

منطق ریاضی

محسن خانی
دانشگاه صنعتی اصفهان

۲۷ شهریور ۱۴۰۵

فصل ۱

مقدمه

۱.۱ محض یا کاربردی؟

یکی از سوالاتی که دانشجویان ریاضی، زیاد می‌پرسند این است که تفاوت بین ریاضی محض و ریاضی کاربردی چیست. ساده‌ترین توضیحی که برای این سوال دارم به صورت زیر است. یک مسئله ریاضی را در نظر بگیرید. حل چنین مسئله‌ای سرانجام به «محاسبه» منجر می‌شود. اما پیش از ورود به مرحله محاسبات، چقدر پردازش فکری لازم است؟ هر چه ورود به محاسبات در حل یک مسئله دیرتر اتفاق بیفتد، آن مسئله «محض» تر است. «منطق ریاضی» که در این کتاب بدان پرداخته خواهد شد، نمونه کاملی از یک گرایش محض ریاضیاتی است.

۲.۱ هوش مصنوعی

پیشرفت‌های سریع هوش مصنوعی در چند سال اخیر، انواع و اقسام واکنش‌ها و اظهارنظرها را برانگیخته است. از همه بدتر، یک احساس «بی‌مزه شدن» کار علمی را به همراه داشته است. می‌توانستیم به جای نوشتن این کتاب، از هوش مصنوعی بخواهیم که یک کتاب منطق کارشناسی برایم بنویسد و شاید آن کتاب از آنچه پیش رو شماست بهتر درمی‌آمد! لازم است در شروع کتاب، سخن کوتاهی در این مورد داشته باشیم. هدف از ورزه ریاضیات، فقط رسیدن به جواب سوال نیست. طرح و حل سوال یک نیروی محرک برای کار ریاضی است، ولی تمام ریاضی این نیست. مسیر حل مسئله و تحقیق منجر به حل مسئله، و تعامل اجتماعی در راستای آن تحقیق، برای یک ریاضیدان، تعالی بخش و معنای زندگی است. تصور این که با آمدن هوش مصنوعی ریاضیات تعطیل می‌شود، مثل این است که ضبط صوتی روشن کنیم که قرآن بخواند و بعد بگوییم که دین تعطیل شده است و چرا باید نماز و قرآن بخوانیم. این ضبط که بهتر می‌خواند! یا این یک ربات بخریم که روی تردمیل بدود و بگوییم، پس لازم نیست من ورزش کنم. بیانی‌ای توسط چندین ریاضیدان بزرگ درباره نقش هوش مصنوعی در ریاضیات امروز، منتشر شده است که می‌توانید آن را در پیوند زیر مطالعه کنید:

پیوند

همچنین طبیعت علم ریاضی چنان است که هر وقت سوالی حل می‌شود، انبوهی از سوالات مشکل‌تر پیدا می‌شوند. این سوالات جدید زمانی مطرح می‌شوند که پاسخ سوالات قبلی را دقیق و کامل فهمیده باشیم. هوش مصنوعی در این روزها، به کار سرعت بخشیده است اما دوباره تعادل ایجاد خواهد شد و این سرعت کاهش خواهد یافت.

ریاضیات علم صبر کردن است. باید صبر کرد تا بقیه هم چیزها را بفهمند و بتوانند کار را ادامه دهند. چه بسا پاسخ‌هایی که با این سرعت به سوالات داده می‌شود غلط باشند! سرآخر، ما چیزی را می‌پذیریم که ذهن «انسان» را قانع کند.

در بخش‌هایی از این درس، در مورد محدودیت‌های سیستم‌های اثبات اصول موضوعه‌ای، تحت قضایایی به نام قضایای ناتمامیت آشنا خواهیم شد. اما وجود این قضایا، بعید است که زندگی همه ریاضیدان‌هایی که کار ماشینی ریاضی می‌کنند را تحت الشعاع خود قرار دهد.

خوش دارم دو نکته دیگر را نیز اضافه کنم. تصور کنید که هوش مصنوعی، یک پدر همه‌چیز دان است. آیا فرزندی که پدر همه‌چیز دان داشته باشد، لزوماً در زندگی پیشرفت می‌کند؟ بله، اما در صورتی که آن فرزند بتواند با پدر خود تعاملی داشته باشد و اساساً حرفهای پدر خود را متوجه شود

و هر بار سوالات جدیدی از او بپرسد. عموماً فرزندان که در خانواده‌های کاملاً معمولی و حتی نسبتاً محروم‌تر بزرگ می‌شوند، فرصت‌های تعالی بیشتر پیدا می‌کنند، چون تکاپو و تجربه‌های زیستی بهتری پیدا دارند.

نکته دوم این که هوش مصنوعی تا حدی کارها دشوارتر هم کرده است. امروز وقتی می‌خواهیم روی مسئله‌ای کار کنیم، اول باید تمام چیزهایی که هوش مصنوعی می‌داند را یاد بگیریم و بعدش بتوانیم از آن سوالی بکنیم که برای او هم جدید باشد!

۳.۱ پیش‌گفتار عمومی

هدفم از نگارش این کتاب، آشتی دادن دو علاقه بزرگم به هم است؛ علاقه به نوشتن و علاقه به ریاضیات. در نوشتن این کتاب، زیبایی و کوتاهی و خوشخوانی را اولویت قرار داده‌ام. از نگارش به در آوردن همه چیزهایی که می‌دانم و طول و تفصیلهای بی‌اهمیت حذر کرده‌ام. ضمناً هر آنچه را که دانستش برای یک ریاضیدان حیاتی است به نگارش در آورده‌ام.

مشخصه اصلی روش من در تدریس و نگارش منطق ریاضی این است که منطق تافته‌ای جدابافته از سایر بخشهای ریاضیات نمی‌بینم و در سرتاسر این کتاب، ریاضیات روزمره، به نحوی که دانشجویان ریاضی آن را فرامی‌گیرند جاری است. خواننده حرفه‌ای تر می‌داند که این که گرایش تخصصی من «نظریه مدلهای» است تأثیر این چنین بر شیوه نگارش این کتاب گذاشته است؛ و البته این حدس درست است! این رهیافت نباید برای خواننده ریاضی‌دان عجیب باشد؛ عموماً هر کتاب ریاضی، دارای یک بخش اول است که در آن مقدماتی از منطق و نظریه مجموعه‌ها ریخته شده و تأکید شده است که دانستن آنها حیاتی است و بقیه کتاب بر پایه آنهاست. طبیعی است که رهیافت کتاب پیش رو برعکس این باشد: مطالب حیاتی در تمام کتاب جاریند و جذابیت‌های ریاضیاتی که در مثالهای جبری دیده می‌شوند، به عنوان محصولات جانبی در نظر گرفته شده‌اند. نحوه نگارش این کتاب به گونه‌ای است که باید اهداف زیر را برآورده کند:

۱. به خواننده‌ای که هیچ آشنائی با ریاضیات و منطق ریاضی ندارد، درباره قضایای مهم در منطق ریاضی دید و شهود ببخشد.

۲. دانشجوی ریاضی را به نحوی زوتر به آخر قصه برساند.

۳. برای یک ریاضیدان که علاقه‌مند به نقش منطق ریاضی در سایر بخشهای ریاضیات و تفهیم مبانی ریاضیات است سودمند باشد.

از این رو، محتوای این کتاب به سه قسمت دسته‌بندی شده است:

۱. محتوای داخل کادر، که فقط برای یک خواننده عمومی نوشته شده است و عاری از محتوای ریاضی است. برای خواننده آشنا برای ریاضی نیز این محتوا می‌تواند در جمع‌بندی و خلاصه‌سازی خواننده‌ها کمک کند.

۲. محتوای مورد نیاز دانشجوی کارشناسی ریاضی که عمده مطالب این کتاب است و از هیچ علامتی برای مشخص کردن آن استفاده نشده است.

۳. محتوای ستاره‌دار، که دانشجو می‌تواند برای سریع‌تر رسیدن به انتها، از آنها حذر کند ولی خواننده ریاضیدان بهتر است آنها را مطالعه کند. ممکن است کل یک فصل یا بخشهایی از آن، و یا تنها یک مثال و تمرین در یک بخش، ستاره‌دار باشد.

۴.۱ پیش‌گفتار علمی

داوید هیلبرت، ۱۸۶۲-۱۹۴۳، یک ریاضیدانی بزرگ آلمانی است که در شاخه‌های مختلف ریاضی تأثیرگذار بوده است. در بین سالهای ۱۹۰۰ تا ۱۹۰۲، هیلبرت فهرستی از ۲۳ مسئله ریاضی در شاخه‌های گوناگون آن منتشر کرد که تا آن زمان پاسخ آنها دانسته نبود. برخی از این مسائل، بعدها حل شدند، برخی حلشان به حل برخی دیگر گره خورد و برخی تا هنوز، حل نشده باقی مانده‌اند.

یکی از این مسائل که طبیعتی هم نظریه اعدادی و هم علوم کامپیوتری دارد، «مسئله دهم» است. مسئله دهم را می‌توان به صورت زیر نوشت:

آیا یک الگوریتم کامپیوتری وجود دارد که به عنوان ورودی، یک معادله دیوفانتی را بگیرد؛ اگر این معادله در اعداد طبیعی پاسخ داشت، در خروجی «بله» و اگر این معادله در اعداد طبیعی جواب نداشت در خروجی «خیر» چاپ کند؟

منظور از یک معادله دیوفانتی، یک معادله چندجمله‌ای است که ضرایب آن، اعداد صحیح هستند و به دنبال یافتن پاسخ آن نیز در اعداد صحیح هستیم. معادله $5x^2 - 4xy - y^2z = 11$ مثالی از یک معادله دیوفانتی است.

ریاضیدانان بزرگی برای پاسخ دادن به مسئله هیلبرت تلاش کردند که از میان آنها می‌توان به «جولیا رابینسون» و «یوری ماتیاسویچ» اشاره کرد. پاسخی که آنها به این مسئله دادند، پاسخی منفی بود: چنین الگوریتمی وجود ندارد.

مسئله پیدا کردن جواب برای یک معادله در اعداد طبیعی، یک مسئله بسیار طبیعی ریاضی است. اما این که ماهیت بررسی حل‌پذیری چنین معادلاتی از توان یک الگوریتم کامپیوتری خارج است، هم از نظر علمی و هم نظر از فلسفه علمی اهمیت دارد؛ خصوصاً در این زمان که به نظر می‌رسد «الگوریتمی شدن همه چیز» با نوعی شوق و ذوق دنبال می‌شود و برخی ممکن است این تصوریجاد شده باشد که این ایده، تازه است. پاسخ کامل به مسئله دهم در سال ۱۹۷۰ داده شد، اما پیش از آن هیلبرت در سال ۱۹۲۰ مسئله را به گونه‌ای بلندپروازانه‌تر مطرح کرده بود. در آن زمان که پارادوکسهای کوچک و بزرگ، توجه بخشهای مختلف ریاضی را به خود جلب کرده بود، هیلبرت پرسید:

آیا الگوریتمی وجود دارد که به عنوان ورودی، یک جمله ریاضی را بگیرد، اگر این جمله یک قضیه ریاضی بود، بله، و اگر نبود خیر را چاپ کند.

مسئله بالا که Entscheidungsproblem^۱ یا مسئله تصمیم‌پذیری نام دارد، بخشی از «برنامه هیلبرت» نامیده می‌شود. می‌توان مسئله بالا را به صورت زیر بازنویسی کرد:

آیا امکان دارد که یک مجموعه از اصول موضوعه اولیه برای ریاضیات تثبیت کرد به طوری که فهرست این اصول موضوعه قابل چاپ توسط یک الگوریتم باشد و هر جمله ریاضی، یا خودش و یا نقیضش با استفاده از این اصول موضوعه اثبات شود؟

اگر پاسخ به سوال بالا مثبت می‌بود، عملاً آنچه بشر ریاضیات، یا شاید حتی «علم» می‌خواند، همه، خروجی یک کامپیوتر است که مانند آتش زرتشتیان، آن را در گوشه‌ای روشن نگه داشته‌ایم!

پاسخی منفی به سوال بالا، در سال ۱۹۳۱ توسط «کورت گودل» داده شد، و البته این جواب منفی، که به نام «قضیه ناتمامیت گودل» معروف است، و اثبات آن، نقطه عطفی برای علم منطق ریاضی است. لذت بردن از درک درست این قضیه تنها با گذراندن یک دوره درست و اصولی منطق ریاضی امکان‌پذیر است. امیدواریم که در این کتاب بتوانیم خواننده را درک مناسبی از این قضیه برسانیم.

اما پیش از درک قضیه تمامیت، و شاید در راستای آن، خواننده باید با قضیه دیگری از گودل، به نام «قضیه تمامیت» آشنا شود. بنا بر این قضیه، هر جمله‌ای که در تمام جهانهای ریاضی درست باشد، اثباتی برایش وجود دارد. بنابراین بخشهای زیادی از این کتاب، به تشریح این قضیه اختصاص یافته است. تمامیت نیز نه تنها به عنوان یک قضیه در منطق ریاضی مهم است بلکه نموده‌های جذابی در سایر گرایشهای ریاضیات دارد که خواهیم کوشید برخی از آنها را بیان کنیم.

اهمیت دو قضیه تمامیت و ناتمامیت فراتر از محدوده علم ریاضی است؛ این دو قضیه، موضوع مورد علاقه بسیاری در فلسفه و بخصوص فلسفه علم است. اما، همان طور که در بالا هم اشاره کردیم، رسیدن به نقطه‌ای که در آن بتوان صورت دقیق، و فارغ از جلوه‌های ظاهری پرطمطراق آنها، دو قضیه تمامیت و ناتمامیت را بیان کرد، پس از گذراندن یک دوره کامل درس منطق امکان‌پذیر است. خواننده‌ای که با این دو قضیه، در قالب دو قضیه در علم ریاضی، و اثبات آنها آشنا شود، خود قادر به درک اهمیت فلسفی و گستره کاربرد آنها در علوم دیگر نیز خواهد شد.

شیوه‌هایی که در اثبات قضایای تمامیت و ناتمامیت گودل به کار گرفته شده است، منجر به نتایج ارزشمندی در بخشهای مختلف ریاضی بخصوص جبر و نظریه اعداد شده است. این شیوه‌ها، در بخشی از علم منطق ریاضی به نام «نظریه مدلها» به طور جداگانه مطالعه می‌شوند. در این کتاب، کوشیده شده است، به نحوی که قابل درک برای دانشجوی دوره کارشناسی باشد، به نظریه مدلها نیز پرداخته شود. در عین حال، علاقه نگارنده جبر، او را به سمتی برده است که در یک فصل به نتایج جذابی در جبر بپردازد. این فصل به گونه‌ای نوشته خواهد شد که به تنهایی و مستقل از باقی کتاب، قابل تدریس و مطالعه باشد.

^۱ بخوانید: «انت شای دونگز پُبلِم».

فصل ۲

دستور زبان

اولین توانائی مورد نیاز یک منطق‌دان، رعایت دستور زبان در سخن گفتن است. برای سخن گفتن قاعده‌مند در هر زبانی، داشتن سه چیز اجتناب‌ناپذیر است: مجموعه‌ای از الفبا، روشی برای ساختن کلمات با استفاده از حروف الفبا، و روشی برای ساختن جملات با استفاده از کلمات. اینها بخشی از دستور زبان هستند که به علاوه، تعیین می‌کند که چه جملاتی را اجازه داریم بسازیم و چه جملاتی از نظر ساخت نادرست هستند. برای مثال در زبان فارسی، مجموعه الفبای ما متشکل از حروف الف، ب، پ، ت و .. است. با کنار هم گذاشتن برخی این حروف می‌توان کلمه سازی کرد؛ مثلاً «آب»، «بابا» و «میز» کلمه هستند. در عین حال هر کنار هم گذاشتنی از حروف منجر به کلمه نمی‌شود. برای مثال «تیچ» کلمه‌ای در زبان فارسی نیست. نیز هر کنار هم گذاشتنی از کلمات منجر به جمله نمی‌شود، مثلاً «دانشجو من» یک جمله نیست. در واقع، قواعد دستوری به طور کاملاً مشخصی به ما می‌گویند که مثلاً «من دانشجو هستم» یک جمله (درست به لحاظ دستوری) است ولی «هستم دانشجو من» جمله‌ای درست به لحاظ دستوری نیست.

مقدمه را اینگونه جمع‌بندی می‌کنم که برای مطالعه منطقی هر پدیده‌ای به الفبا، قواعد کلمه‌سازی و جمله‌سازی، و در یک کلام دستور زبان، نیازمندیم. اینها موضوع این فصل کتاب هستند. مانند طبیعت هر «دستور زبان»، دستور زبانی که ما در این فصل معرفی می‌کنیم نیز ممکن است برای برخی‌ها کمی ملال‌آور و حوصله‌سربر باشد؛ ولی گریزی از آن نیست! برای کاستن از این درد، این فصل را کوتاه و مختصر کرده‌ایم.

۱.۲ زبان مرتبه اول

در منطق ریاضی، برای سخن گفتن درباره هر پدیده‌ای، نخست الفبای مخصوص به آن را معرفی می‌کنیم؛ یعنی یک مجموعه از نمادها معرفی می‌کنیم که از کنار هم چیدن آنها برای نوشتن کلمات و جملات درباره آن پدیده استفاده کنیم. پیچیدگی جملاتی که خواهیم ساخت محدود به امکاناتی است که الفبای انتخاب شده در اختیارمان قرار می‌دهد. مثلاً وقتی می‌خواهیم درباره یک گروه^۱ صحبت بکنیم، الفبا را به گونه‌ای انتخاب می‌کنیم که نمادی برای جمع گروه داشته باشد، و وقتی درباره یک گروه مرتب صحبت می‌کنیم علاوه بر نماد جمع، نیازمند نمادی برای ترتیب گروه نیز هستیم. انتخاب زبان برای گفتگو، کار عجیبی نیست، در علوم مختلف انسانی نیز برای صحبت کردن درباره هر پدیده‌ای نیاز به آشنائی با ترمینولوژی آن موضوع داریم.^۲

تعریف ۱ (زبان مرتبه اول). منظور از یک زبان مرتبه اول، یک مجموعه L متشکل از سه نوع نماد است: نمادهای تابعی، نمادهای رابطه‌ای، و نمادهای ثابت. همراه با هر نماد تابعی $f \in L$ یک عدد طبیعی n_f به عنوان «تعداد مواضع تابع f » در نظر گرفته می‌شود. نیز همراه هر نماد رابطه‌ای $R \in L$ ، یک عدد طبیعی n_R به عنوان تعداد مواضع رابطه R در نظر گرفته می‌شود.

تعریف بالا ممکن است کمی ناگهانی به نظر برسد اما به مرور با آن خو خواهیم گرفت. هنگام معرفی یک زبان مرتبه اول L ، هر نماد تابعی یا رابطه‌ای باید به همراه تعداد مواضع آن معرفی شود، هر چند تعداد این مواضع را در مجموعه L نمی‌نویسیم.

^۱ گروه یک شی ریاضی است که از یک مجموعه به همراه یک عمل جمع تشکیل شده است. این عمل جمع، باید ویژگی‌های مطلوبی داشته باشند. در نخستین درس جبر، با گروه‌ها آشنا می‌شوید.

^۲ گاهی نیز پیش می‌آید که ما درباره موضوعی، شهود و اطلاعات داریم، اما ترمینولوژی لازم برای بحث درباره آن موضوع، به سبک متخصصان آن، را در اختیار نداریم.

مثال ۲. مجموعه $L = \{f, g, R, c\}$ یک زبان مرتبه اول است. در این مثال، f یک نماد تابعی دو موضعی است، یعنی $n_f = 2$. نیز g یک نماد تابعی تک موضعی است، یعنی $n_g = 1$ ؛ و R یک نماد رابطه‌ای دو موضعی است، یعنی $n_R = 2$.

در مورد یک زبان مرتبه اول، توجه به نکات زیر حائز اهمیت است:

۱. یک «نماد تابعی» با یک «تابع» فرق دارد. تابع یک ماشین است که برخی اشیاء را تبدیل به اشیای دیگری می‌کند، اما یک نماد تابعی صرفاً یک علامت است که می‌توان از آن (در صورت نیاز!) برای اشاره به یک تابع خاص استفاده کرد. مشابه همین گفته درباره نمادهای رابطه‌ای و نمادهای ثوابت نیز برقرار است.
۲. نیازی نیست که یک زبان، هر سه نوع نماد را داشته باشد؛ برای مثال $L = \emptyset$ که هیچ نمادی ندارد نیز یک زبان مرتبه اول است. همچنین $L = \{h\}$ که در آن h یک نماد تابعی سه موضعی است ($n_h = 3$) نیز یک زبان مرتبه اول است.
۳. لازم نیست فقط از حروف انگلیسی $f, g, \dots$ در زبان استفاده شود؛ برای مثال $L = \{*, \triangleleft\}$ را به عنوان یک زبان مرتبه اول در نظر بگیرید که در آن $*$ را یک نماد تابعی دو موضعی و $\triangleleft$ را یک نماد رابطه‌ای دو موضعی گرفته‌ایم.
۴. یک زبان مرتبه اول را خودمان و به منظور مطالعه منطقی یک پدیده ریاضی معرفی می‌کنیم. بنابراین باید مشخص کنیم که کدام نماد، از چه نوعی است و تعداد مواضع آن چقدر است.
۵. لازم نیست که یک زبان مرتبه اول، یک مجموعه متناهی از نمادها باشد. می‌تواند شمارا و یا از هر اندازه‌ای باشد. مثلاً ممکن است زبانی، $2^{\aleph_0}$ نماد تابعی داشته باشد.

۲.۲ کلمه‌سازی

فرض کنید L یک زبان مرتبه اول، آنگونه که در بخش قبل معرفی کردیم، باشد. در این بخش، قوانین ساده‌ای را معرفی کرده‌ایم که با به کارگیری آنها می‌توان با استفاده از الفبای موجود در L ، کلمه‌سازی کرد. به هر کلمه‌ای که با استفاده از الفبای زبان L خواهیم ساخت یک L **ترم** گفته می‌شود.

قرارداد ۳. یک مجموعه شمارای $\text{var} = \{x, y, z, \dots\}$ را به نام «مجموعه متغیرها» در نظر بگیرید. دقت کنید که هر چند اعضای این مجموعه در ساخت کلمات به یاری ما خواهند آمد، اما اعضای این مجموعه جزو نمادهای زبان (که تابعی، رابطه‌ای و ثابت هستند) به حساب نمی‌آیند. مشابهاً دو نماد $(,)$ (بخوانید پرانتزها) و نیز نماد $,$ (بخوانید کاما یا ویرگول) در کنار یک زبان مرتبه اول برای کلمه‌سازی به یاری ما می‌آیند.

حال آماده توضیح روش ترم‌سازی هستیم: به طور خلاصه، وقتی L یک زبان مرتبه اول باشد، L ترمها، یعنی ترمها در L ، دنباله‌هایی متناهی هستند که با استفاده از ترکیبهای مجاز نمادهای تابعی با ثوابت زبان، متغیرها و پرانتزها ساخته می‌شوند. برای مثال اگر L یک زبان مرتبه اول و $f \in L$ یک نماد تابعی سه موضعی و $c \in L$ یک نماد ثابت باشد، آنگاه $f(x, y, c)$ یک L ترم است. همچنین اگر h یک نماد تابعی تک موضعی دیگر در زبان L باشد، آنگاه $h(f(x, y, c))$ نیز یک L ترم است. تعریف دقیق L ترمها که در زیر آمده است ماهیتی استقرائی دارد و نحوه ساخته شدن آنها از اجزای ساده تر را توضیح می‌دهد.

تعریف ۴ (L ترمها). فرض کنید L یک زبان مرتبه اول باشد. L ترمها به صورت استقرائی زیر به دست می‌آیند:

۱. هر متغیر، یک L ترم است.
۲. هر نماد ثابت c که در زبان L قرار دارد، یک L ترم است.
۳. اگر $t_1, \dots, t_n$ به تعداد n تا L ترم باشند (یعنی چیزهایی باشند که می‌دانیم جزو L ترمها هستند) و $f \in L$ یک نماد تابعی n موضعی باشد، آنگاه دنباله $f(t_1, \dots, t_n)$ نیز یک L ترم است.

مثال ۵. زبان $L = \{f, g, R, c_1, c_2\}$ را در نظر بگیرید که در آن f, g دو نماد تابعی هستند به طوری که $n_f = 2, n_g = 1$. همچنین R یک نماد رابطه‌ای دو موضعی است و c_1, c_2 نمادهایی برای دو ثابت هستند. چند L ترم برای نمونه در زیر نوشته شده است:

$$x, \quad y, \quad f(x, y) \quad g(f(x, y)), \quad g(c_1), \quad g(z), \quad f(c_1, g(c_2)), \quad f(f(c_1, c_2), g(z)).$$

مثال ۶. زبان $L_1 = \{+\}$ را در نظر بگیرید که در آن $+$ یک نماد تابعی دو موضعی است. چند L_1 ترم در زیر نوشته شده است:

$$+(x, y), \quad +(+ (x, y), z), \quad +(+ (x, x), x).$$

در مورد L ترمها نکات زیر حائز اهمیت هستند.

۱. هر L ترم یک دنباله متناهی از علائم است. وقتی که زبان مورد نظرمان مشخص باشد، به جای L ترم می‌گوییم ترم. همان طور که در مثال ۵ مشاهده می‌کنید، علائم رابطه‌ای زبان در ساخت ترمها استفاده نمی‌شوند؛ برای نمونه در مثال ۵، عبارت $R(x, y)$ یک ترم محسوب نمی‌شود.

۲. «تعریف استقرایی» ترمها، منجر به این قضیه مهم است که هر L ترم به صورت یکتا خوانش شود. یعنی یک ترم t مرحله قبلی ساخته شدنش به طور یکتا معلوم است. این گفته، در قضیه ۷ به طور دقیق بیان شده است. در بخش‌های بعدی خواهیم دید که چرا خوانش یکتای ترمها برایمان حائز اهمیت است.

۳. ترمهایی که در مثال ۶ آمده‌اند را در ریاضی روزمره به صورت زیر می‌نویسند:

$$x + y, \quad x + y + z, \quad 3x$$

یه بیان دیگر، هر ترم در زبان L_1 در مثال ۶ می‌تواند اشاره به یک ترکیب خطی از متغیرها به صورت زیر کند:

$$n_1 x_1 + n_2 x_2 + \dots + n_k x_k.$$

اما از آن جا که خوانش یکتای ترمها برایمان اهمیت دارد، بهتر است ترمها به صورت دقیق مطابق با نحوه ساخت استقرایی آنها بنویسیم برای نمونه از خوانش نایکتا، دقت کنید که $x + 2y$ در مثال زبان بالا هم می‌تواند ترم $(x, +(y, y))$ باشد و هم ترم $+(+(x, y), y)$.

۴. وقتی می‌گوییم $t(x_1, \dots, x_n)$ یک ترم است؛ یعنی وقتی نام متغیرها را جلوی ترم می‌نویسیم، دو منظور داریم: نخست این که متغیرهایی که در ترم t استفاده شده‌اند از بین متغیرهای $x_1, \dots, x_n$ انتخاب شده‌اند. دوم این که لزوماً همه n متغیر $x_1, \dots, x_n$ در این ترم به کار نرفته‌اند. برای مثال اگر t ترم (x, y) باشد، می‌توانیم آن را به صورت $t(x, y, z)$ نمایش دهیم.

تمرین ۱. زبان $L = \{<\}$ را در نظر بگیرید که در آن $<$ یک نماد رابطه‌ای دو موضعی است. L ترمها به چه صورتی هستند؟

تمرین ۲. تعداد L ترمها در زبان متناهی چقدر است؟ در یک زبان شمارا چه طور؟ یک زبان به اندازه 2^{N_0} حداکثر چه تعداد ترم داریم؟

تمرین ۳. فرض کنید $L = \{+\}$ یک زبان مرتبه اول باشد که در آن $+$ یک نماد تابعی دو موضعی است. نشان دهید که هر متناظر با هر ترکیب خطی از متغیرها، مانند $n_1 x_1 + n_2 x_2 + \dots + n_k x_k$ که در آن n_i ها اعداد طبیعی هستند، یک L ترم (غیر یکتا) داریم.

تمرین ۴. در زبان $L = \{+, 0, 1\}$ چه ترمهایی داریم؟

تمرین ۵. در زبان $L = \{*, e\}$ چه ترمهایی داریم؟ در اینجا $*$ یک نماد تابعی دو موضعی و e یک ثابت است.

*تمرین ۶. فرض کنید $L = \{+, \times\}$ یک زبان مرتبه اول باشد که در آن $+$ ، $\times$ دو نماد تابعی دو موضعی هستند. نشان دهید که به ازای هر چندجمله‌ای به صورت $n_0 + n_1 x + n_2 x^2 + \dots + n_k x^k$ یک L ترم (غیر یکتا) وجود دارد. همچنین نشان دهید که به ازای هر چندجمله‌ای چندمتغیره $x_1^{i_1} \dots x_n^{i_n}$ که در آن $n \dots$ یک عدد طبیعی است، یک L ترم داریم.

تمرین ۷. فرض کنید $L = \{+, \times, \exp\}$ یک زبان مرتبه اول باشد که در آن $+$ یک نماد تابعی دو موضعی، $\times$ یک نماد تابعی دو موضعی و $\exp$ یک نماد تابعی تک موضعی است. ترمهای این زبان به چه صورت هستند؟

تمرین ۸. در زبان $L = \emptyset$ ترمها به چه صورتی هستند؟

*تمرین ۹. فرض کنید $L = \{f\}$ که در آن f یک نماد تابعی دو موضعی است. نشان دهید که دنباله $f(x, y, z)$ یک L ترم نیست.

راهنمایی. فرض کنید Term مجموعه همه L ترما باشد. نشان دهید که $\text{Term} - \{f(x, y, z)\} = \text{Term}$. واضح است که از این نتیجه خواهد شد که $f(x, y, z)$ جزو L ترما نیست.

برای این که نشان دهید $\text{Term} - \{f(x, y, z)\} = \text{Term}$ بدین صورت عمل کنید: نخست نشان دهید که ثوابت و متغیرها در مجموعه $\text{Term} - \{f(x, y, z)\}$ هستند. سپس نشان دهید که اگر t_1, t_2 دو ترم در این مجموعه باشند آنگاه $f(t_1, t_2)$ هم در این مجموعه است. از این نتیجه بگیرید که همه L ترما در مجموعه $\text{Term} - \{f(x, y, z)\}$ هستند.

دقت کنید که به همین روش مشابه می توان نشان داد که دنباله های xy و $f(y)$ و $f \square y$ و بسیاری دنباله های دیگر نیز جزو L ترما نیستند. $\square$

قضیه «خوانش یکتا»ی ترم ها را، همان طور که وعده کرده بودیم در زیر آورده ایم.^۳

قضیه ۷ (خوانش یکتای ترما).

• اگر $t = a_1 \dots a_n$ یک ترم باشد، هیچ بخش اولیه ای از t ، به صورت $a_1 \dots a_i$ برای $i < n$ یک L ترم نیست.

• فرض کنید که t یک ترم باشد. در این صورت، t

– یا یک علامت ثابت است،

– یا یک متغیر است،

– یا به صورت $f(t_1, \dots, t_n)$ است که در آن ترم های $t_1, \dots, t_n$ و نماد تابعی f به نحو یکتا مشخص می شوند.

*تمرین ۱۰. قضیه بالا را ثابت کنید.

۳.۲ جمله سازی

مرحله بعدی کار دستور زبان، قرار دادن کلمات در کنار هم و ساختن جملات است. به جای واژه جمله، در منطق مرتبه اول از واژه «فرمول» استفاده می کنیم (و البته واژه جمله نیز برای اشاره به نوع خاصی فرمول استفاده می شود). برای ساختن فرمولها، نیاز به استفاده از برخی نمادهای دیگر در کنار زبان مرتبه اول داریم.

قرارداد ۸. برای ساختن فرمولهای مرتبه اول در یک زبان مرتبه اول L ، علاوه بر امکانات زبان، به موارد زیر نیاز داریم:

• متغیرهای موجود در مجموعه var ،

• علامت نفیض: $\neg$

• علامت عطف $\wedge$ ،

• سور وجودی $\exists$ ،

• علامت تساوی $\doteq$.^۴

• پرانتزهای باز و بسته^۵

علائم بالا با کمک امکانات زبانی، به ما اجازه ساختن فرمولها را می دهند. پیش از ارائه روش دقیق فرمول سازی، یک مثال می زنیم. در زبان L که شامل یک نماد تابعی f است، عبارت زیر یک L فرمول است:

$$\forall x \exists y \quad f(x) \doteq y$$

تعریف دقیق نحوه فرمول نویسی در یک زبان مرتبه اول در زیر آمده است و این تعریف، یک ماهیت استقرائی دارد؛ یعنی نحوه ساخته شدن فرمولها از اجزای ساده تر را بیان می کند. نخست، نحوه ساخت «فرمولهای اتمی» را توضیح داده ایم. به هر فرمول اتمی در زبان L یک معادله در زبان L گفته می شود.

^۳ اثبات این قضیه، با استقراء روی ساخت ترما ساده است، اما آوردن آن در این لحظه خواننده را گرفتار جزئیاتی می کند که فعلاً قصد ورود به آنها را نداریم.

^۴ در ادامه درس متوجه خواهیم شد که چرا بهتر است روی این علامت تساوی، نقطه قرار دهیم!

^۵ شاید بهتر بود این پرانتزها و پرانتزهایی که از آنها برای ساختن ترما استفاده کردیم تمایز قائل شویم، اما برای سادگی، از این کار صرف نظر می کنیم.

تعریف ۹ (L فرمولهای اتمی). فرض کنید L یک زبان مرتبه اول باشد. L فرمولها اتمی (یا معادله‌ها) به صورت استقرائی زیر حاصل می‌شوند:

- اگر t_1 و t_2 دو L ترم باشند، آنگاه دنباله $t_1 \doteq t_2$ یک L فرمول اتمی است.
- اگر $t_1, \dots, t_n$ به تعداد n تا L ترم باشند و R یک نماد رابطه‌ای n موضعی در L باشد، آنگاه دنباله $R(t_1, \dots, t_n)$ یک L فرمول اتمی است.

مثال ۱۰. فرض کنید $L = \{+, <, 0\}$ یک زبان مرتبه اول باشد که در آن $+$ یک نماد تابعی دوموضعی، $<$ یک نماد رابطه‌ای دوموضعی و 0 یک نماد ثابت است. چند فرمول اتمی (معادله) در این زبان، به صورت زیر هستند:

$$+(x, y) \doteq z, \quad +((x, x), x) \doteq 0, \quad <((x, y), z)$$

در زبان ریاضی روزمره، معادلات بالا را عموماً به صورت زیر می‌نویسند (و البته تا زمانی که ملاحظات خاص منطقی در میان نباشد، این امر ایرادی ندارد!)

$$x + y = z, \quad 3x = 0, \quad x + y < z$$

حال زبان $L' = \{\times, <, 1\}$ را در نظر بگیرید که در آن $\times$ یک نماد تابعی دوموضعی است، $<$ همان نماد قبلی و 1 یک نماد ثابت است. واضح است که مشابه بالا، موارد زیر مثالهایی از L' فرمولها هستند:

$$\times(x, y) \doteq z, \quad \times(\times(x, x), x) \doteq 1, \quad <(\times(x, y), z)$$

اما در زبان روزمره ریاضی فرمولهای بالا را به صورت زیر نشان می‌دهند:

$$x \times y = z, \quad x^3 = 1, \quad x \times y < z.$$

تمرین ۱۱. در ریاضیات روزمره، صورت کلی معادلات در زبان $L = \{+, <, 0\}$ که در مثال بالا معرفی شده است، چگونه است؟

تمرین ۱۲. در زبان $L = \{+, \times, 0\}$ چند معادله بنویسید. صورت کلی معادلات در این زبان چگونه است؟

تمرین ۱۳. تمرین بالا را برای زبان $L = \{+, \times, <, 0\}$ پیاده کنید.

تمرین ۱۴. فرض کنید $L = \{h, u, c\}$ یک زبان مرتبه اول باشد که در آن یک h و u به ترتیب یک نماد تابعی و یک نماد رابطه‌ای سه‌موضعی هستند و c یک نماد ثابت است. صورت کلی معادلات در این زبان را بنویسید. در زیر تعریف یک دستگاه از معادلات آمده است. به این تعریف، بعداً در فصل؟؟ رجوع خواهیم کرد.

تعریف ۱۱. فرض کنید $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ به تعداد n معادله در زبان L باشند. عبارت زیر را یک دستگاه از معادلات می‌نامیم:

$$\begin{cases} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \vdots \\ \varphi_n \end{cases}$$

برای مثال، در زبان L در مثال ۱۰ عبارت زیر یک دستگاه از معادلات است:

$$\begin{cases} x + y = z \\ 3x + 5y + 8z < 0 \end{cases}$$

حال نوبت به تعریف L فرمولها است.

تعریف ۱۲. فرض کنید L یک زبان مرتبه اول باشد. مجموعه L فرمولها، به شیوه استقرایی زیر حاصل می‌شود.

- هر معادله در زبان L ، یک یک فرمول است.
- اگر φ یک فرمول باشد، آنگاه $\neg\varphi$ نیز یک فرمول است.
- اگر φ_1 و φ_2 دو فرمول باشند (یعنی به نحوی از L فرمول بودن آنها مطمئن باشیم) آنگاه $(\varphi_1 \wedge \varphi_2)$ نیز یک فرمول است.
- اگر φ یک فرمول باشد، آنگاه $\exists x\varphi$ نیز فرمول است.

ملاحظه ۱۳. اگر نقیض یک معادله را یک «نامعادله» بخوانیم، قضیه ۱۱ را می‌توان به «دستگاهی از معادلات و نامعادلات» نیز گسترش داد.

مثال ۱۴. زبان $L = \{f, g, R\}$ را در نظر بگیرید که در آن f یک نماد تابعی دو موضعی، g یک نماد تابعی یک موضعی و R یک نماد رابطه‌ای سه موضعی است. چند نمونه L فرمول در زیر نوشته‌ایم:

$$\begin{aligned} & f(x, y) \doteq g(z), \\ & R(x, f(x, y), g(z)), \\ & \neg R(x, f(x, y), g(z)), \\ & \left(\neg R(x, f(x, y), g(z)) \wedge f(x, y) \doteq g(z) \right) \\ & \exists x \left(\neg R(x, f(x, y), g(z)) \wedge f(x, y) \doteq g(z) \right), \\ & \left(\exists x \left(\neg R(x, f(x, y), g(z)) \wedge f(x, y) \doteq g(z) \right) \wedge \exists y R(x, f(x, y), g(z)) \right), \\ & \exists y \exists x \neg R(x, f(x, y), g(z)). \end{aligned}$$

مثال ۱۵. زبان $L = \{+, <, 0, 1\}$ را در نظر بگیرید که در آن $+$ یک نماد تابعی دو موضعی، $<$ یک نماد رابطه‌ای تک موضعی و 0 یک ثابت است. چند نمونه L فرمول در زیر نوشته شده است:

$$\begin{aligned} & <(0, x) \\ & <(+ (z, z), + (x, y)) \\ & \exists x \exists y \left(<(x, y) \wedge <(+ (x, x), y), + (1, 1) \right) \end{aligned}$$

دقت کنید که در ریاضی روزمره، عموماً فرمولهای بالا را به ترتیب، به صورت زیر می‌نویسیم^۶

$$\begin{aligned} & x > 0 \\ & 2z < x + y \\ & \exists x, y (x < y \wedge 2x + y < 2). \end{aligned}$$

نوشتن فرمولها یاد شده به این شکل، هیچ ایرادی ندارد. ولی رعایت شکل دقیق فرمولها، برای رعایت خوانش یکتای آنها، و آن هم برای استفاده از استقراء روی ساخت فرمولها اهمیت دارد. در ادامه درس این معنای دقیق این گفته‌ها مشخص خواهد شد.

در مثال بالا به «خوانش یکتای فرمولها اشاره کردیم. در زیر این گفته را به صورت دقیق (ولی باز هم بدون اثبات) آورده‌ایم.

قضیه ۱۶ (خوانش یکتای فرمول). فرض کنید φ یک فرمول باشد. در این صورت، φ

^۶ و زمانی که برخی ملاحظات منطقی خاص موضوع بحثمان نباشد، این کار ایرادی ندارد.

- یا به صورت $t_1 \doteq t_2$ است که در آن نماد رابطه‌ای ترم‌های t_1, t_2 به نحو یکتا مشخص می‌شوند،
 - یا به صورت $R(t_1, \dots, t_n)$ است که در آن R و ترم‌های t_i به نحو یکتا مشخص می‌شود،
 - یا به صورت $\neg\psi$ است که در آن ψ به طور یکتا مشخص می‌شود،
 - یا به صورت $(\psi_1 \wedge \psi_2)$ است که در آن ψ_i ها به صورت یکتا مشخص می‌شوند،
 - یا به صورت $\exists x\psi$ است که در آن متغیر x و فرمول ψ به طور یکتا مشخص می‌شود.
- این بخش را با ذکر دو نکته حائز اهمیت درباره فرمولها به پایان می‌بریم.
۱. چند نماد دیگر می‌توان برای «کوتاه‌نویسی» فرمولها به صورت زیر در نظر گرفت:

$$(\varphi_1 \vee \varphi_2) : \neg(\neg\varphi_1 \wedge \neg\varphi_2).$$

$$(\varphi_1 \rightarrow \varphi_2) : (\neg\varphi_1 \vee \varphi_2)$$

$$(\varphi_1 \leftrightarrow \varphi_2) : ((\varphi_1 \rightarrow \varphi_2) \wedge (\varphi_2 \rightarrow \varphi_1))$$

$$\forall x\varphi : \neg\exists x\neg\varphi.$$

۲. در ریاضیات روزمره، برای جلوگیری از ازدحام پرانتزها (مانند آنچه در بالا حتما بدان دقت کرده‌اید!) برای نمادها اولویت‌بندی قائل می‌شویم؛ بدین صورت که نخست تساوی و سپس سورها بر همه نمادها اولویت دارند؛ پس از آنها علامت $\neg$ است، و سپس علامتهای $\leftrightarrow, \rightarrow, \vee, \wedge$. در بین نمادهای هم‌مرتبه، هر کدام زودتر ظاهر شود اولویت دارد. برای مثال عبارت

$$\exists x f(x) \doteq y \wedge g(x, y) < z$$

در حقیقت فرمول زیر است:

$$\left(\exists x (f(x) \doteq y) \wedge < (g(x, y), z) \right) \quad (*)$$

و نه فرمول زیر:

$$\exists x \left((f(x) \doteq y) \wedge < (g(x, y), z) \right).$$

حتی گاهی برای راحت‌تر شدن فرمول، می‌شود از پرانتزهای بیشتری استفاده کرد؛ مثلاً فرمول (*) را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\left(\left(\exists x (f(x) \doteq y) \right) \wedge < (g(x, y), z) \right)$$

۳. در ادامه این کتاب، وقتی می‌نویسیم:

$$\forall x_1 \dots, x_n \quad \varphi$$

منظورمان عبارت زیر است:

$$\forall x_1 \forall x_2 \dots \forall x_n \quad \varphi.$$

تمرین ۱۵. در زبان $L = \{+, \times, <\}$ فرمولها به چه صورت هستند؟

تمرین ۱۶. فرمولهای زیر را پرانتزگذاری کنید:

$$\forall x \exists y R(x, y) \rightarrow \exists t s(t) \wedge R(t)$$

$$\exists y R(y) \rightarrow s(y) \rightarrow u(y)$$

$$\forall x R(x) \rightarrow \forall y R(y) \wedge \forall z R(z)$$

$$\forall x R(x) \wedge \exists y R(x, y) \rightarrow \exists z S(x, z)$$

تمرین ۱۷. پیرانتزهای اضافه را حذف کنید:

$$\exists y(R(y) \rightarrow S(y))$$

$$\exists x((r(x) \wedge s(x)) \rightarrow a(x))$$

$$\exists x(\exists y(R(x, y) \wedge \exists y s(x, y)))$$

تمرین ۱۸. فرض کنید $L = \{R, h, c\}$ یک زبان مرتبه اول باشد که در آن h یک نماد تابعی دوموضعی و R یک نماد رابطه‌ای سه‌موضعی است. فرمولهای این زبان به چه صورت هستند؟

*تمرین ۱۹. فرض کنید L یک زبان مرتبه اول باشد. نشان دهید که هر L فرمول، یک دنباله متناهی است.

تمرین ۲۰. تعداد فرمولهایی که در یک زبان متناهی می‌توان نوشت، چقدر است؟ در یک زبان شمارا چه طور؟ در یک زبان با اندازه $2^{\aleph_0}$ چه طور؟

*تمرین ۲۱. قضیه ۱۶ را اثبات کنید.

در منطق مرتبه اول، برای سخن گفتن درباره هر موضوعی نخست یک مجموعه الفبا برای آن انتخاب می‌کنیم. از کنار هم گذاشتن قاعده‌مند حروف آن الفبا، کلمه‌ها ایجاد می‌شوند. با در نظر گرفتن یک سری نماد کمکی، مانند علامتهایی برای فصل و عطف و سورها در کنار الفبا، جملات ساخته می‌شوند. اما آنچه با این روش ایجاد می‌شود، تنها دنباله‌های ساخته شده از علائم است و معنایی برای آنها متصور نیست.