منطق ریاضی

محسن خانی
دانشگاه صنعتی اصفهان

۹ آبان ۱۴۰۵

فصل ۱

تمامیت

۱.۱ معرفی قضیهٔ تمامیت

در فصلِ ؟؟ با عبارتِ $T \models \varphi$ آشنا شدیم که خوانده می‌شود: تئوری T مستلزم جملهٔ φ است. گفتیم زمانی تئوری T مستلزم جملهٔ φ است که در تمامی مدلهای تئوری T جملهٔ φ برقرار باشد. در فصل قبلی با مفهوم اثبات‌پذیری یک جملهٔ φ آشنا شدیم و گفتیم عبارت $T \vdash \varphi$ یعنی φ با چندین بار استفاده از قواعد و اصول دستگاه هیلبرت حاصل می‌شود. در ادامه، نمادِ $T \vdash \varphi$ را معرفی کرده‌ایم که خوانده می‌شود: «اثباتی برای φ با استفاده از اصول تئوری T وجود دارد»، یا «جملهٔ φ با استفاده از اصول تئوری T اثبات می‌شود.».

تعریف ۱. فرض کنید T یک تئوری و φ یک فرمول باشد. می‌نویسیم $T \vdash \varphi$ هرگاه جملاتی مانند $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ در تئوری T باشند، به طوری که $\vdash ((\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n) \to \varphi)$

نتیجه ۲. $T \vdash \varphi$ اگر وتنهااگر جملاتِ $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ در T وجود داشته باشند به طوری که $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\} \vdash \varphi$.

بنابراین، وقتی می‌گوییم جملهٔ φ با استفاده از اصول تئوری T اثبات می‌شود، چنین است که با به کارگیری تعدادی متناهی از جملات موجود در T و با استفاده از دستگاه هیلبرت، می‌توان به استنتاجی برای φ رسید. در بخش قبل، یک فرمول مشخصاً غلط (مثلاً فرمولِ $x \doteq x \wedge \neg x \doteq x$) را با $\bot$ نشان دادیم و آن را تناقض نامیدیم. همچنین گفتیم اگر $T \nvdash \bot$ آنگاه T دارای مدل است؛ یعنی یک تئوری که «مستلزم تناقض نباشد» دارای مدل است. در این فصل، قضیهٔ دیگری را ثابت خواهیم کرد:

قضیه ۳ (تمامیت)**.** اگر $T \nvdash \bot$ آنگاه T دارای مدل است.

قصد داریم این قضیه را در این فصل اثبات کنیم، اما خوب است پیش از آن، در صورت قضیه کمی غور کرد. در صورت قضیهٔ بالا گفته‌ایم که اگر از اصول تئوری T تناقض استنتاج نشود، آنگاه تئوری T، دارای مدل است. پس بنا به تعریف ۱ گفته‌ایم که اگر از هیچ تعدادِ متناهی از جملات موجود در تئوری T به استنتاجی برای تناقض نرسیم، آنگاه T دارای مدل است. این که از هیچ بخش متناهی از تئوری T به استنتاجی برای $\bot$ نرسیم، یک عبارت مربوط به مبحث «نظریهٔ بُرهان» است. اما این که تئوری T دارای مدل است، مربوط به مبحث «نظریهٔ مدل» است. زیبایی قضیهٔ بالا، قدرت آن در ایجاد ارتباط میان این دو بخش از علم منطق است.

فرض کنید $T \vdash \bot$. در این صورت، بنا به تعریف، جملاتی مانند $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ در تئوری T وجود دارند به طوری که $\vdash (\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n \to \bot)$. در نتیجه، بنا به تاتولوژی بودن گزاره $((p \to \bot) \leftrightarrow \neg p)$ داریم $\vdash \neg(\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n)$. بنابراین، استنتاج شدن تناقض از یک تئوری T به معنی وجود جملاتی مانند $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ در T است به طوری داشته باشیم: $\vdash \neg(\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n)$.

حال فرض کنید $T = \{\varphi\}$ یک تئوری، حاوی فقط یک جملهٔ φ باشد. صورت قضیهٔ ۳ برای این تئوری به صورت زیر درمی‌آید:

- اگر $T \nvdash \bot$ آنگاه T دارای مدل است، بنابراین:
- اگر $\nvdash (\varphi \to \bot)$ آنگاه یک ساختارِ $\mathcal{M}$ وجود دارد به طوری که $\mathcal{M} \models \varphi$؛ بنابراین

- اگر $\nvdash \neg\varphi$ آنگاه یک ساختارِ $\mathcal{M}$ وجود دارد به طوری که $\mathcal{M} \models \varphi$.

عبارت بالا برای هر جمله‌ای برقرار است، بنابراین با استفاده از نقیضِ φ به جای φ داریم:

- اگر $\nvdash \varphi$ آنگاه یک ساختارِ $\mathcal{M}$ وجود دارد به طوری که $\mathcal{M} \models \neg\varphi$.

اما عکس نقیض جملهٔ بالا به صورت زیر است:

- اگر در همهٔ ساختارهای $\mathcal{M}$ داشته باشیم $\mathcal{M} \models \varphi$ آنگاه $\vdash \varphi$؛ به بیان دیگر:

- اگر $\models \varphi$ آنگاه $\vdash \varphi$.

بنابراین از قضیه ۳ نتیجه می‌شود که:

نتیجه ۴. هر جمله‌ای که همواره درست باشد، برایش اثباتی وجود دارد.

نتیجه ۵. $\varphi \models$ **اگر و تنهااگر** $\vdash \varphi$.

۲.۱ اثبات قضیه ۳

فرض کنید T یک تئوری دلخواه در زبانِ L باشد به طوری که $T \nvdash \bot$. جملهٔ $\varphi(x)$ را در زبان L در نظر بگیرید. یک ثابتِ $c \notin L$ به زبان اضافه کنید و جملهٔ زیر را در نظر بگیرید:

$$(\exists x\varphi(x)) \to \varphi(c).$$

جملهٔ بالا را می‌توان این گونه خواند: اگر فرمولِ φ قابل برآورده شدن توسط حداقل یک عنصر باشد، آنگاه یکی از ثوابت، «شاهدی» بر این برآورده شدن است. حال تئوریِ $T' = T \cup \{(\exists x\varphi(x)) \to \varphi(c)\}$ را در نظر بگیرید. ادعا می‌کنیم که عدم اثبات تناقض توسط T منجر به عدم اثباتِ تناقض توسط تئوریِ T' می‌شود.

لم ۶. $T' \nvdash \bot$.

اثبات. اگر $T' \vdash \bot$ آنگاه جملاتِ $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \in T$ وجود دارند به طوری که $\Big(\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n \wedge (\exists x\varphi(x) \to \varphi(c))\Big) \to \bot \vdash$. بنابراین

$$\vdash \varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n \to \neg(\exists x\varphi(x) \to \varphi(c)) \tag{۱.۱}$$

$$\vdash \varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n \to \neg(\neg\exists x\varphi(x) \vee \varphi(c)) \tag{۲.۱}$$

$$\vdash \varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n \to (\exists x\varphi(x)) \wedge \neg\varphi(c) \tag{۳.۱}$$

$$\vdash \varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n \to (\exists x\varphi(x)) \tag{۴.۱}$$

$$\vdash \varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n \to (\neg\varphi(c)) \tag{۵.۱}$$

$$\vdash \varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n \to (\neg\varphi(y)) \quad \text{با فرض این که } y \text{ متغیری باشد که در سمت چپ ظاهر نشده است و بنا به ؟؟.} \tag{۶.۱}$$

$$\vdash \varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n \to \forall y(\neg\varphi(y)) \quad \text{قاعدهٔ معرفی سور عمومی و ۶.۸} \tag{۷.۱}$$

$$\vdash (\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n) \to \bot \ . \quad \text{بنا به ۴.۸ و ۷.۸} \tag{۸.۱}$$

□

حال فرض کنید $\{\varphi_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ لیستی از همهٔ فرمولهای در زبانِ L باشد، که تنها متغیر آزاد آنها x است. در این صورت یک فهرست از ثابت‌های $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ و یک فهرست از فرمولهای به صورت $(\exists x\varphi_n(x)) \to \varphi_n(c_n)$ در نظر بگیرید. تک‌تکِ فرمولهای این فهرست را یکی یکی و با استقراء، به تئوریِ T بیفزایید. در این صورت تئوریِ $T_1 = T \cup \{(\exists x\varphi_n(x)) \to \varphi_n(c_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ نیز یک تئوری است که تناقض از آن استنتاج نمی‌شود. این تئوری در زبانِ $L_1 = L \cup \{c_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ نوشته شده است.

احتمالاً خواننده دقت کرده است که در فهرست کردن فرمولها، تعداد آنها را شمارا گرفتیم. در حقیقت، نیازی به این فرض نیست و با اندکی مهارت در استفاده از استقراء فرامتناهی (یا لم زرن) می‌شود همین کار را با هر تعداد فرمول انجام داد. در فصلهای آیندهٔ همین کتاب با چنین تکنیک‌هایی آشنایی بهتری خواهیم یافت، ولی فعلاً به آنها ورود نمی‌کنیم تا از مسیر اصلی اثبات منحرف نشویم.

اثبات را ادامه می‌دهیم. تئوریِ T_1 یک تئوری در زبانِ L_1 است که در آن ذکر شده است که برای همهٔ فرمولهای وجودی زبانِ L شاهدی وجود دارد. حال فهرستی از همهٔ فرمولهای زبانِ L_1 تهیه کنید و به اندازهٔ آنها، ثابت به زبان اضافه کنید و به زبانِ L_2 برسید و تئوری T_2 را در زبانِ L_2 به‌گونه‌ای بنویسید که در آن ذکر شود که برای همهٔ فرمولهای وجودی در زبانِ L_1 شاهدی وجود دارد. با تکرار همین کار به تئوری‌های $T_1 \subseteq T_2 \subseteq \dots T_n \subseteq \dots$ می‌رسیم به طوری که هر تئوری T_i در زبانِ L_i نوشته شده است و هر تئوری T_{i+1} حاوی فرمول‌هایی است، بیانگر این که برای فرمولهای وجودی زبانِ قبلی، یعنی زبانِ L_i شاهد وجود دارد.

حال تئوری $T' = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} T_i$ را در نظر بگیرید که از اجتماع تمام این تئوری‌های یادشده به دست آمده است و در زبانِ $L' = L_1 \cup L_2 \cup \dots$ نوشته شده است. تئوریِ T' برای هر فرمولی که در زبانِ L نوشته شود، شاهد دارد. زیرا اگر φ یک فرمول در زبانِ L باشد، آنگاه حتماً متعلق به یک L_i است و وجود شاهد برای آن در تئوریِ T_{i+1} تضمین شده است. همچنین به راحتی می‌توان دید که از تئوریِ T' نیز تناقض استنتاج نمی‌شود، زیرا در این صورت، تناقض باید از یکی از T_i ها استنتاج شود. بیایید آنچه را که تا اینجا اثبات کردیم، خلاصه کنیم:

> **قدم اول اثبات قضیهٔ تمامیت.** اگر T یک تئوری باشد که تناقض از آن استنتاج نشود، آنگاه یک تئوریِ T' شامل تئوری T وجود دارد که در یک زبانِ $L' = L \cup C$ نوشته شده است و برای هر فرمولِ $\varphi(x) \in L'$ حاوی جمله‌ای به صورت $(\exists x\varphi(x)) \to \varphi(c)$ است که در آن $c \in C$. همچنین از تئوری T' هم تناقض استنتاج نمی‌شود. به این قدم اثبات، **هنکینی سازی** تئوریِ T گفته می‌شود. دقت کنید که ضمن فرایند هنکینی سازی، تعداد ثوابتی که اضافه می‌شود، به اندازهٔ زبانِ L است.

پیش از ادامهٔ اثبات، به یک پدیدهٔ دیگر توجه می‌کنیم. فرض کنید T یک تئوری و φ یک فرمول دلخواه باشند به گونه‌ای که $T \nvdash \neg\varphi$. (به طور خاص، T تناقض را هم اثبات نمی‌کند؛ چون اگر تناقض را اثبات می‌کرد، $\neg\varphi$ را هم اثبات می‌کرد). در این صورت:

لم ۷. $T \cup \{\varphi\} \nvdash \bot$.

اثبات. فرض کنید $T \cup \{\varphi\} \vdash \bot$. در این صورت جملاتِ $\varphi_1, \dots, \varphi_n \in T$ وجود دارند به طوری که

$$\vdash (\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n) \wedge \varphi \to \bot . \tag{۹.۱}$$

$$\vdash (\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n) \to \neg\varphi \tag{۱۰.۱}$$

$$T' \vdash \neg\varphi \tag{۱۱.۱}$$

اما ۱۱.۸ در بالا، فرض‌های لم را نقض می‌کند. □

حال فرض کنید $\{\varphi_n\}$ فهرست همهٔ جمله‌ها در زبانِ L باشد. اگر جملهٔ φ_0 به همراه تئوریِ T تناقض نداد، آن را به تئوری اضافه کنید و تئوری حاصل را T_1 بنامید. به همین ترتیب اگر جملهٔ φ_n با T_n تناقض نداد آن را به T_n بیفزایید و به این ترتیب به یک زنجیرِ $T_1 \subseteq T_2 \subseteq \dots$ از تئوری‌ها برسید. تئوریِ $\bigcup T_n$ یک تئوری «بزرگ» است که تناقض از آن استنتاج نمی‌شود. همچنین اگر φ یک جمله باشد که با $\bigcup T_n$ تناقض را ثابت نمی‌کند آنگاه φ قبلاً در $\bigcup T_n$ گنجانده شده است (چون یکی از φ_i هاست).

بنابراین با شروع از یک تئوری T که تناقض را اثبات نمی‌کند به یک تئوریِ T'' رسیدیم که آن هم تناقض را اثبات نمی‌کند، و شامل همهٔ جملاتی است که به همراه T'' تناقض را اثبات نمی‌کنند.

در فصلهای بعدی کتاب، با لم زرن آشنا خواهیم شد. با این حال برای خواننده‌ای که با لم زرن آشناست، مرحلهٔ رسیدن به یک تئوری «سازگار ماکزیمال» را به صورت دقیق‌تر پیش رو توضیح می‌دهیم. فرض کنید تئوری T داده شده باشد به طوری که $T \nvdash \bot$. مجموعهٔ $\mathcal{A}$ را متشکل از همهٔ تئوری‌های K در نظر بگیرید که $K \nvdash \bot$. این مجموعه را با ترتیب شمول، مرتب جزئی کنید. بررسی کنید که $\mathcal{A}$ تحت اجتماع زنجیرها بسته است. بنا به لم زُرن $\mathcal{A}$ شامل یک تئوریِ T'' است که $T \nvdash \bot$ و T'' با ترتیب شمول، ماکزیمال است. حال اگر φ یک جملهٔ دلخواه باشد به طوری که $T'' \cup \{\varphi\} \nvdash \bot$ آنگاه $\varphi \in T''$ زیرا در غیر این صورت بنا به لم ۷ داریم $T'' \cup \{\varphi\} \nvdash \bot$؛ و این ماکزیمال بودن T'' در $\mathcal{A}$ را نقض می‌کند. حال وقت آن رسیده که خلاصه‌ای از این مرحلهٔ اثبات را نیز بیان کنیم:

قدم دوم اثبات قضیهٔ تمامیت. فرض کنید که T یک تئوری باشد به طوری که $T \nvdash \bot$. در این صورت یک تئوریِ T'' شامل تئوری T وجود دارد به طوری که اولاً $T'' \nvdash \bot$ و ثانیاً برای هر جملهٔ φ، اگر $T'' \cup \{\varphi\} \nvdash \bot$ آنگاه $\varphi \in T''$. به این مرحله از اثبات قضیهٔ تمامیت، **ماکزیمال‌سازی** گفته می‌شود. طی این مرحله، زبان تغییر نمی‌کند اما تئوری اولیه، تبدیل به یک تئوری می‌شود که هر جمله‌ای که با آن تناقض نمی‌دهد را در خود دارد.

حال دو قدم اثبات را با هم ترکیب می‌کنیم. یک تئوری T داریم که تناقض از آن اثبات نمی‌شود، آن را نخست به یک تئوری ماکزیمال کامل گسترش می‌دهیم و سپس تئوری حاصل را هنکینی سازی می‌کنیم و آن را T^* می‌نامیم. پس تئوری T^* دارای هر دو ویژگی زیر است:

۱. در زبان $L \cup C$ که حاوی ثوابتی است که طی مراحل هنکینی سازی به زبان L اضافه شده‌اند، برای هر فرمولِ تک‌متغیره شاهد دارد. یعنی برای هر $L \cup C$ فرمول $\varphi(x)$ (که تنها متغیر آزاد آن x است)، یک ثابت $c \in C$ وجود دارد به طوری که $(\exists x \varphi(x)) \to \varphi(c)$ یکی از جملاتِ موجود در تئوری T^* است.

۲. برای هر جملهٔ φ که در زبانِ $L \cup C$ نوشته شده باشد، اگر $T^* \cup \{\varphi\} \nvdash \bot$ آنگاه $\varphi \in T^*$.

ادعا می‌کنیم که تئوری T^* دارای مدل است. توجه کنید که در این صورت، حکمِ قضیهٔ ۳ نیز اثبات می‌شود. زیرا هر مدلی که برای تئوریِ T^* پیدا کنیم (یا بسازیم) به طور خاص، مدلی برای تئوریِ T است.

گفتیم که تئوری T^* در زبانِ $L \cup C$ نوشته شده است که L همان زبان تئوریِ T است و C مجموعه‌ای از ثوابت است که ضمن هنکینی‌سازی به زبان اضافه شده‌اند. در ادامهٔ اثبات، مجموعهٔ C را تبدیل به یک $L \cup C$ ساختار می‌کنیم که مدلی برای تئوریِ T^* است. پس فعلاً جهان ساختارِ مورد نظر ما همان مجموعهٔ C است.

برای تبدیلِ C به یک $L \cup C$ ساختار، نیاز است که همهٔ نمادهای تابعی، رابطه‌ای و ثوابت در $L \cup C$ تعبیری پیدا کنند. این کار به سادگی صورت می‌گیرد. در هر مورد، برای تعبیر کردن یک علامت زبانی، با تئوریِ T^* مشورت می‌کنیم.

تعبیر علائم ثابت، آسان است؛ تعبیر هر c خودش است. اما یک ملاحظهٔ کوچک لازم داریم: اگر جملهٔ $c_1 \doteq c_2$ در تئوری T^* باشد، باید تعبیرِ c_1, c_2 هر دو یکسان باشد. بنابراین نخست یک رابطهٔ هم‌ارزیِ تساوی روی C به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$c_1 = c_2 \Leftrightarrow c_1 \doteq c_2 \in T^*.$$

هم‌ارزی بودن رابطهٔ فوق، از نتایج قوانین تساوی در دستگاه هیلبرت است. جهانِ C را در واقع، کلاسهای هم‌ارزی رابطهٔ هم‌ارزی فوق در نظر می‌گیریم.

حال فرض کنید که f یک نماد تابعی n موضعی باشد. برای تعبیر f در جهان C باید بدانیم که برای هر $c_1, \ldots, c_n$ حاصل $f(c_1, \ldots, c_n)$ چیست. اما بنا به هنکینی بودن، می‌دانیم که یک ثابتِ c_{n+1} وجود دارد به گونه‌ای که عبارت زیر در تئوریِ T^* برقرار است:

$$(\exists y f(c_1, \ldots, c_n) = y) \to (f(c_1, \ldots, c_n) = c_{n+1}).$$

از طرفی جملهٔ زیر هم برقرار است:

$$\exists y \quad f(c_1, \ldots, c_n) = y$$

زیرا

$$f(c_1, \ldots, c_n) = f(c_1, \ldots, c_n) \in T^*.$$

بنابراین به راحتی، تعریف می‌کنیم:

$$f(c_1, \ldots, c_n) = c_{n+1}.$$

حال فرض کنید R یک نماد تابعی n موضعی باشد. می‌خواهیم تعیین کنیم که چه زمانی $R(c_1, \ldots, c_n)$ برقرار باشد. می‌دانیم که تئوری T^* یک تئوری ماکزیمال است. جملهٔ $R(c_1, \ldots, c_n)$ یا خودش در این تئوری است، یا نقیضش؛ پس، برای ساختار مورد نظر، تعریف می‌کنیم:

$$(c_1, \ldots, c_n) \in R \Leftrightarrow R(c_1, \ldots, c_n) \in T^*$$

تعبیر ثوابت زبان نیز ساده است: ثوابت موجود در مجموعهٔ C تعبیرشان، خودشان باشد. دقت کنید که اگر جملهٔ $c_1 \doteq c_n$ در تئوری T^* باشد، آنگاه اتفاق $c_1 = c_2$ در C می‌افتد.

بدین‌سان، C تبدیل به جهانِ یک $L \cup C$ ساختار شده است؛ یعنی همهٔ توابع، روابط و ثوابت این زبان، تعبیری در C دارند. بیایید این ساختار را با $\mathcal{C}$ نشان دهیم. آخرین قدمی که از اثبات باقی‌مانده، این است که نشان دهیم که $\mathcal{C} \models T^*$.

فرض کنید که φ یک جمله باشد. با استقراء روی پیچیدگی φ نشان می‌دهیم که $\mathcal{C} \models \varphi$ اگروتنهااگر $\varphi \in T^*$. به طور خاص از این نتیجه خواهد شد که $\mathcal{C} \models T^*$. دقت کنید که جملهٔ φ به صورت $\varphi(c_1, \ldots, c_n)$ است که در آن φ یک فرمول در زبانِ L است که به جای متغیرهای آن، ثابت‌هایی از مجموعهٔ C قرار گرفته است. پس استقرای ما در واقع روی پیچیدگیِ $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ به عنوان یک L فرمول خواهد بود.

پیش از شروع استقراء، نیاز است مشاهده‌ای دربارهٔ ترمها داشته باشیم. فرض کنید $t(c_1, \ldots, c_n)$ یک ترم باشد به طوری که $t(x_1, \ldots, x_n)$ یک ترم در زبانِ L است. جملهٔ $\exists x \quad t(c_1, \ldots, c_n) \doteq x$ در تئوری T^* است؛ زیرا جملهٔ $t(c_1, \ldots, c_n) \doteq t(c_1, \ldots, c_n)$ در آن است. بنا به ویژگی هنکینی، ثابت c_{n+1} وجود دارد به طوری که

$$t(c_1, \ldots, c_n) \doteq c_{n+1}$$

جمله‌ای در تئوریِ T^* است. به راحتی و با استقراء روی پیچیدگی ترم‌ها می‌توان نشان داد که در ساختارِ $\mathcal{C}$ داریم:

$$t^{\mathcal{C}}(c_1, \ldots, c_n) = c_{n+1} \Leftrightarrow (t(c_1, \ldots, c_n) \doteq c_{n+1}) \in T^*.$$

فرض کنید جملهٔ φ به صورت $t_1(c_1, \ldots, c_n) \doteq t_2(c_1, \ldots, c_n)$ باشد. بنا بر آنچه گفته شد، ثابت‌های $c_{n+1}, c'_{n+1} \in C$ وجود دارند به طوری که $\mathcal{C} \models t_1(c_1, \ldots, c_n) = c_{n+1}$ و $\mathcal{C} \models t_2(c_1, \ldots, c_n) = c'_{n+1}$. حال اگر جملهٔ $t_1(c_1, \ldots, c_n) \doteq t_2(c_1, \ldots, c_n)$ در تئوریِ T^* است، جملهٔ $c_{n+1} = c'_{n+1}$ نیز در این تئوری است، بنابراین جملهٔ φ در $\mathcal{C}$ برقرار است. به طور مشابه، اگر نقیض $\mathcal{C} \models t_2(c_1, \ldots, c_n) = c'_{n+1}$ در تئوری باشد، ثابت‌های مربوطه با هم مساوی نیستند.

اگر φ به صورت $R(c_1, \ldots, c_n)$ باشد، در این صورت بنا به روش تعبیر رابطهٔ R واضح است که برقراری این رابطه در $\mathcal{C}$ دقیقاً معادل با وجود جملهٔ $R(c_1, \ldots, c_n)$ در تئوریِ T^* است.

فرض کنید فرمولِ φ به صورت $\psi_1 \wedge \psi_2$ باشد. نیز فرض کنید که بدانیم که $\psi_1(c_1, \ldots, c_n)$ و $\psi_2(c_1, \ldots, c_n)$ دقیقا زمانی در $\mathcal{C}$ برقرار هستند که در T^* باشند. اثبات حکم برای فرمول φ در این حالت، از مشاهدهٔ پیش رو به دست می‌آید که بنا به ماکزیمال بودنِ T^* (تمرین ۳ و تمرین ۴) داریم:

$$\psi_1(c_1, \ldots, c_n) \wedge \psi_2(c_1, \ldots, c_n) \in T^* \Leftrightarrow \psi_1(c_1, \ldots, c_n) \in T^* \text{ و } \psi_2(c_1, \ldots, c_n) \in T^*$$

اگر فرمولِ φ به صورت $\neg\psi$ باشد، حکم مورد نظر به راحتی اثبات می‌شود، زیرا بنا به فرض استقراء $T^* \vdash \psi$ اگر و تنهااگر $\mathcal{C} \models \psi$.

حال فرض کنید فرمولِ φ به صورت $\exists x \psi$ باشد و حکم برای فرمول ψ برقرار باشد. داریم $T^* \vdash \exists x \psi(x, c_1, \ldots, c_n)$ اگروتنهااگر ثابت c وجود داشته باشد به طوری که $T^* \vdash \psi(c, c_1, \ldots, c_n)$؛ زیرا تئوری T^* هنکینی است. از طرفی، بنا به فرض استقراء، $T^* \vdash \psi(c, c_1, \ldots, c_n)$ اگر و تنهااگر $\mathcal{C} \models \psi(c, c_1, \ldots, c_n)$. بنابراین اگر $T \vdash \exists x \psi(x, c_1, \ldots, c_n)$ آنگاه $\mathcal{C} \models \exists x \psi(x, c_1, \ldots, c_n)$.

از طرف دیگر اگر $\mathcal{C} \models \exists x \psi(x, c_1, \ldots, c_n)$ آنگاه $c \in \mathcal{C}$ موجود است به طوری که $\mathcal{C} \models \psi(c, c_1, \ldots, c_n)$. بنا به فرض استقراء، برای فرمولِ ψ داریم $T \vdash \psi(c, c_1, \ldots, c_n)$. بنابراین، بنا به اصل سور وجودی، $T \vdash \exists x \psi(x, c_1, \ldots, c_n)$.

۳.۱ تمرین

تعریف ۸. تئوری T را یک تئوری ماکزیمال سازگار می‌نامیم هرگاه $T \nvdash \bot$ و برای هر جملهٔ φ اگر $T \cup \{\varphi\} \nvdash \bot$ آنگاه $\varphi \in T$.

تمرین ۱. نشان دهید که هر تئوری ماکزیمال سازگار، کامل است. نشان دهید که در واقع برای هر جملهٔ φ داریم $\varphi \in T$ یا $\neg\varphi \in T$.

تمرین ۲. فرض کنید T یک تئوری سازگار ماکزیمال باشد. نشان دهید که $T \vdash \varphi$ اگر و تنهااگر $\varphi \in T$.

تمرین ۳. فرض کنید T ماکزیمال سازگار باشد. اگر $\varphi_1 \in T$ و $\varphi_2 \in T$ نشان دهید که آنگاه $(\varphi_1 \wedge \varphi_2) \in T$.

تمرین ۴. فرض کنید T یک تئوری ماکزیمال سازگار باشد. اگر $(\varphi_1 \wedge \varphi_2) \in T$ نشان دهید که آنگاه $\varphi_1 \in T$ و $\varphi_2 \in T$.

تمرین ۵. فرض کنید T یک تئوری ماکزیمال باشد به طوری که $T \nvdash \bot$. اگر $(\varphi_1 \vee \varphi_2) \in T$ نشان دهید که آنگاه $\varphi_1 \in T$ یا $\varphi_2 \in T$.

در فصل گذشته، ثابت کردیم که یک تئوری که تناقض از آن استنتاج نشود دارای مدل است. همان طور که گفته بودیم، از این قضیه، نتیجه می‌شود که برای فرمولهای همواره درست، اثبات وجود دارد. بدون هیچ توضیحی، خودِ صورت قضیه، به اندازهٔ کافی در سطوحِ ریاضی و فلسفی شگفتی‌زاست: در منطق ریاضی، «اثبات می‌شود» که برای جملات همواره درست، «اثبات وجود دارد». با این حال در این فصل به برخی شگفتی‌هایی خواهیم پرداخت که زاییدهٔ کاربرد ریاضی این قضیه هستند. مطالعهٔ این نوع شگفتی‌ها، موضوع اصلی شاخه‌ای از منطق ریاضی به نام «نظریهٔ مدلها» است.

۴.۱ تصمیم‌پذیری، نگاهی اجمالی

بحث را با یک لم ساده شروع کنیم:

لم ۹. فرض کنید T یک تئوری و φ یک جمله باشند. در این صورت $T \models \varphi$ اگروتنهااگر $T \vdash \varphi$.

اثبات. $T \models \varphi$ اگر و تنهااگر $T \cup \{\neg\varphi\} \models \bot$ اگر و تنهااگر $T \cup \{\neg\varphi\}$ مدلی نداشته باشد، اگر و تنهااگر $T \cup \{\neg\varphi\} \vdash \bot$ اگر و تنهااگر $T \vdash \varphi$. □

بنا به لم بالا، از این پس در این کتاب، دو مفهوم استلزام ($\models$) و استنتاج ($\vdash$) گاهی به جای یکدیگر به کار خواهند رفت. تمرین زیر یک نتیجه جالب از این یکسان‌بینی است: (تمرین ؟؟ را ببینید).

تمرین ۶. فرض کنید، $\varphi \vdash T$ نتیجه بدهد که $\psi \vdash T$. نشان دهید که در این صورت نتیجه نمی‌توان گرفت که $(\varphi \to \psi) \vdash T$. به بیان دیگر، اگر از اثبات‌پذیر بودنِ φ اثبات‌پذیر بودنِ ψ نتیجه شود، آنگاه لزومی ندارد که اثباتی برای $(\varphi \to \psi)$ وجود داشته باشد.

در عین حال که دو مفهوم استنتاج و استلزام با هم معادل هستند، مفهوم استنتاج چندین سودمندی دارد که دربارهٔ آن سخن خواهیم گفت. قوانین استنتاج (در دستگاه هیلبرت) محدود هستند و می‌توان آنها را به یک الگوریتم سپرد. در واقع یک الگوریتم می‌تواند به جای ما استنتاج، و نتایج یک تئوری را چاپ کند. برای استنتاج کردن یک جملهٔ φ تنها نیازمند به استفاده از قواعد هستیم و استنتاج یک فرایند «ماشینی» است. هرچند ارائهٔ تعریف دقیق «الگوریتم» را به بخش‌های بعدی کتاب موکول کرده‌ایم، در زیر توضیحی دربارهٔ الگوریتمیک بودن تئوری‌ها داده‌ایم که انتظار داریم فهم آن مستقل از درک دقیق معنی الگوریتم باشد.

فرض کنید A یک زیرمجموعهٔ دلخواه از اعداد طبیعی باشد. می‌گوییم A یک مجموعهٔ بازگشتی (یا یک مجموعهٔ محاسبه‌پذیر، یا یک مجموعهٔ تصمیم‌پذیر) است، هرگاه یک الگوریتم وجود داشته باشد، که وقتی یک عدد طبیعی n را به آن می‌دهیم، دقیقاً مشخص کند که $n \in A$ یا $n \notin A$. در این حالت، وقتی یک عدد n به الگوریتم مورد نظر ما داده می‌شود، مطمئناً الگوریتم متوقف می‌شود و تکلیف تعلقِ n به A را برای ما روشن می‌کند. اما مجموعهٔ A زیرمجموعهٔ $\mathbb{N}$ را «به طور بازگشتی شمارش‌پذیر» یا «به طور محاسبه‌پذیر شمارش‌پذیر» می‌نامیم هرگاه الگوریتمی وجود داشته باشد که وقتی $n \in \mathbb{N}$ را به آن می‌دهیم، در صورتی که $n \in A$، متوقف شود و به ما اعلام کند که $n \in A$. در واقع در این حالت، وقتی به الگوریتم یک عدد n را می‌دهیم، تنها در صورتی که n متعلق به A باشد، الگوریتم متوقف می‌شود. مشکل این جاست که وقتی n را به الگوریتم خود می‌دهیم، فقط می‌دانیم که اگر خوش‌شانس باشیم و n در A باشد الگوریتم این را به ما خواهد گفت، اما نمی‌دانیم که چقدر باید صبر کنیم! ممکن است n در A نباشد و ما انتظار بیهوده بکشیم! بنا به یک تعریف معادل، یک مجموعهٔ A به طور بازگشتی شمارش‌پذیر است هرگاه الگوریتمی وجود داشته باشد که اعضای A را چاپ کند.

تمرین ۷. نشان دهید که مجموعهٔ A به طور بازگشتی شمارش‌پذیر است اگر و تنهااگر الگوریتمی وجود داشته باشد که همهٔ اعضای A را چاپ کند.

تمرین ۸. نشان دهید که A بازگشتی است اگر و تنهااگر A و A^c هر دو به طور بازگشتی شمارش‌پذیر باشند.

مفهوم تصمیم‌پذیری را می‌توان به تئوری‌های مرتبهٔ اول نیز تعمیم داد. یک تئوریِ T را تصمیم‌پذیر می‌نامیم هرگاه مجموعهٔ $\{\varphi : T \vdash \varphi\}$ یک مجموعهٔ تصمیم‌پذیر باشد. به بیان دیگر، زمانی یک تئوری T تصمیم‌پذیر است که یک الگوریتم موجود باشد که یک جملهٔ φ را به عنوان ورودی دریافت کند و دقیقاً مشخص کند که آیا تئوری مورد نظر، مستلزم φ هست یا نه؛ به بیان دیگر الگوریتم یادشده، یک جملهٔ φ را می‌گیرد و مشخص می‌کند که آیا $T \vdash \varphi$ یا $T \nvdash \varphi$ (لازم به یادآوری است که $T \nvdash \varphi$ به معنیِ $T \vdash \neg\varphi$ نیست. بنابراین ادعا نکرده‌ایم که یک تئوری تصمیم‌پذیر، کامل است). مشابهاً یک تئوری T را به طور بازگشتی شمارش‌پذیر می‌نامیم هرگاه الگوریتمی وجود داشته باشد که جملات T را چاپ کند. به طور معادل هرگاه الگوریتمی وجود داشته باشد که اعضای مجموعهٔ $\{\varphi : T \vdash \varphi\}$ را چاپ کند. بنابراین زمانی که یک تئوری، به طور بازگشتی

شمارش‌پذیر است، اگر بدانیم که یک جملهٔ φ از تئوری مورد نظر نتیجه می‌شود، مطمئناً آن جمله چاپ خواهد شد. قضیهٔ زیر یک محک مناسب برای بررسی تصمیم‌پذیری تئوری‌هاست:

قضیه ۱۰. فرض کنید T یک تئوریِ به طور بازگشتی شمارش‌پذیر باشد. در این صورت اگر T کامل باشد، آنگاه T تصمیم‌پذیر است.

اثبات. فرض کنید M الگوریتمی باشد که تئوری T را چاپ می‌کند. در این صورت با ترکیب این الگوریتم، با الگوریتمی که قوانین استنتاج را می‌داند، به الگوریتمی، مثلاً به نام N می‌رسیم که تمامی نتایج T را چاپ می‌کند. اما هر جملهٔ φ یا خودش و یا نقیضش جزو نتایج T است. پس مطمئناً برای جملهٔ φ بالاخره یا خودِ φ یا نقیض آن چاپ خواهد شد. پس می‌توان الگوریتمی داشت که جملهٔ φ را بگیرد، اگر φ در خروجی الگوریتم N این جمله چاپ شود، خروجی yes و اگر در خروجی N جملهٔ $\neg\varphi$ چاپ شود، خروجی no بدهد. □

ترکیب مطالب این بخش با مطالب بخش ؟؟ ما را به نتایج جالبی می‌رساند. در بخشِ ؟؟ اصول موضوعهٔ پئانو، $Peano$، را برای ساختارِ $(\mathbb{N}, +, \cdot)$ معرفی کردیم. اصول موضوعهٔ پئانو قابل چاپ توسط یک الگوریتم هستند؛ در واقع اگر روشی برای کد کردن فرمولهای مرتبهٔ اول داشته باشیم، تعداد متناهی جمله و یک شمای اصل استقرایی داریم که قابل چاپ توسط الگوریتم هستند. بنابراین اگر $Peano$ کامل باشد، بنا به قضیهٔ ۱۰ تصمیم‌پذیر است.

از طرفی بنا بر آن‌چه در بخشِ ؟؟ گفتیم، اگر $Peano$ کامل باشد، آنگاه مجموعهٔ $\{\varphi : Peano \vdash \varphi\}$ برابر با مجموعهٔ $\{\varphi : \mathbb{N} \models \varphi\}$ است. پس اگر $Peano$ کامل باشد، الگوریتمی وجود دارد که یک جملهٔ φ را دریافت کند، و به ما بگوید که آیا آن جمله در ساختار $(\mathbb{N}, +, \cdot)$ برقرار است یا خیر. با این توضیحات، دوباره صورت قضیهٔ ناتمامیت گودل را بیان می‌کنیم و البته هنوز هم اثبات آن را به عقب‌تر در این کتاب موکول کرده‌ایم:

قضیه ۱۱ (ناتمامیت اول گودل)**.** پئانو تصمیم‌پذیر نیست، در نتیجه کامل نیست.

خلاصهٔ فصل. در این فصل اثبات کردیم که اگر T یک تئوری باشد به طوری که $T \nvdash \bot$ آنگاه T دارای مدل است. روش اثبات به این صورت است که ابتدا T را با افزودن جملاتی مناسب، تبدیل به یک تئوری می‌کنیم که برای هر فرمول وجودی شاهد دارد. سپس همهٔ جملاتی را که با تئوری به دست آمده سازگاری دارند (یعنی با آن تناقض نمی‌دهند) به آن می‌افزاییم. سپس مجموعهٔ «شاهد» ها را تبدیل به یک L ساختار می‌کنیم که مدلی برای تئوری مد نظر ماست. این مدل، به‌گونه‌ای است که در آن، تنها اتفاقاتی رخ می‌دهد که تئوری کامل‌شدهٔ شاهددار ما اجازه می‌دهد. مثلاً عناصر $c_1, \ldots, c_n$ زمانی با هم در رابطهٔ R هستند که جمله‌ی $R(c_1, \ldots, c_n)$ در تئوری باشد.

از این که هر تئوری T که تناقض نمی‌دهد دارای مدل است، نتیجه می‌شود که اگر φ یک جملهٔ همواره درست باشد، اثباتی برای آن وجود دارد. برای اثبات این، کافی است که تئوری $T = \{\varphi\}$ را در نظر بگیریم. بنابراین قضیهٔ درستی و تمامیت به صورت زیر نتیجه می‌شود:

$$\models \varphi \text{ اگر و تنها اگر } \vdash \varphi$$

فقط جملاتی همواره درست هستند که اثباتی برای آنها وجود دارد.