

منطق ریاضی، تدریس سوم

محسن خانی

۳ مهر ۱۴۰۲

فهرست مطالب

۱	زبان، کلمه، جمله، فرمول	۱۰۰
۴	ساختار، تعبیر، ایزومرفیسم	۲۰۰
۹	ساختار تولید شده	۳۰۰
۹	تعریف پذیری، معادل بودن مقدماتی، قضیه ایزومرفیسم	۴۰۰
۱۰	فرمولهای معادل و فرمولهای همواره درست	۵۰۰
۱۱	تئوری‌ها	۶۰۰
۱۲	التزام منطقی، تئوری‌های کامل، تئوری‌های تصمیم‌پذیر	۷۰۰
۱۳	قضیه فشردگی و برخی نتایج آن	۸۰۰
۱۴	تئوریهای جازم	۹۰۰
۱۴	سامانه‌های رفت و برگشتی	۱۰۰۰
۱۵	بازیهای اهغن فویشست فراسه	۱۱۰۰
۱۶	۱ فرافیلترها و اثبات فشردگی	
۱۷	۲ نظریه اثبات و اثبات فشردگی	
۱۹	تعریف اثبات پذیری	۱۰۲
۲۰	تقویت دستگاه هیلبرت	۲۰۲
۲۱	تئوری هنگینی	۳۰۲
۲۱	بیشینگی	۴۰۲
۲۱	اثبات قضیه تمامیت	۵۰۲
۲۱	معرفی تصمیم‌پذیری	۶۰۲
۲۳	۳ نظریه بازگشت و ناتمامیت اول گودل	
۲۳	معرفی ماشین ثبت	۱۰۳
۲۳	معرفی توابع بازگشتی	۲۰۳
۲۵	۴ حذف سور در حساب پرسبرگر	
۲۶	۵ تمرینهای تحویلی	
۲۶	تمرین نوبت اول، زمان تحویل پنج‌شنبه ۱۵ مهر ساعت ۲۴	۱۰۵
۲۷	تمرین نوبت دوم، مهلت تحویل دوشنبه ۳ آبان	۲۰۵
۲۸	تمرین نوبت سوم، تحویل: پنج‌شنبه ۲۰ آبان	۳۰۵
۲۸	تمرین نوبت چهارم، تحویل: دوشنبه ۸ آذر	۴۰۵
۲۹	تمرین نوبت پنجم، تحویل: دوشنبه ۲۹ آذر	۵۰۵

۶.۵ امتحان میان‌ترم درس منطق ریاضی، پنج‌شنبه ۲۵ آذر ۳۰

چکیده

این جزوه مربوط به تدریس سوم درس منطق توسط من در دانشگاه صنعتی اصفهان است. این بار رویکرد نظریه مدلی بر جزوه غالب است. توجه کنید که این جزوه به صورت خلاصه، و بیشتر برای حفظ نظام فکری مدرس نوشته شده است و فهم آن به صورت خودخوان آسان نخواهد بود و حضور در کلاس برای فهم بهتر این جزوه ضروری است. منابع زیر ممکن است در درک درس به شما کمک کند (پیوندها قابل کلیک هستند).

- منطق (خانی) (جزوه مربوط به اولین تدریس)
<https://mohsen-khani.github.io/logic97-1/jozve/logic-full.pdf>
- کلاسهای درس منطق در تدریس دوم
<https://www.aparat.com/playlist/295290>
- کتاب مارتین زیگلر (به زبان آلمانی)
https://www.buecher.de/shop/logik/mathematische-logik-ebook-pdf/ziegler-martin/products_products/detail/prod_id/44621005/
- کتاب فلوم و ابینگهاوس
<https://www.springer.com/gp/book/9780387942582>
- کتاب نظریه مدل مارکر
<https://www.springer.com/gp/book/9780387987606>
- کتاب اندرتون
<https://www.sciencedirect.com/book/9780122384523/a-mathematical-introduction-to-logic>
- کتاب مندلسون
https://books.google.com/books/about/Introduction_to_Mathematical_Logic.html?id=Z01p4QGspoYC&source=kp_book_description
- مبانی ریاضی (خانی)
<https://mohsen-khani.github.io/mabani-riyazi/jozve/mabanikol.pdf>

۱.۰ زبان، کلمه، جمله، فرمول

تعریف ۱. منظور از یک زبان مرتبه اول، مجموعه‌ای متشکل از نمادهایی تابعی، نمادهایی رابطه‌ای و نمادهایی برای ثوابت است. برای هر نماد رابطه‌ای و هر نماد تابعی یک عدد طبیعی، مشخص کننده تعداد مواضع گرفته می‌شود.

مثال ۱.

$$۱. L_{\emptyset} = \emptyset$$

۲. $L = \{f, g, R, c\}$ که در آن f یک نماد تابعی تک متغیره، g یک نماد برای یک تابع دو متغیره، R یک نماد برای یک رابطه دو موضعی، و c یک نماد ثابت است.

$$۳. L_R = \{0, 1, +, -, \cdot\}$$

$$۴. L_G = \{e, *, ^{-1}\}$$

$$۵. L_O = \{<\}$$

$$۶. L_{OR} = L_R \cup L_O$$

$$۷. L_{\mathbb{N}} = \{0, S, +, \cdot, <\}$$

$$۸. L_{set} = \{\in\}$$

یک مجموعه متغیر، متشکل از $v_0, v_1, \dots$ را در نظر داشته باشید.

تعریف ۲ (کلمات، یا ترمها). فرض کنید که L یک زبان مرتبه اول باشد. منظور از یک L کلمه، یک یک L ترم، دنباله‌ای متناهی از علائم است که با استفاده از قوانین زیر به دست آمده است:

۱. هر متغیر یک L ترم است.

۲. هر نماد ثابت در L یک L ترم است.

۳. اگر $t_1, \dots, t_n$ تعداد n تا L ترم باشند و f یک نماد تابعی n موضعی در L باشد، آنگاه $ft_1 \dots t_n$ یک L ترم است.

مثال ۲. ترمها را در زبانهای زیر مورد بررسی قرار دهید.

• $L = \{R\}$ که در آن R یک نماد رابطه‌ای دو موضعی است.

• $L = \{s\}$ که در آن s یک نماد تابعی تک متغیره است.

• $L = \{+\}$ که در آن $+$ یک نماد تابعی دو موضعی است. بررسی کنید که ترمی که به معنی $3v$ را می‌توان به چند طریق متفاوت نوشت؟ ترمی که به معنی $(v_1 + v_2) + v_3$ است چه فرقی دارد با ترمی که به معنی $v_3 + (v_1 + v + 2)$ است؟

• $L = \{+, 0\}$ که در آن $+$ یک نماد تابعی دو موضعی و 0 یک ثابت است.

• $L = \{+, \cdot\}$ که در آن $+$ نمادهای تابعی دو موضعی هستند.

• $L = \{+, \cdot, 0, 1\}$ که در آن $+$ نمادهای تابعی دو موضعی و $0, 1$ نمادهای ثابت هستند.

• $L = \{f, g, R\}$ که در آن f یک نماد تابعی تک موضعی، g یک نماد تابعی دو موضعی و R یک نماد رابطه‌ای سه موضعی است.

• $L = \{s, +, 0, <\}$ که در آن s یک نماد تابعی تک موضعی، $+$ یک نماد تابعی دو موضعی، 0 یک ثابت و $<$ یک نماد رابطه‌ای دو موضعی است.

لم ۱. هیچ ترمی بخش ابتدائی ترم دیگری نیست.

قضیه ۱ (خوانش یکتای ترمها). فرض کنید که t یک L ترم باشد. در این صورت یکی از حالات زیر رخ می‌دهد:

۱. t یک ثابت در زبان است.

۲. t یک متغیر است.

۳. $t = ft_1 \dots t_n$ که در آن f یک نماد تابعی n موضعی است و $t_1, \dots, t_n$ ترمهایی در زبان L هستند.

در حالت آخر تابع f و ترمهای $t_1, \dots, t_n$ یکتا هستند.

برای ساختن L فرمولها از نمادهای موجود در زبان L به همراه پرانتزهای باز و بسته و نمادهای منطقی زیر استفاده می‌شود:

۱. متغیرها: $v_0, v_1, \dots$

۲. علامت تساوی: $\doteq$

۳. رابطهای نفیض و عطف: $\neg, \wedge$

۴. سور وجودی.

در ادامه به صورت مرحله به مرحله، روش دقیق فرمول‌نویسی در یک زبان مرتبه اول L را توضیح داده‌ایم.

تمرین ۱. نشان دهید که $t = v_0 v_1$ یک ترم نیست. (راهنمایی: نشان دهید که مجموعه ترمها منهای این ترم برابر با مجموعه ترمهاست).

تعریف ۳ (فرمولهای اتمی). L فرمولهای اتمی به روش زیر ساخته می‌شوند.

۱. اگر t_1, t_2 دو L ترم باشند، آنگاه $t_1 \doteq t_2$ یک L فرمول اتمی است.

۲. اگر R یک نماد رابطه‌ای n موضعی در زبان L باشد و $t_1, \dots, t_n$ ترمهایی در زبان L باشند، آنگاه $Rt_1 \dots t_n$ یک L فرمول اتمی است.

تعریف ۴ (L فرمولها). L فرمولها با استفاده از قواعد زیر ساخته می‌شوند:

۱. فرمولهای اتمی جزو L فرمولها هستند.

۲. اگر ψ یک L فرمول باشد، آنگاه $\neg\psi$ نیز یک L فرمول است.

۳. اگر ψ_1, ψ_2 دو L فرمول باشند، آنگاه $(\psi_1 \wedge \psi_2)$ یک L فرمول است.

۴. اگر ψ یک L فرمول و x یک متغیر باشد، آنگاه $\exists x\psi$ یک L فرمول است.

تعریف ۵. فرمولهائی را که در ساخت آنها تنها از قوانین ۱ تا ۳ استفاده شده است، فرمولهای بدون سور می‌نامیم.

تمرین ۲. فرمولها را در زبانهای زیر مورد بررسی قرار دهید. علامتهای $+$, $\cdot$ ، نمادهای تابعی دوموضعی هستند و $<$ یک نماد رابطه‌ای است و 0 یک نماد ثابت است.

$$1. L = \{+, 0\}$$

$$2. L = \{+, \cdot, 0\}$$

$$3. L = \{+, \cdot, <, 0\}$$

$$4. L = \{<\}$$

تمرین ۳. در زبان $L = \{+, \cdot\}$ یک ترم بنویسید که یادآور چندجمله‌ای $2xw^2 + xy^3z$ باشد.

از نمادهای زیر برای کوتاه‌نویسی استفاده خواهیم کرد:

$$(\psi_1 \vee \psi_2) = \neg(\neg\psi_1 \wedge \neg\psi_2)$$

$$(\psi_1 \rightarrow \psi_2) = (\psi_1 \vee \neg\psi_2).$$

$$(\psi_1 \leftrightarrow \psi_2) = (\psi_1 \rightarrow \psi_2) \wedge (\psi_2 \rightarrow \psi_1)$$

گاهی به جای Rt_1t_2 خواهیم نوشت t_1Rt_2 . به جای $\exists x_1 \dots \exists x_n$ خواهیم نوشت $\exists x_1 \dots x_n$. گاهی برای راحت‌تر خوانده شدن فرمولها از پرانتزهای بیشتری استفاده می‌کنیم. با این حال گاهی هم از گذاشتن پرانتز صرف‌نظر می‌کنیم. در حالت دوم ترتیب اهمیت زیر را برای ادوات منطقی در نظر می‌گیریم:

$$\neg, \exists, \forall$$

$$\wedge, \vee$$

$$\rightarrow, \leftrightarrow.$$

در میان نمادهایی که در یک خط آمده‌اند هر کدام زودتر ظاهر شوند اولویت خواهند داشت.

تمرین ۴. فرمولهای زیر را پرانتزگذاری کنید:

$$\bullet \neg\phi \wedge \psi \rightarrow \chi$$

$$\bullet \forall x R(x, y) \rightarrow \exists y S(y, z) \wedge t(u, v)$$

$$\bullet \exists x R(x, y) \wedge f(x) \doteq y \rightarrow \forall y R(x, y)$$

تمرین ۵. از کدام فرمول زیر می‌توان پرانتزها را برداشت بی‌آنکه فرمول عوض شود.

$$\bullet (\exists x R(x, y)) \rightarrow S(y, z)$$

$$\bullet \exists x (R(x, y) \rightarrow S(y, z))$$

$$\bullet \exists x, y (R(x, y) \wedge S(x, y)) \rightarrow x \doteq y$$

لم ۲. هیچ فرمولی، بخش ابتدائی فرمول دیگری نیست.

قضیه ۲ (خوانش یکتای فرمولها). برای هر L فرمول ϕ یکی از موارد زیر رخ می‌دهد.

- ترمهای t_1, t_2 وجود دارند به طوری که $\phi = t_1 \doteq t_2$.
 - رابطه n موضعی R و ترمهای $t_1, \dots, t_n$ موجودند به طوری که $\phi = Rt_1 \dots t_n$.
 - فرمول ψ موجود است به طوری که $\phi = \neg\psi$.
 - فرمولهای ψ_1, ψ_2 موجودند به طوری که $\phi = (\psi_1 \wedge \psi_2)$.
 - فرمول ψ و متغیر x موجودند به طوری که $\phi = \exists x\psi$.
- ترمهای $t_1, \dots, t_n$ ، رابطه R ، فرمولهای ψ, ψ_1, ψ_2 در بالا یکتا هستند.
با استفاده از قضیه بالا، استقرا روی فرمولها توضیح داده شود.

۲.۰ ساختار، تعبیر، ایزومرفیسم

تعریف ۶. فرض کنید که L یک زبان مرتبه اول باشد. یک ساختار $\mathfrak{M}$ مفاهیم زیر را در بر می گیرد.

۱. یک مجموعه ناتمامی M که آن را جهان L ساختار $\mathfrak{M}$ می نامیم.
۲. برای هر نماد تابعی n_f موضعی $f \in L$ یک تابع $f^{\mathfrak{M}} : M^{n_f} \rightarrow M$.
۳. برای هر رابطه n_R موضعی $R \in L$ یک مجموعه $R^{n_R} \subseteq M^{n_R}$.
۴. برای هر نماد ثابت $c \in L$ یک عنصر $c^{\mathfrak{M}} \in M$.

معمولاً یک L ساختار $\mathfrak{M}$ را به صورت

$$\mathfrak{M} = (M, f^{\mathfrak{M}}, R^{\mathfrak{M}}, c^{\mathfrak{M}} : f, R, c \in L)$$

نمایش می دهیم و $f^{\mathfrak{M}}, R^{\mathfrak{M}}, c^{\mathfrak{M}}$ را به ترتیب تعبیر نماد تابعی f ، تعبیر نماد رابطه ای R و تعبیر ثابت c در ساختار $\mathfrak{M}$ می نامیم. وقتی ساختار $\mathfrak{M}$ را به صورت بالا می نویسیم به طور ضمنی، زبان را نیز مشخص کرده ایم.

مثال ۳. برای زبان $L = \{R\}$ هر گراف و هر مجموعه مرتب یک L ساختار است.

مثال ۴. برای زبان $L = \{f, g, R\}$ موارد زیر L ساختار هستند.

$$۱. \mathfrak{N} = (\mathbb{N}, +, s, <)$$

$$۲. \mathfrak{R} = (\mathbb{R}, \cdot, e^x, >)$$

مثال ۵. برای زبان $L = \{e, \cdot\}$ موارد زیر L ساختار هستند.

$$۱. \mathfrak{R} = (\mathbb{R}, \cdot, 1)$$

$$۲. \mathfrak{R} = (\mathbb{R}, +, 15)$$

$$۳. \mathfrak{N} = (\mathbb{N}, \cdot, 1)$$

$$3 = (\mathbb{Z}, +, 0) \quad 4.$$

مثال ۶. برای زبان L_{OR} ساختار $(\mathbb{R}, +, -, \cdot, 0, 1)$ $\mathfrak{R} =$

مثال ۷. برای زبان $L = \{s\}$ دو ساختار $\mathfrak{N} = (\mathbb{N}, x \mapsto x + 1)$ و $\mathfrak{R} = (\mathbb{R}, e^x)$

از این به بعد وقتی $\mathfrak{M}$ یک L ساختار است جهان آن، M را دانسته فرض کرده‌ایم.

تعریف ۷ (نشاندن). فرض کنید $\mathfrak{M}, \mathfrak{N}$ دو L ساختار باشند. می‌گوییم $\mu : \mathfrak{M} \rightarrow \mathfrak{N}$ یک L نشانندن است هرگاه $\mu : M \rightarrow N$ یک تابع یک به یک باشد به طوری که

$$1. \quad \mu(f^{\mathfrak{M}}(a_1, \dots, a_{n_f})) = f^{\mathfrak{N}}(\mu(a_1), \dots, \mu(a_{n_f})) \quad a_1, \dots, a_{n_f} \in M$$

$$2. \quad (a_1, \dots, a_{m_R}) \in R^{\mathfrak{M}} \text{ اگر و تنها اگر } (\mu(a_1), \dots, \mu(a_{m_R})) \in R^{\mathfrak{N}} \text{ برای هر رابطه } R \in L$$

و هر $a_1, \dots, a_{m_R} \in M$

$$3. \quad \mu(c^{\mathfrak{M}}) = c^{\mathfrak{N}} \text{ برای هر ثابت } c \in L$$

هر L نشانندن پوشا را یک L ایزومرفیسم می‌نامیم. اگر $M \subseteq N$ و نگاشت همانی از M به N یک L نشانندن باشد، می‌گوییم $\mathfrak{M}$ یک زیرساختار از $\mathfrak{N}$ است و می‌نویسیم $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{N}$.

$$\text{مثال ۸. } (\mathbb{Z}, +, 0) \subseteq (\mathbb{R}, +, 0) \subseteq (\mathbb{C}, +, 0)$$

مثال ۹. در زبان $L = \{*, e\}$ تابع e^x یک نشانندن از $(\mathbb{Z}, +, 0)$ به $(\mathbb{R}, \cdot, 1)$ است.

مثال ۱۰. در زبان $L = \{g, <\}$ تابع $x \mapsto x - 1$ یک نشانندن از $(\mathbb{N}, +, <)$ به $(\mathbb{Z}, +, <)$.

مثال ۱۱. تابع $x + iy \mapsto \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix}$ یک نشانندن در زبان حلقه‌ها از ساختار $(\mathbb{C}, +, \cdot, 0, 1)$ به ساختار ماتریسهای دو در دوی حقیقی با جمع و ضرب ماتریسهاست.

مثال ۱۲. تابع $x \mapsto \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix}$ یک نشانندن حلقه $\mathbb{R}$ در حلقه ماتریسهای دو در دو است.

تعریف ۸ (نگاشت مقداردهی). فرض کنید $\mathfrak{M}$ یک L ساختار باشد. منظور از یک نگاشت ارزشدهی، تابعی مانند

$$\beta : \{v_0, v_1, \dots\} \rightarrow M$$

از مجموعه همه متغیرها به جهان L ساختار $\mathfrak{M}$ است.

تعریف ۹ (تعبیر ترمها). فرض کنید $\mathfrak{M}$ یک L ساختار، t یک L ترم و β یک نگاشت مقداردهی در M باشد. $t^{\mathfrak{M}}[\beta]$ که خوانده می‌شود «تعبیر ترم t در ساختار $\mathfrak{M}$ تحت مقداردهی β » به صورت استقرائی زیر تعریف می‌شود.

$$1. \quad v_i^{\mathfrak{M}}[\beta] = \beta(v_i)$$

$$2. \quad c^{\mathfrak{M}}[\beta] = c^{\mathfrak{M}}$$

$$3. \quad f t_1 \dots t_n^{\mathfrak{M}}[\beta] = f^{\mathfrak{M}}(t_1^{\mathfrak{M}}[\beta], \dots, t_n^{\mathfrak{M}}[\beta])$$

توجه کنید که تعریف استقرائی بالا، به علت خوانشِ یکتایِ ترمها معنا دارد.

لم ۳. فرض کنید β, γ دو نگاشت مقداردهی باشند که روی متغیرهای به کار رفته در ترم t مقدار یکسانی داشته باشند. آنگاه $t^{\mathfrak{M}}[\beta] = t^{\mathfrak{M}}[\gamma]$.

توجه کنید که وقتی یک ترم را به صورت $t(x_1, \dots, x_n)$ یا به صورت خلاصه‌تر به صورت $t(\bar{x})$ می‌نویسیم منظورمان این است که x_i ها متغیرهای متمایزی هستند و متغیرهائی که در ترم t به کار رفته‌اند از مجموعه $\{x_1, \dots, x_n\}$ آمده‌اند.

حال اگر $a_1, \dots, a_n$ عناصری در جهان یک ساختار $\mathfrak{M}$ باشند، وقتی می‌نویسیم $t^{\mathfrak{M}}(a_1, \dots, a_n)$ یا $t^{\mathfrak{M}}(\bar{a})$ منظورمان همان $t^{\mathfrak{M}}[\beta]$ است به طوری که $\beta(x_i) = a_i$.

مثال ۱۳. فرض کنید $L = \{f, g, c\}$ که در آن $n_f = 1, n_g = 2$. نیز فرض کنید $t_1 = gv_1c$ ، $t_2 = fgcfv_1$ ، $t_3 = fgfv_1v_2gv_1f_v2$. قرار دهید $\mathfrak{M}_1 = (\mathbb{R}, \exp, +, 1)$ و $\mathfrak{M}_2 = (\mathbb{N}, s, \cdot, 0)$. در هر کدام از $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_i$ مقادیر زیر را محاسبه کنید:

$$1. t_1^{\mathfrak{M}}(a_1)$$

$$2. t_2^{\mathfrak{M}}(a_1)$$

$$3. t_3^{\mathfrak{M}}(a_1, a_2)$$

تعریف ۱۰ (تعبیر فرمولها). فرض کنید $\mathfrak{M}$ یک ساختار، ϕ یک L فرمول و β یک نگاشت مقداردهی در M باشند. در این صورت رابطه

$$\mathfrak{M} \models \phi[\beta]$$

که خوانده می‌شود: «فرمول ϕ در L ساختار $\mathfrak{M}$ تحت مقداردهی β درست است» یا «ساختار $\mathfrak{M}$ مدلی برای فرمول ϕ تحت مقداردهی β است»، به صورت استقرائی زیر تعریف می‌شود:

$$1. \mathfrak{M} \models t_1 \doteq t_2[\beta] \Leftrightarrow t_1^{\mathfrak{M}}[\beta] = t_2^{\mathfrak{M}}[\beta]$$

$$2. \mathfrak{M} \models Rt_1 \dots t_n[\beta] \Leftrightarrow R^{\mathfrak{M}}(t_1^{\mathfrak{M}}[\beta], \dots, t_n^{\mathfrak{M}}[\beta])$$

$$3. \mathfrak{M} \models \neg\psi[\beta] \Leftrightarrow \mathfrak{M} \not\models \psi[\beta]$$

$$4. \mathfrak{M} \models (\psi_1 \wedge \psi_2)[\beta] \Leftrightarrow \mathfrak{M} \models \psi_1[\beta] \text{ و } \mathfrak{M} \models \psi_2[\beta]$$

۵. $\mathfrak{M} \models \exists x\psi[\beta]$ اگر و تنها اگر عنصر $a \in M$ موجود باشد به طوری که $\mathfrak{M} \models \psi[\beta \frac{a}{x}]$ که در آن $\beta \frac{a}{x}$ یک نگاشت مقداردهی است که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\beta \frac{a}{x}(y) = \begin{cases} \beta(y) & y \neq x \\ a & y = x \end{cases}$$

تمرین ۶. نشان دهید که $\mathfrak{M} \models (\psi_1 \rightarrow \psi_2)[\beta]$ اگر و تنها اگر هرگاه $\mathfrak{M} \models \psi_1[\beta]$ آنگاه $\mathfrak{M} \models \psi_2[\beta]$.

همان طور که در روش ساخت فرمولها دیدیم، فرمولها می‌توانند دارای متغیر باشند.

تعریف ۱۱. می‌گوییم متغیر x در فرمول ϕ آزاد است هرگاه هیچ سوری روی آن اثر نکرده باشد. تعریف دقیق‌تر آزاد بودن متغیر در یک فرمول، به صورت استقرائی زیر است:

۱. متغیر x در فرمول $t_1 \doteq t_2$ آزاد است هرگاه یا جزو متغیرهای t_1 و یا جزو متغیرهای t_2 باشد.

۲. متغیر x در فرمول $Rt_1 \dots t_n$ آزاد است هرگاه در یکی از t_i ها به کار رفته باشد.

۳. متغیر x در فرمول $\neg\psi$ آزاد است هرگاه در ψ آزاد باشد.

۴. متغیر x در فرمول $(\psi_1 \wedge \psi_2)$ آزاد است هرگاه در حداقل یکی از فرمولهای ψ_1 یا ψ_2 آزاد باشد.

۵. متغیر x در فرمول $\exists y\psi$ آزاد است هرگاه متغیر x در ψ آزاد باشد و $x \neq y$.

تمرین ۷. متغیرهای آزاد و پای‌بند فرمولهای زیر را مشخص کنید:

$$۱. \exists x(\forall y R(x, y) \wedge s(y))$$

$$۲. \exists x s(x) \rightarrow (s(x) \rightarrow \forall x R(x, y))$$

$$۳. \exists x(s(x) \rightarrow \exists y R(x, y))$$

لم ۴. فرض کنید γ, β روی متغیرهای آزاد به کار رفته در فرمول ϕ مقادیر یکسانی داشته باشند. در این صورت

$$\mathfrak{M} \models \phi[\beta] \Leftrightarrow \mathfrak{M} \models \phi[\gamma].$$

وقتی یک فرمول را به صورت $\phi(x_1, \dots, x_n)$ می‌نویسیم منظورمان این است که

۱. متغیرهای x_i دو به دو متفاوت هستند.

۲. متغیرهای آزاد فرمول ϕ از مجموعه $\{x_1, \dots, x_n\}$ انتخاب شده‌اند (و نه لزوماً همه اعضای این مجموعه جزو متغیرهای آزاد فرمول هستند).

حال فرض کنید $a_1, \dots, a_n$ عناصری در جهان ساختار $\mathfrak{M}$ باشند. وقتی می‌نویسیم

$$\mathfrak{M} \models \phi(a_1, \dots, a_n)$$

منظورمان این است که

$$\mathfrak{M} \models \phi[\beta]$$

و β یک نگاشت مقداردهی است به طوری که $\beta(x_i) = a_i$.

مثال ۱۴. $(\mathbb{R}, +, \cdot) \models \varphi(2, 3)$ وقتی $\varphi(x, y) = \exists zy \doteq +x + \cdot zz$.

مثال ۱۵. $(\mathbb{C}, +, \cdot, 0) \models \phi(2)$ وقتی $\phi(y) = \exists x + + \cdot xxy \doteq 0$.

تعریف ۱۲. به فرمولی که هیچ متغیر آزادی نداشته باشد، یک جمله می‌گوییم.

تعریف ۱۳. اگر φ یک جمله و $\mathfrak{M}$ یک ساختار باشد می‌نویسیم

$$\mathfrak{M} \models \varphi$$

هرگاه

$$\mathfrak{M} \models \varphi[\beta]$$

برای یک نگاشت مقداردهی β .

دقت کنید که تعریف بالا از انتخاب نگاشت β مستقل است.

مثال ۱۶. $(\mathbb{C}, +, \cdot, 1) \models \exists x + \cdot x1 \doteq 0$ ولی $(\mathbb{R}, +, \cdot, 1) \not\models \exists x + \cdot x1 \doteq 0$.

تمرین ۸. در زبان $L = \{-, f, <\}$ یک فرمول φ بنویسید به طوری که $\models \varphi$ اگر و تنها اگر $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.

تمرین ۹. آیا می‌توانید یک فرمول در زبان $L = \{+, 0, 1\}$ بنویسید که در $(\mathbb{N}, +, 0, 1)$ بیانگر این باشد که هر عدد را می‌توان به تعداد متناهی عوامل اول تجزیه کرد.

تمرین ۱۰. موارد زیر را با فرمولهای مرتبه اول و برای ساختار $(\mathbb{R}, +, \cdot, 0, 1, <, f)$ بنویسید که $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ یک تابع مشخص است.

۱. هر عدد حقیقی مثبت دارای یک ریشه دوم است.

۲. اگر تابع f اکیدا صعودی باشد آنگاه یک به یک است (آیا می‌شد این فرمول را نوشت که هر تابعی که اکیدا صعودی است یک به یک است؟)

۳. اگر تابع f در یک نقطه مشتق‌پذیر باشد در آن نقطه پیوسته است.

تمرین ۱۱. در زبان $L = \{R\}$ جملاتی بنویسید که بگویند

۱. R یک رابطه هم‌ارزی است که حداقل دو کلاس هم‌ارزی دارد.

۲. R یک رابطه هم‌ارزی است که حداقل یکی از کلاسهای آن بیش از یک عنصر دارد.

تعریف ۱۴ (معادل بودن مقدماتی). دو ساختار $\mathfrak{M}, \mathfrak{N}$ را معادل مقدماتی می‌نامیم و می‌نویسیم $\mathfrak{M} \equiv \mathfrak{N}$ هرگاه برای هر جمله φ در زبان داشته باشیم

$$\mathfrak{M} \models \varphi \Leftrightarrow \mathfrak{N} \models \varphi.$$

مثال ۱۷. ۱. $(\mathbb{Z}, <) \not\equiv (\mathbb{Q}, <)$.

۲. $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \not\equiv \mathbb{Z}$ در زبان $L = \{+, 0\}$ (راهنمایی. جمع دو عدد غیر زوج در $\mathbb{Z}$ یک عدد زوج است).

قضیه ۳ (قضیه ایزومرفیسم). فرض کنید $j: \mathfrak{M} \rightarrow \mathfrak{N}$ یک ایزومرفیسم باشد، در این صورت

۱. برای هر ترم t و هر چندتایی $a_1, \dots, a_n \in M$ داریم

$$j(t^{\mathfrak{M}}(a_1, \dots, a_n)) = t^{\mathfrak{N}}(j(a_1), \dots, j(a_n))$$

۲. برای هر فرمول $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ و هر چندتایی $a_1, \dots, a_n \in M$ داریم

$$\mathfrak{M} \models \varphi(a_1, \dots, a_n) \Leftrightarrow \mathfrak{N} \models \varphi(j(a_1), \dots, j(a_n)).$$

۳. برای هر جمله φ داریم

$$\mathfrak{M} \models \varphi \Leftrightarrow \mathfrak{N} \models \varphi.$$

یعنی دو ساختار ایزومرف، معادل مقدماتی هستند.

۳.۰ ساختار تولید شده

بعداً در این باره خواهیم نوشت.

۴.۰ تعریف‌پذیری، معادل بودن مقدماتی، قضیه ایزومرفیسم

اگر $\phi(x_1, \dots, x_n)$ یک فرمول باشد آنگاه مجموعه

$$\{(a_1, \dots, a_n) \in M^n : \mathfrak{M} \models \phi(a_1, \dots, a_n)\}$$

یک مجموعه تعریف‌پذیر توسط فرمول ϕ در ساختار $\mathfrak{M}$ نامیده می‌شود. فرض کنید $b_1, \dots, b_m \in M$ و $\psi(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m)$ یک فرمول باشد. مجموعه

$$\{(a_1, \dots, a_n) \in M^n : \mathfrak{M} \models \psi(a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_m)\}$$

را یک مجموعه تعریف‌پذیر در ساختار $\mathfrak{M}$ توسط فرمول ψ و با کمک پارامترهای $b_1, \dots, b_m$ می‌نامیم.

مثال ۱۸.

۱. فرض کنید $\mathfrak{R} = (\mathbb{R}, +, -, \cdot, 0, 1)$ و $p(X) \in \mathbb{R}[X]$ یک چندجمله‌ای باشد. مجموعه ریشه‌های این چندجمله‌ای تعریف‌پذیر است. مشابهاً مجموعه ریشه‌های مشترک تعدادی چندجمله‌ای مشخص تعریف‌پذیر است.

۲. فرض کنید $\mathfrak{R} = (\mathbb{R}, +, \cdot)$. در این صورت مجموعه

$$\{(a, b) \in \mathbb{R}^2 : a < b\}$$

قابل تعریف است. همچنین هر بازه (c, d) در این ساختار قابل تعریف است.

۳. فرض کنید $\mathfrak{Z} = (\mathbb{Z}, +, \cdot)$. در این صورت مجموعه

$$\{(a, b) \in \mathbb{Z}^2 : a < b\}$$

قابل تعریف است. بنا به قضیه‌ای از لاگرانژ هر عدد صحیح نامنفی، حاصل‌جمعی متناهی از مربعات چهار عدد صحیح است.

۴. فرض کنید $\mathfrak{N} = (\mathbb{N}, +, \cdot, 0, 1)$. در این صورت مجموعه اعداد اول قابل تعریف است.

۵. در ساختار بالا مجموعه $\{x \mid x \equiv 2 \pmod{5}\}$ قابل تعریف است.

۶. آیا در ساختار بالا مجموعه اعداد کمتر از ۱۰ بدون پارامتر قابل تعریف است؟

۷. فرض کنید $\mathfrak{N} = (\mathbb{N}, +, \cdot)$. در این صورت مجموعه $\{0\}$ قابل تعریف است. آیا مجموعه $\{0, 1\}$ قابل تعریف است؟

۸. در ساختار $(\mathbb{R}, +, <, f, 0)$ مجموعه نقاط ناپیوستگی تابع f قابل تعریف است.

۹. در ساختار $(\mathbb{R}[X], +, -, \cdot, 0, 1)$ مجموعه $\mathbb{R}$ قابل تعریف است.

۱۰. در ساختار $\mathfrak{C} = (\mathbb{C}, +, \cdot, 0, 1)$ مجموعه $\{i, -i\}$ قابل تعریف است.

تشخیص این که در یک ساختار چه مجموعه‌هایی قابل تعریف هستند، همیشه آسان نیست. برای مثال به تمرین زیر (بدون نیاز به تحویل!) فکر کنید:

تمرین ۱۲. ۱. آیا در $(\mathbb{C}, +, \cdot, 0, 1)$ مجموعه $\{i\}$ قابل تعریف است؟

۲. آیا در $(\mathbb{C}, +, \cdot, 0, 1)$ مجموعه $\mathbb{R}$ قابل تعریف است؟

۳. آیا در $(\mathbb{Q}, +, \cdot, 0, 1)$ مجموعه $\mathbb{Z}$ قابل تعریف است؟

۴. آیا در $(\mathbb{R}, +, \cdot, 0, 1)$ مجموعه $\mathbb{Z}$ قابل تعریف است؟ مجموعه $\mathbb{Q}$ چه طور؟

۵. آیا مجموعه عناصر تابدار یک گروه قابل تعریف است؟

نتیجه ۱. اگر $X \subseteq M^n$ یک مجموعه A تعریف‌پذیر باشد، آنگاه هر L ائومرفیمیسی که A را نقطه‌وار حفظ کند، X را مجموعه‌وار حفظ می‌کند.

مثال ۱۹. در ساختار $(\mathbb{R}, +, 0)$ مجموعه $\{(x, y) : x < y\}$ قابل تعریف نیست.

مثال ۲۰. در ساختار $(\mathbb{C}, +, \cdot, 0, 1)$ مجموعه $\{i\}$ قابل تعریف نیست.

مثال ۲۱. در ساختار مثال قبل، مجموعه اعداد حقیقی قابل تعریف نیست.

قضیه ۴. فرمولهای بدون سور تحت زیرساختارها حفظ می‌شوند.

۵.۰ فرمولهای معادل و فرمولهای همواره درست

فرمول ϕ را همواره درست می‌نامیم هرگاه در هر ساختار $\mathcal{M}$ و هر ارزیابی β در M داشته باشیم

$$\mathcal{M} \models \phi[\beta].$$

در این صورت می‌نویسیم

$$\models \phi.$$

دو فرمول ϕ و ψ را معادل می‌گوییم هرگاه در هر مدل $\mathcal{M}$ و برای هر ارزیابی β در M داشته باشیم

$$\mathcal{M} \models \phi \leftrightarrow \psi[\beta].$$

یعنی هرگاه $\phi \leftrightarrow \psi$ همواره درست باشد.

مثال ۲۲. همیشه یک نفر هست که اگر او کلاه داشته باشد، همه کلاه دارند:

$$\emptyset \models \exists x(H(x) \rightarrow \forall yH(y)).$$

لم ۵.

$$\models \phi \wedge (\psi_1 \vee \psi_2) \leftrightarrow (\phi \wedge \psi_1) \vee (\phi \wedge \psi_2).$$

قضیه ۵. هر فرمول بدون سور را می‌توان در صورت فصلی از عطف‌ها و عطفی از فصلها نوشت.

تمرین ۱.

$$\emptyset \models \exists x\phi(x, \bar{z}) \leftrightarrow \exists y\phi(y, \bar{z})$$

لم ۶. اگر x در ψ آزاد نباشد،

$$\models \exists x \phi \wedge \psi \leftrightarrow \exists x (\phi \wedge \psi)$$

$$\models \exists x \phi \vee \psi \leftrightarrow \exists x (\phi \vee \psi).$$

$$\models \forall x \phi \wedge \psi \leftrightarrow \forall x (\phi \wedge \psi)$$

$$\models \forall x \phi \vee \psi \leftrightarrow \forall x (\phi \vee \psi).$$

تمرین ۲. نشان دهید که اگر x در بالا در ψ آزاد باشد، لم قبل برقرار نیست.

قضیه ۶. هر فرمول دلخواه را می‌توان در صورت نرمال پیشوندی نوشت.

تمرین ۳. فرمولهای زیر را در حالت نرمال پیشوندی بنویسید.

$$۱. \forall x \exists y p(x, y) \rightarrow \forall x p(x, x)$$

$$۲. \forall x \exists y (p(x, y) \rightarrow \forall x p(x, x))$$

لم ۷.

$$\models \phi(x_1, \dots, x_n) \Leftrightarrow \models_{L \cup \{c_1, \dots, c_n\}} \phi(c_1, \dots, c_n) \Leftrightarrow \models \forall x_1, \dots, x_n \phi(x_1, \dots, x_n).$$

تمرین ۴. نشان دهید که

$$\models \phi \rightarrow \psi$$

با

$$\models \phi \Rightarrow \models \psi$$

معادل نیست.

تمرین ۵. نشان دهید

$$\forall x \exists y H(x, y) \not\equiv \exists y \forall x H(x, y).$$

۶.۰ تئوری‌ها

تعریف ۱۵.

- می‌گوییم T یک L تئوری است هرگاه مجموعه‌ای از جملات در زبان L باشد.
- می‌گوییم L ساختار $\mathfrak{M}$ مدلی برای تئوری T است و می‌نویسیم $\mathfrak{M} \models T$ هرگاه $\varphi \models \mathfrak{M}$ برای هر $\varphi \in T$.
- کلاس $\mathcal{K}$ از L ساختارها را یک کلاس مقدماتی می‌نامیم هرگاه یک تئوری T پیدا شود به طوری که

$$\mathcal{K} = \{\mathfrak{M} : \mathfrak{M} \models T\}.$$

- تئوری T را ارضا پذیر می‌نامیم هرگاه حداقل یک مدل داشته باشد.

مثال ۲۳. تئوری $T = \{\exists x \quad x = 0, \forall x \quad x \neq 0\}$ هیچ مدلی ندارد.

مثال ۲۴. • مجموعه‌های نامتناهی

- مجموعه‌های مرتب خطی (چگال، گسسته)
- روابط هم‌ارزی (مثلا دارای دقیقا دو کلاس نامتناهی)
- گرافها
- گروه‌ها (آبلی، بدون تاب، مرتب)
- فضاهاى بردارى
- حلقه‌ها (میدانها، میدانهای با مشخصه صفر، میدانهای بسته جبری).
- اصول پثانو برای اعداد طبیعی. در زبان $L = \{+, \cdot, s, 0\}$ مجموعه جملات زیر را اصول پثانو برای اعداد طبیعی می‌نامیم.

$$\begin{aligned}
& - \forall x s(x) \neq 0 \\
& - \forall x (x \neq 0 \rightarrow \exists y s(y) = x) \\
& - \forall x \quad x + 0 = x \\
& - \forall x, y (x + s(y) = s(x + y)) \\
& - \forall x x \cdot 0 = 0 \\
& - \forall x, y x \cdot s(y) = (x \cdot y) + x \\
& - \forall \bar{w} [\phi(0, \bar{w}) \wedge \forall v (\phi(v, \bar{w}) \rightarrow \phi(s(v), \bar{w})) \rightarrow \forall x \phi(x, \bar{w})]
\end{aligned}$$

۷.۰ التزام منطقی، تئوری‌های کامل، تئوری‌های تصمیم‌پذیر

تعریف ۱۶. فرض کنید T یک تئوری و φ یک جمله در زبان L باشند. می‌گوییم

$$T \models \varphi$$

هر گاه برای هر مدل $\mathfrak{M} \models T$ داشته باشیم

$$\mathfrak{M} \models \varphi.$$

اگر $\emptyset \models \phi$ می‌نویسیم $\models \phi$ و می‌گوییم ϕ یک فرمول همواره درست است.

مثال ۲۵. اگر $\varphi \in T$ آنگاه $\varphi \models T$.

مثال ۲۶. در زبان $L = \{+, <, 0\}$ فرض کنید T تئوری گروه‌های آبلی مرتب باشد. در این صورت

$$T \models \forall x (x \neq 0 \rightarrow x + x \neq 0).$$

اگر T تئوری گروه‌هایی باشد که هر عضو آن مرتبه دو است آنگاه

$$T \not\models \exists x_1 x_2 x_3 [(x_1 \neq x_2) \wedge (x_2 \neq x_3) \wedge (x_3 \neq x_1)]$$

فرض کنید T تئوری گروه‌ها باشد

$$T \not\models \forall x, y (xy = yx).$$

نتیجه ۲. تئوری T هیچ مدلی ندارد اگر و تنها اگر $(\varphi \wedge \neg\varphi) \models T$. بنابراین اگر تئوری T مستلزم تناقض نباشد، دارای مدل است.

قضیه ۷. اگر $L' = L \cup \{c\}$ به طوری که $c \notin L$ آنگاه اگر $\phi(c) \models_{L'} T$ آنگاه $\forall x \phi(x) \models_L T$.

قضیه ۸. $T \models \phi$ اگر و تنها اگر $T \cup \{\neg\phi\}$ هیچ مدلی نداشته باشد اگر و تنها اگر $T \cup \{\neg\phi\}$ مستلزم تناقض باشد.

قضیه ۹. $T \not\models \phi$ هرگاه $T \cup \{\neg\phi\}$ مدلی داشته باشد.

تذکره ۱. امکان دارد که برای یک جمله ϕ هم $T \cup \{\phi\}$ و هم $T \cup \{\neg\phi\}$ مدل داشته باشند؛ یعنی $T \not\models \phi$ و $T \not\models \neg\phi$. مثال: جمله آبی بودن در تئوری گروهها.

تعریف ۱۷. تئوری T را کامل می‌خوانیم هرگاه برای هر جمله φ داشته باشیم $T \models \varphi$ یا $T \models \neg\varphi$.

به بیان دیگر اگر تئوری T کامل باشد، هر جمله دلخواه یا همزمان در تمام مدلهای آن برقرار است یا همزمان در تمام مدلهای آن برقرار نیست.

سوال مهم. آیا تئوری حساب پثانو یک تئوری کامل است؟

یک مشاهده جالب اگر تئوری T کامل باشد و $\mathfrak{M}$ یک مدل از آن باشد، آنگاه برای هر جمله ϕ داریم $T \models \phi$ اگر و تنها اگر $\mathfrak{M} \models \phi$.

۸.۰ قضیه فشرده‌گی و برخی نتایج آن

قضیه ۱۰. تئوری T دارای مدل است هرگاه هر زیرمجموعه متناهی از آن دارای مدل باشد.

نتیجه ۳. $T \models \phi$ اگر و تنها اگر $\Delta \models \phi$ برای یک زیرمجموعه متناهی $\Delta \subseteq T$. معادلا اگر $T \models \perp$ آنگاه یک زیرمجموعه متناهی از T مستلزم تناقض است.

نتیجه ۴. با $T_{\forall}$ مجموعه همه نتایج عمومی تئوری T را نشان دهید. داریم $T_{\forall} \models \mathfrak{M}$ اگر و تنها اگر $\mathfrak{M} \subseteq T$.

نتیجه ۵. T دارای اصل‌بندی عمومی است اگر و تنها اگر کلاس مدلهای آن تحت زیرساختارها بسته باشد. برای اثبات قسمت آسان‌تر نتیجه بالا به دو لم زیر نیاز داریم.

لم ۸. ۱. فرض کنید $\mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{M}$. در این صورت برای هر فرمول بدون سور $\phi(\bar{x})$ و هر $\bar{a} \in M$ داریم

$$\mathfrak{M} \models \phi(\bar{a}) \Leftrightarrow \mathfrak{N} \models \phi(\bar{a}).$$

۲. برای هر فرمول عمومی $\forall \bar{y} \phi(\bar{x}, \bar{a})$ و هر $\bar{a} \in M$ داریم

$$\mathfrak{N} \models \forall x \phi(x, \bar{a}) \Rightarrow \mathfrak{M} \models \forall x \phi(x, \bar{a}).$$

نتیجه ۶. اگر تئوری T مدلهای متناهی به اندازه کافی بزرگ داشته باشد، دارای مدلهای نامتناهی به هر اندازه دلخواه بزرگ است. به بیان دیگر، ساختارهای متناهی را نمی‌توان اصل‌بندی کرد.

نتیجه ۷. یک مدل ناستاندارد برای حساب پتانو وجود دارد.

نتیجه ۸. یک ساختار هم‌ارز مقدماتی با $(\mathbb{R}, +, \cdot, 0, 1)$ وجود دارد که غیرارشمیدسی است (بنابراین ارشمیدسی بودن را نمی‌توان اصل‌بندی کرد).

نتیجه ۹. آیا می‌توان یک فرمول $\phi(x)$ نوشت که عناصر با مرتبه متناهی را در گروه‌ها تعریف کند؟

نتیجه ۱۰. هر گروه آبدی بدون تاب را می‌توان مرتب کرد.

نتیجه ۱۱. اگر هر زیرگراف متناهی از گراف G را بتوان با k رنگ، رنگ‌آمیزی کرد، خود G را نیز می‌توان.

تمرین ۶. کلاس $\mathcal{K}$ دارای اصل‌بندی متناهی است اگر و تنها اگر $\mathcal{K}, \mathcal{K}^c$ هر دو مقدماتی باشند.

تمرین ۷. نشان دهید موارد زیر با هم معادلند:

$$۱. \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 \text{ در } \mathbb{R} \text{ داریم}$$

$$۲. \text{در } \mathbb{R}^* \text{ اگر } |x| \text{ بینهایت کوچک باشد آنگاه } |f(x)| \text{ بی‌نهایت کوچک است.}$$

۹.۰ تئوریهای جازم

تعریف ۱۸. تئوری T را κ جازم می‌گوییم هرگاه همه مدل‌های با اندازه κ از آن تئوری، با هم ایزومرف باشند.

مثال ۲۷. در زبان $L = \{+, 0\}$ تئوری گروه‌های آبدی بدون تاب و بخش‌پذیر، κ جازم برای هر کاپای ناشماراست، ولی الف‌صفرجازم نیست.

مثال ۲۸. تئوری روابط هم‌ارزی دارای دو کلاس نامتناهی، $\aleph_0$ جازم است اما $k > \aleph_0$ جازم نیست.

قضیه ۱۱ (محک وات). اگر تئوری T در یک کاردینال نامتناهی جازم باشد و مدل متناهی نداشته باشد، کامل است.

۱۰.۰ سامانه‌های رفت و برگشتی

تعریف ۱۹. فرض کنید $\mathcal{M}, \mathcal{N}$ دو ساختار باشند و $A \subseteq M, B \subseteq N$. می‌گوییم $f: A \rightarrow B$ یک نشانندن جزئی است هرگاه f دو سوئی باشد و $f \cup \{(c^{\mathcal{M}}, c^{\mathcal{N}}) : c \in L\}$ تعبیر همه نمادهای زبان را حفظ کند.

تعریف ۲۰. فرض کنید Γ مجموعه‌ای متشکل از توابع جزئی میان برخی زیرمجموعه‌های M, N باشد. می‌گوییم Γ یک سامانه رفت و برگشتی بین $\mathcal{M}, \mathcal{N}$ است هرگاه برای هر $f \in \Gamma$

۱. برای هر $a \in M$ بتوان $b \in N$ را چنان پیدا کرد که $f \cup \{(a, b)\}$ همچنان یک نشانندن جزئی باشد.

۲. برای هر $b \in N$ بتوان یک $a \in M$ را چنان یافت که $f \cup \{(a, b)\}$ همچنان یک نشانندن جزئی باشد.

قضیه ۱۲. اگر یک سامانه رفت و برگشتی بین $\mathcal{M}, \mathcal{N}$ موجود باشد آنگاه $\mathcal{M} \equiv \mathcal{N}$.

نتیجه ۱۲. تئوری ترتیبهای خطی چگال بدون ابتدا و انتها کامل است.

نتیجه ۱۳. تئوری گرافهای تصادفی کامل است.

نتیجه ۱۴ (قانون صفر و یک برای گرافها). برای هر جمله φ یا $\lim_{N \rightarrow \infty} p_N(\varphi) = 1$ یا $\lim_{N \rightarrow \infty} p_N(\varphi) = 0$.

نتیجه ۱۵. تئوری گرافهای تصادفی، تئوری تقریباً مطمئن گرافهاست؛ یعنی برای هر جمله φ داریم $T \models \varphi$ اگر و تنها اگر $\lim_{N \rightarrow \infty} p_N(\varphi) = 1$.

۱۱.۰ بازیهای اهغن فویشث فراسه

فرض کنید زبان L متناهی باشد و هیچ نماد تابعی نداشته باشد.

قضیه ۱۳. یکی از بازیکنان دارای استراتژی برد در $G_n(\mathcal{M}, \mathcal{N})$ است.

تعریف ۲۱ (عمق سور فرمولها).

قضیه ۱۴. فرض کنید n عمق مورد نظر و l تعداد متغیرهای مورد نظر داده شده باشد. در این صورت تعداد فرمولهای با عمق حداکثر n که در آنها از متغیرهای $x_1, \dots, x_l$ استفاده شده است متناهی است.

قضیه ۱۵. نفر دوم دارای استراتژی برد در $G_n(\mathcal{M}, \mathcal{N})$ است اگر و تنها اگر $\mathcal{M} \equiv_n \mathcal{N}$.

نتیجه ۱۶. نفر دوم دارای استراتژی برد در $G_\omega(\mathcal{M}, \mathcal{N})$ است اگر و تنها اگر $\mathcal{M} \equiv \mathcal{N}$.

نتیجه ۱۷. تئوری ترتیبهای خطی گسسته بدون ابتدا و انتها یک تئوری کامل است.

فصل ۱

فرافیلترها و اثبات فشردگی

فصل ۲

نظریه اثبات و اثبات فشردگی

در فصلهای گذشته با عبارت

$$T \models \phi$$

آشنا شدیم که خوانده می‌شد: تئوری T مستلزم جمله ϕ است. در این بخش با عبارت

$$T \vdash \phi$$

آشنا خواهیم شد که خوانده می‌شود: «اثباتی برای جمله ϕ با استفاده از فرضیات موجود در تئوری T وجود دارد.» در یک قله از درس نشان خواهیم داد که

$$T \models \phi \Leftrightarrow T \vdash \phi$$

و با استفاده از این قضیه فشردگی را ثابت خواهیم کرد.

برای تعریف $T \vdash \phi$ نیازمند یادآوری چند اصل و چند قاعده هستیم. به عبارتهایی به صورت

$$\vdash \phi$$

اصل و به عبارتهای به صورت

$$\vdash \phi \Rightarrow \vdash \psi$$

قاعده می‌گوییم.

اصل اثبات‌پذیری تاتولوژیها

فرمول مرتبه اول ϕ را یک تاتولوژی می‌نامیم هرگاه با جای‌گذاری فرمولهای مرتبه اول در تاتولوژی‌های منطق گزاره‌ها ایجاد شده باشد.

قضیه ۱۶. فرض کنید ϕ یک تاتولوژی باشد. در این صورت

$$\models \phi.$$

مثال ۲۹.

$$\models (\phi \vee \neg \phi) \bullet$$

$$\models (\neg \neg \phi \leftrightarrow \phi) \bullet$$

$$\models ((\phi \wedge (\phi \rightarrow \psi)) \rightarrow \psi) \bullet$$

$$\models \phi \wedge (\psi_1 \vee \psi_2) \leftrightarrow (\phi \wedge \psi_1) \vee (\phi \wedge \psi_2) \bullet$$

$$\models (\phi_1 \wedge \phi_2 \rightarrow \psi) \rightarrow (\phi_1 \rightarrow (\phi_2 \rightarrow \psi)) \bullet$$

تعریف ۲۲. اگر ϕ یک تاتولوژی باشد می‌نویسیم

$$\vdash \phi.$$

قاعده معرفی سور وجودی

قضیه ۱۷. فرض کنید متغیر x در فرمول ψ جرم متغیرهای آزاد نباشد. در این صورت

$$\models \phi \rightarrow \psi \Rightarrow \models \exists x \phi \rightarrow \psi.$$

تعریف ۲۳ (قاعده معرفی سور عمومی). فرض کنید متغیر x در ψ آزاد نباشد. در این صورت

$$\vdash \phi \rightarrow \psi \Rightarrow \vdash \exists x \phi \rightarrow \psi.$$

اصل سور وجودی

تعریف ۲۴. می‌گوییم متغیر x در فرمول ϕ قابل جانشینی توسط ترم s است هرگاه

۱. x در ϕ آزاد نباشد، یا

۲. اگر x در ϕ آزاد باشد، هیچ حضور آزادش تحت تأثیر سوری نباشد که متغیری از s را پای‌بند می‌کند. به بیان دیگر این گونه نباشد که x در فرمول ϕ آزاد باشد و سوری در این فرمول یکی از متغیرهای به یکی از متغیرهای s به نحوی اثر کند که در جایی در فرمول روی x تأثیر بگذارد.

دقت کنید که در تعریف بالا نیازی نیست که ترم s در فرمول ϕ استفاده شده باشد. تعریف بالا را می‌توان به صورت استقرائی دقیق کرد (در کلاس درس).

مثال ۳۰. ۱. در فرمول $\forall y f(x, z) = 0$ متغیر x قابل جای گذاری توسط ترم $g(y)$ نیست.

۲. در فرمول $\forall y f(x, y, z) = 0$ متغیر x قابل جای گذاری توسط ترم $g(y, z, x)$ نیست.

۳. در فرمول $\exists y R(x, y) \wedge s(x, y)$ حضور اول x قابل جای‌نشینی توسط $t(x, y, z)$ نیست ولی حضور دوم هست. با این حال به طور کلی x قابل جانشینی توسط این ترم نیست.

لم ۹ (لم جانشانی).

۱.

$$(t \frac{s}{x})^m = t^m [\beta \frac{s^m[\beta]}{x}].$$

۲. اگر x در ϕ قابل جانشینی توسط t باشد آنگاه

$$\mathfrak{M} \models \phi \frac{s}{x} [\beta] \Leftrightarrow \mathfrak{M} \models \phi [\beta \frac{s^{\mathfrak{M}}[\beta]}{x}]$$

به عنوان مثال برای بخش دوم در فرمول $\exists y \phi(x, y)$ متغیر x را با ترمهای $s = x^2 + y^2$ و $s' = x^2 + z^2$ تحت مقداردهی ۲ به همه متغیرها بررسی کنید.

قضیه ۱۸.

$$\models \phi \frac{t}{x} \rightarrow \exists x \phi$$

هرگاه x قابل جانشینی توسط t باشد.

به عنوان مثال نقض برای پدیده بالا فرمول $\forall y y = x$ را با $y = t$ در نظر بگیرید و بررسی کنید که قضیه بالا برقرار نیست.

تعریف ۲۵ (اصل سور وجودی).

$$\vdash \phi \frac{t}{x} \rightarrow \exists x \phi$$

هرگاه x قابل جانشینی توسط t باشد.

قاعده قیاس استثنائی

قضیه ۱۹. فرض کنید $\models \phi$ و $\models \phi \rightarrow \psi$. آنگاه $\models \psi$.

تعریف ۲۶ (قیاس استثنائی). فرض کنید $\vdash \phi$ و $\vdash \phi \rightarrow \psi$. آنگاه $\vdash \psi$.

اصول تساوی

۱.۲ تعریف اثبات پذیری

تعریف ۲۷. می‌گوییم فرمول ϕ اثبات پذیر است و می‌نویسم

$$\vdash \phi$$

هرگاه

۱. ϕ یک تاتولوژی باشد، یا

۲. ϕ یک مصداق از اصل سور وجودی باشد.

۳. ϕ با قیاس استثنائی از دو فرمول اثبات پذیر به دست آید.

۴. یا ϕ با قاعده معرفی سور وجودی از یک فرمول اثبات پذیر به دست آید.

تمرین ۸. ۱. فرض کنید $\vdash \phi$ و $\vdash \psi$ نشان دهید که $\vdash (\phi \wedge \psi)$.

۲. فرض کنید که $\vdash \phi \rightarrow \psi$ و $\vdash \psi \rightarrow \xi$ نشان دهید که $\vdash \phi \rightarrow \xi$.

۳. اگر $\phi_1 \vdash \psi$ و $\phi_2 \vdash \psi$ و $\phi_1 \wedge \phi_2 \vdash \psi$ آنگاه $\vdash \psi$.

تعریف ۲۸. می‌گوییم

$$T \vdash \phi$$

هرگاه فرمولهای $\phi_1, \dots, \phi_n \in T$ موجود باشند به طوری که

$$(\phi_1 \wedge \dots \wedge \phi_n) \rightarrow \psi$$

بنابراین اگر $\Delta = \{\phi_1, \dots, \phi_n\}$ یک مجموعه متناهی باشد آنگاه $\Delta \vdash \psi$ یعنی $\phi_1 \wedge \dots \wedge \phi_n \vdash \psi$ توجه کنید که $\phi \vdash \psi$ با اگر ϕ آنگاه $\vdash \psi$ فرق دارد.

لم ۱۰.

$$\Delta \vdash \phi \Leftrightarrow \Delta \cup \{\neg\phi\} \vdash \perp.$$

در ادامه درس هدفمان اثبات قضیه زیر است:

قضیه ۲۰ (قضیه تمامیت گودل). اگر $T \models \perp$ آنگاه $T \vdash \perp$. معادلا اگر برای هر زیرمجموعه متناهی $\Delta \subseteq T$ داشته باشیم $\Delta \not\vdash \perp$ آنگاه T دارای مدل است.

از قضیه بالا موارد زیر نتیجه می‌شود.

۱. اگر هر زیرمجموعه متناهی از T دارای مدل باشد آنگاه T دارای مدل است (قضیه فشردگی).

۲. اگر $T \models \phi$ آنگاه $T \vdash \phi$.

قضیه ۲۱ (قضیه درستی). اگر $T \vdash \phi$ آنگاه $T \models \phi$.

۲.۲ تقویت دستگاه هیلبرت

لم ۱۱ (اصل سور عمومی). اگر x قابل جانشینی توسط t باشد آنگاه

$$\vdash \forall x \phi \rightarrow \phi \frac{t}{x}$$

لم ۱۲ (قاعده معرفی سور عمومی). اگر x در فرمول ϕ آزاد نباشد آنگاه اگر $\vdash \phi \rightarrow \psi$ آنگاه $\vdash \phi \rightarrow \forall x \psi$.

تمرین ۹. نشان دهید که

$$\vdash \exists x \forall y Rxy \rightarrow \forall y \exists x Rxy.$$

لم ۱۳. فرض کنید ثابت c در زبان L نباشند. در این صورت $\phi(c_1, \dots, c_n) \vdash_{L \cup \{\bar{c}\}}$ اگر و تنها اگر $\vdash_L \phi(x_1, \dots, x_n)$.

۳.۲ تئوری هنکینی

لم ۱۴. فرض کنید $T \not\vdash \perp$ و ϕ یک L فرمول باشد و ثابت c خارج از زبان L باشد. در این صورت

$$T \cup \{\exists x \phi \rightarrow \phi(c)\} \not\vdash \perp.$$

نتیجه ۱۸. برای هر L فرمول ϕ یک ثابت c_ϕ به زبان اضافه کنید. اگر $T \not\vdash \perp$ آنگاه

$$T \cup \{\exists x \phi \rightarrow \phi(c_\phi)\}_\phi \not\vdash \perp$$

نتیجه ۱۹. یک $L \cup C$ تئوری $T \subseteq T'$ موجود است به طوری که $T' \not\vdash \perp$ و برای هر $L \cup C$ فرمول ϕ یک ثابت $c \in C$ موجود است به طوری که $\exists x \phi \rightarrow \phi(c) \in T'$.

تئوری T' در بالا را یک تئوری «هنکینی» می‌نامیم. نتیجه بالا بیانگر این است که هر تئوری‌ای که از آن تناقض اثبات نشود قابل توسعه به یک تئوری هنکینی است که از آن تناقض اثبات نمی‌شود.

۴.۲ بیشینگی

لم ۱۵. فرض کنید $T \not\vdash \perp$ و ϕ یک L فرمول باشد. در این صورت یا $T \cup \{\phi\} \not\vdash \perp$ یا $T \cup \{\neg \phi\} \not\vdash \perp$.

قضیه ۲۲. اگر $T \not\vdash \perp$ آنگاه یک تئوری T' شامل T موجود است به طوری که $T' \not\vdash \perp$ و برای هر جمله ϕ یا $\phi \in T$ یا $\neg \phi \in T$.

اصطلاحاً می‌گوییم تئوری T' در قضیه بالا یک تئوری ماکزیمال (یا بیشینه) با ویژگی سازگاری است.

لم ۱۶. فرض کنید T یک تئوری بیشینه باشد.

۱. اگر $T \vdash \phi$ آنگاه $\phi \in T$.

۲.

$$(\phi \wedge \psi) \in T \Leftrightarrow (\phi \in T) \& (\psi \in T).$$

۵.۲ اثبات قضیه تمامیت

تا اینجا گفتیم که هر تئوری T که تناقض اثبات ندهد قابل توسعه به یک تئوری هنکینی است که تناقض را اثبات نمی‌کند. از طرفی این تئوری هنکینی قابل توسعه به یک تئوری بیشینه است. در پایان ثابت می‌کنیم که هر تئوری بیشینه هنکینی دارای مدل است. از این نتیجه می‌شود که هر تئوری‌ای که تناقض ندهد دارای مدل است.

قضیه ۲۳. اگر T یک تئوری بیشینه هنکینی باشد که تناقض از آن اثبات نمی‌شود آنگاه T دارای مدل است.

۶.۲ معرفی تصمیم‌پذیری

در بخش گذشته نهایتاً به اثبات این رسیدیم که

$$T \models \phi \Leftrightarrow T \vdash \phi.$$

مهمترین اهمیت عبارت سمت راست این است که قابل پیاده‌سازی توسط الگوریتم است. در واقع می‌شود تمام قوانین دستگاه هیلبرت را به یک الگوریتم داد، تا بتواند با در دست داشتن یک تئوری، نتایج آن را چاپ کند.

تعریف ۲۹. تئوری T را تصمیم‌پذیر می‌نامیم هرگاه یک الگوریتم وجود داشته باشد که وقتی جمله ϕ را به عنوان ورودی بدان بدهیم، اگر $T \models \phi$ بگوید بله؛ و اگر $T \not\models \phi$ بگوید خیر.

در تعریف بالا توجه داشته باشید که تصمیم‌پذیری به معنی کامل بودن تئوری نیست. در واقع وقتی $T \not\models \phi$ به این معنی نیست که $T \models \neg \phi$. با وجود این رابطه جالب زیر میان کامل بودن یک تئوری و تصمیم‌پذیری آن وجود دارد.

قضیه ۲۴. فرض کنید T یک تئوری باشد که تمام جملات موجود در آن توسط یک الگوریتم قابل چاپ است (در این صورت می‌توان الگوریتم را طوری تقویت کرد که علاوه بر این، نتایج تئوری T را هم چاپ کند). حال اگر بدانیم که تئوری T کامل است، آنگاه T تصمیم‌پذیر نیز هست.

تئوری حساب پئانو که اعداد طبیعی یکی از مدل‌های آن است، قابل چاپ توسط یک الگوریتم است، پس اگر کامل باشد، تصمیم‌پذیر است. در این صورت چون $\mathbb{N}$ مدلی برای تئوری حساب پئانو است، الگوریتم ما می‌تواند یک جمله ϕ را بگیرد و مشخص کند که آیا

$$\mathbb{N} \models \phi$$

یا خیر. در واقع الگوریتم ما می‌تواند تمام حساب اعداد طبیعی را پوشش دهد. در ادامه درس نشان خواهیم داد که تئوری حساب پئانو و حتی تئوری کامل $\mathbb{N}$ تصمیم‌پذیر نیست. یک نتیجه از این گفته این است که تئوری پئانو کامل نیست.

فصل ۳

نظریه بازگشت و ناتمامیت اول گودل

۱.۳ معرفی ماشین ثبت

تعریف ۳۰ (ماشین ثبت).

از این پس الفبا را مجموعه $\{1\}$ در نظر می‌گیریم.

تعریف ۳۱. تابع جزئی محاسبه‌پذیر.

مثال ۳۱. ۱. ماشین L_r .

۲. ماشین $K_h^{T \rightarrow s}$.

۲.۳ معرفی توابع بازگشتی

تعریف ۳۲. تابع $f: \mathbb{N}^n \rightarrow \mathbb{N}$ را بازگشتی می‌نامیم هرگاه توسط قوانین زیر ایجاد شده باشد:

۱. قوانین پایه:

- تابع $s(x) = x + 1$ بازگشتی است.
- تابع تصویر $I_i^n(x_1, \dots, x_n)$ بازگشتی است.
- تابع صفر موضعی ثابت صفر بازگشتی است: c_0^0 .

۲. قوانین ترکیب: اگر g, h بازگشتی باشند تابع

$$f(x_1, \dots, x_n) = h(g_1(x_1, \dots, x_n), \dots, g_k(x_1, \dots, x_n))$$

بازگشتی است.

۳. قانون بازگشت اولیه: اگر g, h توابع بازگشتی باشند آنگاه تابع $f(x_1, \dots, x_n, y)$ که به صورت

زیر تعریف می‌شود، بازگشتی است:

$$f(x_1, \dots, x_n, 0) = g(x_1, \dots, x_n)$$

$$f(x_1, \dots, x_n, y + 1) = h(x_1, \dots, x_n, y, f(x_1, \dots, x_n, y)).$$

۴. قانون بازگشت μ : فرض کنید g یک تابع بازگشتی باشد و

$$\forall x_1, \dots, x_n \quad \exists y \quad g(x_1, \dots, x_n, y) = 0$$

در این صورت تابع زیر بازگشتی است:

$$f(x_1, \dots, x_n) = \mu y (g(x_1, \dots, x_n, y) = 0).$$

فصل ۴

حذف سور در حساب پرسبرگر

فصل ۵

تمرینهای تحویلی

۱.۵ تمرین نوبت اول، زمان تحویل پنجشنبه ۱۵ مهر ساعت ۲۴

تحویل حداقل سه تمرین اجباری است.

تمرین ۱۳. نشان دهید که در زبان $L = \{+, \cdot, 0, 1\}$ تابع $x + iy \mapsto \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix}$ یک نشاندهنده ساختار $(\mathbb{C}, +, \cdot, 0, 1)$ در ساختار $\mathfrak{M}$ متشکل از ماتریسهای دو در دو است (با جمع و ضرب ماتریسها و تعبیر $1^{\mathfrak{M}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ و $0^{\mathfrak{M}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$).

تمرین ۱۴. موارد زیر را با فرمولهای مرتبه اول و برای ساختار $(\mathbb{R}, +, \cdot, 0, 1, <, f)$ بنویسید که $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ یک تابع مشخص است.

۱. هر عدد حقیقی مثبت دارای یک ریشه دوم است.

۲. اگر تابع f اکیدا صعودی باشد آنگاه یک به یک است.

۳. آیا می‌شود یک فرمول نوشت که بگوید هر تابعی که اکیدا صعودی است یک به یک است؟

تمرین ۱۵. فرض کنید $L = \{f, g, c\}$ که در آن $n_f = 1, n_g = 2$. نیز فرض کنید $t_2 = t_1 = gv_1c$ و $\mathfrak{M}_2 = (\mathbb{N}, s, \cdot, 0)$ و $\mathfrak{M}_1 = (\mathbb{R}, \exp, +, 1)$. قرار دهید $t_3 = fggv_1v_2gv_1fv_2, fgcfv_1$ در هر کدام از $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_i$ مقادیر زیر را محاسبه کنید:

$$t_1^{\mathfrak{M}}(a_1) \quad ۱.$$

$$t_2^{\mathfrak{M}}(a_1) \quad ۲.$$

$$t_3^{\mathfrak{M}}(a_1, a_2) \quad ۳.$$

تمرین ۱۶. فرمولهای زیر را پرانتزگذاری کنید:

$$\neg \phi \wedge \psi \rightarrow \chi \quad \bullet$$

$$\forall x R(x, y) \rightarrow \exists y S(y, z) \wedge t(u, v) \quad \bullet$$

$$\bullet \exists x R(x, y) \wedge f(x) \doteq y \rightarrow \forall y R(x, y)$$

تمرین ۱۷. در زبان $L = \{+, \cdot\}$ یک ترم بنویسید که یادآور چندجمله‌ای $2xw^2 + xy^3z$ باشد.

۲.۵ تمرین نوبت دوم، مهلت تحویل دوشنبه ۳ آبان

تمرین ۱ نشان دهید که

$$\models \phi \rightarrow \psi$$

با

$$\models \phi \Rightarrow \models \psi$$

معادل نیست (بحث کنید که کدام از کدام نتیجه می‌شود).

تمرین ۲ در زبان $L = \{R\}$ جمله‌ای بنویسید که بگوید

۱. R یک رابطه هم‌ارزی است که حداقل دو کلاس هم‌ارزی دارد.

۲. R یک رابطه هم‌ارزی است که حداقل یکی از کلاسهای آن بیش از یک عنصر دارد.

تمرین ۳ فرض کنید γ, β روی متغیرهای آزاد به کار رفته در فرمول ϕ مقادیر یکسانی داشته باشند. در این صورت

$$\mathfrak{M} \models \phi[\beta] \Leftrightarrow \mathfrak{M} \models \phi[\gamma].$$

تمرین ۴ فرمولهای زیر را در حالت نرمال پیشوندی بنویسید.

$$۱. \forall x \exists y p(x, y) \rightarrow \forall x p(x, x)$$

$$۲. \forall x \exists y (p(x, y) \rightarrow \forall x p(x, x))$$

تمرین ۵ نشان دهید که اگر x در ψ آزاد باشد

$$\not\models \exists x \phi \wedge \psi \rightarrow \exists x (\phi \wedge \psi).$$

تمرین ۶ نشان دهید

$$\forall x \exists y H(x, y) \not\models \exists y \forall x H(x, y).$$

۳.۵ تمرین نوبت سوم، تحویل: پنجشنبه ۲۰ آبان

تمرین فرض کنید $L = \{E\}$ یک زبان مرتبه اول باشد که در آن E یک نماد رابطه‌ای دوموضعی است.

۱. در این زبان یک تئوری T بنویسید به طوری که اگر $\mathfrak{M} = (M, E^{\mathfrak{M}}) \models T$ آنگاه $E^{\mathfrak{M}}$ یک رابطه هم‌ارزی با نامتناهی کلاس نامتناهی باشد.

۲. تئوری T چند مدل شمارا دارد؟

۳. تئوری T چند مدل با اندازه $\aleph_1$ دارد؟ (اگر نمی‌دانید که $\aleph_1$ چیست این سوال را با $2^{\aleph_0}$ پاسخ دهید.)

تمرین قضیه اردوش‌رادو را با استفاده از قضیه فشردگی ثابت کنید: فرض کنید G یک گراف نامتناهی باشد که هر زیرگراف متناهی آن چهاررنگ‌پذیر است. نشان دهید که G چهاررنگ‌پذیر است.

راهنمایی درباره مفهوم رنگ‌آمیزی در کلاس درس صحبت کرده‌ام، اگر یادتان نمی‌آید فیلم جلسه یازدهم را ببینید. برای حل سوال، برای هر رأس گراف G یک ثابت به زبان اضافه کنید. چهار رابطه تک‌موضعی برای رنگ‌آمیزی نیز به زبان اضافه کنید. تئوری T را به گونه‌ای بنویسید که مدل داشتن آن به معنی قابل‌رنگ‌آمیزی بودن گراف G باشد.

۴.۵ تمرین نوبت چهارم. تحویل: دوشنبه ۸ آذر

تمرین اول نشان دهید اگر تئوری T کامل باشد آنگاه هر دو مدل آن هم‌ارز مقدماتی هستند.

تمرین دوم فرض کنید T_{rg} تئوری گرافهای تصادفی باشد. نشان دهید که T_{rg} و تئوری زیر، دقیقاً مدل‌های یکسانی دارند:

$$T' = \{\phi : \lim_{N \rightarrow \infty} p_N(\phi) = 1\}$$

که ϕ های مجموعه بالا فرمولهائی در زبان نظریه گراف هستند.

تمرین سوم فرض کنید L یک زبان متناهی و $\mathfrak{M}$ یک ساختار متناهی باشد. نشان دهید که اگر $\mathfrak{N} \equiv \mathfrak{M}$ آنگاه $\mathfrak{N} \cong \mathfrak{M}$.

تمرین چهارم فرض کنید که T تئوری روابط هم‌ارزی‌ای باشد که نامتناهی کلاس نامتناهی دارند. آیا T کامل است؟ اگر جواب منفی است آیا می‌توان جمله‌هائی به T اضافه کرد تا کامل شود؟

۵.۵ تمرین نوبت پنجم، تحویل: دوشنبه ۲۹ آذر

تمرین اول تئوری T را بیشینه می‌نامیم هرگاه $T \not\vdash \perp$ و برای هر جمله ϕ یا $\phi \in T$ یا $\neg\phi \in T$. نشان دهید که اگر T بیشینه باشد آنگاه هیچ تئوری T' وجود ندارد که تناقض نتیجه ندهد و اکیداً شامل T باشد.

تمرین دوم فرض کنید K یک کلاس از L ساختارها باشد. می‌گوییم کلاس K اصل‌پذیر است هرگاه یک تئوری T موجود باشد که K دقیقاً از ساختارهایی تشکیل شده باشد که مدل T باشند. اگر تئوری یاد شده از متناهی جمله تشکیل شده باشد، می‌گوییم کلاس K متناهی اصل‌پذیر است. نشان دهید که کلاس K از ساختارها متناهی اصل‌پذیر است اگر و تنها اگر کلاس K و K^c هر دو اصل‌پذیر باشند. منظور از K^c کلاس ساختارهایی است که در K نیستند.

تمرین سوم نشان دهید که

$$\not\models (\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\forall x\alpha \rightarrow \forall x\beta).$$

تمرین چهارم نشان دهید که اگر $(\alpha \rightarrow \beta) \vdash \text{آنگاه } (\forall x\alpha \rightarrow \forall x\beta)$.

۶.۵ امتحان میان‌ترم درس منطق ریاضی، پنج‌شنبه ۲۵ آذر

برای دو سوال زیر به تعداد حداکثر ۱۰ صفحه اسلاید تهیه کنید و برای امتحان شفاهی آماده باشید. از آنجا که سوالها را در اختیار دارید، از تمامی جزئیات اثبات قضایا خواهم پرسید. پس نیاز است که اثباتها را با جزئیات کامل بلد باشید. امتحان پنج نمره خواهد داشت و برای هر کس به مدت حداکثر بیست دقیقه طول خواهد کشید. جدول زمان‌بندی امتحان را بعداً در اختیارتان قرار خواهم داد.

سوال اول نشان دهید که تئوری T دارای اصل‌بندی عمومی است اگر و تنها اگر تحت زیرساختارها بسته باشد.

سوال دوم قضیهٔ تمامیت گودل را بیان و اثبات کنید.