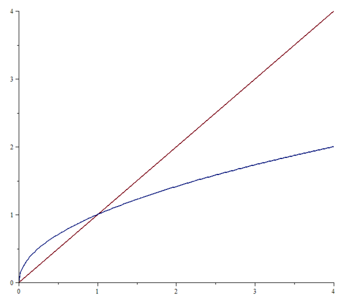
پاسخ سوالات امتحان پایان‌ترم ریاضی عمومی ۱
نیمسال اول ۱۴۰۱

---

۱. مساحت ناحیه محصور بین منحنی $y = x$ و $y = \sqrt{x}$ و خط $x = 4$ در ربع اول را بیابید. (۱ نمره)

راه حل. به ازای $0 \le x \le 1$ داریم $\sqrt{x} \ge x$ و به ازای $1 \le x \le 4$ داریم $x \ge \sqrt{x}$. بنابراین مساحت بین دو منحنی به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 (\sqrt{x} - x)\, dx + \int_1^4 (x - \sqrt{x})\, dx \\
&= (\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2}x^2)\Big]_0^1 + (\frac{1}{2}x^2 - \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}})\Big]_1^4 \\
&= (\frac{2}{3} - \frac{1}{2}) + (8 - \frac{16}{3}) - (\frac{1}{2} - \frac{2}{3}) \\
&= 3.
\end{aligned}$$



۲. اگر $\int_0^1 f(x)\, dx = 2$ و $\int_0^2 f(x)\, dx = -4$، آن‌گاه حاصل $\int_0^1 xf(x^2+1)\, dx$ را بدست آورید. (۱ نمره)

راه حل. با تغییر متغیر $u = x^2 + 1$ داریم $du = 2xdx$. همچنین به ازای $x = 0$ داریم $u = 1$ و به ازای $x = 1$ داریم $u = 2$. بنابراین

$$\begin{aligned}
\int_0^1 xf(x^2+1)\, dx = \int_1^2 \frac{1}{2} f(u)\, du &= \frac{1}{2}(\int_0^2 f(u)\, du - \int_0^1 f(u)\, du) \\
&= \frac{1}{2}(-4 - 2) = -3.
\end{aligned}$$

۳. انتگرالهای زیر را محاسبه کنید

الف) $\int \frac{x^2+x+1}{(x+1)(x^2+1)}\, dx$ (۱ نمره)

حل: از روش کسرهای جرئی استفاده می کنیم.

$$\frac{x^2+x+1}{(x+1)(x^2+1)} = \frac{A}{(x+1)} + \frac{Bx+c}{(x^2+1)}$$

در نتیجه داریم

$$\begin{aligned}
A(x^2+1) + (Bx+C)(x+1) = x^2+x+1 &\Longrightarrow (A+B)x^2 + (B+C)x + A + C = x^2 + x + 1 \\
&\Longrightarrow A+B = 1, \quad B+C = 1, \quad A+C = 1.
\end{aligned}$$

از حل این دستگاه داریم:

$$A = B = C = \frac{1}{2}.$$

بنا براین

$$\int \frac{x^2+x+1}{(x+1)(x^2+1)}\, dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{x+1}\, dx + \frac{1}{2}\int \frac{x+1}{x^2+1}\, dx$$

$$= \frac{1}{2}\ln|x+1| + \frac{1}{4}\int \frac{2x}{x^2+1} + +\frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2+1}$$
$$= \frac{1}{2}\ln|x+1| + \frac{1}{4}\ln(x^2+1) + \frac{1}{2}\arctan x + C\,.$$

ب)

$$\int x \arctan x \, dx$$ (۱ نمره)

حل: با استفاده از روش جز به جز قرار می دهیم

$$u = \arctan x \Longrightarrow du = \frac{dx}{x^2+1}, \quad xdx = dv \Longrightarrow v = \frac{1}{2}x^2.$$

در نتیجه

$$\int x \arctan x \, dx = \frac{1}{2}x^2 \arctan x + \frac{1}{2}\int \frac{x^2}{x^2+1}\, dx$$
$$= \frac{1}{2}x^2 \arctan x + \frac{1}{2}\int dx - \frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2+1} = \frac{1}{2}x^2 \arctan x + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\arctan x + C.$$

ج) $\int_3^4 \sqrt{-x^2+6x-8}\, dx$ (۱ نمره)

حل: ابتدا عبارت زیر رادیکال را به مربع کامل تبدیل می کنیم.

$$\sqrt{-x^2+6x-8} = \sqrt{-(x^2-6x+8)} = \sqrt{-(x-3)^2+1}$$

با تغییر متغیر $x-3 = \sin\theta$ داریم $dx = \cos\theta\, d\theta$ و $\theta = \sin^{-1}(x-3)$. هم‌چنین به ازای $x = 2$ داریم $\theta = \sin^{-1}(0) = 0$ و به ازای $x = 4$ داریم $\theta = \frac{\pi}{2}$. بنابراین

$$\int_3^4 \sqrt{-x^2+6x-8}\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2\theta}\, \cos\theta\, d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta\, d\theta$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2\theta}{2}\, d\theta = \frac{1}{2}\left[\theta + \frac{1}{2}\sin 2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}\,.$$

۴. همگرایی سری‌های زیر را بررسی کنید.

الف) همگرایی سری $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^3}$ را بررسی کنید

با توجه به اینکه تابع $f(x) = \frac{1}{x(\ln x)^3}$ یک تابع پیوسته و نزولی و نامنفی روی بازه $[2,\infty]$ می باشد بنا به آزمون انتگرال کافی است همگرایی انتگرال زیر را بررسی کنیم.

$$\lim_{c\longrightarrow\infty} \int_2^c \frac{1}{x(\ln x)^3}dx = \lim_{c\longrightarrow\infty} \int_{\ln 2}^{\ln c} \frac{1}{t^3}dt = \lim_{c\longrightarrow\infty} \frac{-1}{2(\ln c)^2} + \frac{1}{2(\ln 2)^2} = \frac{1}{2(\ln 2)^2}$$

بنابراین $\int_2^\infty f(x)dx$ همگراست و درنتیجه سری مذکور نیز همگراست.

ب) قرار دهید $a_n = \frac{\sqrt{n+1}}{n^3+2}$ و $b_n = \frac{1}{n^2\sqrt{n}}$ توجه کنیم دنباله ها نامنفی هستند و داریم

$$\lim \frac{a_n}{b_n} = 1.$$

از طرف دیگر سری $\sum b_n$ بنا به p−سری برای $p > 1$ همگراست پس طبق مقایسه حدی نیز $\sum a_n$ همگراست.

ج) با آزمون مقایسه راه حل را بیان میکنیم اما دقت کنید اگر به درستی سوال توسط آزمون های دیگر حل شود نیز قبول می باشد به نامساوی زیر دقت کنید

$$0 < \frac{3^n}{2^n+5^n} < (\frac{3}{5})^n$$

و سری $\sum(\frac{3}{5})^n$ یک سری هندسی با قدرنسبت کمتر از یک است و همگراست پس بنا به آزمون مقایسه سری مذکور نیز همگراست.

د) نشان میدهیم دنباله $a_n = (1-\frac{3}{n})^{2n}$ به عددی مخالف صفر همگراست پس سری $\sum(1-\frac{3}{n})^{2n}$ واگراست

قرار دهید

$$f(x) = (1-\frac{3}{x})^{2x}$$

و حد آن را در بی نهایت بررسی میکنیم

$$\lim_{x\longrightarrow\infty} f(x) = e^{\lim_{x\longrightarrow\infty} 2x\ln(1-\frac{3}{x})} = e^{2\lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{\ln(1-\frac{3}{x})}{\frac{1}{x}}} =^{HOP} e^{2\lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{3}{1-\frac{3}{x}}} = e^6$$

بنابراین حد جمله عمومی دنباله یعنی $a_n = f(n)$ نیز صفر نیست و سری متناظر آن واگراست.

۵. **قسمت الف.** دامنهٔ همگرایی سریِ توانِ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^2+1}(2x-3)^n$ را محاسبه کنید. 1.5 نمره

پاسخ با روش اول. قرار دهید $a_n = \frac{n}{n^2+1}(2x-3)^n$. در این صورت

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| =$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{n+1}{(n+1)^2+1}(2x-3)^{n+1}}{\frac{n}{n^2+1}(2x-3)^n}\right| = |2x-3|$$

دامنهٔ همگرای سری فوق شامل مجموعهٔ زیر است: 0.5 نمره

$$\{x : |2x-3| < 1\} = (1,2)$$

حال باید بررسی کنیم که آیا نقاط ۱ و ۲ نیز در دامنهٔ همگرایی هستند یا خیر. سری مورد نظر در نقطهٔ ۱ به صورت زیر است:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^2+1}(-1)^n$$

قرار دهید $b_n = \frac{n}{n^2+1}$. تابعِ $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$ را در نظر بگیرید. داریم $f'(x) = \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$. بنابراین سریِ b_n یک سری نزولی است. از طرفی $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$. پس بنا به آزمون لایبنیتز، سریِ $\sum(-1)^n b_n$ همگراست. از این رو نقطهٔ $x=2$ نیز در دامنهٔ همگرایی سری مورد نظر ماست. 0.5 نمره.

در نقطهٔ $x=2$ سری مد نظر سوال برابر با سری عددی زیر است:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^2+1}$$

سری فوق بنا به آزمون مقایسهٔ حدی با سری $\sum\frac{1}{n}$ واگراست. بنابراین نقطهٔ $x=3$ جزو نقاط همگرایی سری مد نظر سوال نیست. (0.5 نمره).

راه حل دوم. سری را به صورت زیر تبدیل کنید:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n2^n}{n^2+1}(x-\frac{3}{2})^n$$

سری فوق یک سری توانی حول نقطهٔ $x=\frac{3}{2}$ است. برای تعیین شعاع همگرایی آن قرار دهید:

$$a_n = \frac{n2^n}{n^2+1}$$

و بررسی کنید که $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 2$. پس شعاع همگرایی سری برابر با $\frac{1}{2}$ است و بازهٔ همگرایی سری شامل مجموعهٔ زیر است: 0.5 نمره.

$$\{x : |x-\frac{3}{2}| < \frac{1}{2}\} = (1,2)$$

بررسی سری در نقاط $2, 3$ مشابه راه بالا صورت می‌پذیرد.

قسمت ب. همگرایی یا واگرایی انتگرال ناسرهٔ زیر را مشخص کنید.

$$\int_1^\infty \frac{1}{x\sqrt{x^3+1}}.$$

پاسخ با روش اول. توابع $f(x) = \frac{1}{x\sqrt{x^3+1}}$ و $g(x) = \frac{1}{x^{\frac{5}{2}}}$ هر دو در بازهٔ $(1, +\infty)$ پیوسته، و از رو انتگرال‌پذیر هستند. هر دو تابع در این بازه، نامنفی هستند و از طرفی

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

پس دو انتگرال ناسرهٔ $\int_1^\infty f(x)dx$ و $\int_1^\infty g(x)dx$ از نظر همگرایی یکسانند. نیم نمره

اما دومی یک انتگرال ناسرهٔ همگراست، زیرا به صورت $\int_1^\infty \frac{1}{x^p}dx$ است که در آن $p > 1$. پس انتگرال مورد نظر سوال نیز همگراست. نیم نمره

راه حل دوم. در بازهٔ $[1, \infty[$ داریم

$$\frac{1}{x\sqrt{x^3+1}} \leq \frac{1}{x\sqrt{x^3}} = \frac{1}{x^{\frac{5}{2}}}$$

توابع بالا همهٔ نامنفی هستند. پس انتگرال مورد نظر سوال، بنا به مقایسه با انتگرالِ $\int_1^\infty \frac{1}{x^{\frac{5}{2}}}dx$ همگراست.