

منطق ریاضی

محسن خانی
دانشگاه صنعتی اصفهان

۲۶ شهریور ۱۴۰۵

فصل ۱

معنی

در فصل گذشته آموختیم که با استفاده از الفبای یک زبان و قواعد دستوری آن می‌توان جملات و کلمات نوشت. دقت کنید که یک «کلمه» به خودی خود فقط دنباله‌ای از علائم است، اما کلمه دارای این اهمیت است که می‌تواند یک «معنی» در ذهن شنونده متبادر کند. با شنیدن کلمه میز، هر کسی یاد شیء میز می‌افتد؛ هر چند افراد مختلف ممکن است میزهای متفاوتی را تصور کنند. برای جملات هم، وضع، همین گونه است: شنونده تک تک کلمات موجود در یک جمله را در ذهن خود معنی می‌کند و به معنای جمله می‌رسد. برای مثال، جمله زیر را در نظر بگیرید:

یک گربه روی میز است.

جمله بالا صرفاً دنباله‌ای از حروف و علائم در زبان فارسی است. برای معنا کردن آن، لازم است که تابعی در ذهن ما وجود داشته باشد که واژه‌های یک، گربه، میز، و روی چیزی بودن را به معانی آنها تصویر کند. تصور دو فرد زیر، از کلمه گربه و رابطه روی چیزی بودن متفاوت است: با این حال هر کدام از آنها به تصویری از معنای جمله بالا رسیده‌اند:

پس یک جمله واحد در اذهان مختلف تصورات متفاوتی را سبب می‌شود. مشابه همین وضع را درباره فرمولهای یک زبان مرتبه اول داریم. اگر φ یک فرمول مرتبه اول در زبان L باشد، در جهانهای مختلف معنا پیدا می‌کند. در ادامه این فصل، درباره روش «تعریف» این معنا سخن گفته‌ایم.

۱.۱ ساختارها و تعبیر علائم زبان

بحث را با حالتی خاص شروع می‌کنیم: فرض کنید L یک زبان مرتبه اول باشد. در بخش قبل گفتیم، وقتی که درباره نمادهای زبان صحبت می‌کردیم گفتیم که مثلاً نماد تابعی، با تابع فرق دارد. از آنچه در ابتدای این فصل گفته شد احتمالاً دریافته‌اید که یک نماد تابعی باید برای سخن گفتن درباره یک تابع واقعی در یک دنیای واقعی استفاده شود. دنیاهای واقعی در اینجا، همان‌طور که در ادامه توضیح خواهیم داد، چیزهایی به نام L ساختار هستند. همه نمادهای یک زبان L در یک L ساختار «تعبیر» می‌شوند.

تعریف ۱. فرض کنید L یک زبان مرتبه اول باشد. یک L ساختار M از اجزای زیر تشکیل شده است:

۱. یک مجموعه زمینه M به نام جهان این L ساختار.

۲. برای هر نماد تابعی $f \in L$ یک تابع $f^M : M^{n_f} \rightarrow M$.

۳. برای هر نماد رابطه‌ای $R \in L$ یک رابطه $R^M \subseteq M^{n_R}$.

۴. و برای هر نماد ثابت $c \in L$ یک عنصر مشخص $c^M \in M$.

عبارت f^M را تعبیر نماد تابعی f در L ساختار M می‌نامیم. همان‌طور که مشاهده کرده‌اید، f^M واقعاً یک تابع است که نماد f قرار است در ساختار M به این تابع اشاره کند. دقت کنید که دامنه این تابع، مجموعه زمینه ساختار M ، یعنی مجموعه M است که البته به توان تعداد مواضع

در نظر گرفته شده برای f رسیده است. مشابهاً R^M یک رابطه است (یعنی یک مجموعه متشکل از n_R تائی ها) که نماد رابطه ای R قرار است ما را به یاد آن بیندازد؛ و c^M یک عنصر مشخص است که ثابت c ما را به یاد آن می اندازد. پس تعریف بالا را می توان به صورت خلاصه تر زیر نوشت: اگر L یک زبان مرتبه اول باشد، یک ساختار یک چندتایی به صورت زیر است:

$$\mathcal{M} = (M, z_{z \in L}^M)$$

که بسته به این که $z \in L$ چه نوع نمادی باشد، z^M (که خوانده می شود: تعبیر نماد z در $\mathcal{M}$) به یکی از صورتهای بیان شده در تعریف بالاست.

مثال ۲. فرض کنید $L = \{*, g, c, d, R\}$ یک زبان مرتبه اول باشد که در آن $*$ یک نماد تابعی دوموضعی، g یک نماد تابعی تک موضعی، c, d دو نماد ثابت و R یک نماد رابطه ای دو موضعی است. پس هر L ساختار $\mathcal{M}$ به صورت $\mathcal{M} = (M, *,^M, g^M, c^M, d^M, R^M)$ است که در آن $M \rightarrow M : *$ و $M^2 \rightarrow M : g^M$ به ترتیب دو تابع دوموضعی و تک موضعی هستند، c^M, d^M دو عنصر مشخص در جهان زمینه M هستند، و R^M یک زیرمجموعه مشخص از M^2 است. در زیر چندین نمونه L ساختار، برای این زبان L معرفی شده است.

۱. $\mathcal{M}_1 = (\mathbb{R}, +, \exp, 0, 1, <)$. دقت کنید که جهان این L ساختار، مجموعه اعداد حقیقی است. تعبیر نماد تابعی دو موضعی $*$ در این ساختار، همان تابع جمع است. یعنی:

$$*^{\mathcal{M}_1} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$*^{\mathcal{M}_1}(x, y) = x + y.$$

به طور خلاصه تر: $+ = *^{\mathcal{M}_1}$. همچنین تعبیر نماد تابعی تک موضعی g در ساختار ما، تابع نمائی است:

$$g^{\mathcal{M}_1} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$g(x) = \exp(x).$$

به همین ترتیب داریم: $c_1^{\mathcal{M}_1} = 0$ و $c_2^{\mathcal{M}_1} = 1$. همچنین نماد رابطه ای دو موضعی R تعبیر به ترتیب اعداد حقیقی شده است:

$$R^{\mathcal{M}_1} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x < y\}$$

به بیان دیگر. $(x, y) \in R^{\mathcal{M}_1} \Leftrightarrow x < y$ ؛ و باز به بیانی دیگر $R^{\mathcal{M}_1} = <$.

۲. $\mathcal{M}_2 = (\mathbb{N}, \cdot, s, |, 2, 3)$. دقت کنید که جهان این L ساختار، مجموعه اعداد طبیعی است. نماد $*$ در زبان، به ضرب اعداد طبیعی تعبیر شده است:

$$*^{\mathcal{M}_2} : \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$$

$$*^{\mathcal{M}_2}(x, y) = x \cdot y.$$

یا به بیان کوتاه تر:

$$*^{\mathcal{M}_2} = \cdot.$$

همچنین نماد تابعی تک موضعی s تعبیر به تابع تالی شده است:

$$g^{\mathcal{M}_2}(x) = x + 1$$

و ثوابت به ترتیب به صورت زیر تعبیر شده اند:

$$c_1^{\mathcal{M}_2} = 2,$$

$$c_2^{\mathcal{M}_2} = 3.$$

و سرانجام تعبیر نماد رابطه ای R ، رابطه عاد کردن اعداد طبیعی است:

$$(x, y) \in R^{\mathcal{M}_2} \Leftrightarrow x|y.$$

به همین راحتی می‌توان L ساختارهای متعدد دیگری نیز معرفی کرد: هر کدام از آنها باید یک جهان زمینه داشته باشند که روی آن توابع و ثوابت مطلوبی به عنوان تعابیر علائم زبانی وجود دارد. تنها باید مواظب بود که مثلاً یک نماد تابعی دو موضعی، به یک تابعِ دوموضعی (و نه تابعی با مواضع بیشتر) تعبیر شود.

ایده این که یک نماد، در ساختارهای مختلف تعابیر متفاوت داشته باشد را دانشجویان ریاضی در همان ترمهای اولیه می‌بینند. مثلاً در نظریه گروه‌ها، ممکن است عمل ضرب در گروه‌های مختلف متفاوت باشد ولی نماد استفاده شده برای ضرب در همه آنها یکسان باشد. این را در مثال زیر دقیق‌تر بیان کرده‌ایم.

مثال ۳. زبان $L = \{\otimes, e\}$ را در نظر بگیرید که در آن $\otimes$ یک نماد تابعی دو موضعی و e یک نماد ثابت است. گروه جمعی $(\mathbb{Z}, +, 0)$ یک L ساختار است که در آن $\otimes$ و e به ترتیب به جمع اعداد و عدد صفر تعبیر شده‌اند. در عین حال گروه $(\mathbb{Z}_3, +, 0)$ نیز یک L ساختار است که در آن $\otimes$ و e به ترتیب، به جمع در پیمانه ۳ و ۰ (به پیمانه ۳) تعبیر شده‌اند. علاوه بر این، گروه متشکل از ماتریسهای دو در دو، با جمع ماتریسی و تعبیر ثابت e به عنوان ماتریس با درایه‌های صفر، نیز یک L ساختار است.

مثال ۴. فرض کنید $\mathcal{L} = \{R\}$ یک زبان دارای تنها یک نماد رابطه‌ای دو موضعی باشد. فرض کنید G یک گراف باشد. می‌خواهیم این گراف را به عنوان یک $\mathcal{L}$ ساختار $\mathcal{G} = (G, R^{\mathcal{G}})$ در نظر بگیریم. برای این کار کافی است که تعبیری برای نماد رابطه‌ای R در G معرفی کنیم. تعریف کنید:

$$(x, y) \in R^{\mathcal{G}} \Leftrightarrow \text{بین رئوس } x, y \text{ در گراف } G \text{ یک یال وجود داشته باشد.}$$

به عنوان یک مثال دیگر از $\mathcal{L}$ ساختار مجموعه $\mathbb{Q}$ (یعنی مجموعه اعداد گویا) را در نظر بگیرید. برای تبدیل این مجموعه به یک $\mathcal{L}$ ساختار $\mathcal{Q} = (\mathbb{Q}, R^{\mathcal{Q}})$ باز هم باید رابطه R را روی آن تعبیر کنید. تعریف کنید

$$(x, y) \in R^{\mathcal{Q}} \Leftrightarrow x < y$$

به بیان دیگر تعریف کرده‌ایم

$$R^{\mathcal{Q}} = <$$

یک مجموعه از انسانها به همراه رابطه برادری، نیز یک مثال از یک $\mathcal{L}$ ساختار است.

قرارداد ۵. معمولاً وقتی $\mathcal{M}$ را به عنوان یک $\mathcal{L}$ ساختار می‌گیریم، به طور ضمنی فرض کنیم که جهان این ساختار مجموعه M است.

تمرین ۱. فرض کنید $L = \{h, R\}$ یک زبان مرتبه اول باشد که در آن h یک نماد تابعی سه موضعی و R یک نماد رابطه‌ای سه موضعی است. دو L ساختار مثال بزنید.

تمرین ۲. فرض کنید $L = \{p\}$ یک زبان باشد که در آن p یک نماد تابعی یک موضعی است. نشان دهید که زوج $(\mathbb{Q}, \mathbb{Z})$ می‌تواند به عنوان یک L ساختار در نظر گرفته شود.

تمرین ۳. فرض کنید $L = \{p_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ یک زبان شمارا باشد که در آن هر p_n یک نماد رابطه‌ای یک موضعی است. مجموعه $\mathbb{N}$ را تبدیل به یک L ساختار به نام $\mathcal{N}$ کنید، به طوری که برای هر دو عدد طبیعی متفاوت m, n داشته باشیم: $p_n^{\mathcal{N}} \neq p_m^{\mathcal{N}}$.

راهنمایی. برای مثال می‌توانید p_n را بخش‌پذیری بر n تعبیر کنید. $\square$

***تمرین ۴.** فرض کنید $L = \{f_r\}_{r \in \mathbb{R}}$ یک زبان نامشمارا باشد که در آن برای هر عدد حقیقی r یک نماد تابعی یک موضعی f_r در آن قرار داده شده است. مجموعه $\mathbb{R}$ را تبدیل به یک L ساختار کنید.

راهنمایی. برای مثال، تابع f_r را می‌توانید تابعی در نظر بگیرید که هر عدد را در r ضرب می‌کند. $\square$

***تمرین ۵.** فرض کنید $L = \{f\}$ یک زبان باشد که در آن f یک نماد تابعی تک موضعی است. تابع $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ را با ضابطه $\pi x \rightarrow x$ در نظر بگیرید. آیا مجموعه اعداد طبیعی، با این تابع، یک L ساختار تشکیل می‌دهد؟

تمرین ۶. آیا $(\mathbb{N}, -)$ که در آن $-$ علامت تفریق است، می‌تواند یک L ساختار باشد؟

۲.۱ معنای فرمولها

پیش از ورود به بحث معنای فرمولها، بهتر است یک مصداق از معنا کردن فرمول در ساختارها را با هم مشاهده کنیم. فرض کنید f یک نماد تابعی تک موضعی و c, d دو نماد ثابت در یک زبان L باشند. فرمول $f(c) \doteq d$ را در نظر بگیرید. همچنین فرض کنید M_1 و M_2 دو ساختار باشند. در هر کدام از اینها، تابع f و ثابت c, d تعبیر مخصوص به خود را دارند. معنی جمله $f(c_1) \doteq c_2$ در ساختار M_1 به صورت زیر است:

$$f^{M_1}(c^{M_1}) = d^{M_1}.$$

مشابهاً همین جمله در ساختار M_2 به معنی زیر است:

$$f^{M_2}(c^{M_2}) = d^{M_2}.$$

به طور کلی اگر M یک ساختار (برای همین زبان L) باشد، آنگاه می‌گوییم فرمول $f(c) \doteq d$ در این ساختار درست است، و می‌نویسیم

$$M \models f(c) \doteq d$$

هرگاه

$$f^M(c^M) = d^M.$$

حال فرمول $f(x) \doteq y$ را در نظر بگیرید. آیا این فرمول در ساختار M_1 یا M_2 برقرار است؟ برای پاسخ بدین سوال، و به طور کلی‌تر، برای تعریف صدق فرمولها در ساختارها، نیاز به توضیح مختصری درباره متغیرهای آزاد و پای‌بند و نگاشتهای مقداردی و محاسبه ترمها داریم.

۱.۲.۱ متغیرهای آزاد و پای‌بند

در یک فرمول مرتبه اول، به متغیری که هیچ سوری روی آن اثر نداشته باشد، متغیر آزاد گفته می‌شود. برای مثال در فرمول زیر:

$$(\exists x p(x) \wedge q(x))$$

حضور اول (از سمت چپ) متغیر x پای‌بند است، زیرا سور وجودی روی آن اثر می‌کند ولی حضور دوم همین متغیر آزاد است. اما در فرمول زیر

$$\exists x (p(x) \wedge q(x))$$

هر دو حضور متغیر x پای‌بند است. به عنوان مثالی دیگر، در فرمول

$$\forall y \exists x (f(x) \doteq y \wedge R(x, y, z, t))$$

دو متغیر x, y پای‌بند و دو متغیر z, t آزاد هستند. تعریف دقیق یک متغیر آزاد، بنا به ماهیت استقرائی تعریف فرمولها، به صورت زیر است.

تعریف ۶. می‌گوییم متغیر x در فرمول φ آزاد است، هرگاه یکی از حالات زیر رخ دهد:

۱. فرمول φ به صورت $t_1 \doteq t_2$ باشد و متغیر x در یکی از ترمهای t_1 یا t_2 به کار رفته باشد.

۲. فرمول φ به صورت $R(t_1, \dots, t_n)$ باشد و متغیر x در یکی از ترمهای t_1 تا t_n به کار رفته باشد.

۳. فرمول φ به صورت $\neg \psi$ باشد و x یک متغیر آزاد برای فرمول ψ باشد.

۴. فرمول φ به صورت $(\psi_1 \wedge \psi_2)$ باشد و x یکی از متغیرهای آزاد فرمول ψ_1 یا یکی از متغیرهای آزاد فرمول ψ_2 باشد.

۵. فرمول φ به صورت $\exists y \psi$ باشد که در آن y متغیری غیر از x ، و x یک متغیر آزاد برای فرمول ψ است.

قرارداد ۷. عموماً فرمولهای مرتبه اول را با حروف $\varphi, \psi, \dots$ نشان می‌دهیم. اما وقتی می‌گوییم $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ یک فرمول مرتبه اول است، یعنی وقتی نام یک سری متغیر را جلوی فرمول می‌نویسیم، منظورمان اشاره به سه نکته زیر است.

- متغیرهای آزاد فرمول φ متعلق به مجموعه $\{x_1, \dots, x_n\}$ هستند.
- لزوماً همه متغیرهای $x_1, \dots, x_n$ در فرمول φ استفاده نشده‌اند.
- هیچ‌کدام از این متغیرها، پای‌بند نیستند؛ یعنی در نمایش یک فرمول، نامی از متغیرهای پای‌بند آن به میان نمی‌آوریم.

۲.۲.۱ مقداردهی به متغیرها در ساختارها و محاسبهٔ ترمها

از روی تعریف ترمها، می‌توان حدس زد که وقتی t یک ترم در زبان L است، که در آن از متغیرهای $x_1, \dots, x_n$ استفاده شده است، تعبیر آن در یک ساختار M یک تابع $t^M : M^n \rightarrow M$ را مشخص می‌کند. مثال زیر این گفته را توضیح می‌دهد:

مثال ۸. زبان $L = \{f, g, e\}$ را در نظر بگیرید که در آن f یک نماد تابعی دوموضعی، g یک نماد تابعی تک موضعی، و e یک نماد ثابت است. فرض کنید $t_1 = g(f(x, y))$ و $t_2 = f(g(x), g(e))$ دو ترم باشند. ساختارهای زیر را در نظر بگیرید:

$$1. \mathcal{M}_1 = (\mathbb{R}, +, e^x, 1) \text{ و } \mathcal{M}_2 = (\mathbb{N}, \cdot, s(x) = x + 1, 0)$$

تعبیر ترمهای t_1, t_2 در این دو ساختار به صورت زیر هستند:

$$t_1^{\mathcal{M}_1}(x, y) = e^{x+y}, \quad t_2^{\mathcal{M}_2}(x, y) = e^x + e^1$$

$$t_1^{\mathcal{M}_2}(x, y) = x \cdot y + 1, \quad t_2^{\mathcal{M}_2}(x, y) = (x + 1)(0 + 1).$$

در همین مثال بالا، می‌توانستیم بدون فکر زیادی معنی عبارتی مثل $t_1^{\mathcal{M}_1}(\pi, 5)$ یا عبارتی مثل $t_2^{\mathcal{M}_2}(10, 3)$ را نیز حدس بزنیم. لازم است که در ادامه، همین شهود بالا را دقیق کنیم.

در قرارداد؟؟ گفتیم که var یک مجموعهٔ شمارا از متغیرهاست که در کلمه و فرمول نویسی از آن استفاده می‌شود. فرض کنید M یک ساختار مرتبهٔ اول باشد.

تعریف ۹. به هر تابع

$$\beta : \text{var} \rightarrow M$$

یک نگاشت «مقداردهی متغیرها در ساختار M » گفته می‌شود.

واضح است که این تابع، مشخص می‌کند که برای هر متغیری، مثلاً x ، چه مقداری در جهان M در نظر بگیریم. مقداردهی به متغیرها در یک ساختار منجر به مشخص شدن مقدار ترمها می‌شود: فرض کنید $\beta : \text{var} \rightarrow M$ یک نگاشت مقداردهی به متغیرها باشد، که به طور خاص، به متغیرهای $x_1, \dots, x_n$ به ترتیب مقادیر $a_1, \dots, a_n$ می‌دهد. همچنین فرض کنید t یک ترم باشد که در آن از متغیرهای $x_1, \dots, x_n$ استفاده شده است. همان طور که قبلاً دیده‌ایم، در این صورت: $t^M : M^n \rightarrow M$ یک تابع است. منظورمان از $t^M[\beta]$ ، بخوانید مقدار ترم t در ساختار M با استفاده از نگاشت مقداردهی β ، در حقیقت همان $t^M(a_1, \dots, a_n)$ است.

تعریفی که در بالا برای $t^M[\beta]$ هر چند شهود خوبی به دست می‌دهد، چندان دقیق نیست. در صورتگرایی دقیق منطقی، باید روشی برای تعیین مقدار یک ترم، بر حسب مقدار «همهٔ متغیرها» داشته باشیم. در زیر، عبارت $t^M[\beta]$ را به صورت دقیق و استقرایی تعریف کرده‌ایم.

تعریف ۱۰. فرض کنید M یک ساختار L و $\beta : \text{var} \rightarrow M$ یک نگاشت مقداردهی به متغیرها باشند. عبارت $t^M[\beta]$ به صورت استقرایی روی ترمها به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$1. \text{ اگر } t = x \text{ یک متغیر باشد، آنگاه تعریف می‌کنیم: } t^M[\beta] = \beta(x)$$

$$2. \text{ اگر } t = c \text{ یک ثابت در زبان باشد، آنگاه تعریف می‌کنیم } t^M[\beta] = \beta(x) = c^M$$

$$3. \text{ هرگاه تعبیر } t_1^M[\beta], \dots, t_n^M[\beta] \text{ دانسته باشند و } t = f(t_1, \dots, t_n) \text{ که در آن } f \text{ یک نماد تابعی } n \text{ موضعی است، آنگاه تعریف می‌کنیم:}$$

$$t^M[\beta] = f^M(t_1^M[\beta], \dots, t_n^M[\beta])$$

*تمرین ۷. توضیح دهید که چرا «خوانش یکتای ترمها» برای تعریف بالا ضروری است؟

قرارداد ۱۱. نوشتن متغیرهای به کار رفته در ترم در مقابل آن، گاهی کارها را ساده‌تر و بیشتر شبیه به ریاضیات روزمره می‌کند: وقتی می‌گوییم $t(x_1, \dots, x_n)$ یک ترم است، منظور این است که t یک ترم است و متغیرهایی که در آن استفاده شده است، از میان متغیرهای موجود در مجموعه $\{x_1, \dots, x_n\}$ است؛ هرچند شاید همهٔ این متغیرها استفاده نشده باشند. حال اگر $\beta : \text{var} \rightarrow M$ یک نگاشت مقداردهی باشد به طوری که $\beta(x_1) = a_1, \dots, \beta(x_n) = a_n$ ، در این صورت به جای $t^M[\beta]$ می‌توانیم بنویسیم $t^M(a_1, \dots, a_n)$. دقت کنید که هر چند نماد $t^M(a_1, \dots, a_n)$ بسیار ساده و طبیعی به نظر می‌رسد، اما برای امکان‌پذیر بودن استفاده از استقراء در قضایای بعدی، تعریف دقیق $t^M[\beta]$ به کار می‌آید، زیرا در آن مقدار ترم t بر اساس مقداردهی به همهٔ متغیرها لحاظ شده است.

۳.۲.۱ صدق فرمولها در ساختارها

آیا فرمول $\varphi(x)$ که می‌گوید: « x یک عدد اول است» در مجموعه اعداد طبیعی درست است؟ واضح است که ارزش درست یا غلط این فرمول به مقدار x بستگی دارد؛ مثلاً $\varphi(3)$ درست است، اما $\varphi(4)$ درست نیست. برای تشخیص درستی یک فرمول در یک ساختار، نیاز است که متغیرهای آزاد آن فرمول، مقداردهی شوند.

صدق یک فرمول در یک ساختار L و با یک نگاشت مقداردهی، مطابق با ماهیت استقرائی فرمولها تعریف می‌شود. اما تعریف مورد نظر، علی‌رغم ظاهر پیچیده‌اش، محتوای ساده‌ای دارد. می‌دانیم که یک فرمول، دنباله‌ای از نمادها است. زمانی فرمول φ با مقداردهی β در ساختار M برقرار است، که وقتی به جای نمادهای به کار رفته در فرمول، تعبیرشان را، و به متغیرهای آزاد فرمول، مقادیر تعیین شده توسط β را قرار می‌دهیم، آنچه که توسط فرمول توصیف شده است، در ساختار M رخ دهد. برای این که به خواننده ثابت شود که آنچه را که می‌خواهیم تعریف کنیم از پیش می‌داند، پیش از ارائه تعریف دقیق، مثالهایی از صدق فرمولها در ساختارها آورده‌ایم.

مثال ۱۲. ساختار $M = (\mathbb{R}, e^x)$ را برای زبان $L = \{f\}$ که فقط یک نماد تابعی تک‌متغیره f دارد در نظر بگیرید. فرض کنید $\beta: \text{var} \rightarrow M$ یک تابع مقداردهی باشد که به متغیرهای x و y به ترتیب مقادیر ۱ و e بدهد (البته این تابع به همه سایر متغیرها هم مقدار می‌دهد ولی مقادیر آنها فعلاً برای ما مهم نیست). می‌دانیم که $e^1 = e$. پس می‌گوییم فرمول $y \doteq f(x)$ وقتی x, y با استفاده از نگاشت β در $\mathbb{R}$ مقداردهی شوند، در ساختار M درست است؛ و این واقعیت را به صورت زیر نمایش می‌دهیم.

$$M \models f(x) \doteq y[\beta].$$

مثال ۱۳. فرض کنید $\mathcal{L} = \{R, f, g, c\}$ که در آن R یک نماد رابطه‌ای دو موضعی، f یک نماد تابعی دو موضعی، g یک نماد تابعی تک موضعی و c یک ثابت است. فرمولهای زیر را در نظر بگیرید:

$$\varphi_1 = f(c, g(c)) \doteq c.$$

$$\varphi_2 = R(g(c), g(g(c)))$$

$$\varphi_3 = \exists x g(f(x, x)) \doteq c$$

$$\varphi_4 = \exists y f(g(x), y) \doteq c$$

حال $\mathcal{L}$ ساختارهای $M_1 = (\mathbb{R}, <, +, e^x, 1)$ و $M_2 = (\mathbb{Z}, |, \cdot, s, 0)$ را در نظر بگیرید. زمانی فرمول φ_1 در ساختار M_1 برقرار است که

$$f^{M_1}(c_1^M, g_1^M(c^{M_1})) = c^{M_1}$$

و این یعنی: $1 + e^1 = 1$. اما دانش ما درباره اعداد حقیقی، به ما می‌گوید که این اتفاق نمی‌افتد. پس می‌نویسیم: $M_1 \models \neg \varphi_1$ یا $M_1 \not\models \varphi_1$ (بخوانید: ساختار M_1 مدلی برای فرمول φ_1 نیست). برقراری همین فرمول φ_1 در ساختار M_2 به معنی زیر است:

$$f^{M_2}(c_2^M, g_2^M(c^{M_2})) = c^{M_2}$$

که یعنی $0 = (0 + 1)$. دوباره دانش ما درباره اعداد صحیح به ما می‌گوید که عبارت بالا در آنجا برقرار است؛ پس می‌نویسیم: $M_2 \models \varphi_1$ (بخوانید: ساختار M_2 مدلی برای فرمول φ_1 است). می‌توانیم اتفاقاتی بالا را به صورت زیر هم بنویسیم:

$$(\mathbb{R}, <, +, e^x, 1) \models f(c, g(c)) = c$$

و

$$(\mathbb{Z}, |, \cdot, s, 0) \models f(c, g(c)) = c$$

حال صدق فرمول φ_2 را، البته به بیان خلاصه‌تر بررسی می‌کنیم. در ساختار M_1 برقرار بودن φ_2 به این معنی است که $e < e^e$ ؛ $M_1 \models \varphi_2$. در ساختار M_2 برقراری فرمول φ_2 به این معنی است که $1|2$ ؛ پس $M_2 \models \varphi_2$. فرمول φ_3 در ساختار M_1 به این معنی است: $\exists x e^{2x} = 1$ ؛ بنا به پوشا بودن تابع نمائی در اعداد حقیقی، چنین x پیدا می‌شود، پس $M_1 \models \varphi_3$. همین فرمول در ساختار M_2 به معنی زیر است: $\exists x x^2 + 1 = 0$. می‌دانیم که چنین x در $\mathbb{Z}$ وجود ندارد؛ پس $M_2 \models \neg \varphi_3$.

بررسی فرمول φ_4 نیاز به دقت بیشتری دارد. این فرمول، دارای متغیر آزاد x است و در $\mathcal{M}_1$ چنین معنی می‌شود:

$$\exists y \quad e^y + x = 1$$

نیز در ساختار $\mathcal{M}_2$ فرمول یادشده، به معنی زیر است:

$$\exists y \quad (y + 1) \cdot x = 0$$

تشخیص درستی فرمول φ_4 در این دو ساختار، منوط به دانستن مقدار x است. در واقع نیاز به یک نگاشت مقداردهی در هر یک این ساختارها هست که به ما بگوید به جای x چه مقداری باید قرار داد. نگاشتهای مقداردهی زیر را در نظر بگیرید:

$$\beta_1 : var \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\beta_2 : var \rightarrow \mathbb{Z}$$

به گونه‌ای باشند که $\beta_1(x) = \sqrt{2}, \beta_2(x) = 3$. مطلوب است که مقدار β_1, β_2 را روی سایر متغیرها را بدانیم ولی به دلایلی که روشن خواهد شد، این مقادیر فعلاً برایمان اهمیت ندارد. وقتی فرمول φ_4 را با نگاشت مقداردهی β_1 در ساختار $\mathcal{M}_1$ در نظر می‌گیریم، معنایش به صورت زیر است:

$$\exists y \quad e^y + \sqrt{2} = 1$$

چنین y در اعداد حقیقی پیدا نمی‌شود؛ پس می‌نویسیم:

$$\mathcal{M}_1 \models \varphi_3[\beta_1]$$

به عنوان یک تمرین ساده تحقیق کنید که فرمول φ_4 با نگاشت ارزیابی β_2 در ساختار $\mathcal{M}_2$ به معنی زیر است:

$$\exists y \quad 4 \cdot y = 0$$

و از این رو $\mathcal{M}_2 \models \varphi_4[\beta_2]$.

تا اینجا تلاشمان بر این بود که خواننده را توجیه کنیم که فرایند معنا کردن فرمولها در ساختارها به صورتی بسیار طبیعی صورت می‌گیرد. اما، دوباره برای مصالح منطقی نیاز است که تعریف صدق فرمولها در ساختار به صورت دقیق و استقرائی زیر بیان شود.

تعریف ۱۴. فرض کنید $\mathcal{L}$ یک زبان مرتبه اول، $\mathcal{M}$ یک $\mathcal{L}$ ساختار، φ یک $\mathcal{L}$ فرمول، و β یک نگاشت مقداردهی متغیرها در جهان $\mathcal{M}$ باشند. عبارت $\mathcal{M} \models \varphi[\beta]$ که خوانده می‌شود فرمول φ در $\mathcal{L}$ ساختار $\mathcal{M}$ وقتی متغیرها توسط تابع β مقداردهی می‌شوند برقرار است، یا $\mathcal{L}$ ساختار $\mathcal{M}$ مدلی برای فرمول φ تحت مقداردهی β است، به صورت استقرائی زیر تعریف می‌شود:

• می‌گوییم

$$\mathcal{M} \models t_1 \doteq t_2[\beta]$$

هرگاه

$$t_1^{\mathcal{M}}[\beta] = t_2^{\mathcal{M}}[\beta].$$

• اگر فرمول φ به صورت $R(t_1, \dots, t_n)$ باشد که در آن R یک نماد رابطه‌ای n موضعی در زبان است و t_i ها ترم هستند آنگاه می‌گوییم

$$\mathcal{M} \models R(t_1, \dots, t_n)[\beta]$$

هرگاه

$$(t_1^{\mathcal{M}}[\beta], \dots, t_n^{\mathcal{M}}[\beta]) \in R^{\mathcal{M}}.$$

• اگر فرمول φ به صورت $\neg \psi$ باشد و معنای این که $\mathcal{M} \models \psi[\beta]$ را برای هر تابع مقداردهی β بدانیم آنگاه تعریف می‌کنیم $\mathcal{M} \models \varphi[\beta]$ هرگاه $\mathcal{M} \not\models \psi[\beta]$.

- فرض کنید که فرمول φ به صورت $(\psi_1 \wedge \psi_2)$ باشد و معنای $M \models \psi_1[\beta]$ و $M \models \psi_2[\beta]$ را برای هر تابع مقداردهی β بدانیم. در این صورت تعریف می‌کنیم $M \models \varphi[\beta]$ هرگاه همزمان $M \models \psi_1[\beta]$ و $M \models \psi_2[\beta]$.
- فرض کنید فرمول φ به صورت $\exists x \psi$ باشد و معنای $M \models \psi[\beta]$ را برای هر نگاشت مقداردهی β بدانیم. در این صورت تعریف می‌کنیم $M \models \varphi[\beta]$ یک عنصر $a \in M$ موجود باشد به طوری که

$$M \models \psi[\beta \frac{a}{x}].$$

که در آن $\beta \frac{a}{x} : \text{var} \rightarrow M$ یک نگاشت مقداردهی جدید است که روی همه متغیرها غیر از متغیر x مانند نگاشت مقداردهی β عمل می‌کند ولی $\beta \frac{a}{x}(x) = a$.

در مورد تعریف بالا ذکر نکات زیر را ضروری می‌دانیم.

۱. قبلاً گفته بودیم که وقتی که متغیرهای آزاد فرمول φ در بین $x_1, \dots, x_n$ باشد آنگاه، این فرمول را به صورت $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ نشان می‌دهیم. حال فرض کنید که β یک نگاشت مقداردهی در ساختار M باشد که به هر متغیر x_i مقدار a_i را داده است. در این صورت راحت‌تر است که به جای $M \models \varphi[\beta]$ بنویسیم:

$$M \models \varphi(a_1, \dots, a_n).$$

در ادامه کتاب از این نمادگذاری هم زیاد استفاده خواهیم کرد، مگر زمانهایی که نیاز به دقت بیشتری داشته باشیم. در نمایش بالا یک نکته به طور ضمنی نهفته است و آن این است که عبارت $M \models \varphi[\beta]$ به مقداری که β به متغیرهای غیر از متغیرهای استفاده شده در فرمول φ ، می‌دهد وابسته نیست. این گفته را در قضیه ۱۵ دقیق کرده‌ایم.

۲. اگر φ یک فرمول مرتبه اول، M یک ساختار، و β یک نگاشت مقداردهی به متغیرها در M باشد، آنگاه یا $M \models \varphi[\beta]$ یا $M \models \neg \varphi[\beta]$ و هرگز این دو اتفاق با همدیگر رخ نمی‌دهند (در واقع بنا به تعریف، رخ دادن یکی به معنی عدم رخ دادن دیگری است). در واقع ساختار مرتبه اول، بنا به تعریف، قرار نیست که محل رخ دادن تناقض باشد.

۳. بنا به تمرین ۱۵ درستی یک فرمول در یک ساختار به مقداردهی متغیرهایش بستگی دارد. اما وقتی فرمول ما، مانند سه فرمول اول در مثال ۱۳ هیچ متغیر آزادی نداشته باشد، درستی آن، به نگاشتهای مقداردهی بستگی ندارد. در واقع متغیری وجود ندارد که مقدار گرفتیش بخواهد تأثیری در صدق فرمول داشته باشد. تعریف بعدی به این موضوع پرداخته است.

*تمرین ۸. آیا می‌توانید توضیح دهید که چرا «خوانش یکتای فرمول‌ها» برای تعریف بالا ضروری است؟

قضیه ۱۵. فرض کنید φ یک فرمول و β_1, β_2 دو نگاشت مقداردهی به متغیرها در ساختار M باشند به طوری که برای هر متغیر آزاد x در فرمول φ داشته باشیم $\beta_1(x) = \beta_2(x)$. (یعنی هر دو نگاشت روی متغیرهای آزاد استفاده شده در φ هم مقدار باشند). در این صورت $M \models \varphi[\beta_1]$ اگر و تنها اگر $M \models \varphi[\beta_2]$.

اثبات. حکم را به استقراء روی پیچیدگی فرمول φ اثبات می‌کنیم. نخست دقت کنید که اگر t یک ترم باشد و β یک نگاشت مقداردهی دلخواه به متغیرها، آنگاه مقدار $t^M[\beta]$ فقط به متغیرهای به کار رفته در ترم t بستگی دارد. بنابراین اگر فرمول φ فرمولی به صورت $t_1 = t_2$ باشد. واضح است که $t_1^M[\beta_1] = t_1^M[\beta_2]$ و $t_2^M[\beta_1] = t_2^M[\beta_2]$ پس $M \models t_1 = t_2[\beta_1]$ اگر و تنها اگر $M \models t_1 = t_2[\beta_2]$. حال نیاز است که موارد زیر را اثبات کنیم:

- اگر فرمول ϕ به صورت $\neg \psi$ باشد و حکم برای فرمول ψ برقرار باشد، آنگاه حکم برای فرمول ϕ هم برقرار است.
- اگر فرمول φ به صورت $(\psi_1 \wedge \psi_2)$ باشد و حکم برای فرمولهای ψ_1 و ψ_2 برقرار باشد، آنگاه حکم برای فرمول φ هم برقرار است.
- اگر فرمول φ به صورت $\exists x \psi$ باشد و حکم برای فرمول ψ برقرار باشد، آنگاه حکم برای φ نیز برقرار است.

اثبات دو مورد اول را به عنوان تمرین رها تنها به اثبات مورد سوم بسنده می‌کنیم.

فرض کنید $M \models \exists x \psi[\beta_1]$ در این صورت، بنا به تعریف، $M \models \psi[\beta_1 \frac{a}{x}]$ برای یک $a \in M$. بنا به فرض استقراء، $M \models \psi[\beta_2 \frac{a}{x}]$ زیرا دو نگاشت ارزیابی $\beta_1[\frac{a}{x}]$ و $\beta_2[\frac{a}{x}]$ روی تمام متغیرهای آزاد فرمول ψ ، که البته، x هم می‌تواند یکی از آنها باشد، هم مقدار هستند. اما عبارت $M \models \psi[\beta_2 \frac{a}{x}]$ یعنی $M \models \exists x \psi[\beta_2]$.

□

تعریف ۱۶. به فرمولی که هیچ متغیر آزادی نداشته باشد، جمله گفته می‌شود.

ملاحظه ۱۷. فرض کنید φ یک $\mathcal{L}$ جمله باشد. در این صورت بنا به قضیه ۱۵، از آنجا که β هیچ متغیر آزادی ندارد، برای هر دو نگاشت ارزش‌دهی β_1, β_2 داریم $\mathcal{M} \models \varphi[\beta_1]$ اگر و تنها اگر $\mathcal{M} \models \varphi[\beta_2]$. یعنی برقراری یک جمله، به نگاشتهای ارزیابی بستگی ندارد. در این صورت وقتی می‌نویسیم $\mathcal{M} \models \varphi$ منظورمان این است که $\mathcal{M} \models \varphi[\beta]$ برای یک نگاشت مقداردهی β (و معادلاً برای هر نگاشت مقداردهی β).

این ویژگی جمله‌ها که ارزششان به نگاشتهای مقداردهی بستگی ندارد، اهمیت آنها را در بررسی پدیده‌های منطقی آشکار می‌کند. در درسهای آینده معنای این گفته به طور خودکار برای خواننده مشخص خواهد شد.

نتیجه ۱۸. فرض کنید φ یک $\mathcal{L}$ جمله و $\mathcal{M}$ یک ساختار باشد. در این صورت یا $\mathcal{M} \models \varphi$ یا $\mathcal{M} \models \neg\varphi$.

تمرین ۹. زبان $L = \{f, 0\}$ را در نظر بگیرید و فرض کنید $\mathcal{M} = (M, f^{\mathcal{M}}, 0^{\mathcal{M}})$ یک ساختار باشد. فرمول φ را به گونه‌ای بنویسید که داشته باشیم: $\mathcal{M} \models \varphi$ اگر و تنها اگر تابع $f^{\mathcal{M}}$ یک تابع یک‌به‌یک و پوشا باشد.

تمرین ۱۰. نشان دهید که $\mathcal{M} \models (\varphi \rightarrow \psi)[\beta]$ اگر و تنها اگر از $\mathcal{M} \models \varphi[\beta]$ نتیجه شود $\mathcal{M} \models \psi[\beta]$.

تمرین ۱۱. فرض کنید $L = \{f, <, 0\}$ یک زبان مرتبه اول باشد و $\mathcal{M} = (M, f^{\mathcal{M}}, <^{\mathcal{M}}, 0^{\mathcal{M}})$ را به عنوان یک ساختار در نظر بگیرید. فرض کنید که $<^{\mathcal{M}}$ یک ترتیب خطی روی مجموعه M باشد. فرمول $\varphi(x)$ را به گونه‌ای بنویسید که داشته باشیم: $\mathcal{M} \models \varphi(a)$ اگر و تنها اگر تابع $f^{\mathcal{M}}$ در نقطه a پیوسته باشد.

تمرین ۱۲. زبان $L = \{f\}$ را در نظر بگیرید که در آن f یک نماد تابعی دو موضعی است. فرمول $\exists y f(y, y) = x$ به ترتیب در دو ساختار $(\mathbb{N}, +)$ و $(\mathbb{N}, \cdot)$ چه معنایی دارد؟

تمرین ۱۳. زبان $L = \{+, \cdot, 0\}$ را در نظر بگیرید.

۱. فرمول $\varphi(x, y)$ را به گونه‌ای بنویسید که $(\mathbb{R}, +, \cdot, 0) \models \varphi(a, b)$ اگر و تنها اگر $a < b$.

۲. برای فرمول $\varphi(x, y)$ که در پاسخ قسمت اول نوشته‌اید، بررسی کنید که آیا عبارت پیش رو درست است: $(\mathbb{Z}, +, \cdot, 0) \models \varphi(a, b)$ اگر و تنها اگر $a < b$.

تمرین ۱۴.

۱. فرمول $\varphi(x, y)$ را در زبان $L = \{<\}$ به گونه‌ای بنویسید که در ساختار $\mathcal{N} = (\mathbb{N}, <)$ داشته باشیم $\mathcal{N} \models \varphi(a, b)$ اگر و تنها اگر $b = a + 1$. حال ساختار $\mathcal{Q} = (\mathbb{Q}, <)$ را در نظر بگیرید. آیا برای همان فرمول $\varphi(x, y)$ عبارت پیش رو درست است: $\mathcal{Q} \models \varphi(a, b)$ اگر و تنها اگر $b = a + 1$.

۲. نشان دهید که $\mathcal{Q} \models \forall x, y \neg\varphi(x, y)$.

*تمرین ۱۵. فرض کنید $f(p_1, \dots, p_n)$ یک تاتولوژی در منطق گزاره‌ها باشد و $\psi_1, \dots, \psi_n$ فرمولهایی در منطق مرتبه اول و در زبان L باشند. نیز فرض کنید که $\mathcal{M}$ یک ساختار باشد. نشان دهید که برای هر نگاشت مقداردهی $\beta : \text{var} \rightarrow M$ داریم $\mathcal{M} \models f(\psi_1, \dots, \psi_n)[\beta]$.

نگارنده، هم بنا به تجربیات دانشجویی خود و هم بنا به سوالاتی که دانشجویانش عموماً می‌پرسند، با نوع دغدغه‌هایی که احتمالاً ذهن خواننده را به خود درگیر کرده، مطلع است اما اشاره و پاسخ دادن به هر نوع از آنها را به مکان مناسبی موکول کرده است. در زیر به دو نوع چنین دغدغه‌هایی اشاره شده است.

فرض کنید که $\mathcal{L}$ یک زبان مرتبه اول و $\mathcal{L}$ یک ساختار باشد. عبارت $\mathcal{M} \models \varphi$ را در نظر بگیرید. در این عبارت φ یک جمله یا فرمول در زبان $\mathcal{L}$ است. اما خود عبارت $\mathcal{M} \models \varphi$ یک جمله یا فرمول در زبان $\mathcal{L}$ نیست؛ و این واضح است زیرا نماد $\models$ در زبان $\mathcal{L}$ نیست. در واقع وقتی می‌نویسیم $\mathcal{M} \models \varphi$ از زبان مرتبه اول $\mathcal{L}$ استفاده نکرده‌ایم اما چنین گفته‌ایم که جمله φ که در زبان $\mathcal{L}$ است در ساختار $\mathcal{M}$ درست است. انگار این جمله در یک زبان، فرای زبانی که جمله φ در آن نوشته شده است بیان شده است. اما این فرازبان چیست و همه عبارات ریاضی‌ای که در این درس نوشته می‌شوند در چه زبانی هستند؟ در این لحظه پاسخ این سوال را نخواهیم داد، اما به عنوان مثال به یک وضعیت مشابه اشاره می‌کنیم. جمله زیر را در نظر بگیرید:

عبارت $A \text{ horse is an animal}$ از پنج کلمه تشکیل شده است.

جمله بالا جمله‌ای در زبان فارسی محسوب می‌شود اما در عین حال درباره جمله‌ای در زبان انگلیسی صحبت می‌کند!

مورد دیگری که احتمالاً تا اینجا این نوشته، مورد سوال خواننده بوده باشد، این است که در تعریف یک زبان مرتبه اول و یک L ساختار آمده است که اینها مجموعه هستند. اما احتمالاً برای دانستن این که مجموعه چیست، نیز نیاز به منطق داشته باشیم. پس آیا اول باید نظریه مجموعه‌ها را تدریس می‌کردیم سپس منطق را؟

به خواننده قول می‌دهیم که پرسشهای از این قبیل در این نوشتار بی‌پاسخ نخواهند ماند، و چه بسا پاسخ دادن به این سوالات جزو انگیزه‌های به نگارش درآمدن این کتاب باشد.

در فصل قبلی گفتیم که برای سخن گفتن در منطق مرتبه اول نیاز است که مجموعه‌ای از علائم داشته باشیم و قاعده‌هایی برای این که با آن علائم کلمه و جمله بسازیم؛ اما این کلمه‌ها معنایی ندارند. معنای کلمه، چیزی مستقل از خود کلمه است. برای معنا کردن کلمات و جملات در منطق ریاضی، نیاز به جهان‌هایی (واقعی یا ذهنی) داریم که در آنها کلمات و مفاهیم مورد نظر ما مابازاء داشته باشند. برای مثال، وقتی به کسی می‌گوییم، گربه روی میز است، این شخص باید تصویری از گربه، میز، و این که چیزی روی چیزی هست داشته باشند. برای مثال، جمله ما را بفهمد. در ضمن ممکن است افراد مختلف، بنا به جهان ذهنی یا واقعی خودشان از یک جمله، درکهای مختلفی داشته باشند؛ ولی در این حال هم می‌توانند معنایی برای جمله ما متصور شوند. مثلاً کسی که فکر می‌کند گربه، سگ است، باز هم معنایی از جمله گربه روی میز است در ذهنش دارد: فکر می‌کند سگ روی میز است!

اگر M یک جهان ذهنی یا واقعی باشد و جمله φ در آن درست باشد، می‌نویسیم:

$$M \models \varphi.$$