاسبه می‌کند و نتیجه را برای گره ۶ ارسال می‌کند.



کاربرد رتبه بندی گره های یک سیستم توزیع شده ۱.۳.۳ : یکی از مسایل مطرح در حووزه سیستم های توزیع شده ، توازن بار است.

اگر در انجام محاسبات توزیع شده ، بار محاسباتی به گونه ای متوازن بین واحد های محاسباتی توزیع شود ، گوییم توازن بار روی داده است .

در مثال قبل بار محاسباتی، زیرفهرست هایی است که توسط گره6 به گره های 1تا5 تخصیص داده شده است و اگر طول فهرست ها برابر یا تقریبا برابر باشد ، توازن بار روی داده است.

هدف از توازن بار ، استفاده بهینه از منابع ، کاهش زمان پاسخ و از بین بردن سر بارمحاسباتی واحدهای محاسباتی است.

مثال۲.۳.۳: (کاربرد مسیریابی)

ساختار و توپولوژی بسیاری از شبکه ها دایما در حال تغیر است .لذا برای ارسال پیام از یک گره به گره دیگر ، لازم است که مسیریابی به صورت پویا انجام شود.

از انجا که گره های با رتبه ای بالا، با تعداد زیادی از گره های دیگر در ارتباط هستند ، یک گره برای اینکه پیامی را انتقال دهد، از بین همسایه های خود به همسایه های با رتبه بالاتر اولویت بیشتر می دهد و از این طریق موجب افزایش سرعت رسیدن پیام به مقصد می شود.

مثال ۳.۳.۳: (کاربرد در زمان بندی کارها)

چون در سیستم رایانه ای در یک بازه زمانی کوتاه نیاز به \ردازش های بسیار است ، اولویت بندی کارها در این سیستم ها امری ضروری است. چارچوب هدوپ، به منظور ذخیره و پردازش توزیع شده به کار می رود. یکی از روش های نوین برای اولویت بندی کارها در چارچوب هدوپ،استفاده از رتبه کارها است.