

منطق ریاضی

محسن خانی
دانشگاه صنعتی اصفهان

۶ مهر ۱۴۰۵

فصل ۱

تئوری‌های مرتبه اول

احتمالاً تا به حال عبارتهایی مانند «نظریه گروه‌ها»، «نظریه میدانها» و یا «نظریه گرافها» را شنیده‌اید. در نظریه گروه‌ها به بررسی فضاهایی پرداخته می‌شود که در آنها «ویژگی گروه بودن» برقرار است. گروه بودن یعنی دارا بودن یک علامت جمع که ویژگی‌های مطلوبی داشته باشد؛ ویژگی‌هایی که «اصول نظریه گروه‌ها» خوانده می‌شوند. مشابهاً نظریه میدانها و گرافها نیز به فضاهایی می‌پردازند که ویژگی‌های مطلوب میدان یا گراف بودن را دارا هستند. در این فصل به تعمیم کلی مفهوم «نظریه» در منطق خواهیم پرداخت.

پیش از آنکه وارد بحث جدی‌تر شویم، و برای این که مقدمه را روشن‌تر کنیم، توجه خواننده را به نکته‌ای جلب می‌کنیم. زبان $\mathcal{L} = \{f, e\}$ را در نظر بگیرید که در آن f یک نماد تابعی دو موضعی و e یک نماد ثابت است. هم $M_1 = (\mathbb{Z}, +, 0)$ و هم $M_2 = (\mathbb{N}, +, 0)$ مشخصاً $\mathcal{L}$ ساختار هستند. اما این گفته بدین معنی نیست که هر دو کاملاً شبیه هم هستند. برای مثال جمله زیر در M_1 درست است ولی در M_2 درست نیست:

$$\forall x \exists y \quad f(x, y) = e.$$

ترجمان جمله بالا در هر دو ساختار M_1, M_2 این است که هر عنصر دارای وارون جمعی است؛ واضح است که در M_2 این ویژگی برقرار نیست. در واقع M_1 علاوه بر این که $\mathcal{L}$ ساختار است ویژگی‌های «گروه بودن» را نیز داراست. این ویژگی، در واقع یک «ویژگی مشترک» برای ساختارهایی است که آنها را گروه می‌نامیم. در این فصل خواهیم دید که ویژگی‌های مطلوب یک $\mathcal{L}$ ساختار، در مفهوم یک «نظریه» یا یک «تئوری» مرتبه اول گنجانده می‌شود.

۱.۱ تعریف تئوری مرتبه اول

تعریف ۱. فرض کنید $\mathcal{L}$ یک زبان مرتبه اول باشد. منظور از یک $\mathcal{L}$ تئوری مرتبه اول T ، یک مجموعه (چه متناهی و چه نامتناهی) از $\mathcal{L}$ جمله‌ها^۱ است. به هر $\mathcal{L}$ جمله‌ای که در یک $\mathcal{L}$ تئوری قرار دارد، یک «اصل» در آن تئوری گفته می‌شود.

پس یک $\mathcal{L}$ تئوری یک مجموعه از «اصول» است و هر اصل، یک $\mathcal{L}$ جمله است (دقت کنید که جمله، و نه فرمول؛ یعنی نداشتن متغیر آزاد شرط است). در یک زبان یکسان $\mathcal{L}$ می‌توان $\mathcal{L}$ تئوریهای بسیار متنوعی داشت.

مثال ۲ (تئوری گروه‌ها). در زبان $\mathcal{L}_{\text{group}} = \{+, 0\}$ تئوری «گروه‌ها» که آن را با T_{group} نشان می‌دهیم، مجموعه متشکل از جملات زیر است:

$$\forall x, y, z \quad x + (y + z) \doteq (x + y) + z$$

$$\forall x \exists y \quad x + y \doteq 0.$$

با اضافه کردن جمله زیر به تئوری گروه‌ها، به تئوری گروه‌های آبدی می‌رسیم، که می‌توانیم آن را با T_{abgroup} نشان دهیم.

$$\forall x, y \quad x + y \doteq y + x$$

^۱ یادآوری می‌کنیم که جمله، یعنی فرمولی که متغیر آزاد ندارد.

دقت کنید که نیازی نیست که مانند مثال بالا، هر $\mathcal{L}$ تئوری یک «اسم» داشته باشد. خودمان در مثال بالا، آن مجموعه جملات را که یک $\mathcal{L}$ تئوری است، تئوری گروه‌ها نامیدیم. با اضافه کردن یا کم کردن جملات به این تئوری، تئوری‌های دیگری به دست می‌آید که نیازی نیست اسم خاصی داشته باشند.

نکته دیگری که خواننده احتمالاً در بالا بدان دقت کرده، این است که در نوشتن تئوری بالا دوباره تسامح به خرج داده‌ایم و زبان روزمره ریاضی را ارجحیت داده‌ایم؛ وگرنه مثلاً جمله اول را باید به صورت زیر می‌نوشتیم:

$$\forall x \forall y \forall z \quad + (x, + (y, z)) \doteq + (+ (x, y), z).$$

مثال ۳ (تئوری حلقه‌ها). در زبان $L_{\text{ring}} = \{+, \cdot, 0, 1\}$ تئوری متشکل از جملات زیر را تئوری حلقه‌ها می‌نامیم و آن را با T_{ring} نشان می‌دهیم:

$$\forall x, y, z \quad x + (y + z) \doteq (x + y) + z$$

$$\forall x \exists y \quad x + y \doteq 0$$

$$\forall x, y \quad x + y \doteq y + x$$

$$\forall x, y, z \quad x \cdot (y \cdot z) \doteq (x \cdot y) \cdot z$$

$$\forall x, y, z \quad x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z).$$

با اضافه کردن جمله زیر به تئوری بالا، به تئوری حلقه‌های جابجایی می‌رسیم که می‌توانیم آن را با T_{comring} نشان دهیم:

$$\forall x, y \quad x \cdot y \doteq y \cdot x$$

نیز با اضافه کردن جمله زیر به تئوری حلقه‌های جابجایی، به تئوری میدانها می‌رسیم که آن را عموماً با T_{field} نشان می‌دهیم:

$$\forall x \exists y \quad x \cdot y \doteq 1$$

مثال ۴ (تئوری گرافها). در زبان $\mathcal{L}_{\text{graph}} = \{R\}$ که تنها از یک رابطه تک موضعی R تشکیل شده است، تئوری متشکل از جملات زیر را در نظر بگیرید:

$$\forall x, y \quad R(x, y) \leftrightarrow R(y, x)$$

$$\forall x \quad \neg R(x, x)$$

تئوری بالا را تئوری گراف (های بدون طوق و ناهم‌تدار) می‌نامیم و با T_{graph} نشان می‌دهیم.

مثال ۵. گفتیم که هر مجموعه از جمله‌ها در یک زبان دلخواه، یک تئوری است. در زبان $\mathcal{L} = \emptyset$ ، مجموعه متشکل از تک جمله زیر یک تئوری است:

$$\exists x \quad x \neq x$$

مثال ۶. اگر $\mathcal{L}$ یک زبان مرتبه اول دلخواه، و φ یک $\mathcal{L}$ جمله دلخواه باشد، آنگاه مجموعه $\{\varphi, \neg\varphi\}$ یک $\mathcal{L}$ تئوری است.

مثال ۷. یک مثال مهم از تئوری‌های مرتبه اول، تئوری مجموعه‌هاست، که در زبان $L = \{\in\}$ نوشته می‌شود که تنها شامل یک نماد رابطه‌ای دو موضعی است. تئوری مجموعه‌ها، که آن را با ZFC نشان می‌دهیم، حاوی اصول مهمی مانند انتخاب، انتظام و وجود مجموعه نامتناهی است. در بخش‌های بعدی این کتاب درباره تئوری مجموعه‌ها صحبت خواهیم کرد. می‌توانید منبع زیر را مشاهده کنید:

<https://khani.iut.ac.ir/sites/khani.iut.ac.ir/files//u145/jozve-kamel.pdf>

ملاحظه ۸. از این به بعد وقتی می‌گوییم T یک تئوری است، منظورمان این است که T یک $\mathcal{L}$ تئوری در زبان مرتبه اول $\mathcal{L}$ است.

تمرین ۱. فرض کنید $L = \{E\}$ یک زبان دارای یک نماد رابطه‌ای دو موضعی E باشد. در این زبان:

۱. تئوری روابط هم‌ارزی را بنویسید.

۲. تئوری یک رابطه هم‌ارزی دارای دقیقاً دو کلاس را بنویسید.

۳. تئوری یک رابطه هم‌ارزی دارای نامتناهی کلاس را بنویسید.

۴. به این سوال فکر کنید (و فعلاً جوابش را نمی‌توانید بدهید) که آیا می‌توان تئوری روابط هم‌ارزی دارای دقیقاً شمارا تا کلاس را نوشت؟

۵. تئوری ترتیبهای خطی را بنویسید.

۲.۱ مدل‌های یک تئوری مرتبه اول

همان طور که می‌دانید یک ساختار ریاضی را زمانی یک گروه می‌نامیم که روی آن یک عمل جمع وجود داشته باشد که در اصول نظریه گروه‌ها صدق کند. در بخش قبل، تئوری گروه‌ها را معرفی کردیم. به بیان منطقی می‌گوییم یک ساختار، گروه است هرگاه مدلی برای تئوری گروه‌ها باشد. در زیر این گفته را دقیق‌تر کرده‌ایم.

تعریف ۹. فرض کنید که $\mathcal{L}$ یک زبان مرتبه اول، T یک $\mathcal{L}$ تئوری و $\mathcal{M}$ یک $\mathcal{L}$ ساختار باشند. می‌گوییم $\mathcal{M}$ یک مدل برای تئوری T است و می‌نویسیم $\mathcal{M} \models T$ هرگاه برای هر جمله $\varphi \in T$ داشته باشیم $\mathcal{M} \models \varphi$.

طبیعتاً اگر جمله، یا جملاتی در $\mathcal{L}$ تئوری T وجود داشته باشند که در یک $\mathcal{L}$ ساختار $\mathcal{M}$ برقرار نباشند، می‌نویسیم

$$\mathcal{M} \not\models T.$$

به بیان بهتر، $\mathcal{M} \models T$ اگر و تنها اگر حداقل یک جمله $\varphi \in T$ موجود باشد به طوری که $\mathcal{M} \models \neg \varphi$.

مثال ۱۰. هر گروه، مدلی برای T_{group} است که در مثال ۲ معرفی شد. به طور خاص $(\mathbb{Z}, +, 0) \models T_{\text{group}}$. همچنین $(\mathbb{Z}_3, +, \bar{0}) \models T_{\text{group}}$ اما $(\mathbb{N}, +, \cdot, 0, 1) \not\models T_{\text{group}}$ زیرا

$$(\mathbb{N}, +, \cdot, 0, 1) \not\models \forall x \exists y \quad x + y = 0$$

یعنی یکی از جملاتی که در T_{group} قرار دارد، در ساختار $(\mathbb{N}, +, \cdot, 0, 1)$ برقرار نیست. همچنین هر حلقه، مدلی برای تئوری حلقه‌هاست که در مثال ۳ معرفی شد؛ به طور خاص $(\mathbb{Z}, +, \cdot, 0, 1) \models T_{\text{ring}}$ و $(\mathbb{R}, +, \cdot, 0, 1) \models T_{\text{ring}}$. فرض کنید M مجموعه متشکل از همه ماتریسهای دو

در دوی به شکل $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ باشد به طوری که $\det A \neq 0$. همچنین فرض کنید که $\oplus$ و $\otimes$ به ترتیب اعمال جمع و ضرب ماتریسها باشند. در این صورت

$$(M, \oplus, \otimes, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}) \models T_{\text{ring}} \cup \{\forall x \exists y \quad x \cdot y = 1\}$$

مثال ۱۱.

۱. در زبان $\mathcal{L}_{\text{group}}$ یک تئوری T بنویسید به طوری که اگر $\mathcal{M} \models T$ آنگاه $\mathcal{M}$ یک گروه آبدی سه عضوی باشد.

پاسخ. قرار دهید $\{\varphi\} \cup T_{\text{abgroup}} = T$ که در آن φ جمله زیر است:

$$\exists x, y, z \quad ((x \neq y \wedge x \neq z \wedge y \neq z) \wedge \forall t \quad (t = x \vee t = y \vee t = z)).$$

۲. زبان $\mathcal{L} = \{R\}$ را در نظر بگیرید که تنها یک نماد رابطه‌ای دوموضعی دارد. یک $\mathcal{L}$ تئوری T بنویسید به طوری که هرگاه

$$\mathcal{M} = (M, R^{\mathcal{M}}) \models T \quad \text{و} \quad M \text{ متناهی باشد، آنگاه تعداد اعضای } M \text{ زوج باشد.}$$

پاسخ. تئوری T متشکل از جمله‌های زیر را در نظر بگیرید:

$$\forall x \quad R(x, x)$$

$$\forall x, y \quad (R(x, y) \leftrightarrow R(y, x))$$

$$\forall x, y, z \quad ((R(x, y) \wedge R(y, z)) \rightarrow R(x, z))$$

$$\forall x \exists y_1, y_2 \quad ((y_1 \neq y_2 \wedge R(x, y_1) \wedge R(x, y_2)) \wedge \forall z \quad (R(x, z) \rightarrow (z = y_1 \vee z = y_2))).$$

فرض کنید $\mathcal{M} = (M, R^{\mathcal{M}})$ مدلی برای جملات بالا باشد. بنا به سه جمله اول، $R^{\mathcal{M}}$ یک رابطه هم‌ارزی است. بنا به جمله چهارم، کلاس هم‌ارزی هر عنصر در این رابطه دارای فقط دو عنصر است. پس اگر تعداد اعضای جهان M متناهی باشد، عدد ۲ آن را عاد می‌کند.

۳. یک تئوری T در یک زبان مناسب $\mathcal{L}$ بنویسید به طوری که $\mathcal{M} \models T$ اگر و تنها اگر M یک فضای برداری روی میدان $\mathbb{R}$ باشد.

یک گروه به صورت $(M, +, 0)$ است که اعضای آن در اعداد حقیقی نیز ضرب می‌شوند؛ یعنی برای هر عدد حقیقی λ و هر عنصر $x \in M$ عنصری به نام λx در M وجود دارد. برای جمعی که در فضای برداری وجود دارد می‌توان یک تابع جمع در زبان قرار داد ولی برای ضرب در اسکالرهایی که در میدان اعداد حقیقی قرار دارند، نمی‌توان یک نماد ضرب در زبان قرار داد. برای رفع این مشکل، زبان را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$\mathcal{L} = \{+, 0\} \cup \{f_\lambda\}_{\lambda \in \mathbb{R}}$$

در زبان بالا تابع جمع و نماد ثابت صفر به ترتیب برای جمع و صفر فضای برداری در نظر گرفته شده‌اند. همچنین برای هر عدد حقیقی λ یک تابع تک‌موضعی f_λ در زبان قرار داده شده است (پس واضح است که زبان بالا ناشماراست). در واقع قرار است که $f_\lambda(x)$ نقش ضرب λ در x را برای ما بازی کند. در این زبان، تئوری فضاهای برداری روی میدان اعداد حقیقی از اجتماع تئوری گروه‌های آبدلی با جملات زیر تشکیل شده است:

$$f_\lambda(a + b) = f_\lambda(a) + f_\lambda(b)$$

$$f_\lambda(f_{\lambda'}(a)) = f_{\lambda\lambda'}(a)$$

پس اگر $\mathcal{M} = (M, +, 0, f_\lambda^{\mathcal{M}})$ یک $\mathcal{L}$ ساختار باشد که در اصول بالا صدق کند، $f_\lambda^{\mathcal{M}}(x)$ را می‌توان با λx نشان داد.

تمرین ۲. در زبان $L = \{E\}$ با یک نماد رابطه‌ای دوموضعی، یک تئوری بنویسید که برخی مدلهای آن نامتناهی باشند، اما تعداد اعضای جهان هر مدل متناهی آن بر ۳ بخش‌پذیر باشد.

مثال ۱۲. در زبان $L = \emptyset$ یک تئوری T بنویسید به طوری که اگر $\mathcal{M} \models T$ آنگاه M نامتناهی باشد.

پاسخ. یک مجموعه، زمانی نامتناهی است که حداقل $\aleph_0$ عنصر در آن موجود باشد؛ یعنی تابعی یک به یک از مجموعه اعداد طبیعی به مجموعه مورد نظر ما موجود باشد. اما وجود تابع از $\mathbb{N}$ به جهان یک ساختار را نمی‌توان در یک زبان مرتبه اول نوشت که قرار است سوره‌های آن روی عناصر یک جهان مشخص عمل کنند. بنابراین خواسته این مثال را با استفاده از «حداقل شمارا» جمله برآورده می‌کنیم. یعنی لیستی از جملات $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ در نظر می‌گیریم که هر φ_n می‌تضمن وجود n عنصر متفاوت در جهان است. برای مثال φ_3 که وجود حداقل سه عنصر را تضمین می‌کند، به صورت زیر است:

$$\varphi_3 = \exists x_1, x_2, x_3 \quad (x_1 \neq x_2) \wedge (x_2 \neq x_3) \wedge (x_1 \neq x_3).$$

قرار می‌دهیم: $T = \{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. واضح است که اگر $\mathcal{M} \models T$ آنگاه M نمی‌تواند متناهی عنصر داشته باشد. $\square$

تمرین ۳. در زبان $L = \{E\}$ که در مثال قبل معرفی شد، یک تئوری بنویسید به طوری که $E^{\mathcal{M}}$ در $\mathcal{M} = (M, E^{\mathcal{M}})$ یک رابطه هم‌ارزی باشد که دارای تنها دو کلاس است، و یکی از این دو کلاس نامتناهی است.

فرض کنید $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2$ هر دو، مدل یک تئوری T باشند. در این صورت جملات موجود در تئوری T در هر دوی آنها برقرار است. اما از این نتیجه نمی‌شود که هر جمله دلخواهی که در یکی برقرار باشد، در دیگری نیز برقرار است. در مثالها و تمرینهای زیر به این نکته پرداخته‌ایم.

مثال ۱۳. در زبان $L = \{<\}$ تئوری T_{order} را متشکل از جملات زیر در نظر بگیرید:

$$\forall x \quad \neg(x < x)$$

$$\forall x, y \quad x < y \rightarrow \neg y < x$$

$$\forall x, y \quad ((x < y) \wedge (y < z) \rightarrow (x < z))$$

واضح است که این جملات هم در $(\mathbb{Z}, <)$ و هم در $(\mathbb{Q}, <)$ درست هستند. اما در عین حال جمله زیر

$$\forall x, y \quad ((x < y) \rightarrow \exists z \quad x < z < y)$$

در $(\mathbb{Q}, <)$ درست است اما در $(\mathbb{Z}, <)$ درست نیست. تئوری

$$T_{\text{order}} \cup \{\forall x, y ((x < y) \rightarrow \exists z (x < z < y))\} \cup \{\forall x \exists y, z (y < x < z)\}$$

را تئوری ترتیبهای خطی چگال بدون ابتدا و انتها^۲ می‌نامیم و آن را با T_{DLO} نشان می‌دهیم. پس $(\mathbb{Q}, <) \models T_{\text{DLO}}$ و $(\mathbb{Z}, <) \not\models T_{\text{DLO}}$. از طرفی تئوری

$$T_{\text{order}} \cup \{\forall x \exists y, z (y < x < z \wedge \forall t (t \neq x \rightarrow t \leq y \vee t \geq z))\}$$

تئوری ترتیبهای خطی گسسته بدون ابتدا و انتها نامیده می‌شود و این تئوری را با T_{DLO} نشان می‌دهیم. پس $(\mathbb{Z}, <) \models T_{\text{DLO}}$ اما $(\mathbb{Q}, <) \not\models T_{\text{DLO}}$.

مثال ۱۴. دو ساختار $(\mathbb{Q}, +, 0)$ و $(\mathbb{Z}, +, 0)$ هر دو مدل‌های تئوری T_{group} هستند. حال جمله φ را به صورت زیر در نظر بگیرید:

$$\forall x \exists y (y + y \doteq x)$$

واضح است که $(\mathbb{Q}, +, 0) \models \varphi$ و $(\mathbb{Z}, +, 0) \not\models \varphi$.

*تمرین ۴. می‌دانیم که هم $(\mathbb{Z}, +, 0)$ و هم $(\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}, +_{\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}})$ مدل‌هایی برای نظریه گروه‌ها هستند. یک جمله φ بنویسید که در یکی از آنها برقرار باشد و در دیگری برقرار نباشد.

تمرین ۵. یک جمله در زبان گروه‌ها بنویسید که در $(\mathbb{Z}_3, +, 0)$ برقرار باشد ولی در $(\mathbb{Z}, +, 0)$ برقرار نباشد.

تمرین ۶. یک جمله در زبان نظریه گروه‌ها بنویسید که در S_3 برقرار است اما در $\mathbb{Z}_6$ برقرار نیست.

تمرین ۷. یک جمله در زبان حلقه‌ها بنویسید که برای یک حلقه K برقرار است اما برای $K \oplus K$ برقرار نیست.

تمرین ۸. یک جمله در زبان نظریه گروه‌ها بنویسید که در $\mathbb{Z}_5$ برقرار است اما در $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_3$ برقرار نیست.

تمرین ۹. دو جمله متفاوت در زبان حلقه‌ها، بنویسید که در $\mathbb{Z}_p$ درست هستند، اما در $\mathbb{Q}$ برقرار نیستند.

تمرین ۱۰. یک تئوری برای گروه‌های دوری پنج عضوی بنویسید.

*تمرین ۱۱. آیا می‌توان یک تئوری برای گروه‌های دوری نوشت؟

اگر تئوری T دارای این ویژگی خاص باشد که هر جمله‌ای یا همزمان در همه مدل‌های آن برقرار است، یا همزمان در هیچ کدام از مدل‌های آن برقرار نیست، به آن یک تئوری کامل گفته می‌شود. در فصل؟؟ به تئوری‌های کامل پرداخته‌ایم.

تمرین ۱۲. فرض کنید که $\mathcal{M}$ یک L ساختار باشد. تئوری T را به صورت زیر تعریف کنید:

$$T = \{\varphi : \mathcal{M} \models \varphi\}$$

نشان دهید که T یک تئوری کامل است.

۳.۱ محدودیتها*

همان طور که در بخش بالا دیدیم، بسیاری از ساختارهای آشنای ریاضی را می‌توان «اصل‌بندی» کرد؛ یعنی می‌توان آنها را مدل یک تئوری مرتبه اول دانست. حقیقت آن است که نوشتن تئوری مرتبه اول، به صورتی که در فصل قبل توضیح داده شد، برای همه پدیده‌های ریاضی ممکن نیست؛ اما علت عدم امکان این امر تنها زمانی قابل توضیح است که خواننده چندین فصل پیش رو را خوانده باشد. در این بخش فقط به برخی چالشهای اصل‌بندی اشاره می‌کنیم تا صورت سوال را در ذهن خواننده باز کنیم.

²dense linear order

مثال ۱۵. در مثال ۱۱ برای گروه‌های آبدی سه عضوی یک تئوری معرفی کردیم. آیا می‌توانید یک اصل بندی برای گروه‌های آبدی نامتناهی معرفی کنید؟ برای گروه‌های آبدی متناهی چه طور؟

پاسخ. برای این که بیان کنیم که یک گروه آبدی، نامتناهی است، باید به نحوی بگوییم که حداقل شمارا عنصر دارد؛ مثلاً به نحوی بگوییم که برای هر عدد طبیعی $n \in \mathbb{N}$ گروه ما حداقل اندازه n عنصر دارد. اما همان طور که تا اینجا دریافته‌اید امکان استفاده از سوری به صورت $\forall n \in \mathbb{N}$ را نداریم (قبل گفتیم که دامنه سورها پس معنی کردن جمله، همان ساختاری است که جمله در آن معنی می‌شود). برای رهایی از این مشکل، از ایده دیگری استفاده می‌کنیم. تئوری T را یک تئوری بپذیرید که از اجتماع $Tab\text{-}group$ با نامتناهی جمله زیر تشکیل شده است:

$$\exists x_1, x_2$$

$$\exists x_1, x_2, x_3 \quad (x_1 \neq x_2) \wedge (x_1 \neq x_3) \wedge (x_2 \neq x_3)$$

$$\exists x_1, x_2, x_3, x_4 \quad (x_1 \neq x_2) \wedge (x_1 \neq x_3) \wedge (x_1 \neq x_4) \wedge (x_2 \neq x_3) \wedge (x_2 \neq x_4) \wedge (x_3 \neq x_4)$$

⋮

در واقع در تئوری بالا به ازای هر طبیعی n یک جمله داریم که وجود n عنصر متمایز را متضمن شود (بیابید این جمله را با ψ_n نشان دهیم). اگر $M = (M, +, 0)$ مدلی برای تئوری T باشد، از یک طرف، گروهی آبدی است و از طرف دیگر به ازای هر طبیعی n حداقل n عنصر دارد؛ پس گروهی آبدی و نامتناهی است.

ما پاسخ بخش دوم این مثال کمی چالش برانگیز است. چگونه در قالب یک تئوری مرتبه اول از ساختارمان بخواهیم که متناهی باشد. متناهی بودن یک ساختار بدین معنی است که یک عدد طبیعی n وجود داشته باشد به طوری که در ساختار ما دقیقاً n عنصر وجود داشته باشد. پس نیاز به یک «یا» نامتناهی داریم؛ نیاز به جملاتی داریم که بگویند ساختار ما یا یک عضوی است، یا دو عضوی است، یا سه عضوی است، الی آخر. اما همان طور که در ساخت فرمولهای مرتبه اول دیدید، هر فرمول مرتبه اول متناهی است و نمی‌توان چنین یای نامتناهی را به صورت مرتبه اول نوشت. اما سوال این است که آیا راه خلاقانه دیگری برای بیان متناهی بودن یک گروه وجود دارد، یا اساساً این را که یک گروه متناهی است، نمی‌توان به صورت یک تئوری مرتبه اول نوشت. پاسخ این سوال را در فصلهای بعدی خواهیم داد.

تمرین ۱۳. منظور از یک گروه بخش پذیر، گروهی است مانند G به طوری که برای هر $x \in G$ و هر عدد طبیعی $n \in \mathbb{N}$ یک عنصر $y \in G$ موجود است به طوری که $ny = x$. یک تئوری مرتبه اول برای گروه‌های بخش پذیر بنویسید.

مثال ۱۶ (تئوری میدانهای بسته جبری). تئوری میدانها در زبان L_{ring} (که در مثال ۳ معرفی شد) به صورت زیر است:

$$T_{\text{comring}} \cup \{\forall x \exists y \quad x \cdot y = 1\}.$$

به میدانی که در آن هر چندجمله‌ای دارای ریشه باشد، یک میدان بسته جبری گفته می‌شود. برای نوشتن تئوری میدانهای بسته جبری، باید برای هر عدد طبیعی، n یک جمله بنویسیم که بیانگر این باشد که هر چندجمله‌ای درجه n در میدان مورد نظر ما ریشه دارد. پس همه جملات φ_n در پایین را باید به تئوری میدانها اضافه کنیم:

$$\varphi_n : \forall a_0, \dots, a_n \quad \exists x \quad a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0 = 0$$

مثال ۱۷ (میدانهای با مشخصه صفر). منظور از یک میدان با مشخصه صفر، میدانی است که در آن

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x \in K \quad \underbrace{x + \dots + x}_n \neq 0$$

دوباره به علت محدودیت سورها، تنها راه نوشتن یک تئوری برای یک میدان با مشخصه صفر این است که تئوری میدانها را با همه جملات زیر اجتماع بگیریم:

$$\psi_n : \forall x \quad \underbrace{x + \dots + x}_n \neq 0$$

اما یک سوال در بخشهای دیگر درس بدان خواهیم پرداخت این است که آیا می‌توان یک تئوری برای میدانهایی نوشت که مشخصه آنها صفر نیست؟

تمرین ۱۴.

۱. یک تئوری برای گرافهای کامل بنویسید.

۲. به این فکر کنید که آیا می‌توان یک تئوری برای گرافهای همبند نوشت؟

خلاصه فصل. فرض کنید L یک زبان مرتبه اول باشد. به یک مجموعه از جملات در زبان L یک نظریه (یا یک تئوری) گفته می‌شود. L ساختارهایی که در آن همه جملات موجود در آن نظریه برقرارند، مدلهای آن نظریه نامیده می‌شوند. پس یک نظریه مرتبه اول برای جدا کردن دسته‌ای از L ساختارهای دارای ویژگی‌های مشترک، استفاده می‌شود.