

منطق ریاضی

محسن خانی
دانشگاه صنعتی اصفهان

۱۳ مهر ۱۴۰۵

فصل ۱

تعریف‌پذیری و ایزومرفیسم*

خواننده‌ای که علاقه‌مند است که زودتر به قضایای تمامیت و ناتمامیت گودل برسد، می‌تواند از خواندن این فصل حذر کند؛ وانگهی، مفاهیم معرفی شده در این فصل، جزو مفاهیم بسیار طبیعی در دنیای ریاضیات هستند و خواندن آنها منجر به افزایش بیش عمومی ریاضی می‌شود. اکثر ریاضیدانان از مفهوم تعریف‌پذیری مدام استفاده می‌کنند اما هیچگاه تعریف دقیق آن، به صورتی که در این بخش آمده است را در اختیار ندارند. همچنین کمتر بخشی از ریاضیات هست که در آن درباره ایزومرفیسم صحبت نشود: گروه‌های ایزومرف، میدانهای ایزومرف، حلقه‌های ایزومرف، گرافهای ایزومرف و غیره. آنچه در این فصل درباره ایزومرفیسم خواهیم آموخت تعمیم تعریف همه این ایزومرفیسمهای آشناست. ایزومرفیسم مفهومی طبیعی در جبر است، اما آنچه منطبق اضافه‌تر دارد، مفهومی با تعریف ضعیف‌تر و گاهی با اهمیت بیشتر به نام هم‌ارزی مقدماتی است. در این بخش هر سه مفاهیم یادشده معرفی خواهند شد.

۱.۱ تعریف‌پذیری

فرض کنید $\mathcal{M} = (M, \dots)$ یک $\mathcal{L}$ ساختار باشد. (خواننده می‌داند که آنچه در نمایش این ساختار با $\dots$ نشان داده شده است، توابع، روابط و ثوابتی هستند که در تناظر با نمادهای تابعی، رابطه‌ای و ثوابت زبان $\mathcal{L}$ قرار دارند).

تعریف ۱. فرض کنید X یک زیرمجموعه از M^n باشد و $a_1, \dots, a_m \in M$. همچنین فرض کنید که $\varphi(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m)$ یک $\mathcal{L}$ فرمول باشد. می‌گوییم X توسط فرمول $\varphi(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m)$ و با کمک پارامترهای $a_1, \dots, a_m$ تعریف می‌شود هرگاه

$$X = \{(b_1, \dots, b_n) \in M^n \mid \mathcal{M} \models \varphi(b_1, \dots, b_n, a_1, \dots, a_m)\}.$$

وقتی می‌گوییم مجموعه X با پارامتر قابل تعریف است یعنی یک فرمول φ و تعدادی عنصر $a_1, \dots, a_m$ موجودند که با کمک آنها مجموعه X به صورت بالا تعریف می‌شود.

مثال ۲. ساختار $(\mathbb{N}, +)$ را (در زبانی که علامتی برای جمع دارد) در نظر بگیرید. مجموعه اعداد زوج، به عنوان یک زیرمجموعه از مجموعه اعداد طبیعی در این ساختار، قابل تعریف است. زیرا مجموعه اعداد زوج برابر با مجموعه زیر است:

$$\{x \in \mathbb{N} \mid (\mathbb{N}, +) \models \exists y \quad x = y + y\}.$$

به بیان بهتر، مجموعه اعداد زوج توسط فرمول $\varphi(x) = \exists y + (y, y) \doteq x$ تعریف می‌شود؛ و در این تعریف نیاز به استفاده از هیچ پارامتری نیست.

مثال ۳. ساختار $(\mathbb{C}, +, \cdot, 0, 1)$ را در نظر بگیرید، که در آن $\mathbb{C}$ مجموعه اعداد مختلط است. فرض کنید $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ یک چندجمله‌ای باشد. مجموعه ریشه‌های این چندجمله‌ای در $\mathbb{C}$ یک زیرمجموعه تعریف‌پذیر است:

$$A = \{x \mid (\mathbb{C}, +, \cdot, 0, 1) \models a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 \doteq 0\}$$

به طور دقیق تر فرمول

$$\varphi(x, y_0, \dots, y_n) = \varphi = y_n x^n + \dots + y_1 x + y_0 \doteq 0$$

را در نظر بگیرید. داریم

$$A = \{x | (\mathbb{C}, +, \cdot, 0, 1) \models \varphi(x, a_1, \dots, a_n)\}.$$

البته در نوشتن فرمول بالا تسامح کرده‌ایم. خواننده‌ای که وسواس بیشتری دارد توجه کند که مثلاً زمانی که f یک چندجمله‌ای درجه ۲ به صورت $a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ است، فرمول $\varphi(x, y_0, y_1, y_2)$ دقیقاً به صورت زیر است:

$$+(+(y_2, \cdot(x, x)), \cdot(y_1, x)), y_0) \doteq 0$$

آنچه در بالا دیدیم، پاسخ تمرین زیر است:

تمرین ۱. نشان دهید مجموعهٔ عناصری که ریشهٔ یک چندجمله‌ای از درجهٔ مشخص n هستند، تعریف‌پذیر است.

حال به عنوان یک تعمیم، آیا مجموعهٔ عناصری در $\mathbb{C}$ که یک چندجمله‌ای وجود دارد که آن عناصر ریشه‌اش باشند، تعریف‌پذیر است؟ به عنوان سوالی سخت‌تر، آیا مجموعهٔ عناصری که یک چندجمله‌ای با ضرایب در $\mathbb{Q}$ وجود داشته باشد که آن عناصر ریشه‌اش باشند، تعریف‌پذیر است؟ یعنی آیا می‌توان فرمولی نوشت که بگوید: یک چندجمله‌ای با یک درجهٔ طبیعی موجود است که ضرایب آن در $\mathbb{Q}$ است و x یکی از ریشه‌های آن است؟^۱ واضح است که عبارتی به صورت زیر را نمی‌توان یک فرمول مرتبهٔ اول (در زبانی که ما در نظر داریم) به حساب آورد:

$$\exists n \in \mathbb{N} \exists a_0, \dots, a_n \in \mathbb{Q} \quad a_n x^n + \dots + a_0 = 0.$$

زیرا در یک فرمول مرتبهٔ اول، سورها فقط روی متغیرهایی زده می‌شوند که در ساختار، امکان مقداردهی به آنها وجود دارد و نمی‌توان روی متغیرهای یک مجموعهٔ متفاوت با ساختار مورد نظر سور زد. اما این لزوماً به معنی عدم تعریف‌پذیری مجموعهٔ یادشده نیست. شاید روشی خلاقانه برای تعریف مجموعهٔ یادشده پیدا شود که در آن فرمول مرتبهٔ اول مناسبی برای این کار پیدا شده است. در ادامه، نمونه‌ای از تعریف‌پذیری خلاقانه را مشاهده می‌کنیم.

مثال ۴. ساختار $(\mathbb{R}, +, \cdot, 0, 1)$ را در نظر بگیرید. دقت کنید که رابطهٔ ترتیب میان اعداد حقیقی در زبان مورد نظر ما در نظر گرفته نشده است. با این حال مجموعهٔ

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x < y\}$$

با همین نمادهایی که در زبان داریم، به صورت زیر قابل تعریف است:

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (\mathbb{R}, +, \cdot, 0, 1) \models \exists z \quad y \doteq x + z^2\}.$$

در تعریف بالا برای ترتیب اعداد حقیقی از این ویژگی استفاده شده است که هر عدد حقیقی مثبت لزوماً توان دوم یک عنصر حقیقی است.

مثال ۵. این بار، ساختار $(\mathbb{Z}, +, \cdot, 0, 1)$ و مجموعهٔ

$$A' = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 : x < y\}$$

را در نظر بگیرید. آیا

$$A' = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 : (\mathbb{Z}, +, \cdot, 0, 1) \models \exists z \quad y \doteq x + z^2\}?$$

به بیان بهتر، پرسیده‌ایم که آیا همان فرمولی که ترتیب اعداد حقیقی را تعریف می‌کند می‌تواند برای تعریف اعداد صحیح استفاده شود؟ پاسخ این سوال منفی است؛ زیرا برای مثال عدد دو یک عدد مثبت است ولی برابر با هیچ عددی (صحیح) به توان دو نیست. قضیه‌ای از لاگرانژ^۲ در نظریهٔ اعداد می‌گوید که یک عدد صحیح زمانی مثبت است که بتوان آن را به صورت حاصل جمع چهار مربع کامل نوشت. پس

$$A' = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 | (\mathbb{Z}, +, \cdot, 0, 1) \models \exists z_1 \exists z_2 \exists z_3 \exists z_4 \quad x \doteq z_1^2 + \dots + z_4^2\}.$$

اصطلاحاً می‌گوییم که ترتیب اعداد صحیح نیز تعریف‌پذیر است؛ هرچند همان گونه که مشاهده شد فرمولی غیر از آن که برای تعریف ترتیب اعداد حقیقی استفاده شد، برای این تعریف به کار می‌رود.

^۱ بیان دیگر سوال: آیا مجموعهٔ عناصر جبری، تعریف‌پذیر است؟
^۲ برای اثبات، منبع [۴] را مشاهده کنید.

مشاهده کردید که برای اثبات تعریف‌پذیری ترتیب در اعداد صحیح، نیاز به یک قضیه قوی در نظریه اعداد پیدا کردیم. به طور کلی مسئله تعریف‌پذیری بر خلاف صورت ساده‌اش، ماهیتی بسیار پیچیده دارد و برای حل مسائل طبیعی تعریف‌پذیری گاهی نیاز به دانش قوی منطق، جبر، نظریه اعداد و هندسه است. در همان مثال تعریف‌پذیری ترتیب در اعداد صحیح، اگر زبان را کمی ضعیف‌تر کنیم، برای مثال، ساختار $(\mathbb{Z}, +, 0, 1)$ را در نظر بگیریم (یعنی علامت ضرب را از زبان برداریم)، آنگاه ترتیب، قابل تعریف نیست (این را در همین فصل ثابت خواهیم کرد). از این نتیجه می‌شود که مجموعه اعداد طبیعی $\mathbb{N}$ به عنوان زیرمجموعه‌ای از $\mathbb{Z}$ در ساختار $(\mathbb{Z}, +, 0, 1)$ قابل تعریف نیست. سوالهای جذاب زیادی درباره تعریف‌پذیری می‌توان پرسید، که برای درگیر کردن ذهن خواننده با مسئله برخی از آنها را در زیر فهرست کرده‌ایم و چندی از این میان را در بخشهایی از این کتاب پاسخ خواهیم گفت.

۱. آیا مجموعه‌های $\mathbb{Q}$ و $\mathbb{Z}$ در ساختار $(\mathbb{R}, +, \cdot, 0, 1)$ قابل تعریف هستند؟ یعنی آیا فرمولی مانند $\varphi(x, \bar{a})$ وجود دارد به طوری که

$$\mathbb{Q} = \{x \in \mathbb{R} \mid (\mathbb{R}, +, \cdot, 0, 1) \models \varphi(x, \bar{a})\}?$$

۲. آیا مجموعه $\mathbb{Z}$ در ساختار $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ قابل تعریف است؟

۳. آیا مجموعه $\mathbb{R}$ در ساختار $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ قابل تعریف است؟

مثال ۶. مجموعه $\{i, -i\}$ در ساختار $(\mathbb{C}, +, \cdot, 0, 1)$ قابل تعریف است. اگر حق استفاده از پارامتر داشته باشیم داریم:

$$\{i, -i\} = \{x : (\mathbb{C}, +, \cdot, 0, 1) \models (x \doteq i \vee x \doteq -i)\}$$

در واقع در بالا از دو عدد $i, -i$ به عنوان پارامتر برای تعریف استفاده کرده‌ایم؛ اما همین مجموعه را می‌توان بدون استفاده از هیچ پارامتری نیز تعریف کرد:

$$\{i, -i\} = \{x : (\mathbb{C}, +, \cdot, 0, 1) \models x^2 + 1 = 0\}$$

در واقع $\{i, -i\}$ مجموعه ریشه‌های معادله درجه دوی $x^2 + 1 = 0$ است. به عنوان یک سوال جذاب به این فکر کنید که آیا مجموعه تک عضوی $\{i\}$ هم در این ساختار، بدون استفاده از پارامتر، قابل تعریف است؟

تمرین ۲ (مجموعه‌های خواسته شده در سوال زیر را بدون استفاده از پارامتر تعریف کنید).

۱. ساختار $(\mathbb{N}, +)$ را در نظر بگیرید:

(آ) نشان دهید که مجموعه $\{0\}$ قابل تعریف است.

(ب) نشان دهید که مجموعه اعداد زوج قابل تعریف است.

(ج) آیا مجموعه $\{0, 1\}$ قابل تعریف است؟^۳

(د) آیا $\{1\}$ قابل تعریف است؟

(ه) نشان دهید که ترتیب اعداد در این ساختار قابل تعریف است.

(و) آیا مجموعه $\{(x, y) \in \mathbb{N}^2 : y = x + 1\}$ قابل تعریف است؟

۲. ساختار $(\mathbb{N}, +, <)$ را در نظر بگیرید. نشان دهید که مجموعه‌های قابل تعریف در این ساختار و ساختار $(\mathbb{N}, +)$ یکسان هستند.

۳. ساختار $(\mathbb{N}, +, \cdot, 0, 1)$ را در نظر بگیرید و نشان دهید مجموعه‌های زیر قابل تعریف هستند:

(آ) مجموعه اعداد اول

(ب) مجموعه اعداد هم‌نهشت با m به پیمانه k .

(ج) مجموعه $\{0, 1\}$ بدون استفاده از ثوابت $0, 1$.

^۳راهنمایی: باقی‌مانده‌های ممکن بر ۲

۳* درهندسه جبری، منظور از یک واریته (یک چندگونا) یک زیرمجموعه از $\mathbb{C}^n$ است که از ریشه‌های مشترک تعدادی متناهی چندجمله‌ای $f \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ تشکیل شده است. نشان دهید که هر واریته در ساختار $(\mathbb{C}, +, \cdot, 0, 1)$ (با استفاده از پارامتر) قابل تعریف است.

بررسی این که صورت کلی مجموعه‌های تعریف‌پذیر در یک ساختار مرتبه اول چگونه می‌تواند باشد، دغدغه مهمی در مطالعه جبری و منطقی ساختارهاست. دو مثال از قضایایی که به تعریف‌پذیری می‌پردازند را در زیر آورده‌ام. اثبات آنچه در این دو مثال آمده است نیازمند به دانش فراتر از این بخش درس است و در بخشهای پیشرفته‌تر درس به آن پرداخته شده است.

مثال ۷.

۱. هر زیرمجموعه $X \subseteq \mathbb{C}$ که در ساختار $(\mathbb{C}, +, \cdot, 0, 1)$ قابل تعریف (با پارامتر یا بدون پارامتر) باشد، یا خودش متناهی است یا به صورت $\mathbb{C} - Y$ است که Y متناهی است. در واقع هر زیرمجموعه تعریف‌پذیر در این ساختار را می‌توان با استفاده از پارامتر و تنها با به کارگیری نماد $\neq$ تعریف کرد. در نتیجه، مجموعه اعداد حقیقی $\mathbb{R}$ به عنوان یک زیرمجموعه از $\mathbb{C}$ قابل تعریف نیست؛ زیرا هم $\mathbb{R}$ و هم $\mathbb{C} - \mathbb{R}$ دو نامتناهی هستند.

۲. هر زیرمجموعه $X \subseteq \mathbb{R}$ که در ساختار $(\mathbb{R}, +, \cdot, 0, 1, <)$ قابل تعریف باشد، اجتماعی متناهی از بازه‌های باز و نقطه‌هاست؛ یعنی اعداد $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n, c_1, \dots, c_m$ موجودند که

$$X = (a_1, b_1) \cup \dots, (a_n, b_n) \cup \{c_1, \dots, c_m\}$$

به بیان دیگر، هر چنین مجموعه‌ای را می‌توان با استفاده از پارامتر و تنها با به کارگیری نمادهای $\{<, \neq\}$ تعریف کرد. به عنوان یک نتیجه جالب، مجموعه $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ در این ساختار قابل تعریف نیست؛ زیرا مجموعه اعداد گویا را نمی‌توان به صورت اجتماعی از بازه‌های حقیقی نوشت. به دلیل مشابه، مجموعه $\mathbb{Z}$ هم در این ساختار قابل تعریف نیست.

تمرین ۳. نشان دهید که اگر مجموعه $\mathbb{Z}$ در ساختار $(\mathbb{R}, +, \cdot, 0, 1, <)$ قابل تعریف می‌بود، آنگاه مجموعه $\mathbb{Q}$ نیز در این ساختار قابل تعریف می‌بود.

تمرین ۴. نشان دهید که ترتیب اعداد صحیح در $(\mathbb{Z}, +, 0)$ قابل تعریف است اگر و تنها اگر $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$ قابل تعریف باشد.

تمرین ۵. فرض کنید $X \subseteq \mathbb{R}^n$ در ساختار $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ قابل تعریف باشد. نشان دهید که در این صورت، مجموعه نقاط حدی X هم تعریف‌پذیر است.

تمرین ۶. فرض کنید $X \subseteq \mathbb{R}$ در ساختار $(\mathbb{R}, <)$ قابل تعریف باشد. نشان دهید که در این صورت، مجموعه متشکل از کران‌های بالای X و نیز مجموعه متشکل از کوچک‌ترین کران بالای X قابل تعریف هستند.

تمرین ۷. فرض کنید K یک میدان باشد و حلقه $K[X]$ متشکل از چندجمله‌ای‌های با متغیر X را در نظر بگیرید. آیا K به عنوان زیرمجموعه‌ای از $K[X]$ در ساختار $(K[X], +, \cdot, 0, 1)$ قابل تعریف است؟

*تمرین ۸ (پروژه). مجموعه $\mathbb{C}$ در ساختار $(\mathbb{C}(X), +, \cdot, 0, 1)$ قابل تعریف است. در اینجا $\mathbb{C}(X)$ میدان کسرهاى حلقه $\mathbb{C}[X]$ است. ۴

*تمرین ۹ (پروژه). ساختار $(\mathbb{N}, +, \cdot)$ را در نظر بگیرید. آیا مجموعه $\{(x, y, z) \in \mathbb{N}^3 \mid z = x^y\}$ قابل تعریف است؟ پاسخ مثبت است. هم قضیه‌ای از گودل و هم قضیه قوی‌تری از ماتیا سوییچ به این موضوع می‌پردازد. ۵

*تمرین ۱۰ (پروژه - پاسخ در بخش‌های بعدی). آیا در $(\mathbb{N}, +)$ مجموعه $\{(x, y, z) \in \mathbb{N}^3 \mid z = x \cdot y\}$ قابل تعریف است؟

*تمرین ۱۱ (پاسخ در بخش‌های بعدی). فرض کنید s تابعی باشد که تالی هر عنصر را می‌دهد. آیا در ساختار $(\mathbb{N}, s, 0)$ جمع اعداد قابل تعریف است؟

*تمرین ۱۲ (پروژه). مجموعه $\mathbb{Z}$ در ساختار $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ قابل تعریف است (قضیه‌ای از ژولیا رابینسون)

۴ پاسخ این سوال، به خم‌های بیضوی مربوط می‌شود. این سوال موضوع مناسبی برای یک پروژه کارشناسی است. پاسخ اجمالی آن را در کتاب نظریه مدل، نوشته مارکر، صفحه ۲۰، مشاهده کنید.

۵ در فصل‌های آخری کتاب، تعریف‌پذیر بودن پدیده‌هایی را در این ساختار خواهید دید که تعجب شما را برخواهد انگیزد: این که ماشین تورینگ شماره n در ورودی m بایستد، با یک فرمول $\varphi(m, n)$ قابل تعریف است.

۲.۱ ایزومرفیسم

دانشجویان ریاضی از همان ابتدای کار با مفهوم «یکریختی» آشنا می‌شوند. مجموعه $\{1, 2, 3\}$ با مجموعه $\{a, b, c\}$ یکریخت است زیرا اگر 1 را به a ، عدد 2 را به b و عدد 3 را به c متناظر کنیم، می‌بینیم که مجموعه دوم همان مجموعه اول است؛ فقط نام عناصر عوض شده است. اما ایزومرفیسم در بافتارهای مختلف ریاضی، فقط تغییر نام عناصر نیست؛ باید روابط ساختار نیز در حین تغییر نام حفظ شود. مثلاً زمانی نگاشت $f: (G_1, +_{G_1}) \rightarrow (G_2, +_{G_2})$ یک ایزومرفیسم بین دو گروه است که علاوه بر این که عناصر $a, b, c \in G_1$ را به ترتیب تغییر نام به $f(a), f(b), f(c)$ در G_2 می‌دهد، روابط جمعی را نیز حفظ کند؛ مثلاً اگر $a +_{G_1} b = c$ آنگاه داشته باشیم: $f(a) +_{G_2} f(b) = f(c)$.

تعریف ایزومرفیسم میان دو $\mathcal{L}$ ساختار نیز مشابه همین تعریف است. فرض کنید $\mathcal{L} = \{f\}$ یک زبان مرتبه اول است که فقط یک نماد تابعی تک‌موضعی f دارد و $M_1 = (M_1, f^{M_1})$ و $M_2 = (M_2, f^{M_2})$ دو $\mathcal{L}$ ساختار باشند. فرض کنید $H: M_1 \rightarrow M_2$ یک نگاشت یک به یک و پوشا بین جهان این دو ساختار باشد. زمانی H یک ایزومرفیسم است که آنچه در زیر تصویر کرده‌ایم رخ دهد:

$$\begin{array}{ccc} a & \xrightarrow{f^{M_1}} & b \\ H \downarrow & & \downarrow H \\ c & \xrightarrow{f^{M_2}} & d \end{array}$$

در تصویر بالا a, b در M_1 هستند و نگاشت f_1^M عنصر a را به b برده است. از طرفی، نگاشت H که هیچ ارتباطی به زبان $\mathcal{L}$ ندارد، عناصر $a, b \in M_1$ را به عناصر $c, d \in M_2$ برده است. میان این تصاویر، تحت تابع f همان رابطه قبلی برقرار است؛ یعنی d هم تصویر c تحت تابع f^{M_2} است.

تعریف ۸. فرض کنید $\mathcal{L}$ یک زبان مرتبه اول و M_1, M_2 دو $\mathcal{L}$ ساختار باشند. تابع یک به یک و پوشای $H: M_1 \rightarrow M_2$ (دقت کنید که از جهان ساختار اولی به جهان ساختار دومی است) را یک ایزومرفیسم می‌نامیم هرگاه

۱. برای هر ثابت $c \in \mathcal{L}$ تابع H عنصر c^{M_1} را به c^{M_2} ببرد.

۲. برای هر نماد رابطه‌ای n موضعی $R \in \mathcal{L}$ و هر $a_1, \dots, a_n \in M_1$ داشته باشیم:

$$R^{M_1}(a_1, \dots, a_n) \Leftrightarrow R^{M_2}(H(a_1), \dots, H(a_n)).$$

۳. برای هر تابع n موضعی $f \in \mathcal{L}$ و هر $a_1, \dots, a_n, a_0$ در M_1 داشته باشیم

$$f^{M_1}(a_1, \dots, a_n) = a_0 \Leftrightarrow f^{M_2}(H(a_1), \dots, H(a_n)) = H(a_0).$$

وقتی نگاشت $H: M_1 \rightarrow M_2$ یک ایزومرفیسم بین دو $\mathcal{L}$ ساختار باشد، می‌نویسیم $H: M_1 \rightarrow M_2$ یک ایزومرفیسم است؛ در این صورت تأکید داریم که تابع ما حافظ ساختار، و نه فقط حافظ مجموعه، است.

طبیعی است که گمان کنیم دو ساختار ایزومرف ویژگی‌های کاملاً یکسانی دارند و به نحوی رونوشتی از یکدیگر هستند. در ادامه این گفته را توجیه خواهیم کرد.
فرض کنید

لم ۹. فرض کنید M_1, M_2 دو $\mathcal{L}$ ساختار و $H: M_1 \rightarrow M_2$ یک ایزومرفیسم باشد. همچنین فرض کنید $t(x_1, \dots, x_n)$ یک $\mathcal{L}$ ترم باشد و $a_1, \dots, a_n$ عناصری در جهان M_1 باشند. آنگاه تابع H عنصر $t^{M_1}(a_1, \dots, a_n)$ را به $t^{M_2}(H(a_1), \dots, H(a_n))$ می‌برد.

اثبات. حکم قضیه را با استقراء روی ساخت ترمها اثبات می‌کنیم. فرض کنید ترم t یک متغیر باشد؛ مثلاً ترم t متغیر x_i باشد. در این صورت $t^{M_1}(a_1, \dots, a_n) = a_i$ از طرفی

$$H(t^{M_1}(a_1, \dots, a_n)) = H(a_i) = t^{M_2}(H(a_1), \dots, H(a_n)).$$

پس حکم برای این نوع ساده از ترمها برقرار است. حال فرض کنید که ترم t یک ثابت، مثلاً ثابت c باشد. در این صورت

$$t^{\mathcal{M}_1}(a_1, \dots, a_n) = c^{\mathcal{M}_1}$$

$$H(t^{\mathcal{M}_1}(a_1, \dots, a_n)) = H(c^{\mathcal{M}_1}) = c^{\mathcal{M}_2}$$

و حکم برای این نوع ترم هم برقرار است. دقت کنید که این که $H(c^{\mathcal{M}_1}) = c^{\mathcal{M}_2}$ از تعریف ایزومرفیسم آمده است.

برای ادامه استقرا نیاز داریم که عبارت زیر را ثابت کنیم: اگر حکم قضیه برای ترمهای $t_1, \dots, t_n$ درست و f یک نماد تابعی n موضعی باشد آنگاه حکم مورد نظر برای ترم $t = f(t_1, \dots, t_n)$ هم برقرار است (این که تعداد ترمها و متغیرها را یکی گرفته ایم فقط برای ساده نوشتن فرمولها است). اما این که حکم قضیه برای ترمهای $t_1, \dots, t_n$ برقرار باشد یعنی این که متغیرهای این ترمها همه از میان $x_1, \dots, x_n$ باشند و برای هر $1 \leq i \leq n$ داشته باشیم

$$H(t_i^{\mathcal{M}_1}(a_1, \dots, a_n)) = t_i^{\mathcal{M}_2}(H(a_1), \dots, H(a_n)).$$

و در این صورت

$$\begin{aligned} H(t^{\mathcal{M}_1}(a_1, \dots, a_n)) &= \\ H\left(f^{\mathcal{M}_1}(t_1^{\mathcal{M}_1}(a_1, \dots, a_n), \dots, t_n^{\mathcal{M}_1}(a_1, \dots, a_n))\right) &= \\ f^{\mathcal{M}_2}\left(H(t_1^{\mathcal{M}_1}(a_1, \dots, a_n)), \dots, H(t_n^{\mathcal{M}_1}(a_1, \dots, a_n))\right) &= \\ f^{\mathcal{M}_2}\left(t_1^{\mathcal{M}_2}(H(a_1), \dots, H(a_n)), \dots, t_n^{\mathcal{M}_2}(H(a_1), \dots, H(a_n))\right) &= \\ t^{\mathcal{M}_2}(H(a_1), \dots, H(a_n)). \end{aligned}$$

□

اثباتی که در بالا برای قضیه نوشتیم با کمی ساده‌انگاری در صورت‌گرایی بود. در ادامه کتاب، هرگاه تشخیص داده‌ایم که ساده‌انگاری موجب ابهام در اثبات قضیه می‌شود، از آن حذر کرده‌ایم. در واقع در اثباتهای استقرائی توجه به خوانش یکنای ترمها و فرمولها ضروری است و این نوع ساده‌نویسی ما از توجه به خوانش یکتا تا حدودی باز می‌دارد. با این تفصیل، دقیق‌ترین صورت قضیه بالا (که البته اثبات باید مطابق آن تنظیم شود) با توجه به تعریف تعبیر ترمها به صورت زیر است:

برای هر ترم t و هر نگاشت مقداردهی β به متغیرها داریم:

$$H(t^{\mathcal{M}_1}[\beta]) = t^{\mathcal{M}_2}[\beta']$$

که در آن β' یک نگاشت مقداردهی به متغیرها در ساختار $\mathcal{M}_2$ است که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\beta'(x) = H(\beta(x)). \quad (۱.۱)$$

قضیه ۱۰. فرض کنید $H : \mathcal{M}_1 \rightarrow \mathcal{M}_2$ یک ایزومرفیسم باشد. در این صورت برای هر فرمول $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ و هر n عنصر $a_1, \dots, a_n$ در $\mathcal{M}_1$ داریم

$$\mathcal{M}_1 \models \varphi(a_1, \dots, a_n)$$

اگر و تنها اگر

$$\mathcal{M}_2 \models \varphi(H(a_1), \dots, H(a_n)).$$

پیش از اثبات قضیه بالا، یادآوری می‌کنیم که حکم قضیه را به صورت دقیق‌تر زیر نیز می‌توان نوشت: برای هر فرمول φ و نگاشت ارزیابی β از متغیرها در ساختار $\mathcal{M}_1$ داریم

$$\mathcal{M}_1 \models \varphi[\beta] \Leftrightarrow \mathcal{M}_2 \models \varphi[\beta']$$

که در بالا β' همان نگاشت مقداردهی به متغیرها در $\mathcal{M}_2$ است که در رابطه ۱.۱ تعریف کردیم. در اثبات زیر همین حکم دقیق‌تر را اثبات کرده‌ایم. این اثبات تمرین خوبی برای نحوه به کارگیری استقراء روی فرمولها در یک زبان مرتبه اول است.

اثبات. حکم این قضیه را به استقراء روی روش ساخت فرمولهای مرتبه اول اثبات می‌کنیم. فرض کنید فرمول φ به صورت $t_1 \doteq t_2$ باشد و داشته باشیم $\mathcal{M}_1 \models t_1 \doteq t_2[\beta]$. بنا به تعریف صدق فرمولها در ساختارها داریم

$$t_1^{\mathcal{M}_1}[\beta] = t_2^{\mathcal{M}_1}[\beta].$$

دقت کنید که $t_1^{\mathcal{M}_1}[\beta]$ و $t_2^{\mathcal{M}_1}[\beta]$ دو عنصر در M_1 هستند که با هم برابرند. از آنجا که نگاشت H یک به یک است، تصاویر این دو تحت این نگاشت در M_2 با هم برابرند؛ یعنی

$$H(t_1^{\mathcal{M}_1}[\beta]) = H(t_2^{\mathcal{M}_1}[\beta])$$

اما بنا به قضیه قبل $H(t_1^{\mathcal{M}_1}[\beta]) = t_1^{\mathcal{M}_2}[\beta']$ و $H(t_2^{\mathcal{M}_1}[\beta]) = t_2^{\mathcal{M}_2}[\beta']$ ؛ پس حکم برای فرمولهای اینچنینی برقرار است.

اثبات حکم برای فرمولهای به صورت $R(t_1, \dots, t_n)$ نیز به همین سادگی است و آن را به عنوان تمرین رها می‌کنیم.

حال فرض کنید که فرمول φ به صورت $(\psi_1 \wedge \psi_2)$ باشد و حکم مورد نظر، برای فرمولهای ψ_1 و ψ_2 برقرار باشد؛ یعنی برای هر نگاشت مقدار دهی β داشته باشیم

$$\mathcal{M}_1 \models \psi_i[\beta] \Leftrightarrow \mathcal{M}_2 \models \psi_i[\beta'] \quad (2.1)$$

که در بالا

$i \in \{1, 2\}$ و β' یک نگاشت مقداردهی است که مانند رابطه ۱.۱ تعریف شده است. حال فرض کنید β یک نگاشت مقداردهی دلخواه به متغیرها در ساختار $\mathcal{M}_1$ باشد. بنا به تعریف استقرائی صدق فرمولها در ساختارها داریم

$$\mathcal{M}_1 \models \varphi[\beta] \Leftrightarrow \mathcal{M}_1 \models \psi_1[\beta] \text{ و } \mathcal{M}_1 \models \psi_2[\beta]$$

بنا به فرض استقراء، یعنی بنا به عبارت ۲.۱ عبارت بالایی به صورت زیر ادامه می‌یابد:

$$\Leftrightarrow \mathcal{M}_2 \models \psi_1[\beta'] \text{ و } \mathcal{M}_2 \models \psi_2[\beta']$$

و دوباره بنا به تعریف صدق فرمولها، عبارت بالایی به صورت زیر ادامه می‌یابد:

$$\Leftrightarrow \mathcal{M}_2 \models \varphi[\beta'].$$

اثبات قضیه در حالتی که فرمول φ به صورت $\neg\psi$ است و حکم برای ψ برقرار است، نیز ساده است و آن را به عنوان تمرین رها می‌کنیم.

حال فرض کنید فرمول φ به صورت $\exists x\psi$ باشد و حکم قضیه برای فرمول ψ برقرار باشد. می‌خواهیم نشان دهیم که حکم قضیه برای φ نیز برقرار است. اگر $\mathcal{M}_1 \models \varphi[\beta]$ در این صورت، $\mathcal{M}_1 \models \psi[\beta \frac{a}{x}]$ برای یک عنصر $a \in M_1$. فرض استقرا این است که حکم قضیه، برای فرمول ψ و هر نگاشت مقداردهی درست است؛ پس $\mathcal{M}_2 \models \psi[(\beta \frac{a}{x})']$ ؛ یعنی $\mathcal{M}_2 \models \psi[\beta' \frac{H(a)}{x}]$. پس $\mathcal{M}_2 \models \exists x\psi$.

شاید بد نباشد قدم آخر استقراء را کمی شهودی‌تر توضیح دهیم. فرض کنید $\mathcal{M}_1 \models \exists x\psi(x, a_1, \dots, a_n)$. در این صورت عنصر $a_0 \in M_1$ چنان موجود است که $\mathcal{M}_1 \models \psi(a_0, a_1, \dots, a_n)$. بنا به فرض استقراء روی فرمول ψ داریم $\mathcal{M}_2 \models \psi(H(a_0), \dots, H(a_n))$ و این یعنی $\mathcal{M}_2 \models \exists x\psi(x, a_1, \dots, a_n)$. $\square$

ملاحظه ۱۱. در اینجا باز هم فرصت را برای توضیح دادن درباره جملات فرامنتقی مغتم می‌شمارم. عبارت

$$\mathcal{M}_1 \models \varphi[\beta] \Leftrightarrow \mathcal{M}_1 \models \psi_1[\beta] \text{ و } \mathcal{M}_1 \models \psi_2[\beta]$$

که در اثبات بالا نوشته‌ایم، یک فرمول مرتبه اول در زبان $\mathcal{L}$ که ساختارهای $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2$ متناسب با آن هستند، نیست. در عین حال این عبارت، یک جمله منطقی است و حتماً در زبانی منطقی نوشته شده است (که فعلاً کاری با آن زبان نداریم). برای این که علامتهای منطقی آن زبان، با علامتهای منطقی‌ای که همراه با زبان $\mathcal{L}$ استفاده می‌شوند اشتباه نشوند، به جای $\leftrightarrow$ از $\Leftrightarrow$ و به جای $\wedge$ از حرف ربط «و» استفاده کرده‌ایم.

مثال ۱۲.

۱. زبان $\mathcal{L} = \{f, e\}$ را در نظر بگیرید که در آن f یک نماد تابعی دو متغیره e یک نماد ثابت است. همچنین دو ساختار $\mathcal{M}_1 = (\mathbb{R}, +, 0)$ و $\mathcal{M}_2 = (\mathbb{R}^+, \cdot, 1)$ را ملاحظه کنید که منظور از $\mathbb{R}^+$ مجموعه اعداد حقیقی مثبت است. این دو ساختار با هم ایزومرفند؛ زیرا تابع

$$H : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$$

$$x \mapsto e^x$$

یک تابع یک به یک و پوشا است و علاوه بر آن داریم:

$$H(e^{\mathcal{M}_1}) = H(0) = e^0 = 1 = e^{\mathcal{M}_2}$$

و

$$H(f_1^{\mathcal{M}}(x, y)) = H(x + y) = e^{x+y} = e^x \cdot e^y = f^{\mathcal{M}_2}(H(x), H(y)).$$

۲. در زبان $\mathcal{L} = \{f, c\}$ که در آن f یک نماد تابعی دو موضعی و c یک ثابت است، ساختار $\mathcal{Z} = (\mathbb{Z}, +, 0)$ را در نظر بگیرید. تابع

$$H : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$$

$$x \mapsto -x$$

یک ایزومرفیسم میان $\mathcal{Z}$ و خودش است. این تابع، صفر را به صفر می‌برد و داریم:

$$H(f^{\mathcal{Z}}(x, y)) = H(x + y) = -(x + y) = (-x) + (-y) = H(x) + H(y) = f^{\mathcal{Z}}(H(x), H(y)).$$

یعنی تابع مورد نظر حافظ جمع نیز هست. پس تابع $x \mapsto -x$ یک ایزومرفیسم میان ساختار جمعی اعداد صحیح و خودش است. به عنوان یک تمرین، به این فکر کنید که آیا تابع H ساختار ضربی را نیز حفظ می‌کند؛ یعنی آیا اگر در زبان مورد نظر برای تابع ضرب هم علامتی داشتیم، باز هم تابع H یک ایزومرفیسم می‌بود؟

۳. زبان $\mathcal{L} = \{+, \cdot, 0, 1\}$ را در نظر بگیرید. فرض کنید M مجموعه‌ای به صورت زیر متشکل از برخی ماتریسهای دو در دو باشد.

$$M = \left\{ \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

علامت جمع و ضرب در زبان $\mathcal{L}$ را در M به ترتیب به صورت جمع و ضرب ماتریسها تعبیر کنید. همچنین ثوابت $0, 1$ در زبان را به ترتیب به ماتریسهای $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ تعبیر کنید. در این صورت $\mathcal{M} = (M, +, \cdot, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix})$ یک $\mathcal{L}$ ساختار است. پیش از آنکه درباره ایزومرف بودن این ساختار با یک ساختار دیگر صحبت بکنیم، یک نکته را یادآوری می‌کنیم. وقتی درباره فرمولی به صورت $\forall x \varphi$ در این ساختار صحبت می‌کنیم، سور عمومی روی ماتریسها زده می‌شود؛ یعنی معنای فرمول ما در این ساختار بدین صورت است که: «برای هر ماتریس دو در دو...».

ساختار $\mathcal{C} = (\mathbb{C}, +, \cdot, 0, 1)$ نیز یک $\mathcal{L}$ ساختار است. در این ساختار، جهان زمینه، اعداد مختلط است و جمع و ضرب اعداد مختلط به همراه اعداد صفر و یک، تعبیر علائم زبانی هستند. تابع

$$H : \mathbb{C} \rightarrow M$$

$$(x + iy) \mapsto \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}$$

را در نظر بگیرید.

تمرین ۱۳. نشان دهید که نگاشت H که در بالا معرفی شده است، یک ایزومرفیسم میان دو ساختار $\mathcal{C}, \mathcal{M}$ است.

۴. در زبان $\mathcal{L} = \{f, g, c_1, c_2\}$ که در آن f, g نمادهای تابعی دوموضعی هستند و c_1, c_2 نمادهایی برای دو ثابت، ساختار $\mathcal{C} = (\mathbb{C}, +, \cdot, 0, 1)$ را در نظر بگیرید که در آن $\mathbb{C}$ مجموعه اعداد مختلط است و جمع و ضرب اعداد مختلط و صفر و یک تعابیر علائم زبانی هستند. تابع

$$H : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$$

را در نظر بگیرید که هر عدد مختلط را به مزدوج آن می‌برد.

تمرین ۱۴. نشان دهید که تابع H یک ایزومرفیسم میان ساختار $\mathcal{C}$ و خودش است.

۵. به عنوان یک مثال پیشرفته‌تر، ساختار $(\mathbb{C}, +, \cdot, 0, 1)$ را در نظر بگیرید. ابتدا نشان دهید که:

تمرین ۱۵. هر نگاشت ایزومرفیسم $H : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ هر عدد گویا را حفظ می‌کند؛ یعنی برای هر $r \in \mathbb{Q}$ داریم $H(r) = r$.

*تمرین ۱۶. نشان دهید ساختار $(\mathbb{Q}, <)$ با ساختار $(\mathbb{Q} - \{0\}, <)$ ایزومرف است.

*تمرین ۱۷. نشان دهید که ساختار $(\mathbb{R}, <)$ با ساختار $(\mathbb{R} - \{0\}, <)$ ایزومرف نیست.

راهنمایی: کوچک‌ترین کران بالا بودن، یک ویژگی تعریف‌پذیر است. اولی در اصل کمال صدق می‌کند ولی دومی صدق نمی‌کند.

ایزومرفیسمهای فراوانی از $\mathbb{C}$ به خودش وجود دارند. حتی تحت شرایطی می‌توان این ایزومرفیسمها را طوری تنظیم کرد که برخی اعداد مورد علاقه ما را به هم تصویر کنند؛ مثلاً می‌شود یک ایزومرفیسم از $\mathbb{C}$ به $\mathbb{C}$ پیدا کرد که تک تک اعداد گویا را حفظ کند و عدد π را به عدد e ببرد. درباره ساختار حلقه‌ای اعداد مختلط و این ایزومرفیسمها در بخشهای آینده مفصل سخن خواهیم گفت.

۶. زبان $\mathcal{L} = \{R\}$ را در نظر بگیرید که در آن R یک نماد رابطه‌ای تک موضعی است. مجموعه $\{1, 2, 3\}$ با رابطه ترتیب اعداد یک $\mathcal{L}$ -ساختار است. همچنین گراف جهت‌داری که از سه راس a, b, c تشکیل شده است و در آن فقط از a به سمت b, c و از b به سمت c یال وجود دارد، نیز یک $\mathcal{L}$ -ساختار است که با ساختار یادشده ایزومرف است.

۳.۱ رابطه میان تعریف‌پذیری و ایزومرفیسمها

این بخش را با ذکر یک نکته لطیف و مرتبط به بحث، از جبر شروع می‌کنم. فرض کنید $p(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$ یک چندجمله‌ای با ضرایب در اعداد گویا باشد. همچنین فرض کنید که $H : (\mathbb{C}, +, \cdot) \rightarrow (\mathbb{C}, +, \cdot)$ یک ایزومرفیسم باشد (که بنا به تمرین ۱۵ اعداد گویا را نقطه نقطه حفظ می‌کند). در این صورت اگر عدد مختلط t ریشه‌ای از این چندجمله‌ای باشد، عدد مختلط $H(t)$ نیز ریشه‌ای از این چندجمله‌ای است. علت این امر واضح است، زیرا می‌دانیم که

$$p(t) = a_0 + a_1t + \dots + a_nt^n = 0$$

پس با اعمال ایزومرفیسم H داریم

$$H(p(t)) = H(a_0) + H(a_1)H(t) + \dots + H(a_n)H(t)^n = 0$$

و از آنجا که H روی ضرایب گویای این چندجمله‌ای، ثابت است داریم

$$a_0 + a_1H(t) + \dots + a_n(H(t))^n = 0$$

یعنی همان طور که گفتیم، $H(t)$ ریشه چندجمله‌ای $p(x)$ است. یک ایزومرفیسم از $\mathbb{C}$ به $\mathbb{C}$ را یک اتومرفیسم می‌نامیم و واقعیت بالا است که مجموعه ریشه‌های یک چندجمله‌ای با ضرایب در $\mathbb{Q}$ تحت اتومرفیسمها به صورت مجموعه‌ای حفظ می‌شود؛ اگر X مجموعه ریشه‌های چندجمله‌ای p در بالا باشد، می‌نویسیم:

$$\forall H \in \text{aut}(\mathbb{C}/\mathbb{Q}) \quad H(X) = X.$$

در بالا $\text{aut}(\mathbb{C}/\mathbb{Q})$ گروه متشکل از اتومرفیسمهایی است که اعداد گویا را نقطه‌وار حفظ می‌کنند. شبیه این گفته، برای مجموعه‌های تعریف‌پذیر در یک ساختار مرتبه اول نیز برقرار است: فرض کنید $\mathcal{M}$ یک ساختار مرتبه اول و $X \subseteq M^n$ یک مجموعه تعریف‌پذیر با استفاده از پارامترهای در یک مجموعه $A \subseteq M$ باشند. منظور از یک اتومرفیسم در $\text{aut}(\mathcal{M}/A)$ یک ایزومرفیسم از M به خودش است که A را نقطه‌وار حفظ می‌کند.

قضیه ۱۳. با فرضیات بالا، برای $H \in \text{aut}(\mathcal{M}/A)$ داریم $H(X) = X$ ؛ به بیان دیگر اگر $X \subseteq M^n$ یک مجموعه تعریف پذیر با استفاده از پارامترهای موجود در یک مجموعه A باشد، آنگاه هر اتومرفیسمی که نقطه وار حافظ A باشد، مجموعه وار حافظ X است.

اثبات. فرض کنید که مجموعه X توسط فرمول φ و با استفاده از پارامترهای $a_1, \dots, a_m \in A$ تعریف شده باشد؛ یعنی

$$X = \{(b_1, \dots, b_n) \in M : \mathcal{M} \models \varphi(b_1, \dots, b_n, a_1, \dots, a_m)\}.$$

بنابراین اگر $(b_1, \dots, b_n) \in X$ آنگاه $\mathcal{M} \models \varphi(b_1, \dots, b_n, a_1, \dots, a_m)$. بنا به ایزومرفیسم بودن نگاشت H داریم

$$\mathcal{M} \models \varphi(H(b_1), \dots, H(b_n), H(a_1), \dots, H(a_m))$$

و از آنجا که H روی a_i ها که در A قرار دارند ثابت است داریم

$$\mathcal{M} \models \varphi(H(b_1), \dots, H(b_n), a_1, \dots, a_m)$$

اما عبارت بالا دقیقاً بدین معنی است که $(H(b_1), \dots, H(b_n)) \in X$ ؛ به بیان دیگر $H(X) \subseteq X$. اثبات این را که $X \subseteq H(X)$ به عنوان تمرین رها می کنیم. $\square$

این که تصویر عناصری که در یک مجموعه تعریف پذیر قرار دارند تحت اتومرفیسمها نباید از آن مجموعه بیرون بیفتند، محک جالبی برای تعریف پذیری است که در مثالهای زیر بدان پرداخته ایم.

مثال ۱۴. قبلاً نشان دادیم که ترتیب اعداد صحیح، در ساختار $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ (با تمسک به قضیه لاگرانژ) تعریف پذیر است. در این مثال ادعا می کنیم که اگر علامت ضرب را برداریم، دیگر ترتیب اعداد صحیح قابل تعریف نیست؛ یعنی در ساختار $(\mathbb{Z}, +, 0)$ ترتیب قابل تعریف نیست. تابع

$$H : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$$

$$x \mapsto -x$$

یک اتومرفیسم است. فرض کنید که

$$X = \{(a, b) \in \mathbb{Z}^2 : a < b\}$$

تعریف پذیر باشد. در این صورت باید تحت این اتومرفیسم حفظ شود؛ یعنی هرگاه $a < b$ باید داشته باشیم $H(a) < H(b)$. واضح است که برای نگاشت H به صورتی که ما در نظر گرفته ایم این امر برقرار نیست؛ مثلاً $1 < 2$ اما $-1 > -2$. به بیان دیگر $(1, 2) \in X$ اما $(H(1), H(2)) \notin X$.

تمرین ۱۸. نشان دهید که در ساختار $(\mathbb{Z}, +, 0)$ مجموعه اعداد طبیعی، $\mathbb{N}$ قابل تعریف است اگر و تنها اگر ترتیب قابل تعریف باشد. نتیجه بگیرید که در ساختار $(\mathbb{Z}, +, 0)$ مجموعه اعداد طبیعی، $\mathbb{N}$ قابل تعریف نیست.

تمرین ۱۹. نشان دهید که در ساختار $(\mathbb{R}, +, 0)$ مجموعه اعداد طبیعی $\mathbb{N}$ قابل تعریف نیست.

تمرین ۲۰. نشان دهید که در $(\mathbb{R}, +, 0)$ مجموعه $\{1\}$ قابل تعریف نیست.

تمرین ۲۱. نشان دهید که در $(\mathbb{R}, +, 0)$ ترتیب اعداد حقیقی قابل تعریف نیست.

تمرین ۲۲. آیا $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$ در ساختار $(\mathbb{Q}, <)$ قابل تعریف است؟

تمرین ۲۳. چند نگاشت ایزومرفیسم متفاوت می توان از $(\mathbb{N}, +, 0, 1)$ به $(\mathbb{N}, +, 0, 1)$ تعریف کرد؟

مثال ۱۵. مشابه مثال قبل، نشان می دهیم که مجموعه تک عضوی $\{i\}$ در ساختار $(\mathbb{C}, +, \cdot, 0, 1)$ قابل تعریف نیست. همان گونه که در مثال ۶ دیدیم، تابع

$$x + iy \mapsto x - iy$$

یک اتومرفیسم روی این ساختار است. واضح است که تصویر i تحت این اتومرفیسم، از مجموعه تک عضوی $\{i\}$ بیرون می افتد.

مثال ۱۶. به عنوان یک مثال سخت‌تر نشان می‌دهیم که مجموعه اعداد حقیقی، $\mathbb{R}$ ، در ساختار $(\mathbb{C}, +, \cdot, 0, 1)$ قابل تعریف نیست. دقت کنید که اتومرفیسمی که در مثال بالا بدان اشاره شد، برای رد عدم تعریف‌پذیری اعداد حقیقی به کار نمی‌آید زیرا اعداد حقیقی را حفظ می‌کند. فرض کنید r یک عدد حقیقی، و s یک عدد غیرحقیقی باشند که هیچ‌کدام ریشه هیچ چندجمله‌ای با ضرایب در $\mathbb{Q}$ نیستند. برای مثال $r = \pi$ و $s = \pi + i$ در این صورت، با کمک روش‌هایی در جبر مقدماتی (که در فصل‌های آینده بدانها خواهیم پرداخت) اتومرفیسمی از $(\mathbb{C}, +, \cdot, 0, 1)$ به خودش وجود دارد که r را به s می‌برد؛ یعنی تصویر یک عدد حقیقی تحت این اتومرفیسم یک عدد غیرحقیقی است. پس مجموعه اعداد حقیقی تعریف‌پذیر نیست.

ملاحظه ۱۷. با ذکر نکته‌ای کنجکاوانه این بخش را به پایان می‌بریم. در ابتدای این بخش گفتیم که اتومرفیسم‌های روی میدان اعداد مختلط، ریشه‌های یک چندجمله‌ای را جابه‌جا می‌کنند. با همان تکنیک‌های مقدماتی جبری، چیزی قوی از این را می‌توان ثابت کرد. در واقع اگر $p(x) \in \mathbb{Q}[X]$ یک چندجمله‌ای باشد و r_1, r_2 دو ریشه آن (خارج از $\mathbb{Q}$) باشند، آنگاه یک اتومرفیسم از اعداد مختلط موجود است که r_1 را به r_2 می‌برد (و طبیعتاً $\mathbb{Q}$ را نقطه‌وار حفظ می‌کند). بخشی از جبر، به نام «نظریه گالوا» به این می‌پردازد که چگونه با استفاده از اتومرفیسم‌ها، ریشه‌های معادلات را مطالعه کنیم. در نظریه گالوا، برای مطالعه توسعه‌های جبری یک میدان، گروه اتومرفیسم‌ها مورد بررسی قرار می‌گیرد.

***تمرین ۲۴ (پروژه – نظریه گالوا).** چند اتومرفیسم مختلف روی ساختار $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ وجود دارد که روی مجموعه اعداد حقیقی، با تابع همانی برابر باشند؟

خلاصه بخش. مجموعه‌ای که برای توصیف آن، یک فرمول مرتبه اول وجود داشته باشد، مجموعه تعریف‌پذیر نامیده می‌شود. شناخت مجموعه‌های تعریف‌پذیر در یک ساختار، موضوع یک مطالعه منطقی است. مجموعه‌های تعریف‌پذیر، به صورت مجموعه‌وار، تحت اتومرفیسم‌ها حفظ می‌شوند.