منطق ریاضی

محسن خانی
دانشگاه صنعتی اصفهان

۲۵ مهر ۱۴۰۵

فصل ۱

استلزام

بگذارید بحث را با یک تمرین ساده در نظریهٔ گروه‌ها آغاز کنیم: نشان دهید که در هر گروه، وارون هر عنصر یکتاست.

احتمالا هر دانشجوی ریاضی تمرین بالا را به صورت پیش رو پاسخ می‌دهد: فرض می‌کنیم $(G, \times, 1_G)$ یک گروه دلخواه، و $a \in G$ یک عنصر دلخواه باشد. فرض کنید که b_1, b_2 دو وارون عنصر a در G باشند. پس در این گروه G اتفاق زیر رخ می‌دهد:

$$a \times b_1 = a \times b_2 (= 1_G).$$

چون G گروه است می‌دانیم که در آن می‌شود دو طرف تساوی را در یک عدد ضرب کرد؛ پس

$$b_1 \times (a \times b_1) = b_1 \times (a \times b_2)$$

و از آنجا که G گروه است می‌دانیم که ضرب در آن انجمنی است، پس باز در همین گروه G داریم:

$$(b_1 \times a) \times b_1 = (b_1 \times a) \times b_2;$$

بنابراین

$$b_1 = b_2.$$

تمرین بالا را می‌شد بدین صورت نیز بیان کرد: «گروه بودن مستلزم یکتا بودن وارون هر عنصر است»؛ و روش اثبات نیز همین است که دیدیم: اگر ساختاری گروه باشد در آن ساختار وارون هر عنصر یکتاست. تعریف زیر از همین ایده بهره گرفته است.

تعریف ۱ (استلزام)**.** فرض کنید $\mathcal{L}$ یک زبان مرتبهٔ اول، T یک $\mathcal{L}$تئوری و φ یک $\mathcal{L}$جمله باشد (که ممکن است φ از جملات موجود در T باشد یا جمله‌ای غیر از آنها). می‌گوییم تئوری T مستلزم جملهٔ φ است و می‌نویسیم:

$$T \models \varphi,$$

هرگاه در هر مدلِ تئوری T جملهٔ φ درست باشد؛ به بیان دیگر،برای هر $\mathcal{L}$ ساختارِ $\mathcal{M}$ اگر $\mathcal{M} \models T$ آنگاه $\mathcal{M} \models \varphi$.

باز به بیان دیگر، زمانی می‌گوییم T مستلزم φ است که برای هر $\mathcal{L}$ساختارِ $\mathcal{M}$ اگر برای هر $\psi \in T$ داشته باشیم $M \models \psi$، آنگاه داشته باشیم: $M \models \varphi$. وقتی تئوری T مستلزم φ نباشد، می‌نویسیم $T \not\models \varphi$. پس حکم تمرین ابتدای این بخش را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$T_{\text{group}} \models \forall x \forall y_1 \forall y_2 \Big((x \cdot y_1 \doteq x \cdot y_2 \doteq 1) \to y_1 \doteq y_2 \Big)$$

تمرین ۱. چند استلزام دیگر در نظریهٔ گروه‌های آبلی مثال بزنید.

ملاحظه ۲. بنا به تعریفِ ۱، عبارتِ $T \not\models \varphi$ بدین معنی است که یک $\mathcal{L}$ساختارِ $\mathcal{M}$ وجود دارد به طوری که $\mathcal{M} \models T$ اما $\mathcal{M} \not\models \varphi$. برای مثال، همان تئوریِ گروه‌های آبلی مستلزم جملهٔ زیر نیست:

$$\psi : \exists x_1 \exists x_2 \quad \Big(\big(x_1 \neq x_2 \wedge \forall y \quad (y \doteq x_1 \vee y \doteq x_2) \big) \Big)$$

جملهٔ بالا بیانگر این است که فقط دو عنصر وجود دارد. می‌دانیم که، به عنوان مثال، $(\mathbb{Z}_3, \dot{+}, \dot{0})$ یک گروه آبلی است که جملهٔ بالا در مورد آن نادرست است؛ زیرا این گروه سه عنصر دارد.

ملاحظه ۳. این که $T \nvDash \varphi$ معادل با این که $T \models \neg\varphi$ نیست. برای مثال، همان جملهٔ ψ را در ملاحظهٔ بالا در نظر بگیرید. گفتیم که $T_{\text{abgroup}} \nvDash \psi$، زیرا گروه‌های آبلی غیردوعضوی وجود دارند. اما از طرفی این گونه نیست که $T_{\text{abgroup}} \models \neg\psi$؛ زیرا گروه‌های آبلی دوعضوی هم وجود دارند. پس برای یک تئوریِ T و یک جملهٔ φ ممکن است که همزمان دو عبارت زیر درست باشند:

$$T \nvDash \varphi \qquad T \nvDash \neg\varphi.$$

در ملاحظهٔ بالا گفته شد که این که $T \nvDash \varphi$ بدین معنی است که T مدل یا مدلهایی دارد که در آنها $\neg\varphi$ برقرار است؛ بیان دیگر این گفته، تمرین زیر است.

تمرین ۲.

۱. $T \nvDash \varphi$ اگروتنهااگر $T \cup \{\neg\varphi\}$ دارای مدل باشد.

۲. (عکس نقیض عبارت بالا) $T \models \varphi$ اگر و تنهااگر $T \cup \{\neg\varphi\}$ دارای هیچ مدلی نباشد.

ملاحظه ۴. بیان دیگری از ملاحظهٔ بالا نیز سودمند است: این گونه نیست که برای یک تئوری T و یک جملهٔ φ داشته باشیم

$$T \models \varphi \text{ یا } T \models \neg\varphi,$$

یعنی این گونه نیست که یا در همهٔ مدلهای یک تئوری جملهٔ φ درست باشد، یا در همهٔ مدلهای تئوری مورد نظر، نقیض این جمله درست باشد. ممکن است در برخی مدلهای تئوریِ T جملهٔ φ درست باشد و در برخی دیگر از مدلهای تئوریِ T جملهٔ $\neg\varphi$ درست باشد. این امری کاملا طبیعی است؛ مثلاً برخی گرافها منتظم هستند و برخی گرافها منتظم نیستند. یعنی در برخی مدلهای تئوری گراف، جمله کامل بودن درست است و در برخی نیست. به عنوان مثالی دیگر، برخی گروه‌ها آبلی هستند و برخی گروه‌ها آبلی نیستند. یعنی تئوری گروه‌ها نه مستلزم جملهٔ آبلی بودن است و نه مستلزم جملهٔ ناآبلی بودن. باز به عنوان یک مثال دیگر، برخی حلقه‌ها میدان هستند و برخی‌ها نیستند؛ یعنی تئوری حلقه‌ها نه مستلزم میدان بودن است و نه مستلزم نقیض میدان بودن.

ملاحظه ۵. واضح است که اگر $\varphi \in T$ (یعنی زمانی که جملهٔ φ یکی از جملاتِ تئوری مورد نظر باشد) آنگاه $T \models \varphi$. برای مثال در هر گروه، هر عنصری وارون دارد، زیرا این گفته جزو اصول نظریهٔ گروه‌هاست. حال فرض کنید φ یک جملهٔ مرتبهٔ اول باشد و قرار دهید $T = \{\varphi, \neg\varphi\}$ را در نظر بگیرید. برای این تئوری داریم:

$$T \models \varphi \qquad T \models \neg\varphi.$$

تعریف ۶. می‌گوییم تئوریِ T مستلزم تناقض است (یا یک تئوری تناقض‌آمیز است) هرگاه یک جملهٔ φ وجود داشته باشد به طوری که

$$T \models \varphi \text{ و } T \models \neg\varphi.$$

قبلاً گفتیم که اگر $\mathcal{M}$ یک ساختارِ مرتبهٔ اول باشد (بنا به تعریفِ صدق فرمولها) نمی‌توان همزمان دو عبارت زیر را داشت:

$$\mathcal{M} \models \varphi \text{ و } \mathcal{M} \models \neg\varphi$$

پس به آسانی به نتیجهٔ زیر می‌رسیم:

نتیجه ۷. اگر تئوریِ T مستلزم تناقض باشد آنگاه این تئوری هیچ مدلی ندارد.

قضیه ۸. اگر تئوریِ T مستلزم تناقض باشد، آنگاه مستلزم هر جمله‌ای است؛ به بیان دیگر برای هر جملهٔ ψ خواهیم داشت

$$T \models \psi.$$

اثبات. فرض کنید T یک تئوریِ مستلزمِ تناقض باشد. بنا به نتیجهٔ قبلی، تئوریِ T هیچ مدلی ندارد. پس جملهٔ زیر به انتفاء مقدم دربارهٔ تئوریِ T درست است:

اگر $\mathcal{M}$ مدلی برای تئوری T باشد آنگاه $\mathcal{M}$ مدلی برای جملهٔ ψ است.

□

پس وقتی یک تئوری، مستلزم یک تناقض باشد، مستلزم همه چیز، از جمله همهٔ تناقضات است. برای راحت شدن صحبت در مورد تناقضات، برای یک تناقض خاص می‌توانیم نماد معرفی می‌کنیم:

$$\bot: \Big(\forall x x \doteq x \wedge \exists x x \neq x\Big)$$

پس از این به بعد برای بیان این که تئوری T مستلزم تناقض است، خواهیم نوشت:

$$T \models \bot .$$

تا اینجا گفتیم که یک تئوری که مستلزم تناقض باشد، هیچ مدلی ندارد. عکس این گفته نیز به به صورتی که در زیر بیان شده، برقرار است.

اگر یک تئوری T مستلزم تناقض نباشد، دارای مدل است.

در واقع این که $T \not\models \bot$ یعنی T مدلی دارد که در آن تناقض رخ نمی‌دهد، به طور خاص T دارای مدل است.

قضیه ۹. موارد زیر با هم معادلند:

۱. $T \models (\varphi \to \psi)$.

۲. $T \cup \{\varphi\} \models \psi$.

اثبات. اولی بدین معناست که در هر مدلِ $\mathcal{M}$ از T جملهٔ $(\varphi \to \psi)$ صادق است. دومی بدین معناست که در هر مدل T که مدلِ جملهٔ φ هم باشد، جملهٔ ψ برقرار است. معادل بودن این دو مشخص است. □

تمرین ۳. نشان دهید که دو عبارت زیر لزوماً با هم معادل نیستند:

۱. $T \models (\varphi \to \psi)$،

۲. اگر $T \models \varphi$ آنگاه $T \models \psi$.

راهنمایی برای اثبات. دقت کنید که عبارت اول بدین معنی است که در هر مدلِ تئوری T جملهٔ $(\varphi \to \psi)$ درست است؛ اما جملهٔ دوم می‌گوید که اگر جملهٔ φ به طور همزمان در همهٔ مدلهای T صادق باشد، آنگاه جملهٔ ψ نیز به طور همزمان در همهٔ مدلهای T صادق است. فرض کنید T تئوری گروه‌ها باشد. آنگاه عبارت زیر درست است:

اگر همهٔ گروه‌ها شش عضوی باشند، همهٔ گروه‌ها آبلی هستند.

علت درستی عبارت بالا، انتفاء مقدم است؛ چون این گونه نیست که همهٔ گروه‌ها شش عضوی باشند. در عین حال عبارت زیر درست نیست:

اگر گروهی شش عضوی باشد آبلی است.

زیرا گروه شش عضوی غیرآبلی هم وجود دارد (گروه تقارنهای یک مثلث). □

تمرین ۴. نشان دهید که $T \cup \{\varphi\} \models \bot$ اگروتنهااگر $T \models \neg\varphi$.

تمرین ۵. آیا عبارت زیر درست است؟

$$T \models (\varphi \vee \psi) \Leftrightarrow \Big(T \models \varphi \text{ یا } T \models \psi\Big).$$

یک مثال از تئوری در یک زبانِ $\mathcal{L}$ تئوری‌ای است که هیچ جمله‌ای ندارد؛ یعنی تئوریِ $T = \varnothing$. واضح است که هر $\mathcal{L}$ساختاری مدلی برای این تئوری است؛ زیرا به انتقاء مقدم اگر جمله‌ای در این تئوری باشد در $\mathcal{M}$ درست است.

تعریف ۱۰. می گوییم جملهٔ φ یک جملهٔ همواره درست است هرگاه

$$\varnothing \models \varphi.$$

پس یک جمله، زمانی همواره درست است که در هر $\mathcal{L}$ساختاری درست باشد. در بخشهای دیگر درس دربارهٔ جمله‌های همواره درست بیشتر صحبت خواهیم کرد؛ ولی ذکر مثال زیر در اینجا را خالی از لطف نمی‌بینیم.

مثال ۱۱. فرض کنید $\mathcal{L} = \{H\}$ یک زبانِ مرتبهٔ اول باشد که دارای تنها یک نماد محمولِ تک‌موضعی است. در یک $\mathcal{L}$ساختارِ $\mathcal{M}$ عبارتِ $H^{\mathcal{M}}(x)$ بدین معنی است که x ویژگیِ H را داراست. به عنوان مثال، اگر جهانِ M متشکل از انسانها باشد، یک تعبیر $H^{\mathcal{M}}(x)$ می‌تواند این باشد که انسان x کلاه دارد! ادعا می‌کنیم که جملهٔ زیر، همواره درست است:

$$\exists x \quad \Big(H(x) \to \forall y H(y)\Big).$$

جملهٔ بالا می‌گوید که «یک نفر هست که اگر او کلاه داشته باشد، همه کلاه دارند». به ظاهر درست بودن این جمله در هر جامعهٔ قابل تصور، عجیب به نظر می‌رسد؛ ولی تعریف درستی ریاضی، همان طور که در ادامه خواهیم دید، به ما می‌گوید که این جمله در هر جامعه‌ای درست است.

فرض کنید M یک جامعه باشد. از دو حال خارج نیست:

۱. یک نفر به نام a وجود دارد که او کلاه ندارد.

۲. همه کلاه دارند.

در حالت اول، جملهٔ زیر در جامعهٔ ما به انتفاء مقدم درست است:

$$\big(H(a) \to \forall x H(x)\big)$$

پس جملهٔ زیر درست است:

$$\exists x \quad \big(H(x) \to \forall y H(y)\big).$$

آن x ای که وجود دارد همان آقا یا خانم a است. بررسی این که در حالت دوم هم جملهٔ ما درست است را به عنوان تمرین رها می‌کنیم.

در بخش قبل گفتیم که یک جملهٔ واحد در هر دنیای ذهنی یا حقیقی معنایی منحصر به خود دارد. می‌گوییم یک جمله، همواره درست است، هرگاه در دنیای ذهنی که ترجمه شود، در آن دنیا درست باشد. برای مثال جملهٔ زیر را در نظر بگیرید:

یک نفر هست که اگر او باهوش باشند همه باهوشند.

ادعا می‌کنیم که جملهٔ بالا در هر جامعهٔ ذهنی یا واقعی و با هر تصوری که نسبت به عبارت «باهوش بودن» داشته باشیم درست است!

یک جامعهٔ دلخواه و یک تصور از باهوش بودن را در نظر بگیرید.

به عنوان حالت اول، فرض کنید که این جامعه یک نفر به نام الف وجود داشته باشد که باهوش نیست (با هر تصوری که نسبت به مفهوم باهوش بودن در آن جامعه داریم). در این صورت جملهٔ

اگر الف باهوش باشد، همه باهوشند.

در این جامعه، به انتفاء مقدم درست است (دقت کنید که در تعریف درستی جمله‌ها، جمله‌ای که فرض آن رخ ندهد را جمله‌ای درست در نظر گرفته‌ایم). از آنجا که جملهٔ بالا درست است، پس جملهٔ زیر هم درست است:

یک نفر هست (مثلاً همان آقا یا خانم الف) که اگر او باهوش باشد، همه باهوشند.

به عنوان دوم فرض کنید که با تصوری که نسبت به مفهوم باهوش بودن در آن جهان داریم، همه باهوش باشند. باز هم جملهٔ زیر (با تعریف ریاضی درستی) درست است:

یک نفر هست (هر کس را که بگیریم فرق نمی‌کند) که اگر او باهوش باشد همه باهوشند.

علت درستی جملهٔ بالا این است که فرض و حکم آن هر دو درستند.

پس تا اینجا گفتیم که با این که معنای جملهٔ ما در جهانهای مختلف متفاوت است، ولی جملهٔ ما می‌تواند در همهٔ آنها درست باشد.

به هر مجموعهٔ متشکل از یک تعداد جمله، یک نظریه گفته می‌شود. به جهانهایی که تمام جملات موجود در یک نظریه در آنها درستند، مدلهای آن نظریه گفته می‌شود. می‌گوییم یک نظریه، مستلزم یک جمله است هرگاه در همهٔ مدلهای آن نظریه، جملهٔ مورد نظر ما هم درست باشد.

اگر T یک نظریه باشد که مستلزم جملهٔ φ است می‌نویسیم:

$$T \models \varphi.$$

فصل ۲

تئوری‌های کامل

در ملاحظه ۴ در فصل قبل گفتیم که برای یک تئوریِ T و یک جملهٔ φ، این‌چنین نیست که لزوماً یا $T \models \varphi$ و یا $T \models \neg\varphi$. هر کدام از موارد زیر ممکن است رخ بدهد:

۱. $T \models \varphi$ و $T \models \neg\varphi$ که در این صورت تئوری مورد نظر ما، مستلزم تناقض است. یک چنین تئوری‌ای هیچ مدلی ندارد.

۲. $T \not\models \varphi$ و $T \not\models \neg\varphi$؛ یعنی در برخی از مدلهای T جملهٔ φ اتفاق بیفتد و در برخی مدلهای T نقیض این اتفاق رخ دهد (و ضمناً T دارای مدل است!)

۳. $T \models \varphi$ و $T \not\models \neg\varphi$؛ یعنی جملهٔ φ در همهٔ مدلها رخ دهد و قطعا مدلی برای T وجود داشته باشد که در آن φ رخ می‌دهد. در واقع در این حالت مطمئنیم که تئوری T دارای یک مدل است (یعنی تناقض آمیز نیست) و نیز می‌دانیم که در همهٔ مدلهای آن جملهٔ φ درست است.

۴. $T \models \neg\varphi$ و $T \not\models \varphi$. توضیح این حالت مشابه حالت قبل است.

تئوریِ T را یک تئوریِ کامل می‌نامیم هرگاه در مقابل هر جملهٔ مرتبهٔ اول φ موضع‌گیری مشخص کند. به بیان دقیق‌تر:

تعریف ۱۲. فرض کنید $\mathcal{L}$ یک زبانِ مرتبهٔ اول و T یک $\mathcal{L}$ تئوری باشد که مستلزم تناقض نیست (یعنی حداقل یک مدل دارد). می‌گوییم T یک تئوری کامل است هرگاه برای هر $\mathcal{L}$جملهٔ φ دقیقاً یکی از حالات زیر رخ بدهد.

۱. $T \models \varphi$

۲. $T \models \neg\varphi$.

بنا به تعریفِ بالا، اگر T یک تئوری کامل باشد و $T \not\models \varphi$ آنگاه $T \models \neg\varphi$. یکی از مشخصه‌های تئوری‌های کامل این است که **مستلزم هر آنچه هستند که با آنها سازگار است.**

تعریف ۱۳. می‌گوییم تئوری T با جملهٔ φ سازگار است هرگاه تئوریِ $T \cup \{\varphi\}$ دارای مدل باشد؛ به بیان دیگر هرگاه $T \not\models \neg\varphi$.

قضیه ۱۴. اگر تئوری کاملِ T با جملهٔ φ سازگار باشد آنگاه $T \models \varphi$.

اثبات. فرض کنید T کامل و سازگار با φ باشد. پس یک مدلِ $\mathcal{M} \models T$ وجود دارد به طوری که $\mathcal{M} \models \varphi$. حال اگر $T \not\models \varphi$ آنگاه بنا به کامل بودن، $T \models \neg\varphi$. پس $\mathcal{M} \models \neg\varphi$. اما این تناقض است، زیرا بنا به تعریف صدق فرمولها، $\mathcal{M}$ نمی‌تواند همزمان هم مدل φ و هم مدل $\neg\varphi$ باشد. □

تمرین ۶. فرض کنید T یک تئوری کامل باشد. در این صورت برای هر جملهٔ φ یا T با φ سازگار است یا T با $\neg\varphi$ سازگار است (و هر دو اینها با هم رخ نمی‌دهد).

۱.۲ موهبت و پرسش کامل بودن

فرض کنید که $\mathcal{M}$ یک $\mathcal{L}$ساختارِ مرتبهٔ اول و T یک تئوریِ کامل باشد به طوری که $\mathcal{M} \models T$. همچنین فرض کنید که φ یک $\mathcal{L}$ جمله باشد. از آنجا که T یک تئوری کامل است، یا همزمان در همهٔ مدلهای T (از جمله مدلِ $\mathcal{M}$) جملهٔ φ برقرار است یا این که همزمان در همهٔ مدلهای T (دوباره از جمله $\mathcal{M}$) جملهٔ $\neg\varphi$ برقرار است. پس برای هر جملهٔ φ داریم $\mathcal{M} \models \varphi$ اگروتنهااگر $T \models \varphi$. در واقع تئوریِ T دقیقاً مستلزم جملاتی است که در ساختارِ $\mathcal{M}$ برقرار هستند. به بیان بهتر، تئوریِ T یک **اصل‌بندی کامل** برای ساختارِ $\mathcal{M}$ است که مستلزم همهٔ ویژگی‌های این ساختار است.

تمرین ۷. فرض کنید T یک تئوری کامل باشد و $\mathcal{M} \models T$. قرار دهید $T' = \{\varphi : \mathcal{M} \models \varphi\}$. نشان دهید که دو تئوری T و T' مدلهای یکسانی دارند (یعنی هر ساختاری که مدل یکی باشد، مدل دیگری نیز هست).

به دلایلی که بعداً خواهیم دید، گاهی بررسی این که تئوریِ T مستلزم جملهٔ φ است، آسان‌تر از بررسی این است که آیا جملهٔ φ در ساختارِ $\mathcal{M}$ برقرار است یا نه؛ و موهبت کامل بودن، همین است. در این باره پس از اثبات قضیهٔ تمامیت گودل، دوباره صحبت خواهیم کرد.

موهبت یادشده زمانی حیاتی‌تر است که تئوریِ کاملی که $\mathcal{M}$ مدل آن است، از تعداد جملاتی کمی تشکیل شده است. در واقع، هر تعداد جملهٔ φ که در ساختار $\mathcal{M}$ برقرار باشند، تشکیل یک تئوری می‌دهند که $\mathcal{M}$ مدلی برای آن است. ولی وقتی یک تعداد از این جملات تشکیل یک تئوری کامل بدهند، یعنی همهٔ دیگر ویژگی‌های $\mathcal{M}$ به نحوی «نتیجه‌ای» از همین تعداد جملات هستند.

یکی از ساختارهای جذاب ریاضی، ساختار اعداد طبیعی است: $\mathcal{N} = (\mathbb{N}, +, \cdot, 0, 1)$ که «نظریهٔ اعداد» علم بررسی جملاتی مانند φ است که در این ساختار درست هستند. به عنوان یک مثال از یک تئوریِ T به طوری که $\mathcal{N} \models T$، تئوری متشکل از جملات زیر، موسوم به تئوریِ حساب پئانو را در نظر بگیرید:

۱. $\forall x, y, z \; x + (y + z) = (x + y) + z$

۲. $\forall x, y \; x + y = y + x$

۳. $x + 0 = x$

۴. $x + y = x + z \rightarrow y = z$.

۵. $\forall x, y, z \quad x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$

۶. $\forall x, y \quad x \cdot y = y \cdot x$

۷. برای هر فرمولِ $\varphi(x, z_1, \ldots, z_n)$ یک اصلِ

$$Ind_\varphi : \forall z_1, \ldots, z_n \left(\Big(\varphi(0, z_1, \ldots, z_n) \wedge \big(\forall y \varphi(y, z_1, \ldots, z_n) \rightarrow \varphi(y + 1, z_1, \ldots, z_n) \big) \Big) \rightarrow \forall x \varphi(x, z_1, \ldots, z_n) \right)$$

پیش از آنکه دربارهٔ اصول موضوعهٔ بالا توضیح بدهم یادآوری می‌شوم که آنچه عموماً به عنوان اصول موضوعهٔ پئانو برای اعداد طبیعی در منابع معرفی می‌شود شاید اندکی متفاوت با اصول موضوعهٔ بالا (و در زبانی دیگر) باشد ولی اساساً همین واقعیات را بیان می‌کنند.

اصولی که با شماره‌های ۱ تا ۶ مشخص شده‌اند ویژگیهای معمول مورد انتظار از جمع و ضرب اعداد طبیعی است. اما شمارهٔ ۷ فقط یک اصل نیست؛ یک «شِمای اصل» است که قرار است که مفهوم استقراء را در اعداد طبیعی بیان کند. برای درک بهترِ مورد ۷ آن را کمی نادقیق‌تر و در مورد فرمولِ $\varphi(x)$ توضیح می‌دهیم. جملهٔ Ind_φ را به صورت زیر در نظر بگیرید:

$$\Big(\varphi(0) \wedge \forall x (\varphi(x) \rightarrow \varphi(x + 1)) \Big) \rightarrow \forall x \varphi(x).$$

جملهٔ بالا می‌گوید که اگر عنصر 0 ویژگیِ φ را داشته باشد، و همواره از این که یک عنصر ویژگیِ φ را دارد نتیجه شود که عنصر بعدی آن هم ویژگی φ را دارد، آنگاه همهٔ عناصر ویژگی φ را دارند. اما این جمله باید برای هر ویژگی φ یک بار نوشته شود و از این رو بی‌نهایت اصل به صورتِ Ind_φ (یکی به ازای هر یک فرمول) در بالا قرار داده شده است. در واقع برایمان امکان‌پذیر نبود که به صورت مرتبهٔ اول، بگوییم هر زیرمجموعه‌ای که شامل

1 است و اگر شاملِ n باشد، شاملِ $n+1$ هم هست، شامل همهٔ اعداد است؛ از این رو به صورت مرتبهٔ اول، این خواسته را برای هر مجموعه‌ای که توسط یک فرمول تعریف شود بیان کردیم.

بیایید مجموعهٔ اصولی که در بالا با شماره‌های ۱ تا ۷ شماره‌گذاری شده است را با $Peano$ نشان دهیم. می‌دانیم که $(\mathbb{N},+,\cdot,0,1) \models Peano$؛ در واقع این اصول را به گونه‌ای نوشته‌ایم که ویژگی‌های اعداد طبیعی را وصف کنند. اما موضوع این بخش از کتاب، پرسیدن این سوال معقول است که «آیا $Peano$ یک تئوری کامل است»؟ به بیان دیگر، آیا برای هر جملهٔ φ این گونه است که $(\mathbb{N},+,\cdot,0,1) \models \varphi$ اگر و تنها اگر $Peano$ مستلزمِ φ باشد؟ باز به بیان دیگر، آیا همهٔ ویژگی‌های اعداد طبیعی از همین تعداد اصول (به صورت استلزامی) به دست می‌آیند؟

سوالی که در بالا پرسیده‌ایم، اتفاقاً عمیق و موضوع یک قضیهٔ مهم در منطق ریاضی است و فراهم کردن پاسخ آن در این بخش از کتاب ممکن نیست (البته در بخشهای آینده این سوال به نحو قانع‌کننده‌ای پاسخ گفته خواهد شد).

قضیه ۱ (قضیهٔ ناتمامیت اول گودل ـ بیان برای یک حالت خاص)**.** $Peano$ یک تئوریِ کامل نیست.

در بالا اشاره به یک نتیجه از قضیه‌ای مهم در منطق ریاضی، به نام قضیهٔ ناتمامیت اول گودل شده است. صورت کلی این قضیه بدین سوال می‌پردازد که آیا اصولاً نوشتن یک تئوری کامل برای ساختارِ $\mathcal{N}$ امکان‌پذیر است یا خیر.

پیش از به پایان رساندن این بخش خوب است به یک مصداق از یک تئوری کامل آشنا بپردازیم. در هندسهٔ اقلیدسی تعداد محدودی اصل موضوعه داریم که هر قضیه‌ای «نتیجه‌ای» از آنهاست. در واقع هندسهٔ اقلیدسی، یک مصداق از تئوری کامل است.

۲.۲ محکی برای تشخیص کامل بودن: سامانه‌های رفت و برگشتی*

در بخشِ ؟؟ با مفهوم ایزومرفیسم میان $\mathcal{L}$ ساختارها آشنا شدیم و گفتیم دو $\mathcal{L}$ساختار، زمانی ایزومرف هستند که نگاشتی میان آنها وجود داشته باشد که نه تنها عناصر یکی را به نحو یک به یک به دیگری تصویر می‌کند، بلکه تعابیر علائم زبانی را میان آن‌دو حفظ می‌کند. در قضیه‌ای ثابت کردیم که در صورت وجود یک ایزومرفیسم میان دو ساختار، عناصر و تصاویر آنها تحت یک ایزومرفیسم در فرمولهای یکسانی صدق کنند. همان طور که در آن بخش نیز گفتیم، ایزومرفیسم میان دو ساختار، یک مفهوم کاملاً و آشنا برای کسانی است که با جبر آشنایی دارند.

اما یک مفهوم حائز اهمیت دیگر که منحصر به مطالعهٔ منطقی ساختارهاست، **هم‌ارزی مقدماتی** است که پیش از هر چیز آن را در زیر تعریف می‌کنیم:

تعریف ۱۵. دو $\mathcal{L}$ساختارِ $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2$ را هم‌ارزِ مقدماتی می‌نامیم هرگاه برای هر $\mathcal{L}$جملهٔ φ داشته باشیم

$$\mathcal{M}_1 \models \varphi \Leftrightarrow \mathcal{M}_2 \models \varphi.$$

پس دو ساختار، زمانی هم‌ارز مقدماتی هستند که «جملات» یکسانی ـ و نه فرمولهای یکسانی ـ در آنها درست باشند. پس همینجا ذکر دو نکته ضروری است:

۱. اگر دو $\mathcal{L}$ساختار، ایزومرف باشند، آنگاه با هم هم‌ارز مقدماتی هستند.

تمرین ۸. عبارت بالا را اثبات کنید.

۲. وقتی دو ساختار، با هم ایزومرف هستند، تابعی یک به یک بین جهانهای آنها وجود دارد؛ به طور خاص، اندازهٔ جهان دو ساختار مورد نظر با هم برابر است. اما برای این که دو ساختار هم‌ارز مقدماتی باشند، نیازی نیست که جهانها با هم هم‌اندازه باشند.

تمرین ۹. در یک زبانِ متناهی، فرض کنید $\mathcal{M}, \mathcal{N}$ دو Lساختار هم‌ارز مقدماتی باشند به طوری که جهانهای آنها متناهی است. نشان دهید که این دو ساختار، ایزومرف هستند.

***تمرین ۱۰.** تمرین بالا را برای «زبان نامتناهی» حل کنید.

راهنمایی. تعداد نگاشت‌های یک‌به‌یک و پوشا متناهی است. فرض کنید هیچ‌کدام از این نگاشتها، ایزومرفیسم نباشد. پس برای هر یک چنین نگاشت f یک علامت $z_f \in L$ وجود دارد که حفظ نشود. مجموعهٔ همهٔ علائم این‌چنین متناهی است. از تمرین بالا استفاده کنید. □

در ادامهٔ این بخش، و نیز در ادامهٔ کتاب دربارهٔ هم‌ارزی مقدماتی زیاد سخن خواهیم گفت. ولی نخست باید رابطهٔ تنگاتنگ این مفهوم با مفهوم کامل بودن تئوری‌ها را بیان کنیم: گفتیم که تئوری T زمانی کامل است که یک جمله، یا همزمان در همهٔ مدلهای آن درست باشد یا همزمان در همه مدلهای آن غلط. پس موارد زیر با هم معادلند:

۱. تئوریِ T کامل است.

۲. هر دو مدلِ $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2$ از تئوریِ T با هم هم‌ارز مقدماتی هستند.

۳. اگر $\mathcal{M} \models T$ آنگاه برای هر جملهٔ φ داریم $T \models \varphi$ اگروتنهااگر $\mathcal{M} \models \varphi$ (توضیحات ابتدای بخش ۱.۲ را ببینید).

یکی از دلایلی که موجب هم‌ارزی مقدماتی دو $\mathcal{L}$ ساختار است، ایزومرف بودن آنهاست. اما این شرط به راحتی میان دو ساختار برآورده نمی‌شود. در این بخش شرط ضعیف‌تری برای هم‌ارزی مقدماتی دو ساختار ارائه خواهیم کرد. برای بیان این شرط نیاز به چند تعریف ساده داریم.

تعریف ۱۶ (زیرساختار). فرض کنید $\mathcal{M}, \mathcal{N}$ دو $\mathcal{L}$ساختار باشند. می‌گوییم $\mathcal{M}$ زیرساختاری از $\mathcal{N}$ است، هرگاه جهان M زیرمجموعهٔ جهانِ N باشد تعابیر علائم زبانی در M تحدیدِ تعابیر آنها از N به M باشد. به بیان دقیق‌تر $\mathcal{M}$ زیرساختاری از $\mathcal{N}$ است هرگاه

۱. $M \subseteq N$

۲. برای هرنماد تابعیِ n موضعیِ $f \in \mathcal{L}$ و هر $a_1, \ldots, a_n \in M$ داشته باشیم

$$f^{\mathcal{N}}(a_1, \ldots, a_n) = f^{\mathcal{M}}(a_1, \ldots, a_n) \in M.$$

به بیان دیگر

$$f^{\mathcal{M}} = f^{\mathcal{N}} \restriction M$$

از علامت $\restriction$ برای نشان دادن تحدید توابع به دامنهٔ کوچکتر استفاده می‌شود.

۳. برای هر نماد رابطه‌ای n موضعیِ $R \in M$ و هر $a_1, \ldots, a_n \in M$ داشته باشیم

$$(a_1, \ldots, a_n) \in R^{\mathcal{M}} \Leftrightarrow (a_1, \ldots, a_n) \in R^{\mathcal{N}}$$

باز به بیان دیگر $R^{\mathcal{M}} = R^{\mathcal{N}} \cap M^n$.

۴. برای هر نماد ثابت $c \in L$ داشته باشیم

$$c^{\mathcal{M}} = c^{\mathcal{N}}.$$

به عنوان یک مثال ساده، ساختارِ $\mathcal{N} = (\mathbb{N}, +, \cdot, 0, 1)$ زیرساختاری از ساختارِ $\mathcal{Z} = (\mathbb{Z}, +, \cdot, 0, 1)$ است. زیرا صفر و یک اعداد طبیعی همان صفر و یک اعداد صحیح است و اعمال جمع و ضرب اعداد طبیعی، همانها در اعداد صحیح هستند که به اعداد طبیعی محدود شده‌اند.

ملاحظه ۱۷. این را که $\mathcal{M}$ زیرساختاری از $\mathcal{N}$ است با نماد $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{N}$ نشان می‌دهیم. استفاده از نماد زیرمجموعه در اینجا نباید غلط‌انداز باشد، زیرا بین دو ساختار (و نه دو مجموعهٔ صرف) استفاده شده است.

تمرین ۱۱. فرض کنید $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{N}$ دو L ساختار باشند.

۱. نشان دهید که اگر $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ یک فرمول بدون سور باشد، آنگاه برای هر $a_1, \ldots, a_n \in M$ داریم $\mathcal{N} \models \varphi(a_1, \ldots, a_n)$ اگروتنهااگر $\mathcal{M} \models \varphi(a_1, \ldots, a_n)$.

۲. فرض کنید $\varphi(x_1, \ldots, x_n) = \exists y_1 \ldots y_n \psi(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n)$ یک فرمول باشد که در آن ψ بدون سور است. نشان دهید که برای هر $a_1, \ldots, a_n \in M$ اگر $\mathcal{M} \models \varphi(a_1, \ldots, a_n)$ آنگاه $\mathcal{N} \models \varphi(a_1, \ldots, a_n)$.

۳. فرض کنید $\varphi(x_1,\ldots,x_n)=\forall y_1,\ldots,y_n\psi(x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_n)$ یک فرمول باشد که در آن ψ بدون سور است. نشان دهید که برای هر $a_1,\ldots,a_n\in M$ اگر $\mathcal{N}\models\varphi(a_1,\ldots,a_n)$ آنگاه $\mathcal{M}\models\varphi(a_1,\ldots,a_n)$.[۱]

حال فرض کنید $\mathcal{M},\mathcal{N}$ دو Lساختار باشند. پیش می‌آید که برخی از زیرساختارهای ساختار $\mathcal{M}$ با برخی از زیرساختارهای ساختارِ $\mathcal{N}$ ایزومرف باشند (حتی ممکن است که $\mathcal{M}$ و $\mathcal{N}$ یک زیرساختار مشترک داشته باشند). حال فرض کنید $\mathbb{A}$ یک مجموعهٔ ناتهی، متشکل از برخی ایزومرفیسمهای این‌چنین باشد. یعنی هر عضو مجموعهٔ $\mathbb{A}$ یک ایزومرفیسم به صورت $f:\mathcal{M}'\to\mathcal{N}'$ باشد که در آن $\mathcal{M}'$ و $\mathcal{N}'$ به ترتیب زیرساختارهایی از $\mathcal{M}$ و $\mathcal{N}$ هستند. برای دو ایزومرفیسمِ $f,g\in\mathbb{A}$ می‌گوییم $f\subseteq g$ هرگاه f به عنوان یک مجموعه از زوجهای مرتب، زیرمجموعهٔ g باشد. به بیان دیگر، دامنهٔ ایزومرفیسمِ f زیرمجموعهٔ دامنهٔ g باشد و برای هر $x\in\mathrm{dom(f)}$ داشته باشیم: $f(x)=g(x)$.

تعریف ۱۸. می‌گوییم مجموعهٔ $\mathbb{A}$ یک سامانهٔ رفت‌وبرگشتی از ایزومرفیسمهای میان زیرساختارهای $\mathcal{M}$ و $\mathcal{N}$ است هرگاه برای هر ایزومرفیسمِ $f\in\mathbb{A}$:

۱. برای هر $a\in M$ یک ایزومرفیسمِ $g\in\mathbb{A}$ موجود باشد به طوری که $f\subseteq g$ و $a\in\mathrm{dom(g)}$.

۲. برای هر $b\in N$ یک ایزومرفیسمِ $h\in\mathbb{A}$ موجود باشد به طوری که $f\subseteq h$ و $b\in\mathrm{range(h)}$.

وجود یک سامانهٔ رفت و برگشتی بین دو ساختار، یعنی امکان انجام یک بازی دو نفره. نفر اول یک ایزومرفیسم در اختیار دارد، می‌خواهد یک عنصر a به دامنهٔ آن اضافه کند. نفر دوم باید یک عنصر c پیدا کند به طوری که c ویژگی‌هایی شبیه به a داشته باشد به طوری که بتوان با تصویر کردن a به c ایزومرفیسم اولیه را گسترش داد. مشابهاً نفر اول ممکن است بخواهد عنصری به بُرد ایزومرفیسم خود اضافه کند و در این صورت نفر دوم باید عنصر مناسبی برای افزودن به دامنه پیدا کند.

قضیه ۱۹ (رابطهٔ بین سامانهٔ رفت و برگشتی و هم‌ارزی مقدماتی)**.** فرض کنید $\mathcal{M},\mathcal{N}$ دو Lساختار باشند به طوری که یک سامانهٔ رفت‌وبرگشتیِ $\mathbb{A}$ از ایزومرفیسمهای میان زیرساختارهای آنها وجود داشته باشد. در این صورت $\mathcal{M},\mathcal{N}$ هم‌ارز مقدماتی هستند.

اثبات. فرض کنید $\varphi(x_1,\ldots,x_n)$ یک L فرمول باشد. نشان می‌دهیم که برای هر $a_1,\ldots,a_n$ در M اگر $\mathcal{M}\models\varphi(a_1,\ldots,a_n)$ آنگاه برای هر ایزومرفیسمِ $f\in\mathbb{A}$ که $a_1,\ldots,a_n$ در دامنهٔ آن باشند داریم $\mathcal{N}\models\varphi(f(a_1),\ldots,f(a_n))$. واضح است که این گفته، حتی حکمی قوی‌تر از حکم قضیه است.

فرض کنید فرمول φ به صورت $t_1\doteq t_2$ باشد و داشته باشیم $\mathcal{M}\models t_1=t_2(a_1,\ldots,a_n)$. در این صورت بنا به تعریف صدق فرمولها داریم: $t_1^{\mathcal{M}}(a_1,\ldots,a_n)=t_2^{\mathcal{M}}(a_1,\ldots,a_n)$. بنا به تعریف سامانه‌های رفت و برگشتی، برای هر ایزومرفیسم $f:\mathcal{M}'\to\mathcal{N}'$ بین زیرساختاری از $\mathcal{M}$ و زیرساختاری از $\mathcal{N}$، داریم $f(t_1)=f(t_2)$. پس $t_1^{\mathcal{N}'}(f(a_1),\ldots,f(a_n))=t_2^{\mathcal{N}'}(f(a_1),\ldots,f(a_n))$. اما با توجه به این که $\mathcal{N}'$ یک زیرساختار از $\mathcal{N}$ است داریم $t_1^{\mathcal{N}}(f(a_1),\ldots,f(a_n))=t_2^{\mathcal{N}}(f(a_1),\ldots,f(a_n))$ و حکم مورد نظر ما در این حالت به اثبات می‌رسد. .

اثبات حکم برای سایر پله‌های استقراء ساده است؛ در اینجا مرحلهٔ اضافه شدن سور وجودی را بررسی می‌کنیم. فرض کنید فرمول φ به صورت $\exists x\psi(x_1,\ldots,x_n)$ باشد و حکم برای ψ برقرار باشد. حال اگر $\mathcal{M}\models\exists x\psi(x,a_1,\ldots,a_n)$، در این صورت عنصر $a\in M$ موجود است به طوری که $\mathcal{M}\models\psi(a,a_1,\ldots,a_n)$. واضح است که ایزومرفیسمی مانند $f\in\mathbb{A}$ موجود است به طوری که $a,a_1,\ldots,a_n\in\mathrm{dom(f)}$. بنا به فرض استقراء، داریم

$\mathcal{N}\models\exists x\quad\psi(x,f(a_1),\ldots,f(a_n))$ یعنی $\mathcal{N}\models\varphi(f(a_1),\ldots,f(a_n))$؛ و این همان است که به دنبالش بودیم. □

مثال ۲۰ (قضیهٔ کانتور)**.** نشان دهید که تئوری ترتیبهای خطی چگال، معرفی شده در ؟؟ یک تئوری کامل است.

اثبات. فرض کنید $\mathcal{M},\mathcal{N}$ دو مدل برای T_{DLO} باشند. نشان می‌دهیم این دو مدل، هم‌ارز مقدماتی هستند. فرض کنید $\mathbb{A}$ مجموعهٔ متشکل از ایزومرفیسمهای میان زیرساختارهای متناهی $\mathcal{M},\mathcal{N}$ باشد. نشان می‌دهیم که $\mathbb{A}$ یک سامانهٔ رفت‌وبرگشتی است.

هر ایزمرفیسم موجود در $\mathbb{A}$ را می‌توان به صورت زیر تصور کرد:

$$a_0<a_1<a_2<\ldots<a_n\overset{f}{\mapsto}b_0<b_1\ldots<b_n$$

[۱] شاید متعجب شوید اگر بدانید که عکس گفت این تمرین نیز برقرار است: اگر فرمولی در زیرساختارها اا‌ز پایین به بالا حفظ شود، قابل نوشتن به صورت فرمول وجودی است. در فصلهای آینده در این باره صحبت خواهیم کرد.

که در آن a_i در M هستند و ترتیب آنها ترتیبِ موجود در ساختارِ $\mathcal{M}$ است و مشابهاً b_i ها در $\mathbb{N}$ هستند و ترتیب آنها همان ترتیب موجود در ساختارِ $\mathcal{N}$ است. فرض کنید $a \in M$ عنصر دلخواهی باشد. برای افزودنِ a به دامنهٔ f ابتدا موقعیت a در جهان M را از لحاظ ترتیبی نسبت به تمام a_i ها معلوم می‌کنیم؛ مثلاً فرض کنید a به صورت زیر در میان a_i ها قرار گرفته باشد:

$$a_1 < a < a_2 < \ldots < a_n$$

حال عنصر b را در N به گونه‌ای انتخاب می‌کنیم که دقیقاً همان وضعیت را نسبت به b_i ها داشته باشد؛ در این مثال خاص b را به گونه‌ای انتخاب می‌کنیم که

$$b_1 < b < b_2 < \ldots < b_n.$$

پیدا کردن b با ویژگی یاد شده، امکان‌پذیر است؛ زیرا ترتیب $\mathcal{N}$ یک ترتیب چگال است و b_i ها عناصری در N هستند. حال ایزومرفیسم زیر، f را گسترش می‌دهد و در $\mathbb{A}$ است:

$$a_1 < a < a_2 < \ldots < a_n \overset{g}{\mapsto} b_1 < b < b_2 < \ldots < b_n$$

□

از مثال بالا، به طور خاص نتیجه می‌شود که برای هر جمله‌ای مانند φ که در زبانِ $L = \{<\}$ نوشته شود، داریم $T_{\mathrm{DLO}} \models \varphi$ اگروتنهااگر $(\mathbb{Q}, <) \models \varphi$.

تمرین ۱۲. در زبانِ $\{E\}$ که فقط یک نماد رابطه‌ای دو موضعی دارد، تئوری روابط هم‌ارزی نامتناهیِ دارای نامتناهی کلاس را بنویسید. نشان دهید که این تئوری، کامل است.

تمرین ۱۳. نشان دهید که هر دو مدلِ شمارا (یعنی دارای جهانی شمارا) از تئوری‌ای که در تمرین ۱۲ معرفی کردید با هم ایزومرفند.

تمرین ۱۴. نشان دهید که دو مدل ناشمارا از تئوری‌ای که در تمرین ۱۲ معرفی کرده‌اید، لزوماً با هم ایزومرف نیستند.

***تمرین ۱۵.** نشان دهید که تئوری ترتیبهای خطی گسسته، بدون ابتدا و انتها، یک تئوری کامل است. (مثال ؟؟ را ببینید).

مثال ۲۱. یک مثال سادهٔ دیگر از تئوری‌های کامل، تئوری «گرافهای تصادفی» است که آن را با T_{RG} نشان می‌دهیم. تئوری یادشده از اجتماع تئوری گرافها با جمله‌های φ_n تشکیل شده است؛ که هر جملهٔ φ_n عبارت زیر را بیان می‌کند:

برای هر n عنصر، یک عنصر x موجود است که به همهٔ آنها وصل است و یک عنصر y موجود است که به هیچ‌کدام وصل نیست.

فرض کنید (G, R_G) و (H, R_H) دو گراف تصادفی باشند و $\mathbb{A}$ مجموعهٔ متشکل از ایزومرفیسمهای میان زیرگرافهای متناهی آنها باشد. فرض کنید f یکی از ایزمرفیسمهای این چنین باشد که زیرگراف با رئوس $\{a_1, \ldots, a_n\}$ از G را با زیرگراف متشکل از رئوس $\{b_1, \ldots, b_n\}$ از H در تناظر قرار داده است. برای هر عنصرِ $a \in G$ متناسب با هر وضعیتی که a از لحاظ اتصال یا عدم اتصال به a_i ها داشته باشد، یک عنصر $b \in H$ با دقیقاً همین وضعیت نسبت به b_i ها پیدا می‌شود.

***تمرین ۱۶.** نشان دهید که تئوری فضاهای برداری روی $\mathbb{Q}$ با بعد مشخص n کامل است. نشان دهید که تئوری فضاهای برداری با بعد نامتناهی روی $\mathbb{Q}$ یک تئوری کامل است.

***تمرین ۱۷.** تئوری فضاهای برداری با بُعدِ نامتناهی روی $\mathbb{Q}$ را در نظر بگیرید. نشان دهید که هر دو مدل ناشمارای این تئوری با هم ایزومرفند. اما دو مدل شمارای آن، لزوماً با هم ایزومرف نیستند.

***تمرین ۱۸.** ساختارِ $(\mathbb{N}, s)$ را در نظر بگیرید که در آن $s(x) = x + 1$ همان تابع تالی است. یک تئوری برای این ساختار بنویسید و نشان دهید که آن تئوری کامل است.

***تمرین ۱۹.** مثال قبل را برای ساختارِ $(\mathbb{N}, s, <)$ پاسخ دهید.

کامل بودن تئوری‌های مختلفی را می‌توان با شیوهٔ رفت و برگشت اثبات نمود. برای انجام فرایند رفت و برگشت در برخی تئوری‌ها نیازمند آشنایی با ریاضیات مربوط به حوزهٔ آن تئوری هستیم. در بخش کوتاه بعدی، نشان داده‌ایم که در یک تئوری میدانهای بستهٔ جبری چگونه می‌توان بازی رفت‌وبرگشتی کرد.

۳.۲ بازی رفت‌وبرگشتی در میدان‌های بستهٔ جبری*

تئوری میدانهای بستهٔ جبری، T_{ACF} از احتماع تئوری میدانها با جملاتِ ψ_n تشکیل شده است، که هر جملهٔ ψ_n بیانگر این است که هر چندجمله‌ای با درجهٔ n دارای ریشه است. قضیه‌ای در جبر، به نام «قضیهٔ اساسی جبر» می‌گوید که $(\mathbb{C},+,\cdot,0,1) \models T_{\mathrm{ACF}}$.

تعریف ۲۲. با T_{ACF_0} تئوری میدانهای بستهٔ جبری با «مشخصهٔ صفر» را نمایش می‌دهیم؛ یعنی اجتماع T_{ACF} با همهٔ جملات χ_n به صورت زیر:

$$\chi_n : \underbrace{1+\ldots+1}_{n} \neq 0$$

چند پیش‌نیاز ساده، از درس جبر۲ را در زیر آورده‌ایم:

۱. فرض کنید $K \subseteq F$ دو میدان باشند. عنصر $a \in F-K$ را یک عنصر «جبری» روی K می‌نامیم هرگاه یک چندجمله‌ای $p(X)$ با ضرایب در K وجود داشته باشد، به طوری که $p(a)=0$. هرگاه این چندجمله‌ای p از حداقل درجهٔ ممکن باشد، آن را «چندجمله‌ای مینی‌مالِ» عنصر a روی میدانِ K می‌نامیم.

۲. عناصری در $F-K$ را که روی K جبری نباشند، «متعالی» روی K می‌نامیم.

۳. فرض کنید $a \in F-K$ روی K جبری باشد. در این صورت میدان تولید شده توسط K و عنصر a در داخل F با میدان زیر ایزومرف است:

$$\frac{K[X]}{\langle p(X)\rangle}$$

که در آن $K[X]$ حلقهٔ چندجمله‌ای‌های روی K با متغیرِ X است، p چندجمله‌ای مینی‌مالِ a روی K است؛ و $\langle p(X)\rangle$ ایده‌آل (ماکزیمال) تولیده شده توسط این چندجمله‌ای در حلقهٔ $K[X]$ است.

۴. فرض کنید $a \in F-K$ روی K متعالی باشد. در این صورت میدان تولید شده توسط K و a در داخلِ F ایزومرف با میدان $K(X)$ است؛ یعنی میدان کسرهای حلقهٔ $K[X]$.

موارد فوق به ما کمک می‌کند که بتوانیم بازی رفت و برگشتی لازم برای اثبات کامل بودن تئوری T_{ACF_0} را پیش ببریم.

قضیه ۲۳. تئوری T_{ACF_0} یک تئوری کامل است. [۲]

اثبات. فرض کنید F_1, F_2 دو میدان بستهٔ جبری، با مشخصهٔ صفر هستند و $K_1 \subseteq F_1$ و $K_2 \subseteq F_2$ دو زیرمیدان از آنها هستند به طوری که

$$K_1 \overset{h}{\cong} K_2.$$

همچنین فرض کنید کاردینالتهٔ F_1 از K_1 و F_2 از K_2 بیشتر باشد. در این صورت در F_1-K_1 و F_2-K_2 عناصر متعالی زیادی پیدا می‌شوند (چون سایز بستار جبری یک میدان با سایز خودش برابر است). F_1 عنصرِ $a \in F_1-K_1$ را در نظر بگیرید و فرض کنید که می‌خواهیم a را به دامنهٔ h اضافه کنیم. در واقع به دنبال عنصر مناسبی در F_2 می‌گردیم که بتوانیم آن را تصویر a بگیریم و به این صورت، ایزومرفیسمِ h را گسترش بدهیم. اما این کار، نسبتاً ساده است.

حالت اول. اگر عنصر a روی K_1 جبری باشد، در این صورت چندجمله‌ای مینی‌مال آن، مثلاً به نام $p(x)$ را در نظر بگیرید. میدان تولید شده توسط a و K با میدان $\frac{K_1[X]}{\langle p(X)\rangle}$ ایزومرف است. از طرفی، از آن‌جا که F_2 بستهٔ جبری است، چند جملهٔ p در F_2 هم دارای یک ریشه، مثلاً به نام b است. اما $K_2(b)$ نیز با $\frac{K_2[X]}{\langle p(X)\rangle}$ و در نتیجه با $\frac{K_2[X]}{\langle p(X)\rangle}$ ایزومرف است. بدین‌سان ایزومرفیسم h به راحتی توسیع می‌یابد؛ زیرا $h \subseteq h'$ که:

$$\frac{K_2[X]}{\langle p(X)\rangle} \overset{h'}{\cong} \frac{K_1[X]}{\langle p(X)\rangle}.$$

[۲] با اثباتی کاملاً مشابه، می‌توان نشان داد که تئوری میدانهای بستهٔ جبری با مشخصهٔ یک عدد اول p نیز کامل است.

حالت دوم. در صورتی که a یک عنصر متعالی روی K_1 باشد، باید یک عنصر در $F_2 - K_2$ پیدا کنیم که روی K_2 متعالی باشد، و سپس مانند حالت قبلی کار کنیم (اما با در نظر گرفتنِ مورد ۴ در بالا). اینجا به فرض اضافی اثبات نیاز داریم: فرض کرده بودیم که در $F_2 - K_2$ عناصر متعالی زیادند.

با در نظر گرفتن دو حالت بالا، و با شروع از ایزومرفیسم میان $\mathbb{Q} \subseteq F_1$ و $\mathbb{Q} \subseteq F_2$ می‌توانیم بازی رفت و برگشتی‌ای انجام دهیم که کامل بودن تئوری مورد نظر ما را سبب شود. □

۴.۲ بازی‌های رفت‌وبرگشتی متناهی*

گفتیم که وجود یک سامانهٔ رفت‌وبرگشتی میان دو ساختار، موجب معادل بودن مقدماتی آن دو ساختار می‌شود. وجود سامانهٔ رفت و برگشتی، در واقع به معنی امکان یک بازی دو نفره است. بازیکن اول در این بازی، عنصری در دامنه یا برد یک ایزومرفیسم انتخاب می‌کند، و بازیکن دوم باید یک عنصر معادل آن پیدا کند تا بتواند ایزومرفیسم را گسترش دهد. وجود سامانهٔ رفت و برگشتی، یعنی امکان پیش بردن این بازی به اندازهٔ ω مرحله. اما بازی‌های متناهی نیز سودمندی خود را دارند. در این بخش توضیحی کوتاه دربارهٔ بازی‌های متناهی داده‌ایم.

دو ساختارِ $\mathcal{M}$ و $\mathcal{N}$ را در نظر بگیرید. یک بازی رفت‌وبرگشتی n مرحله‌ای به صورت پیش رو انجام می‌شود: در هر مرحله بازیکن اول یک عنصر از یکی از دو ساختار $\mathcal{M}$ و $\mathcal{N}$ انتخاب می‌کند و بازیکن دوم در جواب او از ساختار دیگر عنصری انتخاب می‌کند. بعد از n مرحله بازی، عناصر $a_1, \dots, a_n$ از $\mathcal{M}$ و عناصر $b_1, \dots, b_n$ از $\mathcal{N}$ توسط دو بازیکن، وارد بازی شده‌اند. اگر $\langle a_1, \dots, a_n \rangle^{\mathcal{M}} \cong \langle b_1, \dots, b_n \rangle^{\mathcal{N}}$ بازیکن دوم برنده است و گرنه بازیکن اول. منظور از $\langle a_1, \dots, a_n \rangle^{\mathcal{M}}$ زیرساختار تولید شده توسط عناصر $a_1, \dots, a_n$ در $\mathcal{M}$ است. این زیرساختار از عناصرِ $t^{\mathcal{M}}(a_1, \dots, a_n)$ تشکیل شده است که در آن t روی ترم‌های زبان تغییر می‌کند. می‌گوییم بازیکن دوم «استراتژی بُرد» در یک بازی n مرحله‌ای دارد، هرگاه در صورتی که به اندازهٔ کافی خوب بازی کند، همیشه پس از n مرحله او برندهٔ بازی باشد.

قضیه ۲۴. اگر بازیکن دوم، یک «استراتژی بُرد» در یک بازی n مرحله‌ای داشته باشد، ساختارهای $\mathcal{M}$ و $\mathcal{N}$ در حد جملات با n سور، با هم معادل هستند. یعنی برای هر جملهٔ φ به صورت $Q_1 x_1 \dots Q_n x_n \psi$، که در آن $Q_i \in \{\exists, \forall\}$، اگر $\mathcal{M} \models \varphi$ آنگاه $\mathcal{N} \models \varphi$.

برای مشاهده اثبات، می‌توانید به کتاب [؟] صفحهٔ ۵۵ مراجعه کنید.

یک تئوری T را کامل می‌نامیم هرگاه برای هر جملهٔ φ داشته باشیم:

$$T \models \varphi \text{ یا } T \models \neg\varphi.$$

فرض کنید $\mathcal{M}$ یک Lساختار باشد و T یک تئوری کامل باشد به طوری که $\mathcal{M} \models T$. در این صورت، همهٔ ویژگی‌های $\mathcal{M}$ دقیقاً ویژگی‌هایی هستند که تئوری T مستلزم آنهاست؛ به عبارت دیگر برای هر جملهٔ φ داریم $\mathcal{M} \models \varphi$ اگر و تنهااگر $T \models \varphi$.
در صورتی که «یک بازی رفت‌وبرگشتی» بین هر دو مدل از تئوری T امکان‌پذیر باشد، تئوری T کامل است.