منطق ریاضی

محسن خانی
دانشگاه صنعتی اصفهان

۲۶ مهر ۱۴۰۵

فصل ۱

استنتاج

تعریفِ ؟؟ را به خاطر بیاورید: یک جملهٔ φ را همواره درست می‌نامیم هرگاه $\varnothing \models \varphi$. همچنین در بخشهای گذشته با عبارتِ $T \models \varphi$ آشنا شدیم که خوانده می‌شود: تئوریِ T مستلزمِ φ است. در این بخش با دو نمادِ $\vdash \varphi$ و $T \vdash$ آشنا خواهیم شد، که به ترتیب به صورت زیر خوانده می‌شوند:

برای گزارهٔ φ اثباتی وجود دارد.

برای گزارهٔ φ اثباتی با استفاده از اصول تئوری T وجود دارد.

برای معرفیِ عبارت $\vdash \varphi$ نیازمند کاوشی بیشتر دربارهٔ عبارتِ $\models \varphi$ هستیم. پیش از آن این هشدار را می‌دهیم که صحبت دربارهٔ $\vdash$ به آسانی صحبت دربارهٔ $\models$ نیست، دقیقاً همان‌گونه که صحبت دربارهٔ قواعد دستوری، به راحتی و احتمالاً شیرینی صحبت دربارهٔ معنا نیست. در همین جا، اشاره می‌کنیم که $T \vdash \varphi$، نمادی مربوط به «قسمت ماشینیِ منطق» است.

دقت کنید که وقتی φ جمله‌ای در زبانِ L است، و می‌نویسیم $\models \varphi$ منظورمان این است که همهٔ Lساختارها مدلی برای φ هستند. اما در این صورت همهٔ L' ساختارها، برای $L' \supseteq L$ نیز مدلی برای φ هستند. پس علت این که در نمادِ $\models \varphi$ زبانِ L لحاظ نشده است، این است که $\models \varphi$ یعنی هر ساختاری که عملگرهای کافی برای تعبیر جملهٔ φ داشته باشد، در آن φ درست است.

تمرین ۱. فرض کنید L یک زبانِ مرتبهٔ اول باشد و $L' = L \cup \{c\}$ یک زبان باشد که یک نماد ثابت، افزون بر تمام نمادهای موجود در L دارد. همچنین فرض کنید $\varphi(x)$ یک فرمول مرتبهٔ اول باشد. در این صورت موارد زیر با هم معادل هستند:

۱. $\models \varphi(c)$،

۲. $\models \forall x \quad \varphi(x)$،

۳. برای هر Lساختار $\mathcal{M}$ و هر نگاشت مقداردهیِ β به متغیرها داریم $\mathcal{M} \models \varphi[\beta]$.

تمرینِ بالا را به راحتی می‌توان به صورت زیر تعمیم داد:

لم ۱. فرض کنید $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ یک L فرمول باشد و $L' = L \cup \{c_1, \ldots, c_n\}$. در این صورت موارد زیر با هم معادل هستند:

۱. $\models \varphi(c_1, \ldots, c_n)$

۲. $\models \forall x_1, \ldots, x_n \quad \varphi(x_1, \ldots, x_n)$

۳. برای هر Lساختار $\mathcal{M}$ و هر نگاشت مقداردهیِ β به متغیرها داریم $\mathcal{M} \models \varphi[\beta]$.

تعریف ۲. فرض کنید $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ یک فرمول مرتبهٔ اول باشد. در این صورت تعریف می‌کنیم $\models \varphi(x_1, \ldots, x_n)$ هرگاه $\models \varphi(c_1, \ldots, c_n)$ که در آن $c_1, \ldots, c_n$ ثوابتی خارج از زبانِ L هستند.

بنا به تعریف بالا، و آنچه پیش از تعریف گفتیم، اگر φ یک فرمول مرتبهٔ اول باشد، می‌نویسیم $\models \varphi$ هرگاه برای هر Lساختار $\mathcal{M}$ و با هر نگاشت مقداردهی β در M داشته باشیم $\mathcal{M} \models \varphi[\beta]$.

۱.۱ اصول موضوعه و قواعد

در ادامهٔ بخش، عبارتهای به صورت $\models \varphi$ را **اصل موضوعه**، و عبارتهای به صورت

$$\models \psi \text{ آنگاه } \models \varphi \text{ اگر}$$

را **قاعده** نامیده‌ایم. به منظور استفاده بعدی، چند اصل موضوعه و قاعده خاص را در زیر معرفی کرده‌ایم.

۲.۱ اصول موضوعه

۱.۲.۱ تاتولوژی‌های منطق مرتبهٔ اول

یک مثال مهم از فرمولهای همواره درست «تاتولوژی» ها هستند که در ادامه آنها را معرفی کرده‌ایم.

برای تعریف تاتولوژی‌ها، به منطقی ساده‌تر از منطق مرتبهٔ اول، یعنی «منطق گزاره‌ها» نیازمندیم. عموماً دانشجویان ریاضی در درس مبانی ریاضی با این منطق آشنا می‌شوند و این منطق به اندازهٔ کافی برای دانشگاهیان آشناست. از این رو توضیحی که ما در اینجا دربارهٔ منطق گزاره‌ها ارائه کرده‌ایم، مختصر و تنها از نوع یادآوری است. خوانندهٔ علاقه‌مند می‌تواند منابع [؟] و [؟] را برای آشنایی با منطق گزاره‌ها مطالعه کند. [۱]

در یک منطق گزاره‌ها، یک مجموعه از گزاره‌های اتمی به صورت $\{p, q, \ldots\}$ به عنوان الفبا در نظر گرفته می‌شود و هر فرمولی در این منطق به صورت یک $f(p_1, \ldots, p_n)$ است. در ساخت $f(p_1, \ldots, p_n)$ از علائم $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \top, \bot$ استفاده می‌شود، هر کدام از این علائم با استفاده از یک جدول ارزش تعریف می‌شوند و نهایتاً می‌توان برای $f(p_1, \ldots, p_n)$ یک جدول ارزش بر اساس ارزش گزاره‌های اتمی به کار رفته در آن کشید. برخی از گزاره‌های به صورت $f(p_1, \ldots, p_n)$ به ازای هر ارزشی (غلط یا درست)که اتمهای $p_1, \ldots, p_n$ داشته باشند، ارزش درست دارند؛ برای مثال گزارهٔ $(p \vee \neg p)$ چنین است. به چنین گزاره‌هایی، تاتولوژی‌های منطق گزاره‌ها گفته می‌شود.

مجموعهٔ فرمولهای یک منطق گزاره‌ها به همراه اعمال $\neg, \vee, \wedge, \top, \bot$ تشکیل یک جبر بولی می‌دهند و قضیهٔ مهم زیر، که اثباتش را در این‌جا نمی‌آوریم، تکلیف فرمولهای تاتولوژی را معلوم می‌کند:

قضیه ۳. یک گزارهٔ $f(p_1, \ldots, p_n)$ در منطق گزاره‌ها، تاتولوژی است اگروتنهااگر با متناهی بار اعمال قوانین جبربولی به دست آید.

مثال ۴. فرمولهای زیر در منطق گزاره‌ها تاتولوژی هستند:

۱. $(p \vee \neg p)$

۲. $((p \wedge (p \rightarrow q)) \rightarrow q)$

۳. $\Big(((p \wedge q) \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow (q \rightarrow r))\Big)$

تمرین ۲. با کشیدن جدول ارزش، تحقیق کنید که فرمولهای مثال بالا، تاتولوژی هستند.

حال آمادهٔ تعریف «تاتولوژی» های منطق مرتبهٔ اول هستیم.

تعریف ۵. فرض کنید $f(p_1, \ldots, p_n)$ یک تاتولوژی در منطق گزاره‌ها باشد. اتمهای $p_1, \ldots, p_n$ را به ترتیب با فرمولهای مرتبهٔ اولِ $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ جایگزین کنید. به فرمولِ حاصل یک تاتولوژی در منطق مرتبهٔ اول گفته می‌شود.

پس به عنوان مثال، فرمولهای $(\varphi \vee \neg\varphi)$ و $((\varphi \wedge (\varphi \rightarrow \psi)) \rightarrow \psi)$ تاتولوژی‌هایی در منطق مرتبهٔ اول هستند. در قضیهٔ زیر گفته‌ایم که تاتولوژی‌های منطق مرتبهٔ اول، مصداقی از فرمولهای همواره درست هستند.

قضیه ۶. فرض کنید جملهٔ φ یک تاتولوژی در منطق مرتبهٔ اول باشد. در این صورت داریم $\models \varphi$.

[۱] همچنین جزوهٔ مبانی ریاضی به نشانی زیر:
https://mohsen-khani.github.io/mabani-riyazi/jozve/mabanikol.pdf

اثبات. فرض کنید φ به صورت $f(\psi_1,\dots,\psi_n)$ باشد که در آن $f(p_1,\dots,p_n)$ یک تاتولوژی در منطق گزاره‌هاست. نیز فرض کنید که $\mathcal{M}$ یک Lساختار دلخواه باشد. در این صورت برای هر کدام از ψ_i ها یکی از موارد $\mathcal{M}\models\psi_i$ یا $\mathcal{M}\models\neg\psi_i$ رخ می‌دهد. ولی در هر صورت خواهیم داشت $\mathcal{M}\models f(\psi_1,\dots,\psi_n)$ زیرا صدق فرمولها در Lساختارها با قوانین مشابه قوانین منطق گزاره‌ها تعریف شده است.

به عنوان توضیح بیشتر، دقت کنید که $f(p_1,\dots,p_n)$ صرف نظر از هر ارزشی که p_i داشته باشند، همواره ارزش ۱ دارد. حال یک ارزش‌دهی به p_i ها به صورت پیش رو در نظر بگیرید: ارزش p_i را یک بگیرید اگر $\mathcal{M}\models\psi_i$ و صفر بگیرید اگر $\mathcal{M}\models\neg\psi_i$. حال داریم $\mathcal{M}\models f(\psi_1,\dots,\psi_n)$ اگروتنهااگر $f(p_1,\dots,p_n)$ با ارزش‌دهی معرفی شده دارای ارزش یک باشد. □

۲.۲.۱ اصل سور عمومی

فرض کنید x یک متغیر و s یک ترم باشد. در این صورت می‌توان در ترمها و فرمولها، متغیر آزادِ x را با ترمِ s جایگزین کرد. وقتی در یک ترمِ t متغیرِ x را با ترمِ s جایگزین می‌کنیم، ترم حاصل را با $t\frac{s}{x}$ نشان می‌دهیم. همچنین اگر φ یک فرمول باشد، فرمولی را که با جای‌گذاری متغیر «آزادِ» x با ترم s به دست آید، با $\varphi\frac{s}{x}$ نشان می‌دهیم.

مثال ۷. در زبانِ $L=\{f,g\}$ که در آن f,g نمادهای تابعی به ترتیب دو و تک موضعی هستند، ترمهای $s=f(g(x),g(y))$ و $t=g(f(x,y))$ را در نظر بگیرید. داریم $t\frac{s}{x}=g(f(f(g(x),g(y)),y))$ و $t\frac{s}{y}=g(f(x,f(g(x),g(y))))$. همچنین فرمول $\varphi:\exists yf(x,y)=z$ در نظر بگیرید. داریم $\varphi\frac{s}{x}=\exists yf(f(g(x),g(y)),y)=z$ و $\varphi\frac{s}{y}=\exists yf(x,y)=z$.

نیاز است که تعاریف را به صورت دقیق بیان کنیم.

تعریف ۸. برای ترم‌های t و s، و متغیرِ x ترمِ جدید $t\frac{s}{x}$ را با استقراء روی ساختِ t به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

۱. اگر ترم t همان متغیر x باشد، تعریف می‌کنیم: $t\frac{s}{x}=s$.

۲. اگر ترمِ t متغیری غیر از x، یا یک ثابت باشد، تعریف می‌کنیم: $t\frac{s}{x}=t$.

۳. فرض کنید ترم t به صورت $f(t_1,\dots,t_n)$ باشد. در این صورت $t\frac{s}{x}=f(t_1\frac{s}{x},\dots,t_n\frac{s}{x})$.

فرض کنید $g(x),f(x)$ دو تابع روی یک مجموعهٔ M باشند. در این صورت برای محاسبهٔ $f(g(a))$ دو روش وجود دارد:
روش اول: ابتدا تابعِ ترکیبیِ $f\circ g(x)$ را به دست بیاوریم و سپس به جای x مقدار a را قرار دهیم.
روش دوم: ابتدا $g(a)$ را حساب کنیم و سپس مقدار $g(a)$ را در f قرار دهیم.
مشابهاً فرض کنید $t(x)$ و $s(x,y)$ دو Lترم باشند و β یک نگاشت مقداردهی به متغیرها در ساختارِ $\mathcal{M}$ باشد به طوری که $\beta(x)=a$ و $\beta(y)=b$. مقدارِ $t\frac{s}{x}[\beta]$ را به دو طریق می‌توان حساب کرد:

۱. روش اول: ترم ترکیبیِ $t\frac{s}{x}$ را در ساختارِ $\mathcal{M}$ تعبیر کنیم و سپس به جای متغیرهایش مقادیر مشخص شده توسط β را قرار دهیم؛ به بیان دیگر $t\frac{s}{x}^{\mathcal{M}}[\beta]$ را محاسبه کنیم.

۲. روش دوم: مقدار $t^{\mathcal{M}}(s^{\mathcal{M}}[\beta])$ را محاسبه کنیم.

دو روش بالا در واقع، بیانی برای برابری $t\circ s(a,b)=t(s(a,b))$ هستند. همین گفته را در زیر، به دقیق‌ترین صورت بیان کرده‌ایم:

قضیه ۹. فرض کنید x یک متغیر و s یک ترم و β یک نگاشت مقداردهی در ساختارِ $\mathcal{M}$ باشند. در این صورت

$$t\frac{s}{x}^{\mathcal{M}}[\beta]=t^{\mathcal{M}}[\beta\frac{s^{\mathcal{M}}[\beta]}{x}.]$$

اثبات. تمرین (با استقراء روی ساخت ترمها). □

در بالا گفتیم که وقتی در یک فرمولِ φ یک متغیر آزادِ x را با ترمِ s جایگزین می‌کنیم، فرمول حاصل را با $\varphi\frac{s}{x}$ نشان می‌دهیم. در تعریف استقرایی $\varphi\frac{s}{x}$ دقت کنید که وقتی فرمولِ φ به صورت $\exists x\psi$ است و معنای $\psi\frac{s}{x}$ را می‌دانیم، در این صورت $\varphi\frac{s}{x}$ همان φ است. اما وقتی فرمول φ به صورت $\exists y\psi$ است و y متغیری غیر از x است، داریم $\varphi\frac{s}{x}=\exists y\psi\frac{s}{x}$.

تعریف ۱۰. فرض کنید که φ یک فرمول، x یک متغیر و s یک ترم باشند. فرمولِ $\varphi\frac{s}{x}$ به صورت استقرائی زیر تعریف می‌شود:

۱. اگر فرمول φ به صورت $t_1 \doteq t_2$ باشد، $\varphi\frac{s}{x}$ را به صورت $t_1\frac{s}{x} \doteq t_2\frac{s}{x}$ تعریف می‌کنیم.

۲. اگر فرمول φ به صورت $R(t_1,\ldots,t_n)$ باشد، تعریف می‌کنیم: $\varphi\frac{s}{x} = R(t_1\frac{s}{x},\ldots,t_n\frac{s}{x})$.

۳. اگر فرمول φ به صورت $(\varphi_1 \wedge \varphi_2)$ باشد تعریف می‌کنیم: $\varphi\frac{s}{x} = (\varphi_1\frac{s}{x} \wedge \varphi_2\frac{s}{x})$.

۴. اگر فرمول φ به صورت $\neg\psi$ باشد تعریف می‌کنیم: $\varphi\frac{s}{x} = \neg\psi\frac{s}{x}$.

۵. اگر فرمول φ به صورت $\exists x\psi$ باشد، تعریف می‌کنیم: $\varphi\frac{s}{x} = \exists x\psi$.

۶. اگر فرمول φ به صورت $\exists y\psi$ باشد، تعریف می‌کنیم: $\varphi\frac{s}{x} = \exists y\psi\frac{s}{x}$.

مثال ۱۱. در زبانِ $L = \{f,g\}$ که در آن f,g نمادهای تابعی به ترتیب دو و تک موضعی هستند، ترم $s = f(g(x),g(y))$ را در نظر بگیرید. همچنین فرمول $\exists y f(x,y) = z$ در نظر بگیرید. داریم $\varphi\frac{s}{y} = \exists y f(x,y) = z$ و $\varphi\frac{s}{x} = \exists y f(f(g(x),g(y)),y) = z$.

گاهی جایگزینی ترمها به جای متغیرها در یک فرمول، موجب ایجاد یک تداخل با سورهای فرمول می‌شود. برای مثال فرمولِ $\varphi(x) = \exists y \quad y^2 \doteq x$ را در زبان $L = \{+,\cdot\}$ در نظر بگیرید. وقتی در این فرمول، متغیر x را با ترم $s = x^2 + y$ جایگزین می‌کنیم، داریم

$$\varphi\frac{s}{x} = \exists y \quad y^2 = x^2 + y.$$

یعنی متغیر x که در فرمول، حضور آزاد دارد، با یک ترم جایگزین شده است که متغیرهایش تحت تأثیر سورهای فرمول اولیه قرار دارد.

تمرین ۳. در زبانِ $L = \{+,\cdot\}$ فرمولِ $\varphi(x,y) = \exists z x + y = z$ را به همراه ترمهای $s_1 = x^2 + y^2 + z^2$ و $s_2 = x^2 + y^2$ را در نظر بگیرید. فرمولهای $\varphi\frac{s_1}{x}$ و $\varphi\frac{s_2}{x}$ را بنویسید. همچنین ترم $x + 2y\frac{s_2}{y}$ را بنویسید.

فرض کنید s یک ترم، φ یک فرمول و x یک متغیر باشند. می‌گوییم متغیر x برای ترمِ s در فرمول φ آزاد است، هرگاه وقتی به جای متغیر x در فرمول φ، ترم s را قرار می‌دهیم، در فرمول حاصل متغیر x پای‌بند نشود. این حالت زمانی اتفاق می‌افتد که یا متغیر x در فرمول φ آزاد نباشد، که در این صورت جایگزین کردن آن با s معنایی ندارد؛ یا این که متغیر x آزاد باشد ولی فرمول φ هیچ سوری نداشته باشد که وقتی s را به جای x قرار می‌دهیم، متغیری در s درگیر آن سور شود. به بیان دیگر، متغیرِ آزادِ x زمانی برای ترم s در φ آزاد است که سورهای φ روی متغیرهایی غیر از متغیرهای استفاده شده در s باشند. در زیر، تعریف را دقیق کرده‌ایم:

تعریف ۱۲. می‌گوییم متغیر x در ترم s برای فرمول φ آزاد است هرگاه متغیر x در فرمول φ پای‌بند باشد، یا

۱. فرمول φ به صورت $t_1 \doteq t_2$ باشد

۲. فرمول φ به صورت $R(t_1,\ldots,t_n)$ باشد.

۳. فرمولِ φ به صورت $\neg\psi$ باشد و متغیر x برای s در ψ آزاد باشد.

۴. فرمول φ به صورت $(\psi_1 \wedge \psi_2)$ باشد و متغیر x برای s هم در ψ_1 و هم در ψ_2 آزاد باشد.

۵. فرمول φ به صورت $\exists y\psi$ باشد، x در ψ برای s آزاد باشد، و y جزو متغیرهای به کار رفته در s نباشد.

بنابراین اگر $\varphi(x)$ فرمول $\exists y \quad x + y \doteq 0$ و s ترم $x^2 + y^2$ باشد، متغیر x برای ترم s در فرمول $\varphi(x)$ آزاد نیست؛ زیرا در صورت جایگذاری x توسط $x^2 + y^2$ به فرمول $\varphi(s(x,y)) = \exists y \quad (x^2 + y^2) + y = 0$ می‌رسیم و سور $\exists y$ متغیری از متغیرهای موجود در s را درگیر می‌کند.

اما بیایید به متغیر x مقدارِ ۱ و به متغیر y مقدارِ ۲ بدهیم. می‌خواهیم بدانیم که آیا برقراری فرمولِ $\varphi(s(x,y))$ در $x = 1, y = 2$ به معنی برقراری فرمول $\varphi(x)$ در $x = s(1,2)$ است؟ کمی دقت نشان می‌دهد که اولی، یعنی $\exists y 1 + y^2 + y = 0$ اما دومی یعنی $\exists y \quad 2 + y = 0$ و اینها دو فرمول متفاوت هستند.

قضیه ۱۳ (جایگذاری). فرض کنید $\mathcal{M}$ یک Lساختار، s یک Lترم و β یک نگاشت مقداردهی به متغیرها در ساختار $\mathcal{M}$ باشند. همچنین فرض کنید که متغیر x برای ترم s در فرمول φ آزاد باشد. در این صورت $\mathcal{M} \models \varphi\frac{s}{x}[\beta]$ اگروتنهااگر $\mathcal{M} \models \varphi[\beta\frac{s^{\mathcal{M}}[\beta]}{x}]$

اثبات. فرض کنید فرمولِ φ به صورت $t_1 \doteq t_2$ باشد. در این صورت $\varphi\frac{s}{x}$، فرمولِ $t_1\frac{s}{x} \doteq t_2\frac{s}{x}$ است. پس $\mathcal{M} \models \varphi\frac{s}{x}[\beta]$ معادل با $t_1^{\mathcal{M}}\frac{s}{x}[\beta] = t_2^{\mathcal{M}}\frac{s}{x}[\beta]$، است و این بنا به لم قبل معادل است با: $t_1^{\mathcal{M}}[\beta\frac{s^{\mathcal{M}}[\beta]}{x}] = t_2^{\mathcal{M}}[\beta\frac{s^{\mathcal{M}}[\beta]}{x}]$. اما عبارت آخر به معنی $\mathcal{M} \models \varphi[\beta\frac{s^{\mathcal{M}}[\beta]}{x}]$ است.

اثبات استقرایی قضیه برای حالات مختلف فرمول φ را به عنوان تمرین رها می‌کنیم و در ادامه تنها حالتی را بررسی می‌کنیم که φ به صورت $\exists y\psi$ است و در آن متغیر x برای s در فرمول ψ آزاد است. داریم

$$\begin{aligned}
&\mathcal{M} \models \exists y\psi\frac{s}{x}[\beta] \Leftrightarrow \psi\frac{s}{x}[\beta\frac{a}{y}] \quad \text{برای یک عنصر } a\\
&\Leftrightarrow \mathcal{M} \models \psi[\beta\frac{a}{y}\frac{s^{\mathcal{M}}[\beta\frac{a}{y}]}{x}] \quad \text{طبق فرض استقراء}\\
&\Leftrightarrow \mathcal{M} \models \exists y\psi[\beta\frac{s^{\mathcal{M}}[\beta\frac{a}{y}]}{x}] \quad \text{طبق تعریف}\\
&\Leftrightarrow \mathcal{M} \models \exists y\psi[\beta\frac{s^{\mathcal{M}}[\beta]}{x}].
\end{aligned}$$

خط آخر بدین صورت توجیه می‌شود: چون y در s به کار نرفته است، داریم $s^{\mathcal{M}}[\beta] = s^{\mathcal{M}}[\beta\frac{a}{y}]$.

□

قضیه ۱۴ (اصل سور وجودی). فرض کنید متغیرِ x برای ترمِ t در فرمولِ φ آزاد باشد. در این صورت

$$\models (\varphi\frac{t}{x} \to \exists x\varphi)$$

اثبات. بنا به لم ۱ باید نشان دهیم که در هر Lساختارِ $\mathcal{M}$ و با هر مقداردهیِ β فرمول فوق درست است. اگر $\mathcal{M}$ یک مدلی برای $\varphi\frac{t}{x}[\beta]$ باشد، در این صورت بنا به قضیهٔ ۱۳ $\mathcal{M} \models \varphi[\beta\frac{t^{\mathcal{M}[\beta]}}{x}]$ بنابراین $\mathcal{M} \models \exists x\varphi$. □

لازم به دقت است که شرایط قضیهٔ بالا مهم هستند: فرمول $\forall yx \doteq y$ را در نظر بگیرید. واضح است که وقتی x را توسط y جایگزین می‌کنیم به فرمولِ $\forall y \quad y \doteq y$ می‌رسیم؛ ولی از این فرمول نمی‌توان نتیجه گرفت که $\exists x \quad \forall y \quad x \doteq y$.

تمرین ۴. نشان دهید که $\models (R(x,y) \to \exists xR(x,y))$

تمرین ۵. برای هر y می‌دانیم که $y + y$ زوج است. آیا از این نتیجه می‌شود که x ای وجود دارد به طوری که برای هر y عدد $x + y$ زوج است؟ توضیح دهید که چه اشتباهی صورت گرفته است.

تمرین ۶. نشان دهید که اگر φ یک فرمول بدون سور باشد، آنگاه $\models (\varphi\frac{t}{x} \to \exists x\varphi)$

تمرین ۷. چند مثال دیگر بزنید که در آنها $\varphi\frac{t}{x}$ در یک ساختار و با یک ارزش‌دهی β برقرار باشد و $\exists x\varphi[\beta]$ برقرار نباشد.

تمرین ۸. نشان دهید که

$$\models \forall yR(x,y) \to \exists x\forall yR(x,y).$$

$$\models \exists yR(x,y) \to \exists x\exists yR(x,y).$$

تمرین ۹. فرض کنید x یک متغیر آزاد در فرمولِ φ باشد. نشان دهید که

$$\models \varphi(x) \to \exists x\varphi(x).$$

تمرین ۱۰. نشان دهید که

$$\models \Big((p(y) \wedge q(y)) \to \exists x(p(x) \wedge q(x))\Big).$$

تمرین ۱۱. آیا عبارت زیر درست است؟ مشکل کجاست؟

$$\models \Big(\forall y \quad p(y, y^2 + y) \to \exists x \forall y p(y, x)\Big).$$

تمرین ۱۲. مشابه تمرین بالا، دربارهٔ درستی عبارت زیر بحث کنید:

$$\models \Big(\forall y \quad t(y) < y \to \exists x \forall y \quad x < y\Big)$$

۳.۲.۱ اصول موضوعهٔ تساوی

لم ۱۵. موارد زیر، همه همواره درست هستند. به این موارد، اصول موضوعهٔ تساوی می‌گوییم:

$$\forall x \quad x \doteq x$$

$$\forall x, y \quad (x \doteq y \to y \doteq x)$$

$$\forall x, y, z \quad ((x \doteq y \wedge y \doteq z) \to x \doteq z)$$

$$\forall x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n \quad (x_1 \doteq y_1 \wedge \ldots \wedge x_n = y_n) \to (f(x_1, \ldots, x_n) \doteq f(y_1, \ldots, y_n))$$

$$x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n \quad (x_1 \doteq y_1 \wedge \ldots x_n \doteq y_n) \to (R(x_1, \ldots, x_n) \leftrightarrow R(y_1, \ldots, y_n)).$$

در دو مورد آخر، برای هر نماد تابعی f و هر نماد رابطه‌ای R در زبانِ L یک اصل موضوعه در نظر گرفته می‌شود.

۳.۱ قواعد

همان طور که پیش‌نیز گفتیم، «اصل معرفی سور وجودی» را به این علت «اصل نامیدیم که عبارتی به صورت $\varphi \models$ است. در این بخش، دو «قاعده» معرفی می‌کنیم. هر قاعده صورتی مشابه زیر دارد:

اگر $\varphi \models$ آنگاه $\psi \models$.

قضیه ۱۶ (قیاس استثنایی)**.** اگر $(\varphi \to \psi) \models$ و $\varphi \models$ آنگاه $\psi \models$. [۲]

اثبات. واضح. □

قضیه ۱۷ (قاعدهٔ معرفی سور وجودی)**.** فرض کنید متغیر x در فرمولِ ψ آزاد نباشد. در این صورت اگر $(\varphi \to \psi) \models$ آنگاه $(\exists x \varphi \to \psi) \models$.

اثبات. فرض کنید $\mathcal{M}$ یک Lساختار باشد. با فرض این که $(\varphi \to \psi) \models$ نشان می‌دهیم که برای هر نگاشت مقداردهی دلخواهِ β داریم $\mathcal{M} \models (\exists x \varphi \to \psi)[\beta]$. اگر $\mathcal{M} \models \exists x \varphi[\beta]$ آنگاه عنصری مانند $a \in M$ موجود است به طوری که $\mathcal{M} \models \varphi[\beta \frac{a}{x}]$. از $(\varphi \to \psi) \models$ نتیجه می‌شود که $\mathcal{M} \models \psi[\beta \frac{a}{x}]$. از آنجا که x جزو متغیرهای آزادِ ψ نیست، و بنا به **؟؟** داریم $\mathcal{M} \models \psi[\beta]$. □

تمرین ۱۳. نشان دهید که در قضیهٔ قضیه ۱۷ شرط آزاد نبودنِ x در ψ ضروری است.

۴.۱ تعریف استنتاج

به هر فرمولی که با استفاده از اصول موضوعه و قواعد معرفی شده در این فصل حاصل شود، یک فرمول اثبات‌پذیر می‌گوییم. به بیان دقیق‌تر:

تعریف ۱۸. فرض کنید φ یک Lفرمول باشد. می‌گوییم φ (در دستگاه هیلبرت) اثبات‌پذیر است، و می‌نویسیم $\vdash \varphi$ هرگاه φ:

۱. یکی از اصولِ تساوی، یک تاتولوژی مرتبهٔ اول، یا یک اصل سور وجودی باشد، یا

۲. به کار بردن یکی از قواعد قیاس استثنایی، یا معرفی سور وجودی از فرمولهای اثبات‌پذیر دیگر به دست آمده باشد.

[۲] این قاعده را، قاعدهٔ MP (مخففِ modus ponens) می‌نامیم.

به بیان دیگر، $\varphi \vdash$ زمانی رُخ می‌دهد که یک دنبالهٔ متناهی $\varphi_1 \dots, \varphi_n$ از فرمولها وجود داشته باشد، به طوری که $\varphi_n = \varphi$ و هر φ_i یا یک اصل است و یا با استفاده از یک قاعده از جملات قبلی به درست آمده است. چنین دنباله‌ای را یک استنتاج برای فرمول φ می‌نامیم. طبیعی است که ممکن است استنتاج‌های مختلفی برای یک فرمولِ φ که قابل اثبات است، وجود داشته باشد.

پس استنتاج از قوانین زیر پیروی می‌کند:

۱. اگر φ یک تاتولوژی مرتبهٔ اول باشد، آنگاه $\vdash \varphi$.

۲. اگر φ یکی از اصول تساوی باشد آنگاه $\vdash \varphi$.

۳. اگر x نسبت به ترم t در φ آزاد باشد آنگاه $\vdash \varphi\frac{t}{x} \to \exists x\varphi$

۴. اگر $\vdash \varphi$ و $\vdash (\varphi \to \psi)$ آنگاه $\vdash \psi$.

۵. اگر x در ψ آزاد نباشد آنگاه اگر $\vdash \varphi \to \psi$ آنگاه $\vdash \exists x\varphi \to \psi$.

مثال ۱۹. فرض کنید که $\vdash \varphi_1$، $\vdash \varphi_2$ و $\vdash (\varphi_1 \wedge \varphi_2) \to \psi$. نشان دهید که در این صورت $\vdash \psi$.

اثبات.

(۱.۱)	تاتولوژی	$\vdash (((\varphi_1 \wedge \varphi_2) \to \psi) \to (\varphi_1 \to (\varphi_2 \to \psi)))$
(۲.۱)	بنا به فرض	$\vdash (\varphi_1 \wedge \varphi_2) \to \psi$
(۳.۱)	بنا به ۱.۷ و ۲.۷ و MP	$\vdash (\varphi_1 \to (\varphi_2 \to \psi))$
(۴.۱)	بنا به فرض	$\vdash \varphi_1$
(۵.۱)	بنا به ۳.۷، ۴.۷ و MP	$\vdash (\varphi_2 \to \psi)$
(۶.۱)	بنا به فرض	$\vdash \varphi_2$
(۷.۱)	بنابه ۵.۷، ۶.۷ و MP	$\vdash \psi$

□

مثال ۲۰ (اصل سور عمومی). فرض کنید x در φ نسبت به t آزاد باشد. در این صورت نشان دهید که $\vdash \forall x\varphi \to \varphi\frac{t}{x}$.

اثبات. بنا به اصل سور وجودی داریم: $\vdash \neg\varphi\frac{t}{x} \to \exists x\neg\varphi$ □

مثال ۲۱ (قاعده معرفی سور عمومی). فرض کنید متغیر x در فرمولِ ϕ آزاد نباشد. نشان دهید که اگر $\vdash (\varphi \to \psi)$ آنگاه $\vdash (\varphi \to \forall x\psi)$.

اثبات. داریم $\vdash (\neg\psi \to \neg\phi)$ و x در ϕ آزاد نیست، بنابراین بنا به قاعدهٔ معرفی سور عمومی داریم $\vdash (\exists x\neg\psi \to \phi)$ □

توجه کنید اگر $\vdash \varphi$ آنگاه بوضوح $\models \varphi$. به بیان دیگر اگر استنتاجی برای فرمولِ φ وجود داشته باشد آنگاه φ یک فرمولِ همواره درست است. علتْ این است که تمام قواعد و اصولی که در اثباتِ φ در دستگاه هیلبرت استفاده می‌شوند، از فرمولهای همواره درست در تمامی مدلها به دست آمدند. اما سوال سخت‌تر این است آیا از $\models \varphi$ نتیجه می‌شود که $\vdash \varphi$؟ یعنی آیا اگر فرمول φ در همهٔ Lساختارها و با هر گونه مقداردهی به متغیرها درست باشد، آیا در این صورت لزوماً اثباتی برای φ وجود دارد؟ پاسخ این سوال مثبت است، و البته قضیهٔ تمامیت گودل نام دارد، و البته در فصل بعدی قرار است بدان بپردازیم. پس قضیهٔ تمامیت گودل، به ما خواهد گفت که برای هر جملهٔ همواره درست، اثباتی وجود دارد. دقت کنید که اصول و قواعدی که برای استنتاج معرفی کرده‌ایم بسیار ساده هستند و می‌توان آنها به عنوان دستورالعمل به یک رایانه داد. این رایانه می‌تواند شروع به کار کند و با استفاده از این دستورالعمل‌ها، خروجی بدهد و این خروجی متشکل از همهٔ فرمولهای همواره درست است.

لم ۲۲. فرض کنید $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ یک فرمول در زبانِ L باشد و $c_1, \dots, c_n \notin L$. اگر $\vdash_{L\cup\{c_1,\dots,c_n\}} \varphi(c_1, \dots, c_n)$ آنگاه $\vdash_L \varphi(x_1, \dots, x_n)$.

اثبات. فرض کنید $\varphi_1(c_1,\dots,c_n),\dots\varphi_m(c_1,\dots,c_n)$ اثباتی برای $\varphi(c_1,\dots,c_n)$ باشد. اگر در این تمام این اثبات، به جای c_i ها از x_i استفاده کنیم، به اثباتی برای $\varphi(x_1,\dots,x_n)$ می‌رسیم. □

بنا به لم بالا، می‌توان مفهوم استنتاج را به جای فرمولها، فقط برای جملات در نظر گرفت. یک فرمول، زمانی اثبات می‌شود که جمله‌ای که با جایگزین کردن متغیرهای آزاد توسط ثوابت ایجاد می‌شود، اثبات‌پذیر باشد.

۵.۱ تمرین

تمرین ۱۴. نشان دهید که $\vdash (\forall x R(x,y) \to R(x,y))$.

تمرین ۱۵. نشان دهید که $\vdash (\forall x H(x) \to H(x))$

***تمرین ۱۶.** نشان دهید که اگر $R(x) \vdash$ آنگاه $\vdash R(y)$.
راهنمایی. در استنتاجی که برای $R(x)$ نوشته شده است، x را با y جایگزین کنید.

***تمرین ۱۷.** نشان دهید که اگر $R(x) \vdash$ آنگاه $\vdash \forall x R(x)$.
از موارد زیر استفاده کنید: *تمرین ۱۶، $\vdash (R(x) \to (R(y) \to R(x)))$، اگر $\vdash (R(y) \to R(x))$ آنگاه $\vdash (R(y) \to \forall x R(x))$.

تمرین ۱۸. فرض کنید φ یک فرمول بدون سور باشد، نشان دهید که $\vdash (\forall x \varphi \to \varphi\frac{t}{x})$

تمرین ۱۹. نشان دهید که اگر $\vdash (\forall x H(x) \to R(x))$ آنگاه $\vdash (\forall x H(x) \to \forall x R(x))$.

تمرین ۲۰. نشان دهید که $\vdash (\exists x \forall y R(x,y) \to \forall y \exists x R(x,y))$.
راهنمایی. از تمرین ۱۴ و تمرین ۴ کمک بگیرید.

تمرین ۲۱. نشان دهید که $\vdash \exists x (H(x) \to \forall y H(y))$.

تمرین ۲۲. نشان دهید که اگر $\varphi_1 \vdash$ و $\varphi_2 \vdash$ آنگاه $\vdash (\varphi_1 \wedge \varphi_2)$.
راهنمایی. از تاتولوژی $(p \to (q \to p \wedge q))$ استفاده کنید.