

حساب دیفرانسیل و انتگرال

توابع چندمتغیره حقیقی

مقدمه. در مبحث حساب دیفرانسیل و انتگرال توابع حقیقی یک متغیره با دو مفهوم مشتق و انتگرال برای توابعی که دامنه تعریف و هم دامنه آنها زیرمجموعه‌هایی از مجموعه اعداد حقیقی است آشنا شدیم. در این درس، ضمن معرفی توابع چند متغیره حقیقی، به بررسی مفاهیم اصلی حسابان بر روی این دسته از توابع می‌پردازیم. در فصل اول درس، ضمن معرفی توابع چندمتغیره، با دو نگرش هندسی مرتبط با این توابع آشنا می‌شویم. در ادامه، مفاهیم حد، پیوستگی و مشتق را برای این توابع مورد توجه قرار خواهیم داد. همانگونه که مشاهده می‌کنیم، سعی در گسترش مفهوم مشتق از حالت توابع یک متغیره به چندمتغیره منجر به چندین مفهوم مختلف، ولی در عین حال مرتبط، در این ساختار می‌گردد. سپس به بررسی برخی نتایج حاصل از مشتق‌پذیری توابع چندمتغیره می‌پردازیم. بحث فصل اول را با اکستریم‌های توابع چند متغیره به پایان می‌بریم. در فصل دوم درس، با مفهوم انتگرال‌های چندگانه، به عنوان یکی از تعمیم‌های طبیعی انتگرال ریمان از توابع یک متغیره حقیقی به توابع چندمتغیره، آشنا خواهیم شد. یکی از کاربردهای مهم توابع چندمتغیره در برخی رشته‌های مهندسی و همچنین علوم پایه، بحث مربوط به میدان‌های برداری و انتگرال‌های نظیر به این میدان‌ها است. این موضوع در فصل سوم درس، تحت عنوان آنالیز برداری، مورد توجه قرار می‌گیرد. قبل از آغاز فصل اول، ابتدا چند مفهوم مقدماتی را که در مباحث مختلف این درس مورد استفاده خواهند بود یادآوری می‌کنیم.

چند مفهوم مقدماتی

مجموعه تمام زوج‌های مرتب چون (x, y) که در آن $x, y \in \mathbb{R}$ ، را با نماد $\mathbb{R}^2$ نشان می‌دهیم. پس

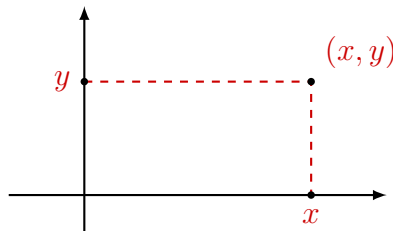
$$\mathbb{R}^2 = \{(x, y); x, y \in \mathbb{R}\}$$

به همین ترتیب، مجموعه تمام سه‌تایی‌های مرتب چون (x, y, z) از اعداد حقیقی را با $\mathbb{R}^3$ نشان می‌دهیم. در راستای گسترش این دو مجموعه، برای عدد طبیعی $n \in \mathbb{N}$ ، قرار می‌دهیم

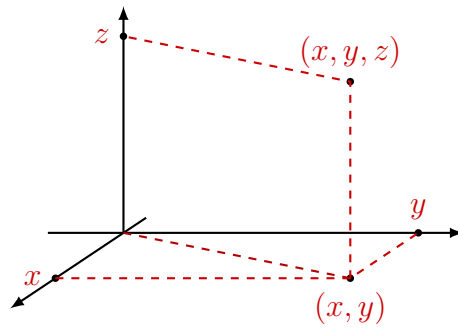
$$\mathbb{R}^n := \{(x_1, x_2, \dots, x_n); x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}\}$$

هر عضو مجموعه $\mathbb{R}^n$ یک n تایی مرتب است و آن را یک نقطه در این مجموعه می‌نامیم. نقطه $(x_1, \dots, x_n)$ را برای سهولت با نماد x نشان می‌دهیم.

می‌دانیم مجموعه اعداد حقیقی، $\mathbb{R}$ ، از نظر هندسی قابل انطباق با نقاط واقع بر یک خط جهت دار تحت نام محور اعداد حقیقی است. اکنون اگر در یک صفحه دو محور حقیقی را که در مبدأشان بر هم عمود هستند در نظر بگیریم آنگاه می‌توانیم تناظری بین نقاط مجموعه $\mathbb{R}^2$ و نقاط این صفحه مطابق شکل زیر ایجاد کنیم. چنین صفحه‌ای که هر نقطه آن توسط عضوی از مجموعه $\mathbb{R}^2$ قابل شناسایی است را یک صفحه دکارتی می‌نامیم.

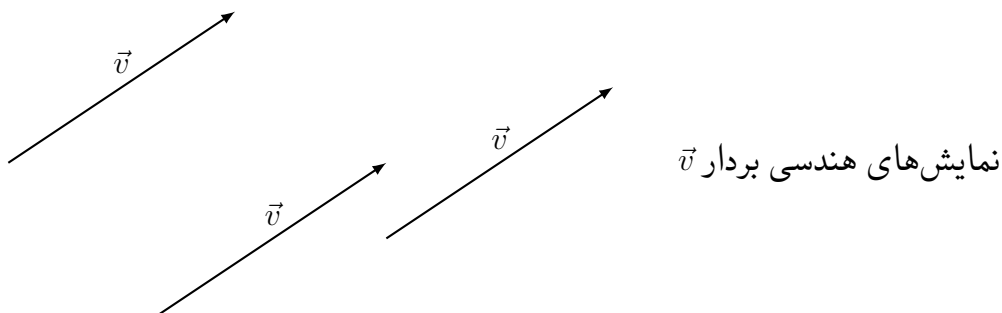


بر اساس نمایش فوق، محور افقی را محور x و محور عمودی را محور y می‌نامیم. به همین ترتیب، با در نظر گرفتن سه محور مختصاتی که دو به دو در مبدأشان بر هم عمود باشند (مطابق شکل زیر) می‌توانیم تناظری یک به یک بین نقاط فضا و نقاط مجموعه $\mathbb{R}^3$ ایجاد کنیم. چنین فضایی را اصطلاحاً یک فضای دکارتی می‌نامیم.



باید توجه داشت برای $n \geq 4$ ، مجموعه $\mathbb{R}^n$ از نظر هندسی قابل نمایش نیست. این بدان معنی نیست که چنین مجموعه‌ای وجود ندارد. اتفاقاً در بسیاری از زمینه‌ها (مثلاً در فیزیک یا سایر رشته‌های مهندسی) این دسته از فضاها کاربردهای فراوانی را به خود اختصاص داده‌اند.

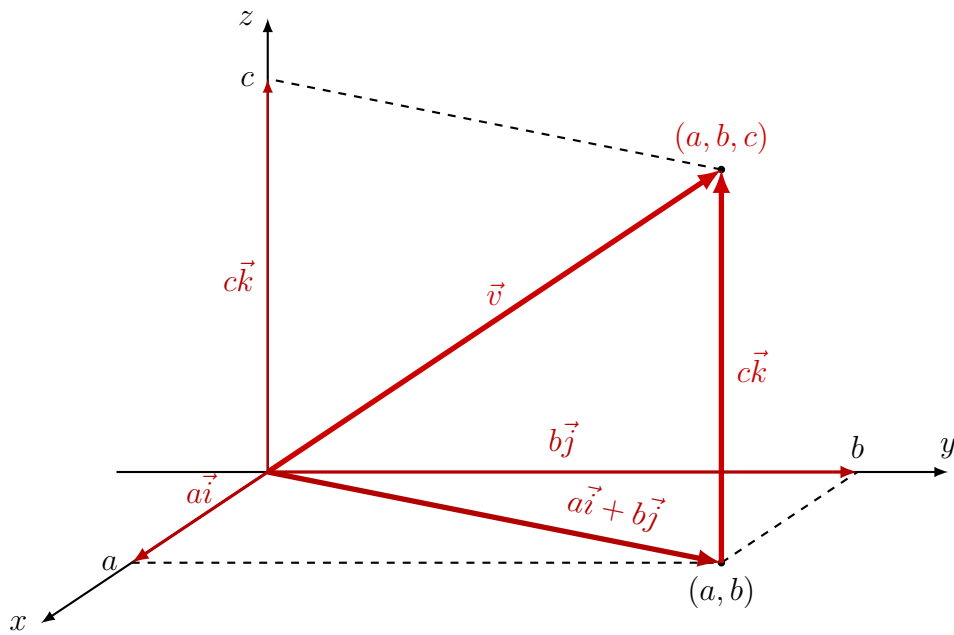
در بسیاری از شاخه‌هایی که برای بیان قوانین خود از ابزار ریاضی استفاده می‌کنند علاوه بر کمیت‌های عددی، به کمیت‌هایی نیاز است که علاوه بر مقدار، جهتی در فضا (یا صفحه) را نیز مشخص می‌کنند. این نوع کمیت‌ها اصطلاحاً بردار نامیده می‌شوند. پس یک بردار کمیتی است که با دو مشخصه اندازه و جهت تعیین می‌شود. چنین کمیتی را در فضا توسط یک پاره‌خط جهت‌دار نمایش می‌دهیم. در این نمایش، طول پاره‌خط نشان‌دهنده اندازه بردار و جهت پاره‌خط نیز جهت بردار را نشان می‌دهد. نقطه شروع این پاره‌خط جهت دار در ریاضی مهم نیست (برخلاف فیزیک، که در آن نقطه شروع پاره‌خط جهت دار فوق را نقطه اثر بردار می‌نامند) به این ترتیب، کلیه پاره‌خط‌های جهت‌داری که یک اندازه داشته یک جهت را نشان می‌دهند، مستقل از نقطه اثرشان، در ریاضی یک بردار را نشان می‌دهند. برای برداری چون $\vec{v}$ در فضا، اندازه این بردار را با نماد $\|\vec{v}\|$ نشان داده آن را نرم (norm) بردار $\vec{v}$ می‌نامیم.



اکنون فرض کنیم فضایی که نمایش هندسی بردار را در آن در نظر می‌گیریم مجهز به یک سیستم مختصات دکارتی باشد. اگر برای بردار $\vec{v}$ نمایشی با نقطه اثر مبدا مختصات در نظر بگیریم و فرض کنیم نقطه انتهایی این نمایش نقطه‌ای به مختصات (a, b, c) باشد آنگاه با استفاده از خواص ضرب اسکالر و جمع برداری، خواهیم داشت

$$\vec{v} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$$

که در آن $\vec{i}, \vec{j}$ و $\vec{k}$ بردارهای یکه در راستای سه محور x, y و z هستند.



اسکالرهایی a, b, c را مولفه‌های بردار $\vec{v}$ در این فضا نامیده، بردار $\vec{v}$ را به صورت $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ نیز نمایش می‌دهیم.

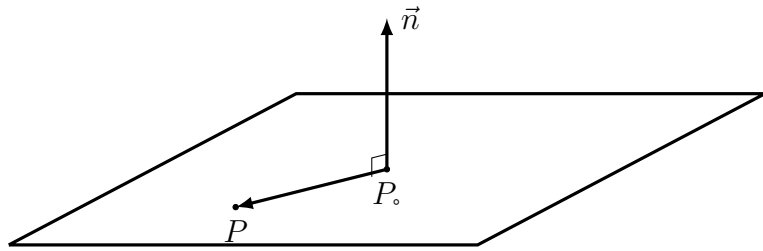
در ادامه، به کمک بردارها، به معرفی دو زیرمجموعه هندسی خاص در فضا می‌پردازیم.

یک صفحه در فضا مکان هندسی نقاطی از فضا است که بردارهای موضع نقاط مختلف آن نسبت به یک نقطه ثابت از صفحه همه بر یک امتداد مشخص عمود باشند. بر این مبنا، فرض کنیم π یک صفحه در فضا و $P_0(x_0, y_0, z_0)$ نقطه‌ای واقع بر آن باشد. همچنین فرض کنیم $\vec{n} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$ برداری هم راستا با امتداد عمود بر این صفحه باشد. در این صورت برای هر $P(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$

$$P \in \pi \Leftrightarrow \vec{P_0P} \perp \vec{n}$$

$$\Leftrightarrow \vec{P_0P} \cdot \vec{n} = 0$$

$$\Leftrightarrow a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$



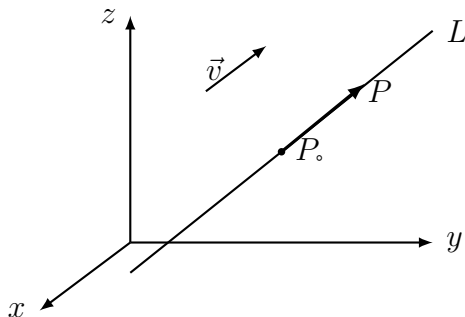
معادله فوق تحت نام معادله صفحه π ، و بردار $\vec{n}$ به نام یک بردار نرمال یا قائم برای این صفحه نامیده می‌شوند. معادله فوق را می‌توان با ساده‌سازی به صورت زیر نیز نوشت

$$ax + by + cz = d,$$

که در آن $d = ax_0 + by_0 + cz_0$.

مفهوم هندسی بعدی که در اینجا معرفی می‌کنیم خط راست است. خط راست در فضا مکان هندسی تمام نقاطی است که بردار موضع آنها نسبت به نقطه‌ای ثابت واقع بر خط، همه به موازات امتدادی مشخص باشند. بر این اساس فرض کنیم L خطی در فضا و $P_0(x_0, y_0, z_0)$ نقطه‌ای واقع بر این خط باشد. اگر $\vec{v} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$ برداری غیرصفر در فضای دکارتی به موازات خط L باشد آنگاه برای نقطه $P(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$

$$\begin{aligned} P \in L &\Leftrightarrow \vec{P_0P} \parallel \vec{v} \\ &\Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R} \quad \vec{P_0P} = t\vec{v} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x - x_0 = ta \\ y - y_0 = tb \\ z - z_0 = tc \end{cases} \end{aligned}$$



معادلات $x = x_0 + at$ ، $y = y_0 + bt$ و $z = z_0 + ct$ به نام معادلات پارامتری خط L و t پارامتر این خط نامیده می‌شود. بردار $\vec{v}$ را یک بردار هادی برای این خط می‌نامیم.

مثال. نقطه $P_0(1, 2, 4)$ مفروض است. الف) معادله خط گذرکننده از P_0 با بردار هادی $\vec{v} = \vec{i} - 2\vec{j} + 5\vec{k}$ را تعیین کنید. ب) معادلات پارامتری خطی را بنویسید که از P_0 و $Q_0(0, -1, 1)$ بگذرد. الف) فرض کنیم L_1 خط مورد نظر باشد. در این صورت با توجه به اطلاعات داده شده

$$L : \begin{cases} x = t + 1 \\ y = -2t + 2 \\ z = 5t + 4 \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

ب) فرض کنیم L_2 خط گذرکننده از نقاط P_0 و Q_0 باشد. در این صورت بردار $\vec{P_0Q_0}$ یک بردار هادی برای این خط خواهد بود. داریم

$$\vec{P_0Q_0} = (0 - 1)\vec{i} + (-1 - 2)\vec{j} + (1 - 4)\vec{k} = -\vec{i} - 3\vec{j} - 3\vec{k}$$

البته می‌توانیم بردار $\vec{i} + 3\vec{j} + 3\vec{k}$ را که به موازات این بردار است نیز به عنوان بردار هادی خط L_2 انتخاب کنیم. در این صورت معادلات پارامتری خط L_2 عبارتند از

$$L_2 : \begin{cases} x = t + 1 \\ y = 3t + 2 \\ z = 3t + 4 \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

فصل اول

حساب دیفرانسیل توابع چند متغیره

مفهوم تابع یکی از مفاهیم بسیار مهم در ریاضیات است. یک تابع را می‌توانیم به عنوان دستور یا ضابطه‌ای تلقی کنیم که نحوه وابستگی یک متغیر، تحت نام متغیر تابع، را به یا چند متغیر دیگر، اصطلاحاً متغیر یا متغیرهای مستقل، بیان می‌کند. در صورتی که تعداد متغیرهای مستقل تابع بیش از یکی باشد تابع را چندمتغیره می‌نامیم. در این درس، توابع چند متغیره‌ای را مورد توجه قرار می‌دهیم که متغیرهای مستقل و متغیر تابع آن همه در مجموعه اعداد حقیقی تغییر می‌کنند. اصطلاحاً این توابع را توابع چندمتغیره حقیقی می‌نامیم. به طور دقیق‌تر

تعریف

فرض کنیم $D \subset \mathbb{R}^n$. دستورالعملی که به هر نقطه از D یک عدد حقیقی را متناظر سازد تحت نام یک تابع n -متغیره حقیقی تعریف شده بر دامنه D نامیده می‌شود. اگر $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ یک تابع n متغیره تعریف شده بر D باشد آنگاه مقدار این تابع در نقطه $x = (x_1, \dots, x_n) \in D$ را برای سهولت با نماد $f(x_1, \dots, x_n)$ نشان می‌دهیم و آن را ضابطه یا دستور تابع f می‌نامیم.

به طور مثال، تابع $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ با دستور $f(x, y) = 2x^2 - xy$ نمونه‌ای از یک تابع دومتغیره تعریف شده بر $\mathbb{R}^2$ است. به همین ترتیب، تابع g با دستور $g(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ تابعی دومتغیره تعریف شده بر $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \leq 1\}$ است.

تابع h با دستور $h(x, y, z) = xyz - \sin(x + z)$ نمونه‌ای از یک تابع سه متغیره تعریف شده بر $\mathbb{R}^3$ است. $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ با دستور $f(x, y, z) = x - xy$ یک تابع سه متغیره را معرفی می‌کند که نسبت به متغیر z ثابت است.

نهایتاً تابع $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ با دستور

$$f(x_1, \dots, x_n) = x_1 + \dots + x_n$$

نمونه‌ای از یک تابع n -متغیره تعریف شده بر $\mathbb{R}^n$ است.

نمودار و مجموعه‌های تراز توابع چند متغیره

برای داشتن درک مناسب نسبت به مفاهیمی که در آینده در مورد توابع چندمتغیره تعریف خواهیم کرد، داشتن یک نگرش هندسی نسبت به این توابع می‌تواند مفید باشد. برای این منظور، دو مفهوم هندسی نمودار یک تابع چندمتغیره و مجموعه تراز یک چنین تابعی را تعریف می‌کنیم. ابتدا مفهوم نمودار را برای یک تابع یک متغیره حقیقی یادآور می‌شویم.

فرض کنیم $I \subset \mathbb{R}$ و $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ تابعی یک متغیره تعریف شده بر I باشد. در این صورت، نمودار این تابع، بنا به تعریف، عبارت از زیرمجموعه $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x \in I, y = f(x)\}$ از صفحه $\mathbb{R}^2$ است. اکنون این تعریف را برای یک تابع n -متغیره حقیقی گسترش می‌دهیم.

تعریف

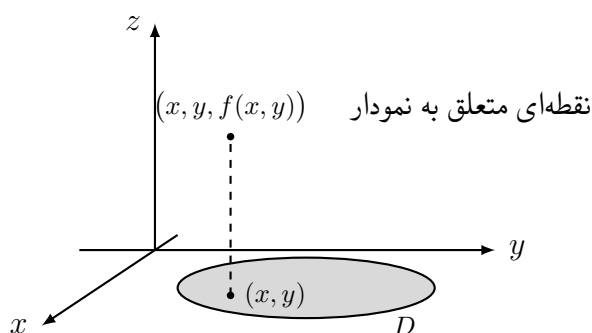
فرض کنیم $D \subset \mathbb{R}^n$. در این صورت نمودار تابع $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ ، به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\{(x_1, \dots, x_n, w) \in \mathbb{R}^{n+1}; (x_1, \dots, x_n) \in D \text{ و } w = f(x_1, \dots, x_n)\}$$

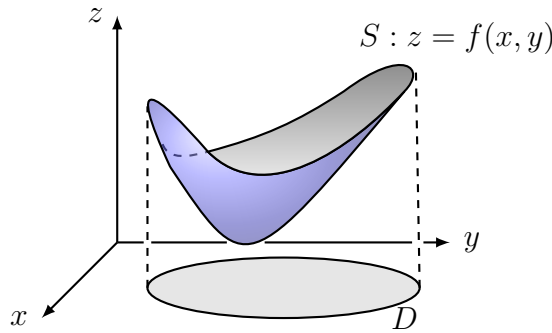
همانطور که مشاهده می‌شود نمودار یک تابع n -متغیره حقیقی در فضای $\mathbb{R}^{n+1}$ قرار می‌گیرد. به این ترتیب، نمودار یک تابع دو متغیره در فضای $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R}^{2+1}$ و نمودار یک تابع سه متغیره در فضای $\mathbb{R}^4 = \mathbb{R}^{3+1}$ خواهد بود. بر این مبنا، فقط نمودار توابع دومتغیره، که زیرمجموعه‌ای از $\mathbb{R}^3$ هستند، از نظر هندسی قابل رویت خواهند بود.

فرض کنیم $D \subset \mathbb{R}^2$ و $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ تابعی دومتغیره تعریف شده بر دامنه D باشد. همانطور که بیان شد، نمودار این تابع دومتغیره، بنا به تعریف، عبارت است از

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; (x, y) \in D \text{ و } z = f(x, y)\}$$



در بسیاری از موارد، با تعیین تمام نقاط متعلق به نمودار فوق در فضا، زیرمجموعه‌ای به صورت یک رویه در فضا تشکیل می‌شود که در این حالت آن را رویه نمایش تابع f یا رویه به معادله $z = f(x, y)$ می‌نامیم.



در مثال زیر با نحوه تعیین نمودار چند تابع دو متغیره آشنا می‌شویم.

مثال. رویه نمایش هر یک از توابع دومتغیره زیر را در فضا مشخص کنید.

الف) تابع $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ با دستور $f(x, y) = 2x + 3y$.

بنا به تعریف، نمودار این تابع برابر مجموعه $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; (x, y) \in D = \mathbb{R}^2, z = f(x, y) = 2x + 3y\}$ است. بنابر این نقطه (x, y, z) به این نمودار تعلق دارد اگر و تنها اگر $z = 2x + 3y$ یا $2x + 3y - z = 0$. اما معادله فوق مشخص کننده نقاط یک صفحه در فضا در برگیرنده مبدا مختصات و با بردار نرمال $\vec{n} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}$ است. پس نمودار تابع f در این مثال صفحه فوق است.

ب) تابع $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ با دستور $f(x, y) = x^2 + y^2$.

طبق تعریف، اگر $S \subset \mathbb{R}^3$ نمودار این تابع باشد آنگاه

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; z = f(x, y) = x^2 + y^2\}$$

برای شناسایی این رویه می‌توانیم از برخورد آن با صفحات مختصات استفاده کنیم. فرض کنیم $\pi_{(y=0)}$ ، $\pi_{(x=0)}$ و $\pi_{(z=0)}$ به ترتیب صفحات yoz (یا مکان هندسی نقاطی از فضا که $x = 0$ است)، xoz (صفحه به معادله $y = 0$) و xoy (صفحه به معادله $z = 0$) باشند. در این صورت

$$S \cap \pi_{(x=0)} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; (x, y, z) \in S \text{ و } (x, y, z) \in \pi_{(x=0)}\} = \{(0, y, z) \in \mathbb{R}^3; z = 0^2 + y^2 = y^2\}$$

$$S \cap \pi_{(y=0)} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; z = x^2 + y^2 \text{ و } y = 0\} = \{(x, 0, z) \in \mathbb{R}^3; z = x^2\}$$

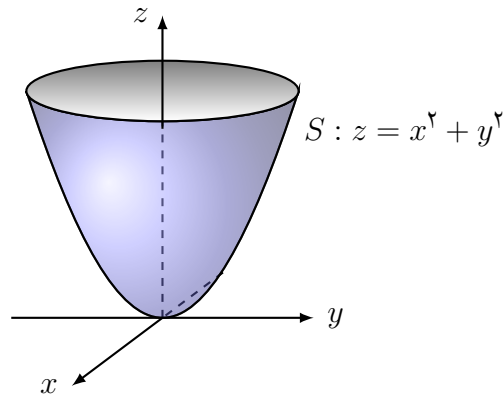
$$S \cap \pi_{(z=0)} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; z = x^2 + y^2 \text{ و } z = 0\} = \{(0, 0, 0)\}$$

به این ترتیب برخورد S با صفحه yoz سهمی $z = y^2$ در این صفحه، برخورد S با صفحه xoz سهمی $z = x^2$ و نهایتاً برخورد S با صفحه xoy فقط نقطه $(0, 0, 0)$ است. برای داشتن درک بهتر از این نمودار، S را با دسته

صفحات $z = k$ (صفحاتی به موازات صفحه xoy) برخورد می‌دهیم.

$$S \cap \pi_{(z=k)} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; z = x^2 + y^2 \text{ و } z = k\} = \{(x, y, k) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 = k\}$$

در نتیجه در حالتی که $k < 0$ (صفحه $z = k$ زیر صفحه xoy قرار داشته باشد) هیچ برخوردی اتفاق نمی‌افتد. در حالتی که $k > 0$ حاصل برخورد دایره‌ای به معادله $x^2 + y^2 = (\sqrt{k})^2$ واقع در صفحه $z = k$ است. با کنار هم قرار دادن این اطلاعات، رویه S در فضا حاصل می‌شود که قسمتی از آن را در شکل زیر مشاهده می‌کنیم.



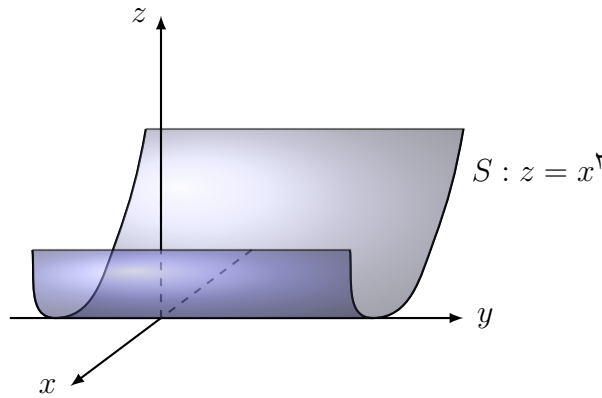
ج) تابع $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ با دستور $f(x, y) = x^2$. فرض کنیم $S \subset \mathbb{R}^3$ رویه نمایش این تابع باشد. در این صورت

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; z = x^2\}$$

برای شناسایی این رویه می‌توانیم، مانند مثال قبل، از برخورد S با صفحات مختصات استفاده کنیم. همچنین می‌توانیم از برخورد آن با دسته صفحات $y = k$ (دسته صفحاتی به موازات صفحه xoz) نیز استفاده کنیم. در حالت اخیر

$$S \cap \pi_{(y=k)} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; z = x^2 \text{ و } y = k\} = \{(x, k, z); z = x^2\}$$

به عبارت دیگر، حاصل برخورد با صفحه $y = k$ سهمی $z = x^2$ است که مستقل از مقدار k می‌باشد. بر این اساس، رویه نمایش تابع f در این مثال به صورت زیر مشاهده می‌شود. این رویه را یک رویه استوانه‌ای می‌نامیم.



(د) تابع $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ با دستور $f(x, y) = y^2 - x^2$. فرض کنیم $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; z = f(x, y) = y^2 - x^2\}$. برای شناسایی رویه S ، ابتدا این رویه را با صفحات مختصات برخورد می‌دهیم.

$$S \cap \pi_{(x=0)} = \{(0, y, z) \in \mathbb{R}^3; z = y^2 - 0^2 = y^2\}$$

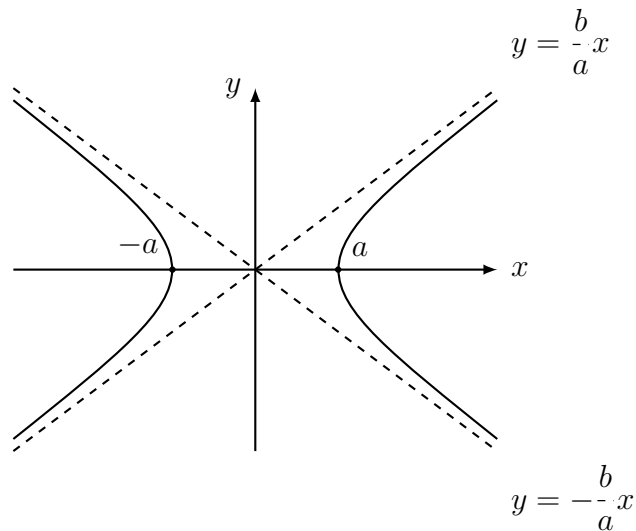
$$S \cap \pi_{(y=0)} = \{(x, 0, z) \in \mathbb{R}^3; z = 0^2 - x^2 = -x^2\}$$

$$S \cap \pi_{(z=0)} = \{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3; 0 = y^2 - x^2\} = \{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3; y = \pm x\}$$

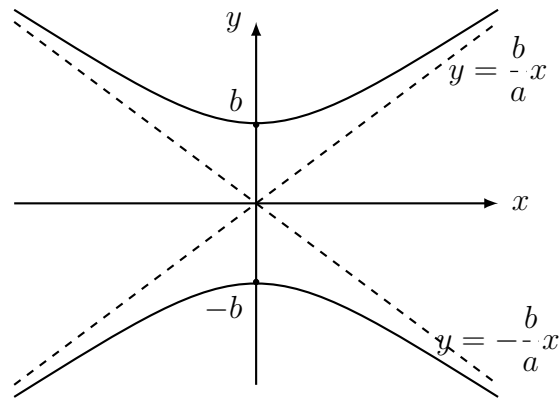
پس حاصل برخورد با صفحه $yo z$ سهمی $z = y^2$ در این صفحه، حاصل برخورد با صفحه $y = 0$ سهمی $z = -x^2$ در صفحه xoz و نهایتاً حاصل برخورد با صفحه xoy دو خط $y = x$ و $y = -x$ است. برای داشتن تصور بهتر از این رویه، آن را با دسته صفحات $z = k$ برخورد می‌دهیم.

$$S \cap \pi_{(z=k)} = \{(x, y, k) \in \mathbb{R}^3; y^2 - x^2 = k\}$$

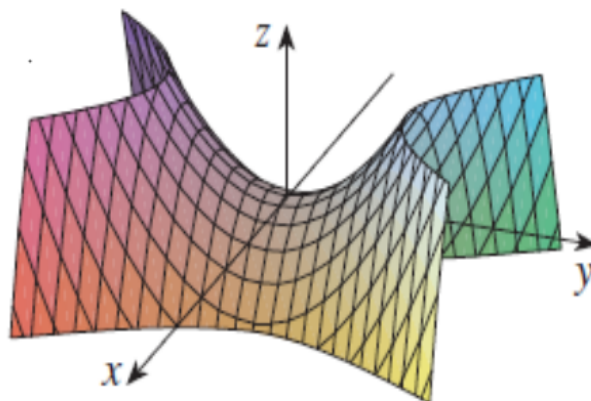
برای شناسایی مجموعه فوق، ابتدا نکته‌ای را از هندسه تحلیلی یادآور می‌شویم. فرض کنیم a و b دو عدد حقیقی مثبت باشند. در این صورت مکان هندسی نقاطی چون $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ در صفحه دکارتی که در معادله $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ صدق می‌کند تحت نام هذلولی در صفحه نامیده می‌شود. همانطور که در شکل نیز مشاهده می‌شود هذلولی از دو خم مجزا در صفحه تشکیل شده، خطوط $y = \pm \frac{b}{a}x$ مجانب‌های مایل این دو خم هستند.



به همین ترتیب معادله $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$ نیز هذلولی مطابق شکل زیر است.



بنابر این بحث، مقطع رویه S با صفحه $z = k$ ، در حالتی که $k > 0$ هذلولی $\frac{y^2}{(\sqrt{k})^2} - \frac{x^2}{(\sqrt{k})^2} = 1$ و در حالتی که $k < 0$ هذلولی $\frac{x^2}{(\sqrt{-k})^2} - \frac{y^2}{(\sqrt{-k})^2} = 1$ است. با کنار هم قرار دادن اطلاعات فوق شکل رویه نمایش تابع $f(x, y) = y^2 - x^2$ به صورت زیر قابل مشاهده خواهد بود.



این رویه تحت نام زین اسبی نامیده می‌شود.

مفهوم دیگری که برای بررسی هندسی يك تابع چندمتغیره مورد استفاده قرار می‌گیرد مفهوم مجموعه تراز است.

تعریف

فرض کنیم $D \subset \mathbb{R}^n$ و $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ تابعی n متغیره تعریف شده بر D باشد. برای ثابت $k \in \mathbb{R}$ ، زیرمجموعه $\{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n; f(x_1, \dots, x_n) = k\}$ از $\mathbb{R}^n$ تحت نام مجموعه تراز f به ازای ثابت k نامیده می‌شود.

همانطور که از تعریف فوق مشاهده می‌شود، مجموعه تراز یک تابع n متغیره زیرمجموعه‌ای از فضای $\mathbb{R}^n$ است. به این ترتیب، مجموعه تراز یک تابع دو متغیره زیرمجموعه‌ای از $\mathbb{R}^2$ و مجموعه تراز یک تابع سه متغیره زیرمجموعه‌ای از $\mathbb{R}^3$ خواهد بود.

مثال. مجموعه‌های تراز تابع f با دستور $f(x, y) = x^2 + y^2$ را به ازای ثابت‌های $k = -1$ ، $k = 0$ و $k = 1$ تعیین کنید.

اگر مجموعه‌های تراز فوق را به ترتیب با نمادهای $C_{(-1)}$ ، $C_{(0)}$ و $C_{(1)}$ نمایش دهیم آنگاه، بنا به تعریف،

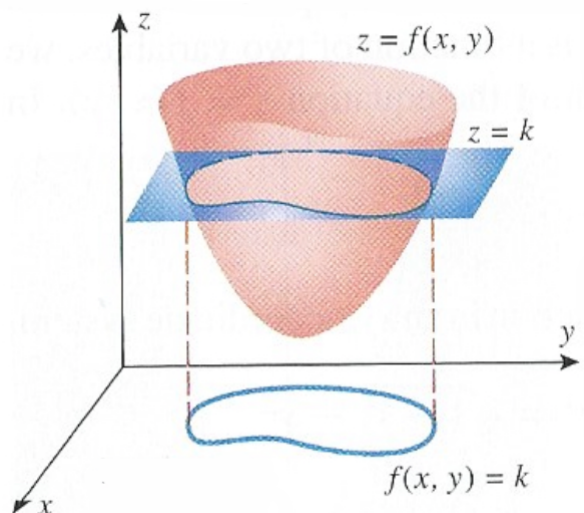
$$C_{(-1)} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; f(x, y) = x^2 + y^2 = -1\} = \emptyset$$

$$C_{(0)} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; f(x, y) = x^2 + y^2 = 0\} = \{(0, 0)\}$$

$$C_{(1)} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; f(x, y) = x^2 + y^2 = 1\}$$

به این ترتیب، مجموعه تراز به ازای ثابت $k = -1$ تهی، به ازای ثابت $k = 0$ مجموعه تک عضوی $\{(0, 0)\}$ و به ازای ثابت $k = 1$ برابر دایره $x^2 + y^2 = 1$ در صفحه xoy است. اگر نمودار تابع $f(x, y) = x^2 + y^2$ را به خاطر بیاوریم، به سادگی مشاهده می‌شود مجموعه‌های تراز فوق در واقع مجموعه حاصل از تصویر برخورد رویه نمایش تابع f و صفحه $z = k$ بر صفحه xoy است.

این مطلب در حالت کلی نیز برقرار است. به عبارت دیگر مجموعه تراز تابع دومتغیره f با ازای ثابت k برابر تصویر نقاط برخورد رویه نمایش f با صفحه $z = k$ بر صفحه xoy می‌باشد.



مثال. مجموعه‌های تراز هر یک از توابع سه متغیره زیر را به ازای ثوابت $k = -1$ ، $k = 0$ و $k = 1$ مشخص نمایید.

(الف) $f(x, y, z) = x + y + z$.

با توجه به تعریف مجموعه تراز، مجموعه‌های تراز تابع f با ازای سه ثابت فوق به صورت زیر به دست می‌آیند.

$$k = -1 : \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; f(x, y, z) = -1\} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x + y + z = -1\}$$

$$k = 0 : \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; f(x, y, z) = 0\} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x + y + z = 0\}$$

$$k = 1 : \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; f(x, y, z) = 1\} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x + y + z = 1\}$$

به این ترتیب مجموعه‌های تراز فوق در این مثال سه صفحه موازی با بردار نرمال مشترک $\vec{n} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ هستند.

(ب) $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$.

مانند مثال قبل، در اینجا نیز مجموعه‌های تراز به شکل زیر حاصل می‌شوند.

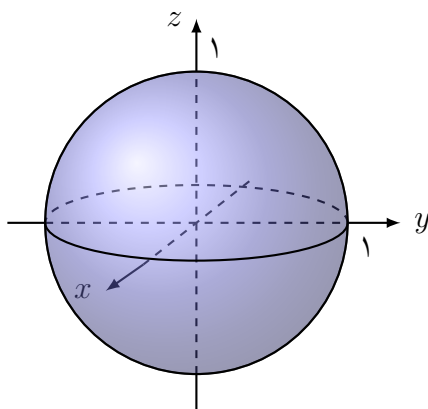
$$k = -1 : \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 = -1\} = \emptyset$$

$$k = 0 : \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 = 0\} = \{(0, 0, 0)\}$$

$$k = 1 : \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

به این ترتیب مجموعه تراز تابع f در این مثال به ازای ثابت $k = -1$ مجموعه تهی، به ازای ثابت $k = 0$

مجموعه تک‌عضوی $\{(0,0,0)\}$ و به ازای ثابت $k=1$ کره $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ است.



$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2 \quad (\text{ج})$$

برای تابع اخیر، مجموعه‌های تراز به ازای سه ثابت فوق را به ترتیب با نمادهای $S_{(-1)}$ ، $S_{(0)}$ و $S_{(1)}$ نشان می‌دهیم. به این ترتیب

$$S_{(-1)} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; f(x, y, z) = -1\} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 - z^2 = -1\}$$

$$S_{(0)} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; f(x, y, z) = 0\} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 - z^2 = 0\}$$

$$S_{(1)} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; f(x, y, z) = 1\} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 - z^2 = 1\}$$

برای شناسایی هر یک از مجموعه‌های فوق از برخورد این مجموعه‌ها و صفحات مختصات و در صورت لزوم از دسته صفحاتی به موازات صفحات مختصات استفاده می‌کنیم. ابتدا مجموعه $S_{(-1)}$ را مورد توجه قرار می‌دهیم.

$$S_{(-1)} \cap \pi_{(x=0)} = \{(0, y, z) \in \mathbb{R}^3; 0^2 + y^2 - z^2 = -1\} = \{(0, y, z) \in \mathbb{R}^3; z^2 - y^2 = 1\}$$

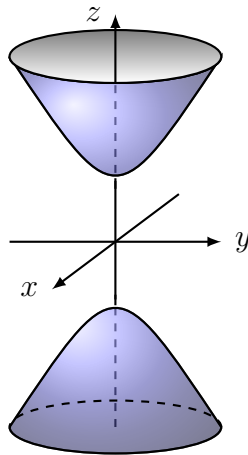
$$S_{(-1)} \cap \pi_{(y=0)} = \{(x, 0, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + 0^2 - z^2 = -1\} = \{(x, 0, z) \in \mathbb{R}^3; z^2 - x^2 = 1\}$$

$$S_{(-1)} \cap \pi_{(z=0)} = \{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 - 0^2 = -1\} = \emptyset$$

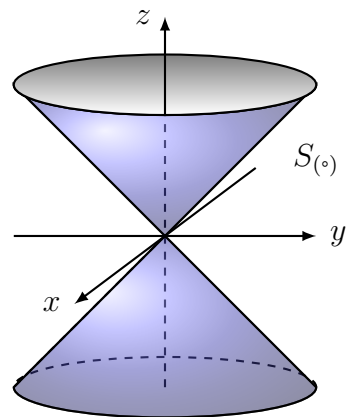
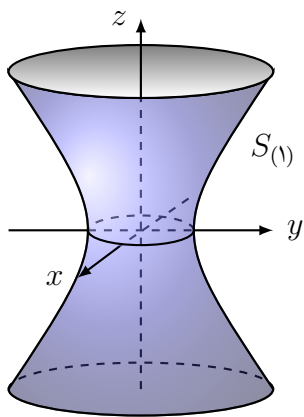
به این ترتیب حاصل برخورد با صفحات $yo\bar{z}$ و xoz هذلولی‌های $z^2 - y^2 = 1$ و $z^2 - x^2 = 1$ در صفحات نظیر است. با صفحه xoy نیز برخوردی رخ نمی‌دهد. اکنون برخورد مجموعه فوق را با دسته صفحات $z = k$ بررسی می‌کنیم.

$$S_{(-1)} \cap \pi_{(z=k)} = \{(x, y, k) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 - k^2 = -1\} = \{(x, y, k) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 = k^2 - 1\}$$

بنابر این با صفحه $z = k$ زمانی برخورد خواهیم داشت که $k^2 - 1 \geq 0$ یا $|k| \geq 1$. (به عبارت دیگر در ناحیه‌ای از فضا که $-1 < z < 1$ هیچ نقطه‌ای از مجموعه $S_{(-1)}$ وجود ندارد.) در حالتی که $k^2 = 1$ آنگاه حاصل برخورد مجموعه‌های تک عضوی $\{(0, 0, 1)\}$ و $\{(0, 0, -1)\}$ خواهد بود. در حالتی که $k^2 - 1 > 0$ آنگاه حاصل برخورد دایره $x^2 + y^2 = (\sqrt{k^2 - 1})^2$ در صفحه $z = k$ می‌باشد. با کنار هم قرار دادن این اطلاعات مجموعه $S_{(-1)}$ به صورت رویه زیر در فضا حاصل می‌شود.



این رویه تحت نام هذلولیگون دوپارچه دوار نامیده می‌شود. به نحو مشابه می‌توانیم مجموعه‌های $S_{(0)}$ و $S_{(1)}$ را بررسی کنیم و به این ترتیب رویه‌های زیر در فضا حاصل خواهند شد.



رویه $S_{(0)}$ به نام مخروط دوار و رویه $S_{(1)}$ به نام هذلولیگون یک‌پارچه دوار نامیده می‌شوند.

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 \quad (د)$$

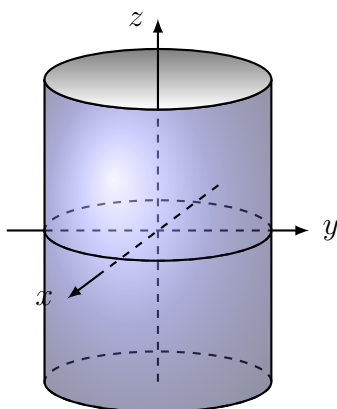
مانند چند مثال قبل، مجموعه‌های تراز به ازای ثوابت $k = -1$, $k = 0$, و $k = 1$ عبارتند از

$$k = -1 : \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; f(x, y, z) = x^2 + y^2 = -1\} = \emptyset$$

$$k = 0 : \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; f(x, y, z) = x^2 + y^2 = 0\} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x = y = 0\} = \{(0, 0, z); z \in \mathbb{R}\}$$

$$k = 1 : \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; f(x, y, z) = x^2 + y^2 = 1\}$$

به این ترتیب، مجموعه تراز به ازای ثابت $k = -1$ تهی و به ازای ثابت $k = 0$ محور z است. به ازای ثابت $k = 1$ مجموعه تراز مکان هندسی تمام نقاطی چوت $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ است که برای آنها مختصات (x, y) بر دایره $x^2 + y^2 = 1$ در صفحه xy قرار دارد. پس در این حالت مجموعه تراز استوانه به موازات محور z ساخته شده بر دایره فوق خواهد بود.



با توجه به مثال‌های فوق، مجموعه تراز یک تابع سه متغیره مانند f به ازای ثابتی چون k می‌تواند تشکیل یک رویه در فضا دهد. در این حالت رویه حاصل را رویه تراز f به ازای ثابت k ، یا رویه به معادله $f(x, y, z) = k$ می‌نامیم.

تذکر. مشاهده کردیم که نمودار یک تابع دو متغیره نیز می‌تواند تشکیل یک رویه در فضا دهد. همانطور که در مثال زیر مشاهده می‌کنیم این رویه را می‌توانیم به عنوان رویه تراز یک تابع سه متغیره مناسب نیز در نظر بگیریم.

مثال. تابع دو متغیره $f(x, y) = x^2 - y^2$ و تابع سه متغیره $g(x, y, z) = x^2 - y^2 - z$ مفروضند. نمودار تابع f و رویه تراز تابع g به ازای ثابت $k = 0$ را تعیین کنید. اگر S نمودار تابع دو متغیره f باشد آنگاه، بنا تعریف،

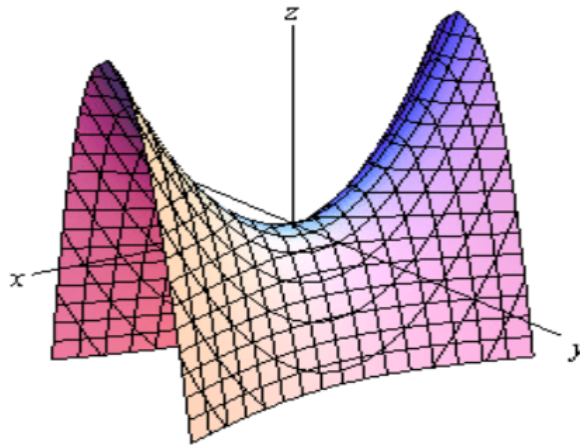
$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; z = f(x, y) = x^2 - y^2\}$$

به همین ترتیب، مجموعه تراز تابع سه متغیره g به ازای ثابت $k = 0$ برابر است با

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, g(x, y, z) = x^2 - y^2 - z = 0\} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; z = x^2 - y^2\}$$

به عبارت دیگر، در این حالت نمودار تابع دو متغیره f و مجموعه تراز تابع سه متغیره g با هم برابر هستند. نمودار تابع f همان زین اسبی است که قبلاً در یک مثال آن را مشاهده کرده‌ایم با این تفاوت که نقش دو

محور x و y با یکدیگر عوض شده است.



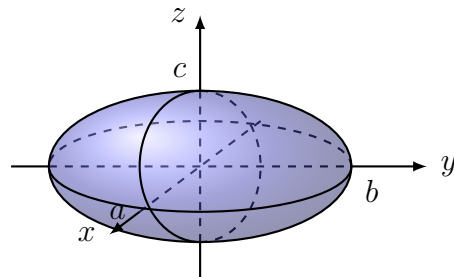
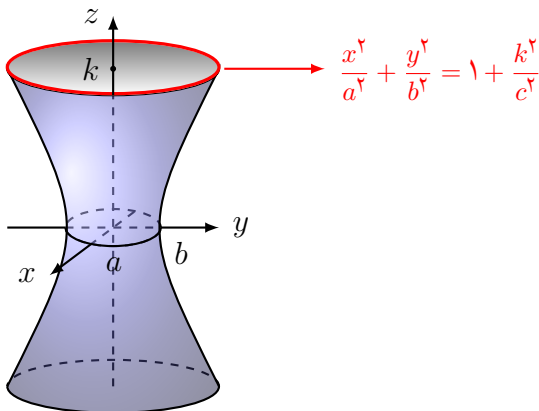
در حالت کلی، رویه نمایش تابع دو متغیره f همان رویه تراز تابع سه متغیره $g(x, y, z) = f(x, y) - z$ به ازای ثابت $k = 0$ است.

رویه‌های درجه ۲. فرض کنیم f یک چندجمله‌ای بر حسب متغیرهای x, y و z به صورت زیر باشد.

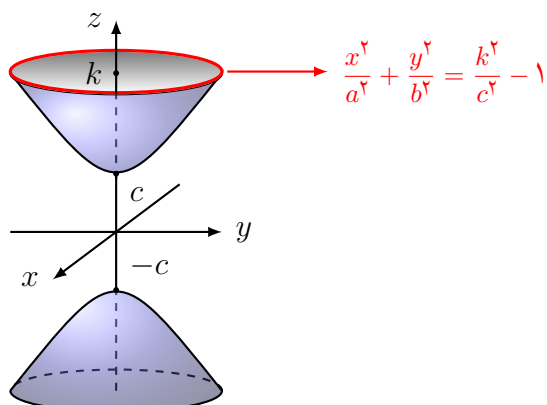
$$f(x, y, z) = a_1x^2 + a_2y^2 + a_3z^2 + a_4xy + a_5xz + a_6yz + a_7x + a_8y + a_9z + a_{10}$$

که در آن حداقل یکی از ضرایب $a_1, \dots, a_6$ غیرصفر باشد. اگر مجموعه تراز f به ازای ثابتی چون k تشکیل یک رویه در فضا دهد آنگاه آن را یک رویه درجه ۲ می‌نامیم. اهم رویه‌های درجه ۲ به قرار زیر هستند.

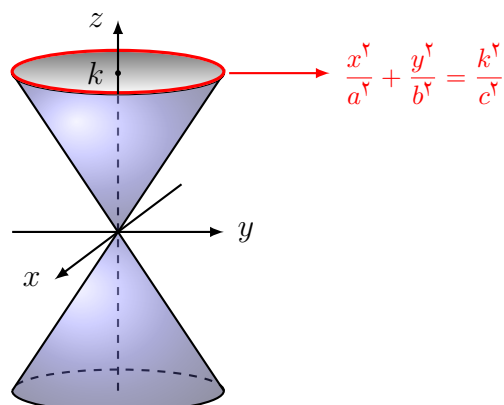
الف) بیضیگون $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ ب) هذلولیگون یک پارچه $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$



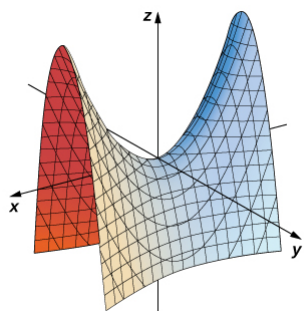
(د) هذلولیگون دوپارچه $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$



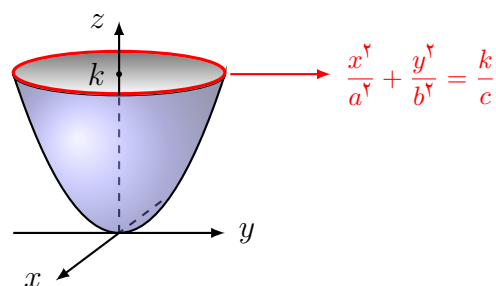
(ج) مخروط بیضوی $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$



(و) سهمیگون هذلولوی $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \frac{z}{c}$



(ه) سهمیگون بیضوی $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z}{c}$



مثال. رویه‌های درجه ۲ زیر را در فضا مشخص کنید.

(الف) $x^2 - y^2 + z^2 = 1$

رویه فوق را با نماد S نشان داده، نخست تلاقی آن را با صفحات مختصات تعیین می‌کنیم.

$$S \cap \pi_{(x=0)} = \{(0, y, z) \in \mathbb{R}^3; 0^2 - y^2 + z^2 = 1\} = \{(0, y, z) \in \mathbb{R}^3; z^2 - y^2 = 1\}$$

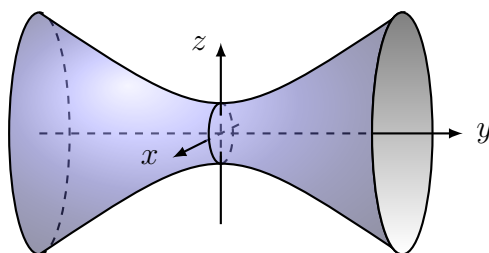
$$S \cap \pi_{(y=0)} = \{(x, 0, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 - 0^2 + z^2 = 1\} = \{(x, 0, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + z^2 = 1\}$$

$$S \cap \pi_{(z=0)} = \{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3; x^2 - y^2 + 0^2 = 1\} = \{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3; x^2 - y^2 = 1\}$$

برای داشتن درک بهتر نسبت به رویه فوق، از برخورد S با صفحات $y = k$ (صفحات موازی صفحه xoz) استفاده می‌کنیم.

$$S \cap \pi_{(y=k)} = \{(x, k, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 - k^2 + z^2 = 1\} = \{(x, k, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + z^2 = 1 + k^2\}$$

به این ترتیب، مقطع رویه S با این دسته صفحات همه به فرم دوایری هستند که مرکز آنها بر محور y قرار دارد. بر اساس این اطلاعات رویه فوق، رویه مورد نظر هذلولیگون یک پارچه (دوار) نسبت به محور y است.



$$(b) \quad x^2 - y^2 + z^2 + 2y = 1$$

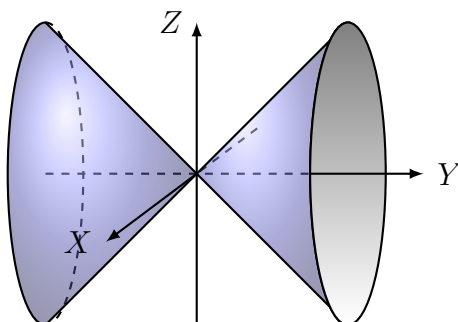
فرض کنیم S نشان دهنده رویه مورد نظر باشد. با توجه به اینکه

$$x^2 - y^2 + z^2 + 2y = 1 \Leftrightarrow x^2 - (y - 1)^2 + z^2 = 0$$

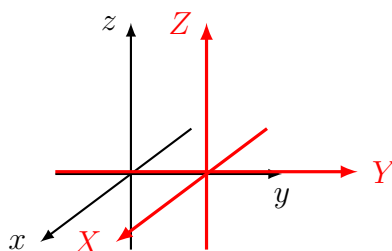
خواهیم داشت

$$S = \{(x, y, z) \in S; x^2 + z^2 = (y - 1)^2\}$$

با تغییر متغیر $X = x$ ، $Y = y - 1$ و $Z = z$ رویه S در سیستم مختصات XYZ معادله‌ای به صورت $X^2 + Z^2 = Y^2$ خواهد داشت. به سادگی مشاهده می‌شود معادله اخیر یک مخروط دوار حول محور Y به شکل زیر است.



نهایتاً در شکل زیر موقعیت دستگاه XYZ را در سیستم مختصات xyz مشاهده می‌کنیم.

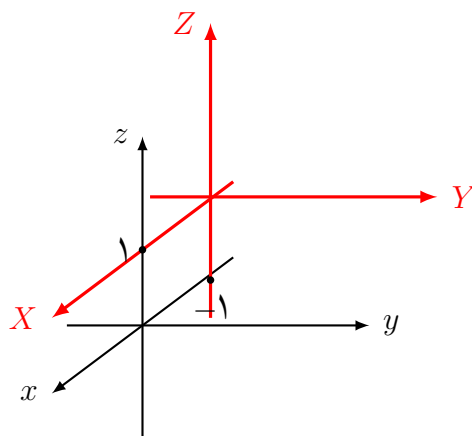


با توجه به اینکه مبدا دستگاه XYZ منطبق بر نقطه $(0, 1, 0)$ از فضای xyz است، رویه S عبارت از یک مخروط دوار حول محور y است که راس آن نقطه $(0, 1, 0)$ در فضای xyz است.

ج) $x^2 - y^2 - z^2 + 2x + 2z = 2$
مانند مثال قبل، برای نقطه (x, y, z) در فضا

$$x^2 - y^2 - z^2 + 2x + 2z = 2 \Leftrightarrow (x+1)^2 - y^2 - (z-1)^2 = 2$$

بنابر این اگر S رویه فوق باشد آنگاه با تغییر سیستم مختصات به صورت $X = x+1$ ، $Y = y$ و $Z = z-1$ ، رویه S در سیستم مختصات XYZ رویه‌ای به معادله $X^2 - Y^2 - Z^2 = 2$ است. به سادگی مشاهده می‌شود این رویه یک هذلولیگون دو پارچه دوار حول محور X است. بررسی جزئیات این رویه به عهده دانشجویان است. در شکل زیر وضعیت سیستم مختصات XYZ نسبت به سیستم مختصات xyz نشان داده شده است. توجه می‌کنیم که مبدا فضای XYZ نقطه $(-1, 0, 1)$ در فضای xyz است.



مثال. رویه S به معادله $x^2 - y^2 - z^2 = -1$ در فضا مفروض است. الف) این رویه را در فضا مشخص کنید. ب) نشان دهید از نقطه $(1, 1, -1)$ واقع بر این رویه دقیقاً دو خط راست عبور می‌کنند که تمامی بر رویه فوق قرار دارند.

حل قسمت الف را به عهده دانشجویان می‌گذاریم. فقط اشاره کنیم که رویه مورد نظر، S ، یک هذلولیگون یک‌پارچه دوار حول محور x است. برای قسمت ب، فرض کنیم L خط گذرنده از نقطه $(1, 1, -1)$ با بردار هادی $\vec{v} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$ باشد. در این صورت معادلات پارامتری L به صورت زیر خواهند بود.

$$x = at + 1, \quad y = bt + 1, \quad z = ct - 1$$

که در آن پارامتر خط، یعنی t ، در $\mathbb{R}$ تغییر می‌کند. تحقیق می‌کنیم تحت چه شرطی روی مولفه‌های a ، b و c خط مزبور بر S قرار می‌گیرد. روشن است که $L \subset S$ هرگاه هر نقطه از آن بر روی رویه باشد. اما نقاط

مختلف L با تغییر t در $\mathbb{R}$ حاصل می‌شوند. پس

$$\begin{aligned} L \subset S &\Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R} \quad (at + 1, bt + 1, ct - 1) \in S \\ &\Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R} \quad (at + 1)^2 - (bt + 1)^2 - (ct - 1)^2 = -1 \\ &\Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R} \quad (a^2 - b^2 - c^2)t^2 + 2(a - b - c)t = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 - c^2 = 0 \\ a - b - c = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

به این ترتیب خط L بر روی S قرار می‌گیرد اگر بتوانیم مولفه‌های a ، b و c را به گونه‌ای تعیین کنیم که در معادلات فوق صدق نمایند. با محاسبه a از معادله دوم و جایگذاری آن در معادله اول، خواهیم داشت

$$a = b + c \Rightarrow (b + c)^2 - b^2 - c^2 = 0 \Rightarrow 2bc = 0 \Rightarrow b = 0 \quad \text{یا} \quad c = 0$$

در حالتی که $b = 0$ ، با توجه به رابطه $a = b + c$ خواهیم داشت $a = c$. در این حالت بردار هادی خط L به صورت $\vec{v} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k} = c\vec{i} + c\vec{k} = c(\vec{i} + \vec{k})$ در می‌آید که موازی بردار $\vec{i} + \vec{k}$ است. پس خط مورد نظر در این حالت معالاتی به صورت زیر دارد.

$$L : \begin{cases} x = 1 \times t + 1 = t + 1 \\ y = 0 \times t + 1 = 1 \\ z = 1 \times t - 1 = t - 1 \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

در حالتی که $c = 0$ ، با توجه به رابطه $a = b + c$ ، حاصل شود $a = b$ و در نتیجه

$$\vec{v} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k} = b\vec{i} + b\vec{j} \parallel \vec{i} + \vec{j}$$

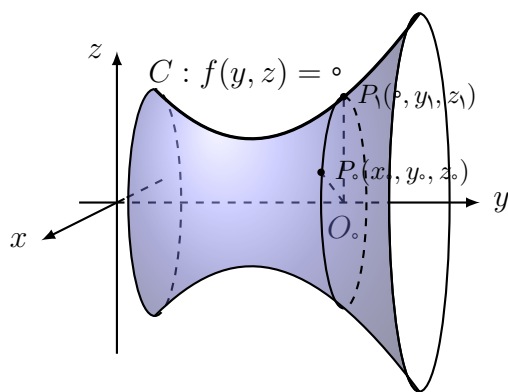
در نتیجه در این حالت معادلات پارامتری خط L به صورت زیر به دست می‌آیند.

$$L : \begin{cases} x = t + 1 \\ y = t + 1 \\ z = -1 \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

تمرین. زین اسبی به معادله $z = y^2 - x^2$ مفروض است. نشان دهید از هر نقطه واقع بر این زین اسبی دقیقاً دو خط عبور می‌کنند که تمامی بر رویه فوق قرار گیرند.

رویه‌های دوار. در مثال‌های قبل با برخی رویه‌ها آشنا شدیم که آن‌ها را دوار نامیدیم. در این بخش این دسته از رویه‌ها را دقیقتر مورد بررسی قرار می‌دهیم. رویه S در فضا را رویه‌ای دوار نامیم هرگاه از دوران یک خم واقع در یک صفحه حول خطی در همان صفحه حاصل شود. در این حالت، خط فوق را محور دوران رویه و خم مزبور را یک منحنی مولد برای این رویه می‌نامیم. در ادامه حالت‌هایی را در نظر می‌گیریم که خم مولد در یکی از صفحات مختصات بوده، محور دوران نیز یکی از محوره‌ای مختصات در صفحه در برگیرنده خم باشد.

فرض کنیم C خمی به معادله $f(y, z) = 0$ در صفحه $yo z$ بوده، S رویه حاصل دوران C حول محور y باشد. فرض کنیم نقطه‌ای دلخواه واقع بر این رویه و C دایره‌ای واقع بر S با مرکز واقع بر محور y و گذرکننده از نقطه P_0 باشد. همچنین فرض کنیم $P_1(0, y_1, z_1)$ محل برخورد این دایره با C است (مطابق شکل زیر).



در این صورت چون P_0 و P_1 هر دو در داخل صفحه‌ای به موازات صفحه xoz هستند، مختصه‌های دوم برابر دارند. یعنی $y_1 = y_0$. از طرف دیگر، اگر O_0 مرکز دایره C باشد آنگاه طول O_0P_0 با طول پاره خط O_0P_1 برابر خواهد بود. توجه می‌کنیم که O_0 دارای مختصات $(0, y_0, 0)$ است. به این ترتیب

$$\text{طول پاره خط } O_0P_0 = \sqrt{x_0^2 + z_0^2} = \sqrt{z_1^2} = |z_1| = O_0P_1 = \text{طول پاره خط } O_0P_1$$

و از آنجا $z_1 = \pm \sqrt{x_0^2 + z_0^2}$ (البته در شکل فوق، چون منحنی بالای محور y قرار گرفته است مقدار z_1 مثبت است.) با توجه به اینکه نقطه (y_1, z_1) در صفحه $yo z$ بر C قرار دارد، در معادله این منحنی صدق می‌کند، یعنی $f(y_1, z_1) = 0$. به این ترتیب با توجه به معادلات $y_1 = y_0$ و $z_1 = \pm \sqrt{x_0^2 + z_0^2}$ خواهیم داشت

$$f(y_0, \pm \sqrt{x_0^2 + z_0^2}) = 0$$

پس هر نقطه $(x, y, z) \in S$ در معادله $f(y, \pm \sqrt{x^2 + z^2}) = 0$ صدق می‌کند. در جهت عکس نیز می‌توان

ثابت کرد هر نقطه چون (x, y, z) از فضا که در این معادله صدق کند بر S قرار دارد. به این ترتیب S رویه‌ای به معادله $f(y, \pm\sqrt{x^2 + z^2}) = 0$ می‌باشد. در حالتی که خم C را حول محور z دوران دهیم، با استدلالی مشابه می‌توان ثابت کرد رویه دوار حاصل دارای معادله $f(\pm\sqrt{x^2 + y^2}, z) = 0$ خواهد بود. سایر حالت‌های رویه‌های دوار که از دوران یک منحنی در یکی از صفحات مختصات حول یکی از محورهای مختصات در همان صفحه حاصل شود در جدول زیر آورده شده است.

معادله رویه دوار	محور دوران	معادله منحنی
$f(x, \pm\sqrt{y^2 + z^2}) = 0$	محور x	$f(x, y) = 0$
$f(\pm\sqrt{x^2 + z^2}, y) = 0$	محور y	$f(x, y) = 0$
$f(x, \pm\sqrt{y^2 + z^2}) = 0$	محور x	$f(x, z) = 0$
$f(\pm\sqrt{x^2 + y^2}, z) = 0$	محور z	$f(x, z) = 0$

مثال. اگر C منحنی به معادله $y = x^2$ در صفحه xoy باشد معادله رویه‌های حاصل از دوران C حول محور x و حول محور y را تعیین کنید.

ابتدا معادله منحنی C را با معرفی $f(x, y) = y - x^2$ به صورت $f(x, y) = 0$ بیان می‌کنیم. اکنون با توجه به جدول فوق، معادله رویه حاصل از دوران C حول محور x عبارت است از

$$f(x, \pm\sqrt{y^2 + z^2}) = 0 \quad \text{یا} \quad \pm\sqrt{y^2 + z^2} - x^2 = 0 \quad \text{یا} \quad \pm\sqrt{y^2 + z^2} = x^2$$

با توجه به اینکه مقدار x^2 همواره نامنفی است، رویه مزبور معادله‌ای به صورت $\sqrt{y^2 + z^2} = x^2$ خواهد داشت. معادله رویه حاصل از دوران C حول محور y نیز به صورت زیر است.

$$f(\pm\sqrt{x^2 + z^2}, y) = 0 \quad \text{یا} \quad y - (\pm\sqrt{x^2 + z^2})^2 = 0 \quad \text{یا} \quad y = x^2 + z^2$$

مثال. نشان دهید رویه S به معادله $x + xy^2 + xz^2 - y^2 - z^2 = 0$ رویه‌ای دوار در فضا بوده، محور دوران و یک منحنی مولد آن را تعیین کنید.

با بازنویسی معادله رویه S به صورت

$$x = \frac{y^2 + z^2}{1 + y^2 + z^2}$$

و با مقایسه با معادله رویه‌های دوار مشاهده می‌شود اگر $f(x, y)$ با دستور $f(x, y) = x - \frac{y^2}{1 + y^2}$ تعریف شود و C منحنی به معادله $f(x, y) = 0$ در صفحه xoy باشد آنگاه رویه حاصل از دوران این منحنی حول

محور x معادله‌ای به صورت $f(x, \pm\sqrt{y^2 + z^2}) = 0$ خواهد داشت. اما

$$f(x, \pm\sqrt{y^2 + z^2}) = x - \frac{(\pm\sqrt{y^2 + z^2})^2}{1 + (\pm\sqrt{y^2 + z^2})^2} = x - \frac{y^2 + z^2}{1 + y^2 + z^2}$$

در نتیجه $f(x, \pm\sqrt{y^2 + z^2}) = 0$ همان معادله رویه S خواهد بود. پس S رویه حاصل از دوران منحنی $x = \frac{y^2}{1 + y^2}$ حول محور x است.

تمرین‌های بخش نمودار و مجموعه‌های تراز توابع چند متغیره

۱. تابع f با ضابطه‌ی $f(x, y, z) = \ln(xyz)$ مفروض است. دامنه تعریف f را تعیین کرده، مقدار این تابع را در نقاط $P = (1, 1, e)$ و $Q = (-\sqrt{e}, -\sqrt{e}, 1)$ به دست آورید.

۲. در صورتی که برای تابع دو متغیره‌ی f رابطه‌ی $f(x + y, x - y) = 2xy + y^2$ برقرار باشد، ضابطه‌ی f را پیدا کنید.

۳. دامنه تعریف هر یک از توابع چند متغیره‌ی زیر را مشخص کنید.

(الف) $f(x, y) = \sqrt{1 + 2x^2 + 3y^2}$ (ب) $f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}$

(ج) $f(x, y) = \ln xy$ (د) $f(x, y, z) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$

۴. نمودار تابع دو متغیره‌ی $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2 + 1}$ را توصیف کنید.

۵. برای تابع f با ضابطه‌ی $f(x, y) = x^2 + 4y^2$ منحنی تراز $f(x, y) = c$ را به ازای $c = 0, 1, 2, 3, 4$ رسم کنید.

۶. رویه‌ی تراز $f(x, y, z) = c$ را، که در آن $f(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2$ و $0 \leq c < \infty$ ، توصیف کنید.

۷. رویه‌ها با معادلات زیر را در فضای سه بعدی توصیف و رسم نمایید.

(الف) $x^2 - y^2 = 0$

(ب) $x^2 + z^2 = 2z$

(ج) $xy = -1$

(د) $y^2 - 8x = 0$

(ه) $x^2 - y^2 + z^2 = 0$

(و) $y^2 + z^2 - x = 0$

(ز) $y^2 + 4x^2 + z - 3 = 0$

۸. مطلوب است معادله‌ی رویه‌ی حاصل از دوران منحنی $x = 4z^2$ حول محور z ها.

۹. مطلوب است معادله‌ی رویه‌ی حاصل از دوران منحنی $y = \sqrt{z}$ حول محور y ها.

۱۰. معادله‌ی رویه‌ی دوار حاصل از دوران بیضی به معادله‌ی $9x^2 + 4z^2 = 36$ حول محور x ها را بدست آورید.

۱۱. مطلوب است رسم نمودار تابع $f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$.

۱۲. رویه‌ی S از دوران هذلولی $x^2 - z^2 = 4$ حول محور z حاصل می‌شود.

الف) معادله‌ی رویه‌ی S را بدست آورید.

ب) نشان دهید که از نقطه‌ی $M = (2, 0, 0)$ واقع بر رویه‌ی S دقیقا دو خط راست می‌گذرند که کاملا بر رویه فوق قرار دارند. معادله‌ی این خطوط را بدست آورید.

۱۳. نشان دهید از نقطه‌ی $M = (0, 1, -1)$ واقع بر رویه‌ی S به معادله‌ی $z = x^2 - y^2$ می‌توان صفحه‌ای گذراند که رویه‌ی S را در دو خط قطع کند. معادله‌ی این صفحه را بنویسید.

حد و پیوستگی توابع چندمتغیره

قبلا از بیان مطالب این بخش، نکات زیر را یادآوری می‌کنیم. صفحه دکارتی را با نماد $\mathbb{R}^2$ و فضای دکارتی را با نماد $\mathbb{R}^3$ نشان می‌دهیم. به این ترتیب

$$\mathbb{R}^2 = \{(x, y); x, y \in \mathbb{R}\}$$

$$\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z); x, y, z \in \mathbb{R}\}$$

در راستای تعمیم مجموعه‌های فوق، فرض کنیم $n \in \mathbb{N}$ عددی طبیعی باشد. در این صورت قرار می‌دهیم

$$\mathbb{R}^n := \{(x_1, x_2, \dots, x_n); x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}\}$$

هر عضو مجموعه $\mathbb{R}^n$ را یک نقطه از این مجموعه نامیده، نقطه $(x_1, \dots, x_n)$ از $\mathbb{R}^n$ را برای سهولت با نماد x نشان می‌دهیم. برای بیان مفاهیم حد و پیوستگی برای توابع چندمتغیره لازم است ابتدا مفهومی به نام فاصله را در فضای $\mathbb{R}^n$ تعریف کنیم. برای این منظور ابتدا این مفهوم را در مجموعه‌های $\mathbb{R}^2$ و $\mathbb{R}^3$ مرور می‌کنیم. همانطور که می‌دانیم فاصله دو نقطه (x_1, y_1) و (x_2, y_2) در صفحه دکارتی برابر است با $\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$. به همین ترتیب اگر (x_1, y_1, z_1) و (x_2, y_2, z_2) دو نقطه در فضا باشند آنگاه فاصله (اقلیدسی) این دو نقطه برابر $\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$ خواهد بود. اکنون بر این مبنا فاصله را در فضای $\mathbb{R}^n$ تعریف می‌کنیم.

تعریف

برای $x = (x_1, \dots, x_n)$ و $y = (y_1, \dots, y_n)$ در $\mathbb{R}^n$ فاصله (اقلیدسی) این دو نقطه را به صورت $\sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2}$ تعریف می‌کنیم و آن را با نماد $\|x - y\|$ نشان می‌دهیم. پس

$$\|x - y\| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2}$$

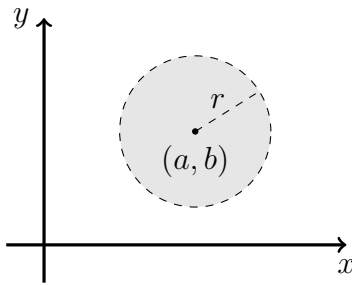
یکی دیگر از مفاهیمی که برای بیان حد توابع به آن نیاز داریم، مفهوم همسایگی است.

تعریف

برای نقطه $p = (p_1, \dots, p_n) \in \mathbb{R}^n$ و عدد $r > 0$ مجموعه تمام نقاطی از $\mathbb{R}^n$ که فاصله آن‌ها از p کمتر از r است را همسایگی نقطه p به شعاع r می‌نامیم و آن را با نماد $B(p; r)$ نشان می‌دهیم.

پس

$$B(p; r) = \{x \in \mathbb{R}^n; \|x - p\| < r\}$$



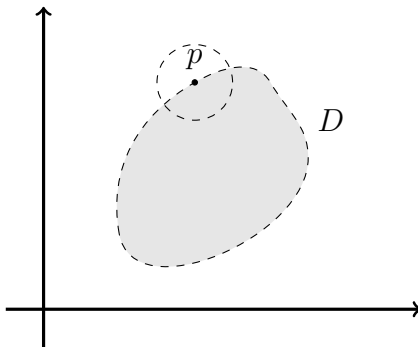
به طور مثال، در حالتی که $n = 2$ و $p = (a, b) \in \mathbb{R}^2$ خواهیم داشت

$$B(p; r) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < r\}$$

یادآوری می‌کنیم حد یک تابع یک متغیره در یک نقطه، رفتار تابع را برای نقاط نزدیک به آن نقطه بررسی می‌کند و در واقع این که تابع در خود آن نقطه تعریف شده باشد یا خیر، در این بحث مهم نیست. برای اینکه بتوانیم این دیدگاه را به نحو مناسب برای توابع چندمتغیره بیان کنیم مفهومی به نام نقطه حدی برای یک مجموعه را تعریف می‌کنیم.

تعریف

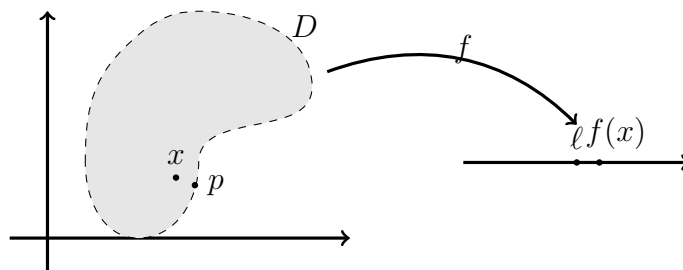
فرض کنیم $D \subset \mathbb{R}^n$. نقطه $p \in \mathbb{R}^n$ را یک نقطه حدی برای دامنه D نامیم هرگاه برای هر $(B(p; r) - \{p\}) \cap D \neq \emptyset, r > 0$.



بر اساس این تعریف، اگر p یک نقطه حدی برای زیرمجموعه D از فضای $\mathbb{R}^n$ باشد آنگاه با استفاده از نقاطی از D ، غیر از خود نقطه p ، می‌توانیم به نقطه p به هر اندازه که بخواهیم نزدیک شویم.

اکنون آماده‌ایم تا مفهوم حد را برای توابع چندمتغیره بیان کنیم. تابع $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ را در نقطه حدی

$p \in \mathbb{R}^n$ از مجموعه D دارای حد ℓ می‌نامیم و با نماد $\lim_{x \rightarrow p} f(x) = \ell$ نشان می‌دهیم هرگاه با انتخاب نقاطی از مجموعه D غیر از p و به اندازه کافی نزدیک به p بتوانیم مقادیر f را به اندازه دلخواه به ℓ نزدیک کنیم.



به زبان ریاضی،

تعریف

تابع $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ را در نقطه حدی $p \in \mathbb{R}^n$ برای مجموعه D دارای حد ℓ نامیم هرگاه

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in D, \quad x \in B(p, \delta) - \{p\} \Rightarrow |f(x) - \ell| < \epsilon$$

یا، به بیانی دیگر،

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in D, \quad 0 < \|x - p\| < \delta \Rightarrow |f(x) - \ell| < \epsilon$$

در زیر، نحوه استفاده از تعریف فوق را برای اثبات صحت حد در چند مورد مشاهده می‌کنیم. مثال. با استفاده از تعریف حد، صحت هر یک از حدود زیر را تحقیق کنید.

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3}{x^2 + y^2} = 0 \quad (\text{الف})$$

ابتدا توجه می‌کنیم تابع f با دستور $f(x, y) = \frac{x^3}{x^2 + y^2}$ بر مجموعه $D = \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$ تعریف شده است. نقطه $p = (0, 0)$ برای این مجموعه یک نقطه حدی است. اکنون برای اثبات صحت حد فوق با استفاده از تعریف نشان می‌دهیم

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall (x, y) \in D, \quad 0 < \|(x, y) - (0, 0)\| = \sqrt{x^2 + y^2} < \delta \Rightarrow |f(x, y) - 0| = \left| \frac{x^3}{x^2 + y^2} \right| < \epsilon$$

برای $\epsilon > 0$ ابتدا فاصله $f(x, y)$ تا حد مطرح شده، یعنی $\ell = 0$ ، و نحوه ارتباط آن با $\|(x, y) - (0, 0)\|$ یا

$\sqrt{x^2 + y^2}$ را بررسی می‌کنیم.

$$|f(x, y) - 0| = \left| \frac{x^3}{x^2 + y^2} \right| = \frac{x^2}{x^2 + y^2} |x| \leq |x| \leq \sqrt{x^2 + y^2}$$

در نامساوی‌های فوق، از نامساوی $x^2 \leq x^2 + y^2$ استفاده کرده‌ایم. به این ترتیب برای داشتن $|f(x, y) - 0| < \epsilon$ کافی است با انتخاب مناسب δ شرایطی را ایجاد کنیم که $\sqrt{x^2 + y^2} < \epsilon$. پس به طور مثال اگر $\delta > 0$ را با شرط $\delta \leq \epsilon$ انتخاب کنیم آنگاه برای $(x, y) \in D$ با شرط $\sqrt{x^2 + y^2} < \delta$ ، با توجه به نامساوی‌های فوق، خواهیم داشت

$$|f(x, y) - 0| \leq \sqrt{x^2 + y^2} < \delta \leq \epsilon$$

به این ترتیب با استفاده از تعریف ثابت کردیم تابع f در نقطه $p = (0, 0)$ حد برابر 0 دارد.

$$\lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} (x - 2z) \sin\left(\frac{1}{x^2 + y^2 + z^2}\right) = 0 \quad (\text{ب})$$

اگر f تابع سه متغیره با دستور $f(x, y, z) = (x - 2z) \sin\left(\frac{1}{x^2 + y^2 + z^2}\right)$ باشد آنگاه این تابع بر دامنه $D = \mathbb{R}^3 - \{(0, 0, 0)\}$ تعریف شده است. توجه می‌کنیم در اینجا نیز مبدا مختصات یک نقطه حدی برای D است. اکنون، بنا بر تعریف حد، باید نشان دهیم

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall (x, y, z) \in D \quad \|(x, y, z) - (0, 0, 0)\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} < \delta \Rightarrow |f(x, y, z) - 0| < \epsilon$$

ابتدا عبارت $|f(x, y, z) - 0|$ و نحوه ارتباط آن با $\|(x, y, z) - (0, 0, 0)\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ را بررسی می‌کنیم.

$$\begin{aligned} |f(x, y, z) - 0| &= |(x - 2z) \sin\left(\frac{1}{x^2 + y^2 + z^2}\right)| \leq |x - 2z| \leq |x| + 2|z| \\ &\leq \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} + 2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ &= 3\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \end{aligned}$$

در نامساوی‌های فوق از کراننداری تابع $\sin$ و اینکه برای هر x, y, z همواره $|x|, |y|, |z| \leq \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ استفاده کرده‌ایم. اکنون برای $\epsilon > 0$ برای داشتن $|f(x, y, z) - 0| < \epsilon$ کافی است $3\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} < \epsilon$.

برای این منظور نیز کافی است عدد $\delta > 0$ را با شرط $\delta \leq \frac{\epsilon}{3}$ انتخاب کنیم. اکنون به سادگی مشاهده می شود
 برای $(x, y, z) \in D$ اگر $\|(x, y, z) - (0, 0, 0)\| < \delta$ آنگاه $|f(x, y, z) - 0| < \epsilon$.

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x \sin y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0 \quad (\text{ج})$$

با در نظر گرفتن تابع f با دستور $f(x, y) = \frac{x \sin y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ مشاهده می شود این تابع بر $D = \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$ تعریف شده است و نقطه $(0, 0)$ نقطه ای حدی برای این دامنه می باشد. طبق تعریف، نشان می دهیم برای هر $\epsilon > 0$ عدد $\delta > 0$ وجود دارد به گونه ای که اگر $(x, y) \in D$ با شرط $\|(x, y) - (0, 0)\| < \delta$ انتخاب شود آنگاه $|f(x, y) - 0| < \epsilon$. توجه می کنیم چون برای هر $(x, y) \in D$ ، $(x, y) \neq (0, 0)$ ، بنابراین شرط $\sqrt{x^2 + y^2} < \delta$ برای تمام اعضای D برقرار است. مانند مثال های قبل، ابتدا ارتباط مناسب بین $|f(x, y) - 0|$ و فاصله نقطه (x, y) تا $(0, 0)$ ، یعنی $\sqrt{x^2 + y^2}$ را تعیین می کنیم.

$$\begin{aligned} |f(x, y) - 0| &= \left| \frac{x \sin y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right| = \frac{|x|}{\sqrt{x^2 + y^2}} |\sin y| \\ &\leq |\sin y| \\ &\leq |y| \leq \sqrt{x^2 + y^2} \end{aligned}$$

در حصول نامساوی فوق از نامساوی های $|x|, |y| \leq \sqrt{x^2 + y^2}$ و نامساوی $|\sin y| \leq |y|$ استفاده شده است. اکنون برای $\epsilon > 0$ با انتخاب $\delta > 0$ با شرط $\delta \leq \epsilon$ ، اگر $(x, y) \in D$ با شرط $\sqrt{x^2 + y^2} < \delta$ انتخاب شود آنگاه با توجه به نامساوی فوق

$$|f(x, y) - 0| \leq \sqrt{x^2 + y^2} < \delta \leq \epsilon$$

و به این ترتیب، صحت حد فوق با استفاده از تعریف ثابت می شود.

اکنون که با مفهوم حد کمی آشنا شدیم، مفهوم پیوستگی را که به طور طبیعی با حد در ارتباط است بیان می کنیم. در تعریف پیوستگی، نقطه مورد نظر نقطه ای از دامنه تعریف تابع می باشد.

تعریف

تابع $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ را در نقطه $p \in D$ پیوسته نامیم هرگاه $\lim_{x \rightarrow p} f(x) = f(p)$ ، یا به زبان ریاضی هرگاه

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in D \quad \|x - p\| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(p)| < \epsilon$$

مثال. نشان دهید تابع $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ با ضابطه $f(x, y) = x - 2y$ در نقطه $p = (1, -2)$ پیوسته است.

طبق تعریف، باید نشان دهیم $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,-2)} f(x, y) = f(1, -2) = 5$ ، یا

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad \|(x, y) - (1, -2)\| = \sqrt{(x-1)^2 + (y+2)^2} < \delta \Rightarrow |(x-2y) - 5| < \epsilon$$

مانند مثال‌های بحث حد عمل می‌کنیم.

$$\begin{aligned} |(x-2y) - 5| &= |(x-1) - (2y+4)| \\ &\leq |x-1| + 2|y+2| \\ &\leq \sqrt{(x-1)^2 + (y+2)^2} + 2\sqrt{(x-1)^2 + (y+2)^2} \\ &= 3\sqrt{(x-1)^2 + (y+2)^2} = 3\|(x, y) - (1, -2)\| \end{aligned}$$

به این ترتیب برای $\epsilon > 0$ اگر عدد $\delta > 0$ را با شرط $\delta \leq \frac{\epsilon}{3}$ انتخاب کنیم آنگاه برای هر نقطه (x, y) در صفحه با شرط $\|(x, y) - (1, -2)\| < \delta$ خواهیم داشت

$$|f(x, y) - f(1, -2)| = |(x-2y) - 5| \leq 3\|(x, y) - (1, -2)\| < 3\delta \leq \epsilon$$

روشن است که بررسی پیوستگی هر تابع با استفاده از تعریف کاری دشوار و خسته‌کننده خواهد بود. بنابراین این با استفاده از چند قضیه، روش ساختن توابع پیوسته را با شروع از توابع ساده‌تر مورد بررسی قرار می‌دهیم.

قضیه

فرض کنیم $D \subset \mathbb{R}^n$ و توابع $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$ در نقطه $p \in D$ پیوسته باشند. آنگاه هر یک از توابع $\lambda f, f \pm g$ ($\lambda \in \mathbb{R}$ ثابت) و fg نیز در نقطه پیوسته خواهند بود. به علاوه اگر $g(p) \neq 0$ آنگاه تابع $\frac{f}{g}$ نیز در این نقطه پیوسته است.

نتیجه

با توجه به پیوستگی هر یک از توابع $f(x, y) = x$ و $g(x, y) = y$ در هر نقطه از $\mathbb{R}^2$ و با استفاده مکرر از قضیه فوق، هر تابع چندجمله بر حسب x و y در هر نقطه دلخواه از صفحه $\mathbb{R}^2$ پیوسته خواهد بود. پس به طور مثال، تابع f با دستور $f(x, y) = x^2y^3 - 2xy^2 + x^2 - y^2 + 2x + 3y - 1$ در هر نقطه از صفحه پیوسته است. به همین ترتیب ثابت می‌شود هر تابع چندجمله بر حسب متغیرهای $x_1, \dots, x_n$ در هر نقطه از $\mathbb{R}^n$ پیوسته است.

مثال. تابع $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ با ضابطه
$$f(x, y, z) = \begin{cases} \frac{3xy^2 - z^3}{x^2 + y^2 + z^2} & (x, y, z) \neq (0, 0, 0) \\ 0 & (x, y, z) = (0, 0, 0) \end{cases}$$
 نشان دهید f بر $\mathbb{R}^3$ تابعی پیوسته است.

باید نشان دهیم تابع f در هر نقطه دلخواه چون (x_0, y_0, z_0) از صفحه پیوسته است. با توجه به ضابطه تابع f ، دو حالت زیر را برای این نقطه در نظر می‌گیریم.

الف) $(x_0, y_0, z_0) \neq (0, 0, 0)$. در این حالت یک همسایگی از این نقطه وجود دارد که حاوی $(0, 0, 0)$ نباشد و در نتیجه تابع بر این همسایگی همه جا از ضابطه $f(x, y, z) = \frac{3xy^2 - z^3}{x^2 + y^2 + z^2}$ پیروی می‌کند. در این حالت، با توجه به پیوستگی هر یک از توابع چندجمله‌ای $g(x, y, z) = 3xy^2 - z^3$ و $h(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ در نقطه (x_0, y_0, z_0) و این که $h(x_0, y_0, z_0) = x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 \neq 0$ ، بنابر قضیه قبل، تابع $f(x, y, z) = \frac{g(x, y, z)}{h(x, y, z)}$ نیز در این نقطه پیوسته است.

ب) $(x_0, y_0, z_0) = (0, 0, 0)$. در این حالت باید نشان دهید $\lim_{(x, y, z) \rightarrow (0, 0, 0)} f(x, y, z) = f(0, 0, 0) = 0$ این

کار را اجباراً با تعریف انجام می‌دهیم.

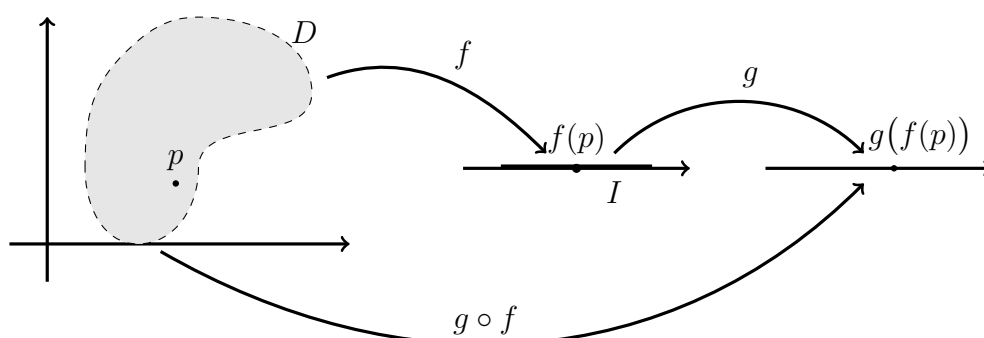
$$\begin{aligned}
 |f(x, y, z) - 0| &= \frac{|\sqrt[3]{xy^2} - z^3|}{x^2 + y^2 + z^2} \leq \frac{|\sqrt[3]{xy^2}|}{x^2 + y^2 + z^2} + \frac{|z^3|}{x^2 + y^2 + z^2} \\
 &= \frac{y^2}{x^2 + y^2 + z^2} |\sqrt[3]{x}| + \frac{z^2}{x^2 + y^2 + z^2} |z| \\
 &\leq \sqrt[3]{|x|} + |z| \leq \sqrt[3]{\|(x, y, z) - (0, 0, 0)\|} + \|(x, y, z) - (0, 0, 0)\| \\
 &= 4 \|(x, y, z) - (0, 0, 0)\|
 \end{aligned}$$

به این ترتیب برای هر $\epsilon > 0$ با انتخاب $\delta > 0$ با شرط $\delta \leq \frac{\epsilon}{4}$ به سادگی مشاهده می‌شود برای (x, y, z) با شرط $\|(x, y, z) - (0, 0, 0)\| < \delta$ داریم $|f(x, y, z) - f(0, 0, 0)| = |f(x, y, z) - 0| < \epsilon$ در نتیجه f در این نقطه نیز پیوسته است.

یکی دیگر از قضایای که امکان ایجاد توابع پیوسته جدید را مهیا می‌کند قضیه ترکیب توابع پیوسته است.

قضیه

فرض کنیم $D \subset \mathbb{R}$ و تابع $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ در نقطه $p \in D$ پیوسته باشد. اگر $I \subset \mathbb{R}$ بازه‌ای حاوی مجموعه $\{f(x); x \in D\}$ و تابع $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ در نقطه $f(p)$ از این مجموعه پیوسته باشد آنگاه تابع مرکب $g \circ f : D \rightarrow \mathbb{R}$ در نقطه p پیوسته خواهد بود.

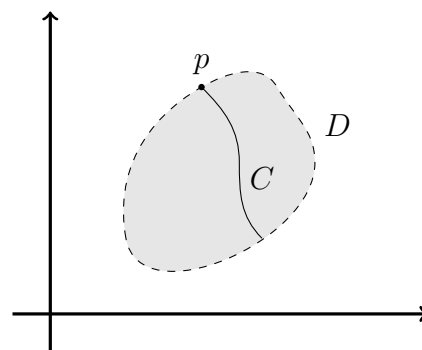


مثال. با استفاده از قضیه فوق نشان می‌دهیم تابع $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ با ضابطه $f(x, y) = \sqrt[3]{x^3 + y^3}$ بر $\mathbb{R}^2$ پیوسته است.

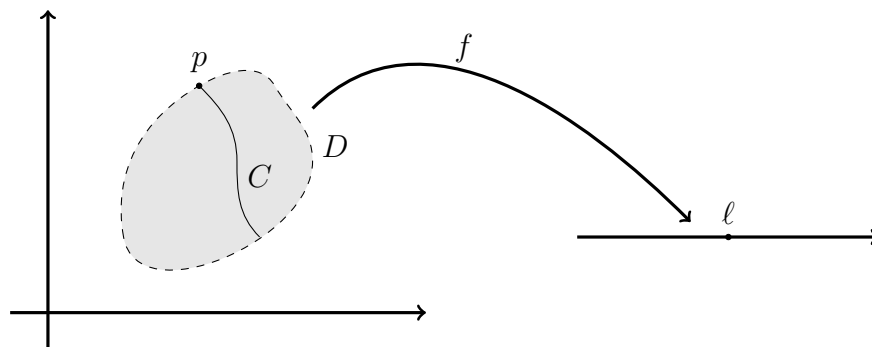
اگر تابع $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ با ضابطه $g(x, y) = x^3 + y^3$ و تابع $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ با ضابطه $h(t) = \sqrt[3]{t}$ تعریف شده باشد آنگاه برای هر $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ، $f(x, y) = h(g(x, y))$. بنابر این $f = h \circ g$. حال با توجه به اینکه تابع g در هر نقطه از $\mathbb{R}^2$ و h نیز در هر نقطه از $\mathbb{R}$ پیوسته هستند، بنابر قضیه قبل، تابع f نیز در هر نقطه از صفحه $\mathbb{R}^2$ پیوسته خواهد بود.

به همین ترتیب، هر یک از توابع $f(x, y) = \sin\left(\frac{x+y}{x^4+y^4+1}\right)$ یا $f(x, y, z) = e^{x-2yz}$ در هر نقطه از دامنه تعریف خود پیوسته خواهند بود.

آخرین مطلبی که در این بخش مورد اشاره قرار می‌دهیم، گسترش مفاهیم حد چپ و راست توابع یک متغیره به توابع چندمتغیره است. بدیهی است که برای توابع چندمتغیره، نحوه نزدیک شدن به نقطه حدی فرض کنیم $D \subset \mathbb{R}^n$ و $p \in \mathbb{R}^n$ یک نقطه حدی برای این دامنه باشد. همچنین فرض کنیم C زیرمجموعه‌ای از D باشد. با این خاصیت که با استفاده از نقاط C نیز بتوانیم به نقطه p نزدیک شویم (به بیان دقیق‌تر p برای مجموعه C نیز یک نقطه حدی باشد).



اگر f تابعی تعریف شده بر دامنه D باشد آنگاه با محدود کردن دامنه تعریف تابع f به این زیرمجموعه و در نظر گرفتن تابع $f: C \rightarrow \mathbb{R}$ می‌توانیم رفتار حدی این تابع را در نقطه p بررسی کنیم. روشن است که اگر تابع $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ در نقطه p حدی برابر ℓ داشته باشد (یا به بیان دیگر، $\ell = \lim_{x \rightarrow p} f(x)$) آنگاه تابع $f: C \rightarrow \mathbb{R}$ نیز در این نقطه دارای همان حد ℓ خواهد بود. یا به عبارت دیگر، $\lim_{x \rightarrow p} f(x) = \ell$.

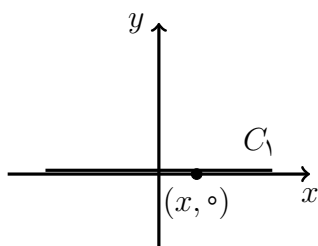


از این خاصیت در اثبات عدم وجود حد می‌توانیم استفاده کنیم.

مثال. نشان دهید هیچیک از حدود زیر وجود ندارند.

(الف) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x}{|x| + |y|}$

به روش برهان خلف، فرض کنیم حد فوق موجود و برابر ℓ باشد. اگر $C \subset \mathbb{R}^2$ را محور x در نظر بگیریم آنگاه نقطه $(0,0)$ یک نقطه حدی برای C خواهد بود.



با توجه به اینکه $C = \{(x, 0); x \in \mathbb{R}\}$ خواهیم داشت

$$\ell = \lim_{(x,y) \xrightarrow{C} (0,0)} f(x,y) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x,0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{|x| + |0|} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{|x|}$$

اما می‌دانیم حد فوق وجود ندارد. پس تابع f در نقطه $(0,0)$ حد ندارد.

(ب) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2}$

فرض کنیم $C_1 = \{(x, 0); x \in \mathbb{R}\}$ محور x باشد. در این صورت

$$\lim_{(x,y) \xrightarrow{C_1} (0,0)} f(x,y) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x,0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \times 0}{x^2 + 0^2} = 0$$

بنابراین اگر حد مورد نظر وجود داشته باشد مقدار آن باید برابر $\ell = 0$ باشد. اکنون فرض کنیم C_2 خط $y = x$

باشد. روشن است که نقطه $(\circ, \circ)$ یک نقطه حدى برای C_2 است. داریم

$$\lim_{\substack{C_2 \\ (x,y) \rightarrow (\circ, \circ)}} f(x, y) = \lim_{x \rightarrow \circ} f(x, x) = \lim_{x \rightarrow \circ} \frac{x \times x}{x^2 + x^2} = \frac{1}{2}$$

با توجه به اینکه حد اخير غير صفر است پس اين تابع نيز در $(\circ, \circ)$ حد ندارد.

$$\cdot \lim_{(x,y) \rightarrow (\circ, \circ)} \frac{xy^2}{x^2 + y^2} \quad (\text{ج})$$

اگر C_1 خط $y = mx$ باشد آنگاه نقطه $(\circ, \circ)$ یک نقطه حدى برای C_1 است. داریم

$$\lim_{\substack{C_1 \\ (x,y) \rightarrow (\circ, \circ)}} f(x, y) = \lim_{x \rightarrow \circ} f(x, mx) = \lim_{x \rightarrow \circ} \frac{m^2 x^3}{x^2 + m^2 x^2} = \lim_{x \rightarrow \circ} \frac{m^2 x}{1 + m^2 x^2} = \circ$$

بنابر اين بر روى هر خطى كه به نقطه $(\circ, \circ)$ نزديك مى شويم تابع فوق به مقدار صفر ميل مى كند. با وجود اين نشان مى دهيم حد وجود ندارد. فرض كنيم C_2 سهمى $x = y^2$ باشد. نقطه $(\circ, \circ)$ براى اين سهمى يك نقطه حدى است. اگر y را به عنوان متغير مستقل در نظر بگيريم آنگاه بر روى اين سهمى $(x, y) \rightarrow (\circ, \circ)$ اگر و تنها اگر $y \rightarrow \circ$ به اين ترتيب

$$\lim_{\substack{C_2 \\ (x,y) \rightarrow (\circ, \circ)}} f(x, y) = \lim_{y \rightarrow \circ} f(y^2, y) = \lim_{y \rightarrow \circ} \frac{y^4}{(y^2)^2 + y^2} = \frac{1}{2} \neq \circ$$

پس اين تابع نيز در $(\circ, \circ)$ حد ندارد.

تمرين هاى بخش حد و پيوستگى توابع چندمتغيره.

۱. صحت هر يك از حدود زير را با استفاده از تعريف ثابت كنيد.

$$\text{الف)} \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (\circ, \circ)} \frac{xy^2}{(|x| + |y|)^2} = \circ$$

$$\text{ب)} \quad \lim_{(x,y,z) \rightarrow (\circ, \circ, \circ)} \frac{x^3 - \sin(yz^2)}{x^2 + y^2 + z^2} = \circ$$

$$\cdot \lim_{(x,y) \rightarrow (\circ, \circ)} \frac{x^2 \cos(xy) \sin(y)}{x^2 + y^2} = \circ \quad \text{۲. با استفاده از تعريف نشان دهيد}$$

۳. (الف) نشان دهید که نقطه‌ی $(0, 0)$ یک نقطه‌ی انباشتگی خم $y = e^{-\frac{1}{x}}$ است. (یعنی هر همسایگی به مرکز $(0, 0)$ با این خم نقطه‌ی مشترک دیگری غیر از $(0, 0)$ دارد).

(ب) نشان دهید تابع $f(x, y) = \begin{cases} \frac{ye^{-\frac{1}{x}}}{y^2 + e^{-\frac{1}{x}}} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ در نقطه‌ی $(0, 0)$ پیوسته نیست.

۴. نشان دهید تابع f با ضابطه‌ی $f(x, y) = \frac{xy^2}{x^2 + y^2}$ در مبدأ دارای حد نیست ولی مقدار آن بر روی هر خطی که از مبدأ می‌گذرد به مقدار یکسانی میل می‌کند.

۵. تابع f با ضابطه‌ی $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^6 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ مفروض است. کلیه نقاطی که f در آن‌ها پیوسته است را تعیین کنید.

۶. نشان دهید تابع $f(x, y) = \frac{x^2 y^2}{x^2 y^2 + (x - y)^2}$ در $(0, 0)$ دارای حد نیست.

۷. نشان دهید تابع زیر در مبدأ پیوسته نیست.

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x - y}{(x + y)^3} & x + y \neq 0 \\ 0 & x + y = 0 \end{cases}$$

۸. با استفاده از تعریف، پیوستگی تابع دو متغیره‌ی زیر را در نقطه‌ی $(0, 0)$ بررسی نمایید. (r یک عدد ثابت گویا است)

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{|y|^r x^2}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

۹. پیوستگی تابع f با دستور

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy + y}{x^2 + y^2 + 2x + 1} & (x, y) \neq (-1, 0) \\ 0 & (x, y) = (-1, 0) \end{cases}$$

را در نقطه‌ی $(-1, 0)$ بررسی کنید.

۱۰. برای تابع $f(x, y) = \frac{x^2 y^2}{x^2 y^2 + (x - y)^2}$ نشان دهید $\lim_{x \rightarrow 0} (\lim_{y \rightarrow 0} f(x, y)) = \lim_{y \rightarrow 0} (\lim_{x \rightarrow 0} f(x, y)) = 0$ با این وجود $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y)$ وجود ندارد.

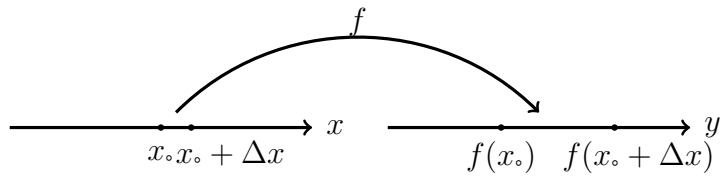
۱۱. برای تابع $f(x, y) = (x+y) \sin \frac{1}{x} \sin \frac{1}{y}$ نشان دهید حدود مکرر $\lim_{x \rightarrow 0} (\lim_{y \rightarrow 0} f(x, y))$ و $\lim_{y \rightarrow 0} (\lim_{x \rightarrow 0} f(x, y))$ وجود ندارد اما $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$ وجود دارد.

۱۲. نشان دهید تابع $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ با ضابطه $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x(x+y)}{\sqrt{x^2+y^2}} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ بر $\mathbb{R}^2$ پیوسته است.

۱۳. نشان دهید تابع $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ با دستور $f(x, y, z) = \ln(1 + x^2 + 2y^4 + z^6)$ بر $\mathbb{R}^3$ پیوسته است.

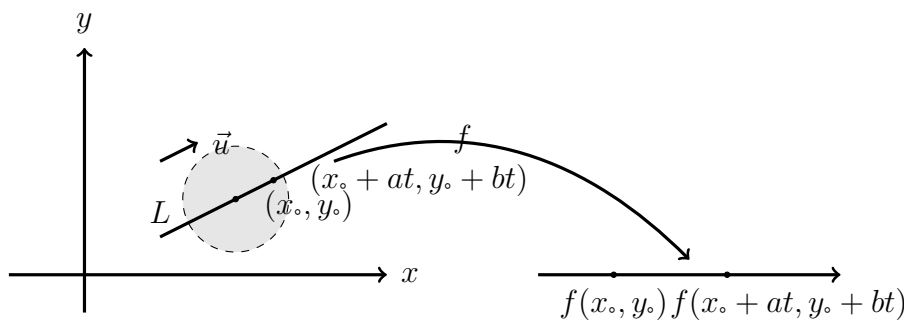
۱۴. نشان دهید تابع f با ضابطه $f(x, y) = \frac{x^2 y}{x^6 + y^2}$ در نقطه $(0, 0)$ حد ندارد.

هدف ما در این بخش گسترش مفهوم مشتق از حالت توابع یک متغیره به توابع چندمتغیره است. برای این منظور ابتدا مفهوم مشتق توابع یک متغیره را مرور می‌کنیم. فرض کنیم f تابعی یک متغیره تعریف شده در یک همسایگی نقطه‌ای چون $x_0 \in \mathbb{R}$ باشد. در این صورت برای مقادیر کوچک Δx با این خاصیت که $x_0 + \Delta x$ در دامنه تعریف f قرار گرفته باشد، عبارت $\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ تغییرات نسبی f بین x_0 و $x_0 + \Delta x$ نامیده شده، حد آن وقتی $\Delta x \rightarrow 0$ ، در صورت وجود، به نام سرعت تغییرات f در نقطه x_0 ، یا مشتق f در x_0 نامیده می‌شود.



اکنون فرض کنیم f تابعی دومتغیره تعریف شده در یک همسایگی نقطه $p(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ باشد. فرض کنیم برداری یکه در صفحه و $L \subset \mathbb{R}^2$ خطی در صفحه گذرکننده از نقطه p با بردار هادی $\vec{u}$ باشد. همانطور که قبلاً بیان شده است این خط دارای معادلات پارامتری $x = x_0 + at$ و $y = y_0 + bt$ ، $t \in \mathbb{R}$ خواهد بود. به سادگی مشاهده می‌شود برای مقادیر کوچک t ، نقاط $(x_0 + at, y_0 + bt)$ از این خط در دامنه تعریف تابع f (که طبق فرض حاوی یک همسایگی از p است) قرار خواهند داشت. همچنین توجه می‌کنیم فاصله نقطه $(x_0 + at, y_0 + bt)$ از نقطه (x_0, y_0) برابر $\sqrt{(x_0 + at - x_0)^2 + (y_0 + bt - y_0)^2} = \sqrt{a^2 t^2 + b^2 t^2} = |t| \sqrt{a^2 + b^2}$ است. با ایده از حالت یک متغیره، عبارت $\frac{f(x_0 + at, y_0 + bt) - f(x_0, y_0)}{t}$ به نام تغییرات نسبی تابع f بین نقاط (x_0, y_0) و $(x_0 + at, y_0 + bt)$ نامیده شده، حد آن وقتی $t \rightarrow 0$ ، در صورت وجود، به نام مشتق f در نقطه $p(x_0, y_0)$ در سوی بردار $\vec{u}$ ، یا مشتق سویی (یا مشتق جهتی) f در سوی $\vec{u}$ در نقطه p نامیده می‌شود آن را با نماد $D_{\vec{u}}f(p)$ نشان می‌دهیم. پس

$$D_{\vec{u}}f(p) = D_{\vec{u}}f(x_0, y_0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + at, y_0 + bt) - f(x_0, y_0)}{t}$$



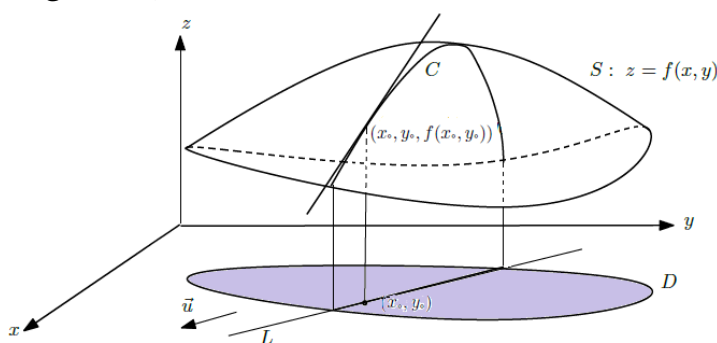
اکنون برای حالت کلی، مفهوم فوق به صورت زیر بیان می‌شود. فرض کنیم f تابعی n متغیره تعریف شده در یک همسایگی نقطه $p = (p_1, \dots, p_n) \in \mathbb{R}^n$ باشد. همچنین فرض کنیم $u = (u_1, \dots, u_n) \in \mathbb{R}^n$ در شرط $\|u\| = \sqrt{u_1^2 + \dots + u_n^2} = 1$ صدق کند. برای سهولت نقطه $(p_1 + tu_1, \dots, p_n + tu_n)$ را با نماد $p + tu$ نشان می‌دهیم. در این صورت عبارت $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(p + tu) - f(p)}{t}$ را در صورت وجود مشتق سویی f در p و در سوی u نامیده آن را با نماد $D_u f(p)$ نشان می‌دهیم.

مثال. مشتق سویی تابع $f(x, y) = x^2 + 4xy$ را در نقطه $p(1, 2)$ و در سوی $\vec{u} = \frac{1}{5}\vec{i} + \frac{\sqrt{3}}{5}\vec{j}$ به دست آورید. طبق تعریف

$$\begin{aligned} D_u f(1, 2) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + at, y_0 + bt) - f(x_0, y_0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(1 + t\frac{1}{5}, 2 + t\frac{\sqrt{3}}{5}) - f(1, 2)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(1 + t\frac{1}{5})^2 + 4(1 + t\frac{1}{5})(2 + t\frac{\sqrt{3}}{5}) - (1^2 + 4 \times 1 \times 2)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(5 + 2\sqrt{3})t + (\frac{1}{5} + \sqrt{3})t^2}{t} = 5 + 2\sqrt{3} \end{aligned}$$

از بحث توابع یک متغیره به خاطر داریم که مشتق تابع در یک نقطه برابر شیب خط مماس بر منحنی نمایش تابع مورد نظر در آن نقطه بود. طبیعی است که در این مورد سؤال شود آیا مشتق سویی نیز تعبیر هندسی مشابهی دارد؟

فرض کنیم $D \subset \mathbb{R}^2$ حاوی یک همسایگی از نقطه $p(x_0, y_0) \in D$ باشد. فرض کنیم $S \subset \mathbb{R}^3$ رویه نمایش تابع $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ برداری یک در صفحه xoy ، خط گذرکننده از نقطه p با بردار هادی $\vec{u}$ و $C \subset S$ منحنی حاصل



خط L باشد.

در این صورت می‌توان ثابت کرد $D_u f(p)$ ، در صورت وجود، شیب خط مماس بر منحنی C در نقطه $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ در صفحه در برگیرنده این منحنی است.

در بحث مشتق سویی، تغییر جهت بردار $\vec{u}$ به طور طبیعی منجر به مقادیر مختلفی برای مشتق سویی f در نقطه مورد نظر می‌شود. حال در بین سوی‌های مختلف برای یک بردار یک، برخی سوی‌ها از اهمیت بیشتری برخوردار هستند. فرض کنیم f تابعی دو متغیره تعریف شده در یک همسایگی نقطه $p(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$

باشد. اگر بردار $\vec{u}$ را برابر بردار $\vec{i}$ در سوی محور x ، یعنی بردار $\vec{i}$ ، اختیار کنیم آنگاه در صورت وجود مشتق در این سوی خواهیم داشت

$$D_{\vec{i}}f(p) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + t, y_0) - f(x_0, y_0)}{t} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0}$$

در رابطه دوم متغیر t را با نمو Δx جایگزین کرده‌ایم. در عبارت آخر نیز با قرار دادن $x := x_0 + \Delta x$ از این خاصیت استفاده کرده‌ایم که $\Delta x \rightarrow 0$ اگر و تنها اگر $x \rightarrow x_0$. مشتق فوق که سرعت تغییرات مقدار f وقتی از نقطه $p(x_0, y_0)$ به موازات محور x حرکت می‌کنیم را مشتق جزئی، مشتق نسبی یا مشتق پاره‌ای f نسبت به x در نقطه p نامیده آن را با یکی از نمادهای $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ ، $D_x f(x_0, y_0)$ یا $f_x(x_0, y_0)$ نشان می‌دهیم. به همین ترتیب اگر $\vec{u}$ برابر $\vec{j}$ اختیار شود مشتق سویی حاصل (در صورت وجود) را مشتق جزئی f نسبت به y نامیده آن را با یکی از نمادهای $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ ، $D_y f(x_0, y_0)$ یا $f_y(x_0, y_0)$ نشان می‌دهیم. در حالت کلی،

تعریف

فرض کنیم f تابعی n متغیره تعریف شده در یک همسایگی نقطه $p = (p_1, \dots, p_n) \in \mathbb{R}^n$ باشد. در این صورت، برای هر $i = 1, \dots, n$ ، مشتق جزئی f نسبت به متغیر x_i در نقطه p ، با یکی از نمادهای $\frac{\partial f}{\partial x_i}(p)$ ، $D_{x_i} f(p)$ یا $f_{x_i}(p)$ ، به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_i}(p) &= \lim_{\Delta x_i \rightarrow 0} \frac{f(p_1, \dots, p_i + \Delta x_i, \dots, p_n) - f(p_1, \dots, p_i, \dots, p_n)}{\Delta x_i} \\ &= \lim_{x_i \rightarrow p_i} \frac{f(p_1, \dots, x_i, \dots, p_n) - f(p_1, \dots, p_i, \dots, p_n)}{x_i - p_i} \end{aligned}$$

بنابر این تعریف، یک تابع n متغیره می‌تواند n مشتق جزئی در هر نقطه درون دامنه تعریف خود داشته باشد.

مثال. تابع $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ با دستور $f(x, y) = 3x^2 - 5xy$ مفروض است.

الف) مشتقات جزئی f در نقطه $(1, 4)$ را به دست آورید.

ب) مشتقات جزئی f در نقطه دلخواه (x_0, y_0) را تعیین کنید.

الف) طبق تعریف

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(1, 4) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(1 + \Delta x, 4) - f(1, 4)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(3(1 + \Delta x)^2 - 5(1 + \Delta x) \times 4) - (3 \times 1^2 - 5 \times 1 \times 4)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-14\Delta x + 3\Delta x^2}{\Delta x} = -14\end{aligned}$$

به همین ترتیب

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial y}(1, 4) &= \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(1, 4 + \Delta y) - f(1, 4)}{\Delta y} \\ &= \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{(3 \times 1^2 - 5 \times 1 \times (4 + \Delta y)) - (3 \times 1^2 - 5 \times 1 \times 4)}{\Delta y} = -5\end{aligned}$$

ب) مشابه قسمت قبل عمل می‌کنیم با این تفاوت که در این حالت به جای نقطه خاص $(1, 4)$ نقطه کلی (x_0, y_0) را جایگذاری می‌کنیم.

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(3(x_0 + \Delta x)^2 - 5(x_0 + \Delta x)y_0) - (3x_0^2 - 5x_0y_0)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(6x_0 - 5y_0)\Delta x + 3\Delta x^2}{\Delta x} = 6x_0 - 5y_0\end{aligned}$$

اگر نتیجه حاصل را دقیق مورد توجه قرار دهیم نتیجه مهمی مشاهده می‌شود. در محاسبه $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ ، در واقع مقدار متغیر y در محاسبات فوق ثابت و برابر y_0 بوده، عملیات مشتق نسبت به متغیر x انجام شده است. به این ترتیب با استفاده از این قانون، مقدار $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ با مشتق‌گیری از f نسبت به متغیر y (در عین ثابت انگاشتن متغیر x) و جایگذاری x_0 به جای x و y_0 به جای y برابر $-5x_0$ به دست می‌آید. نتیجه حاصل در قسمت (ب) این مثال را برای تاکید بیشتر مجدداً در زیر بیان می‌کنیم.

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) &= 6x_0 - 5y_0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) &= -5x_0\end{aligned}$$

مثال. مشتقات جزئی هر یک از توابع زیر را به دست آورید.

الف) $f(x, y) = x \sinh(x - 3y)$

مطابق آنچه در بالا اشاره کردیم،

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= \sinh(x - 3y) + x \cosh(x - 3y) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= (-3)x \cosh(x - 3y)\end{aligned}$$

$$\text{ب) } f(x, y, z) = x^{yz^2}$$

با استفاده از تعریف نما خواهیم داشت $f(x, y, z) = e^{yz^2 \ln x}$ در نتیجه

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= \left(\frac{yz^2}{x}\right)e^{yz^2 \ln x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= (z^2 \ln x)e^{yz^2 \ln x} \\ \frac{\partial f}{\partial z} &= (2yz \ln x)e^{yz^2 \ln x}\end{aligned}$$

$$\text{ج) } f(x, y) = \begin{cases} \frac{y^3}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

با توجه به نحوه تعریف f ، برای محاسبه مشتقات جزئی تابع در نقطه $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ دو حالت زیر را در نظر می‌گیریم.

اگر $(x, y) \neq (0, 0)$ آنگاه در یک همسایگی این نقطه تابع f از دستور $f(x, y) = \frac{y^3}{x^2 + y^2}$ پیروی می‌کند. در نتیجه

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{-2xy^3}{(x^2 + y^2)^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{3y^2(x^2 + y^2) - 2y(y^3)}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{3x^2y^2 + y^4}{(x^2 + y^2)^2}$$

اگر $(x, y) = (0, 0)$ آنگاه برای محاسبه مشتقات جزئی لازم است مستقیماً از تعریف این مشتقات استفاده کنیم.

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{x} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(0, y) - f(0, 0)}{y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\frac{y^3}{0^2 + y^2} - 0}{y} = 1\end{aligned}$$

به این ترتیب

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \begin{cases} \frac{-2xy^2}{(x^2 + y^2)^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \begin{cases} \frac{2x^2y^2 + y^4}{(x^2 + y^2)^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 1 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

مشتقات جزئی مراتب بالاتر. فرض کنیم $D \subset \mathbb{R}^n$ و تابع $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ در هر نقطه از D نسبت به متغیر x_i مشتق داشته باشد. در این صورت عبارت $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ عبارتی وابسته به نقطه $x = (x_1, \dots, x_n) \in D$ بوده، تابعی n متغیره بر D تعریف می‌کند. اگر تابع اخیر در نقطه‌ای چون $p = (p_1, \dots, p_n) \in D$ نسبت به متغیر x_j مشتق داشته باشد آن را یک مشتق جزئی مرتبه دوم f در p نامیده با یکی از نمادهای $f_{x_i x_j}(p)$ ، $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(p)$ یا $D_{x_j x_i} f(p)$ نشان می‌دهیم. به این ترتیب

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(p) = \lim_{\Delta x_j \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x_i}(p_1, \dots, p_j + \Delta x_j, \dots, p_n) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(p_1, \dots, p_j, \dots, p_n)}{\Delta x_j}$$

روشن است که یک تابع n متغیره در حالت کلی می‌تواند n^2 مشتق جزئی مرتبه دوم داشته باشد. مشتقات جزئی مراتب بالاتر به نحو مشابه تعریف می‌شوند.

مثال. مشتقات جزئی مرتبه دوم تابع f با دستور $f(x, y) = (x^2 - 4y) \ln(\frac{x}{y})$ را به دست آورید. ابتدا مشتقات جزئی مرتبه اول تابع را حساب می‌کنیم.

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= 2x \ln\left(\frac{x}{y}\right) + (x^2 - 4y) \frac{1}{\frac{x}{y}} = 2x \ln\left(\frac{x}{y}\right) + (x - 4\frac{y}{x}) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= -4 \ln\left(\frac{x}{y}\right) + (x^2 - 4y) \frac{-\frac{x}{y^2}}{\frac{x}{y}} = -4 \ln\left(\frac{x}{y}\right) - (\frac{x^2}{y} - 4) \end{aligned}$$

اکنون به محاسبه مشتقات مرتبه دوم می‌پردازیم.

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)(x, y) = 2 \ln\left(\frac{x}{y}\right) + 2x \frac{\frac{1}{y}}{\frac{x}{y}} + 1 + 4 \frac{y}{x^2} = 2 \ln\left(\frac{x}{y}\right) + 3 + 4 \frac{y}{x^2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)(x, y) = 2x \frac{-\frac{x}{y^2}}{\frac{x}{y}} - \frac{4}{x} = -\frac{2x}{y} - \frac{4}{x} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)(x, y) = -4 \frac{\frac{1}{y}}{\frac{x}{y}} - \frac{2x}{y} = -\frac{4}{x} - \frac{2x}{y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)(x, y) = -4 \frac{-\frac{x}{y^2}}{\frac{x}{y}} + \frac{x^2}{y^2} = \frac{4}{y} + \frac{x^2}{y^2}\end{aligned}$$

در این مثال مشاهده می‌شود $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$. طبیعی است که این سؤال مطرح می‌شود آیا این تساوی برای تمام توابع برقرار است؟ مثال زیر این نکته را مورد توجه قرار می‌دهد.

مثال. تابع $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ با دستور $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 y}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ مفروض است.

(الف) ضابطه توابع $\frac{\partial f}{\partial x}$ و $\frac{\partial f}{\partial y}$ را بر $\mathbb{R}^2$ تعیین کنید.

(ب) مطلوب است محاسبه $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0)$ و $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0)$.
(الف)

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= \begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x^3 y}{x^2 + y^2} \right) & (x, y) \neq (0, 0) \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x} & (x, y) = (0, 0) \end{cases} = \begin{cases} \frac{3x^2 y(x^2 + y^2) - 2x(x^3 y)}{(x^2 + y^2)^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases} \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= \begin{cases} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{x^3 y}{x^2 + y^2} \right) & (x, y) \neq (0, 0) \\ \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(0, y) - f(0, 0)}{y} & (x, y) = (0, 0) \end{cases} = \begin{cases} \frac{x^3(x^2 + y^2) - 2y(x^3 y)}{(x^2 + y^2)^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}\end{aligned}$$

(ب) اکنون مشتقات مرتبه دوم خواسته شده را با استفاده از توابع محاسبه شده در قسمت (الف) به دست می‌آوریم. توجه می‌کنیم با توجه به نحوه تعریف توابع مشتق جزئی فوق، برای محاسبه مشتقات مرتبه دوم

خواسته شده در نقطه $(\circ, \circ)$ باید مستقیماً از تعریف استفاده کنیم.

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\circ, \circ) &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)(\circ, \circ) = \lim_{x \rightarrow \circ} \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x, \circ) - \frac{\partial f}{\partial y}(\circ, \circ)}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow \circ} \frac{x^3(x^2 + \circ^2) - 2 \times \circ \times (x^3 \times \circ)}{(x^2 + \circ^2)^2} - \circ \\ &= \lim_{x \rightarrow \circ} \frac{(x^2 + \circ^2)^2}{x} = 1\end{aligned}$$

به همین ترتیب،

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(\circ, \circ) &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)(\circ, \circ) = \lim_{y \rightarrow \circ} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(\circ, y) - \frac{\partial f}{\partial x}(\circ, \circ)}{y} \\ &= \lim_{y \rightarrow \circ} \frac{3 \times \circ^2 \times y(\circ^2 + y^2) - 2 \times \circ \times (\circ^3 \times y)}{(\circ^2 + y^2)^2} - \circ \\ &= \lim_{y \rightarrow \circ} \frac{(\circ^2 + y^2)^2}{y} = \circ\end{aligned}$$

به این ترتیب در این مثال، $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\circ, \circ) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(\circ, \circ)$. به عبارت دیگر، در حالت کلی مجاز به جابجا کردن ترتیب مشتق‌گیری در محاسبه مشتقات جزئی نیستیم. با وجود این قضیه زیر اجازه می‌دهد در برخی موارد این ترتیب را عوض نماییم.

قضیه

فرض کنیم f, f_x, f_y, f_{xy} و f_{yx} در یک همسایگی از نقطه $p \in \mathbb{R}^2$ تعریف شده در این نقطه پیوسته باشند. در این صورت $f_{xy}(p) = f_{yx}(p)$.

پس به طور مثال، از آنجا که مشتقات جزئی از هر مرتبه از یک تابع چندجمله‌ای، مجدداً به صورت یک تابع چندجمله‌ای و در نتیجه پیوسته در هر نقطه است، در مورد توابع چندجمله‌ای به استناد قضیه فوق، به راحتی می‌توانیم ترتیب مشتق‌گیری را عوض نماییم.

تذکر. همانطور که از بحث توابع یک متغیره به خاطر داریم، اگر f تابعی یک متغیره تعریف شده در یک همسایگی نقطه $x_0 \in \mathbb{R}$ بوده، در این نقطه مشتق داشته باشد آنگاه لزوماً در این نقطه پیوسته نیز خواهد بود. اما در مورد توابع چند متغیره، مثال زیر نشان می‌دهد وجود مشتق سویی تابع در یک نقطه و حتی در تمام سویی‌های ممکن، لزوماً باعث پیوستگی تابع در آن نقطه نخواهد بود.

مثال. تابع $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ با دستور $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 y}{x^6 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ مفروض است.

الف) نشان دهید مشتق سویی f در نقطه $(0, 0)$ و در سوی هر بردار یکه $\vec{u} = a\vec{i} + b\vec{j}$ وجود دارد.

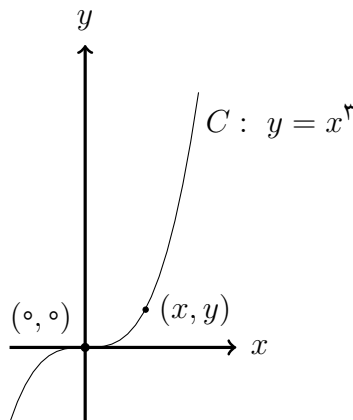
ب) نشان دهید f در این نقطه پیوسته نیست.

الف) بنابر تعریف مشتق سویی

$$\begin{aligned} D_u f(0, 0) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(0 + at, 0 + bt) - f(0, 0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{a^3 t^3 b t}{a^6 t^6 + b^2 t^2}}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{a^3 b t^2}{a^6 t^6 + b^2} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{a^3 b t}{a^6 t^4 + b^2} = 0 \end{aligned}$$

نتیجه فوق در حالتی که $b = 0$ نیز برقرار است. پس مشتق سویی f در نقطه $(0, 0)$ و در هر سوی یکه $\vec{u}$ وجود داشته برابر صفر است.

ب) فرض کنیم C منحنی $y = x^3$ در صفحه xoy باشد. توجه می‌کنیم که نقطه $(0, 0)$ یک نقطه حدی برای این منحنی بوده، بر روی این منحنی $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ اگر و تنها اگر $x \rightarrow 0$.



به این ترتیب

$$\lim_{(x, y) \xrightarrow{C} (0, 0)} f(x, y) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x, x^3) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 \times x^3}{x^6 + (x^3)^2} = \frac{1}{2} \neq 0 = f(0, 0)$$

به این ترتیب، f در نقطه $(0, 0)$ پیوسته نیست.

بر اساس این نقطه ضعف برای مشتق سویی، در بخش بعد مفهوم مشتق‌پذیری توابع چند متغیره را به گونه‌ای دیگر تعریف خواهیم کرد.

تمرین‌های بخش مشتق سویی و مشتقات جزئی

۱. برای تابع $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ با ضابطه $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x \sin(xy)}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ مطلوب است تعیین مشتق سویی $D_u f(0, 0)$ که در آن $\vec{u} = a\vec{i} + b\vec{j}$ برداری یکه است.

۲. تمام مشتقات جزئی مرتبه اول توابع زیر را محاسبه کنید.

$$f(x, y) = \ln x + \sqrt{x^2 + y^2} \quad (\text{الف})$$

$$f(x, y, z) = \frac{x}{y} + \frac{y}{z} - \frac{z}{x} \quad (\text{ب})$$

$$f(x, y, z) = x^{yz} \quad (\text{ج})$$

۳. تابع f با ضابطه $f(x, y) = \begin{cases} (xy) \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ نشان دهید

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0)$$

۴. می‌دانیم که اگر برای تابع f مشتق‌های جزئی f_{xy} و f_{yx} پیوسته باشند آنگاه $f_{xy} = f_{yx}$. این مطلب را با محاسبه مستقیم مشتق‌های جزئی f_{xy} و f_{yx} برای تابع $f(x, y, z) = e^{xyz}$ تحقیق کنید.

۵. برای $w = \frac{x}{y+x}$ مشتق جزئی مرتبه‌ی چهارم $\frac{\partial^4 w}{\partial^2 z \partial x \partial y}$ را محاسبه کنید.

۶. نشان دهید توابع $u(x, y) = e^x \cos y$ و $v(x, y) = e^x \sin y$ در روابط زیر صدق می‌کنند.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad (\text{ب}) \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \quad (\text{الف})$$

$$v_{xx} + v_{yy} = 0 \quad (\text{د}) \quad u_{xx} + u_{yy} = 0 \quad (\text{ج})$$

معادلات (الف) و (ب) را معادلات کوشی - ریمن می‌نامند که در نظریه‌ی توابع مختلط از اهمیت ویژه‌ای برخوردار هستند. در ضمن هر یک از معادلات (ج) و (د) یک معادله‌ی لاپلاس در فضای دو بعدی نامیده می‌شود.

۷. معادله‌ی $u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0$ ، که در آن u یک تابع سه متغیره‌ی است یک معادله‌ی لاپلاس در

فضای سه بعدی نامیده می‌شود. نشان دهید تابع u با ضابطه $u(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$ که در آن $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$ ، در این معادله صدق می‌کند.

۸. تابع $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ با دستور $f(x, y, z) = \begin{cases} \frac{\sin(x^3 - y^3)}{x^2 + y^2 + z^2} & (x, y, z) \neq (0, 0, 0) \\ 0 & (x, y, z) = (0, 0, 0) \end{cases}$ مفروض است.

مطلوب است تعیین مشتقات جزئی مرتبه اول f در نقطه $(\circ, \circ, \circ)$.

۹. تابع $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ با ضابطه $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^4}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (\circ, \circ) \\ \circ & (x, y) = (\circ, \circ) \end{cases}$ مفروض است. مطلوب است محاسبه $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\circ, \circ)$ و $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\circ, \circ)$.

۱۰. نشان دهید تابع $f(x, y) = xy^3 - x^3y$ در معادله $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \circ$ صدق می‌کند.

۱۱. نشان دهید تابع f با ضابطه $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} & x^2 + y^2 \neq \circ \\ \circ & x^2 + y^2 = \circ \end{cases}$ در هر نقطه از صفحه دارای مشتقات جزئی است اما در مبدأ ناپیوسته است.

مشتق‌پذیری توابع چند متغیره

یکی از ویژگی‌های مهم ناشی از مشتق‌پذیری توابع یک متغیره، امکان تقریب خطی یک تابع مشتق‌پذیر در همسایگی نقطه‌ای است که تابع در آن مشتق‌پذیر است. به طور دقیق‌تر، اگر تابع یک متغیره f در یک همسایگی نقطه $x_0 \in \mathbb{R}$ تعریف شده در این نقطه مشتق‌پذیر باشد آنگاه برای مقادیر x به اندازه کافی نزدیک به x_0 ، $f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$. این تقریب به تقریب خطی معروف بوده برای توابع یک متغیره مشتق‌پذیر برقرار است. تقریب دقیق‌تر خواهد بود اگر مقدار x به x_0 نزدیک‌تر اختیار شود. بدیهی است یکی از شرایط لازم برای برقراری تقریب خطی، پیوستگی تابع مورد بررسی در نقطه x_0 است. در مورد توابع چند متغیره، وجود مشتق سویی یک تابع چند متغیره در یک نقطه و در سوی‌های مختلف، به آن اندازه قوی نیست که امکان چنین تقریبی را ایجاد کند. در آخرین مثال بخش قبل مشاهده کردیم وجود مشتق سویی یک تابع در تمام سوی‌ها حتی ضامنی برای پیوستگی تابع در آن نقطه نخواهد بود. هدف ما در این فصل ارائه تعریف مناسبی از مشتق‌پذیری توابع چند متغیره است که امکان تقریب خطی را به طور طبیعی به دنبال داشته باشد. برای این منظور ابتدا مفهوم مشتق‌پذیری برای توابع یک متغیره را یک بار دیگر مورد بررسی قرار می‌دهیم.

فرض کنیم تابع یک متغیره f در یک همسایگی نقطه $x_0 \in \mathbb{R}$ تعریف شده باشد. در این صورت f را در نقطه x_0 مشتق‌پذیر نامیم هرگاه $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ وجود داشته باشد. اگر مقدار این حد را با نماد m نشان دهیم و تابع $\alpha(\Delta x)$ را با دستور زیر تعریف کنیم

$$\alpha(\Delta x) := \begin{cases} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} - m & \Delta x \neq 0 \\ 0 & \Delta x = 0 \end{cases}$$

آنگاه $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = m\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x$ و $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \alpha(\Delta x) = 0$. عکس این خاصیت نیز برقرار است. به عبارت دیگر:

تابع f در نقطه x_0 مشتق‌پذیر است اگر و تنها اگر عدد m و تابع α تعریف شده در یک همسایگی صفر وجود داشته باشند به گونه‌ای که برای مقادیر کوچک Δx با این خاصیت که $x_0 + \Delta x$ در دامنه تعریف f قرار گیرد، داشته باشیم

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = m\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x \quad \text{و} \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \alpha(\Delta x) = 0$$

و در این صورت m مشتق تابع f در نقطه x_0 خواهد بود.

اکنون از خاصیت معادل فوق استفاده کرده، مفهوم مشتق‌پذیری توابع چندمتغیره را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

تعریف

فرض کنیم $D \subset \mathbb{R}^n$ و $p \in D$ نقطه‌ای درونی برای D باشد (یعنی D در برگیرنده یک همسایگی از نقطه p باشد). تابع $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ را در این نقطه مشتق‌پذیر نامیم هرگاه اعداد $m_1, \dots, m_n$ و توابع $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ وجود داشته باشند به گونه‌ای که برای نمو به اندازه کافی کوچک $\Delta x = (\Delta x_1, \dots, \Delta x_n)$ با این خاصیت که $p + \Delta x \in D$ داشته باشیم

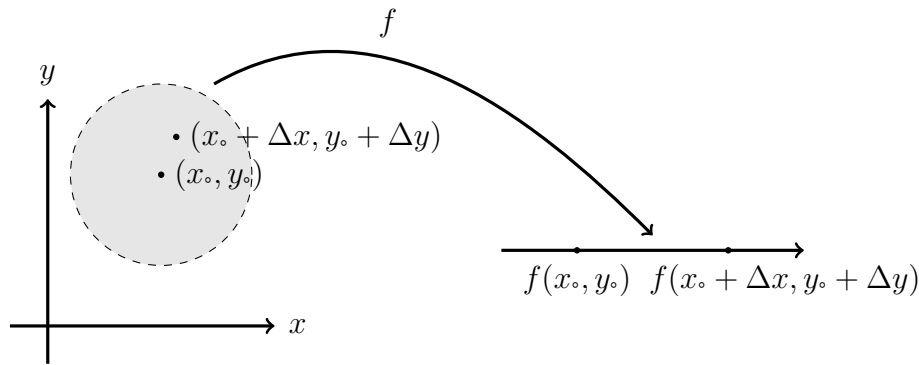
$$f(p + \Delta x) - f(p) = \sum_{i=1}^n m_i \Delta x_i + \sum_{i=1}^n \alpha_i(\Delta x) \Delta x_i \quad \text{و} \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \alpha_i(\Delta x) = 0 \quad \forall i = 1, \dots, n$$

در تعریف فوق عبارت $p + \Delta x$ نماد خلاصه‌ای برای نقطه $(p_1 + \Delta x_1, \dots, p_n + \Delta x_n) \in \mathbb{R}^n$ است. برای داشتن درک مناسبی از مفهوم مشتق‌پذیری توابع چند متغیره، مفهوم مشتق‌پذیری را برای یک تابع دو متغیره بررسی می‌کنیم. فرض کنیم $p(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ و f تابعی دو متغیره تعریف شده در یک همسایگی نقطه p باشد. طبق تعریف اخیر، اگر f در نقطه p مشتق‌پذیر باشد آنگاه اعداد m_1 و m_2 و توابع $\alpha_1(\Delta x, \Delta y)$ و $\alpha_2(\Delta x, \Delta y)$ وجود دارند به گونه‌ای که برای هر نمو کوچک $(\Delta x, \Delta y)$ در صفحه با این خاصیت که $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ در دامنه تعریف f قرار گیرد، نمو مقادیر تابع، یعنی $f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$ به صورت مجموع دو جمله، یکی $m_1 \Delta x + m_2 \Delta y$ و دیگری $\alpha_1(\Delta x, \Delta y) \Delta x + \alpha_2(\Delta x, \Delta y) \Delta y$ نوشته شود، یعنی

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) = (m_1 \Delta x + m_2 \Delta y) + (\alpha_1(\Delta x, \Delta y) \Delta x + \alpha_2(\Delta x, \Delta y) \Delta y)$$

و

$$\lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0,0)} \alpha_1(\Delta x, \Delta y) = \lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0,0)} \alpha_2(\Delta x, \Delta y) = 0$$



اگر تابع متغیره f در نقطه $p \in \mathbb{R}^n$ مشتق‌پذیر باشد آنگاه با بازنویسی رابطه بیان شده در تعریف فوق به صورت

$$f(p + \Delta x) - f(p) = (m_1, \dots, m_n) \begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \vdots \\ \Delta x_n \end{pmatrix} + (\alpha_1(\Delta x), \dots, \alpha_n(\Delta x)) \begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \vdots \\ \Delta x_n \end{pmatrix}$$

ماتریس سطری $(m_1, \dots, m_n)$ را ماتریس مشتق f در نقطه p نامیده آن را با نماد $Df(p)$ نشان می‌دهیم.

مثال. تابع $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ با دستور $f(x, y) = 3x^2 - 7xy$ مفروض است.

الف) نشان دهید f در نقطه $p(1, -2)$ مشتق‌پذیر است.

ب) نشان دهید f در هر نقطه دلخواه $p(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ مشتق‌پذیر است.

الف) تابع f بر سراسر $\mathbb{R}^2$ تعریف شده است. برای نمو $(\Delta x, \Delta y)$ در صفحه، به بررسی نمو مقادیر تابع،

یعنی $f(1 + \Delta x, -2 + \Delta y) - f(1, -2)$ می‌پردازیم.

$$\begin{aligned} f(1 + \Delta x, -2 + \Delta y) - f(1, -2) &= \left(3(1 + \Delta x)^2 - 7(1 + \Delta x)(-2 + \Delta y) \right) - \left(3 \times 1^2 - 7 \times 1 \times (-2) \right) \\ &= 6\Delta x + 3\Delta^2 x + 14\Delta x - 7\Delta y - 7\Delta x\Delta y \\ &= 20\Delta x - 7\Delta y + (3\Delta x)\Delta x + (-7\Delta x)\Delta y \\ &= m_1\Delta x + m_2\Delta y + \alpha_1(\Delta x, \Delta y)\Delta x + \alpha_2(\Delta x, \Delta y)\Delta y \end{aligned}$$

که در آن $\alpha_1(\Delta x, \Delta y) = 3\Delta x$ ، $\alpha_2(\Delta x, \Delta y) = -7\Delta x$ و $m_1 = 20$ ، $m_2 = -7$. با توجه به اینکه برای توابع α_1 و α_2 معرفی شده در اینجا $\lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0, 0)} \alpha_i(\Delta x, \Delta y) = 0$ (برای $i = 1, 2$)، طبق تعریف، تابع f در نقطه $(1, -2)$ مشتق‌پذیر است.

ب) همان مراحل قسمت (الف) را برای نقطه (x_0, y_0) به جای $(1, -2)$ تکرار می‌کنیم.

$$\begin{aligned} f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) &= \left(3(x_0 + \Delta x)^2 - 7(x_0 + \Delta x)(y_0 + \Delta y) \right) - \left(3x_0^2 - 7x_0y_0 \right) \\ &= 6x_0\Delta x + 3\Delta x^2 - 7x_0\Delta y - 7y_0\Delta x - 7\Delta x\Delta y \\ &= \left((6x_0 - 7y_0)\Delta x + (-7x_0)\Delta y \right) + \left((3\Delta x)\Delta x + (-7\Delta x)\Delta y \right) \\ &= (m_1\Delta x + m_2\Delta y) + \left(\alpha_1(\Delta x, \Delta y)\Delta x + \alpha_2(\Delta x, \Delta y)\Delta y \right) \end{aligned}$$

که در آن $\alpha_2(\Delta x, \Delta y) = -7\Delta x$ ، $\alpha_1(\Delta x, \Delta y) = 3\Delta x$ ، $m_2 = -7x_0$ ، $m_1 = 6x_0 - 7y_0$. مجدداً با توجه به اینکه توابع α_1 و α_2 وقتی $(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0, 0)$ حدی برابر صفر دارند، بنا به تعریف، f در نقطه دلخواه $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ مشتق‌پذیر است.

نکته مهمی در قسمت (ب) مثال فوق مشاهده می‌شود. اگر مقادیر m_1 و m_2 به دست آمده در این قسمت را با ضابطه f مقایسه کنیم، مشاهده می‌شود در این مثال

$$m_1 = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \quad \text{و} \quad m_2 = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$$

قضیه بعد نشان می‌دهد، این خاصیت در حالت کلی نیز برقرار است.

قضیه

فرض کنیم تابع n متغیره $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ در نقطه درونی $p \in D$ مشتق‌پذیر باشد. در این صورت کلیه مشتقات جزئی مرتبه اول f در p وجود داشته، داریم $Df(p) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(p), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(p) \right)$. به علاوه برای مقادیر کوچک Δx ،

$$f(p + \Delta x) - f(p) \approx \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(p) \Delta x_i$$

خلاصه‌ای از اثبات را در اینجا مرور می‌کنیم. طبق فرض مشتق‌پذیری f در نقطه p ، اعداد $m_1, \dots, m_n$ و توابع $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ وجود دارند با این خاصیت که برای مقادیر کوچک نمو $\Delta x := (\Delta x_1, \dots, \Delta x_n)$ در $\mathbb{R}^n$ ،

$$\begin{aligned} f(p + \Delta x) - f(p) &= f(p_1 + \Delta x_1, \dots, p_n + \Delta x_n) - f(p_1, \dots, p_n) \\ &= \left(m_1\Delta x_1 + \dots + m_n\Delta x_n \right) + \left(\alpha_1(\Delta x)\Delta x_1 + \dots + \alpha_n(\Delta x)\Delta x_n \right) \quad (1) \end{aligned}$$

که در آن توابع $\alpha_i(\Delta x_1, \dots, \Delta x_n)$ وقتی $(\Delta x_1, \dots, \Delta x_n) \rightarrow (0, \dots, 0)$ حدی برابر صفر دارند. اکنون

برای $1 \leq i \leq n$ ، فرض کنیم Δx نموی در $\mathbb{R}^n$ به صورت $\Delta x = (\circ, \dots, \circ, \Delta x_i, \circ, \dots, \circ)$ باشد. با بازنویسی رابطه فوق برای این نمو، خواهیم داشت

$$f(p_1, \dots, p_i + \Delta x_i, \dots, p_n) - f(p_1, \dots, p_i, \dots, p_n) = m_i \Delta x_i + \alpha_i(\Delta x) \Delta x_i$$

و در نتیجه با تقسیم طرفین این رابطه به Δx_i و میل دادن آن به سمت صفر خواهیم داشت.

$$\lim_{\Delta x_i \rightarrow 0} \frac{f(p_1, \dots, p_i + \Delta x_i, \dots, p_n) - f(p_1, \dots, p_i, \dots, p_n)}{\Delta x_i} = \lim_{\Delta x_i \rightarrow 0} (m_i + \alpha_i(\Delta x)) = m_i$$

در نتیجه $\frac{\partial f}{\partial x_i}(p)$ وجود داشته برابر m_i است.

در نهایت برای مقادیر کوچک نمو $\Delta x = (\Delta x_1, \dots, \Delta x_n)$ در $\mathbb{R}^n$ ، با توجه به تعریف مشتق‌پذیری که در (۱) بیان شده است، و با توجه به اینکه جمله $(\alpha_1(\Delta x) \Delta x_1 + \dots + \alpha_n(\Delta x) \Delta x_n)$ نسبت به جمله $m_1 \Delta x_1 + \dots + m_n \Delta x_n$ کوچک است تقریب زیر را خواهیم داشت.

$$f(p + \Delta x) - f(p) \approx m_1 \Delta x_1 + \dots + m_n \Delta x_n = \frac{\partial f}{\partial x_1}(p) \Delta x_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(p) \Delta x_n \quad (2)$$

تذکر. فرض کنیم f در یک همسایگی نقطه $p \in \mathbb{R}^n$ تعریف شده در این نقطه مشتق‌پذیر باشد. اگر $x = (x_1, \dots, x_n)$ نقطه‌ای در مجاورت p باشد آنگاه با قرار دادن $\Delta x_i := x_i - p_i$ (برای هر $i = 1, \dots, n$) داریم $x_i = p_i + \Delta x_i$ و در نتیجه $x = p + \Delta x$. در نتیجه طبق رابطه (۲)، تقریب زیر را خواهیم داشت

$$\begin{aligned} f(x) = f(p + \Delta x) &\approx f(p) + \frac{\partial f}{\partial x_1}(p) \Delta x_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(p) \Delta x_n \\ &= f(p) + \frac{\partial f}{\partial x_1}(p) (x_1 - p_1) + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(p) (x_n - p_n) \end{aligned}$$

تقریب اخیر که برای نقاط نزدیک p برقرار است تحت نام تقریب خطی f در همسایگی نقطه p نامیده می‌شود. بدیهی است هر چه x به نقطه p نزدیک‌تر باشد این تقریب دقیق‌تر خواهد بود. همین مسئله نشان می‌دهد اگر f در نقطه p مشتق‌پذیر باشد آنگاه در این نقطه پیوسته نیز خواهد بود.

تذکره.

قبلا در قالب یک مثال مشاهده کردیم امکان دارد مشتقات جزئی یک تابع در یک نقطه وجود داشته باشند بدون آن که تابع در آن نقطه پیوسته و در نتیجه مشتق پذیر باشد. پس در حالت کلی، وجود مشتقات جزئی یک تابع در یک نقطه دال بر مشتق پذیری تابع در آن نقطه نیست.

با وجود این، با اضافه کردن یک شرط به مشتقات جزئی می توانیم مشتق پذیری تابع را نتیجه بگیریم.

قضیه

اگر کلیه مشتقات جزئی مرتبه اول f در یک همسایگی از نقطه $p \in D$ وجود داشته در این نقطه پیوسته باشند آنگاه f در این نقطه مشتق پذیر است.

نتیجه.

با توجه به اینکه مشتقات جزئی هر تابع چندجمله بر $\mathbb{R}^n$ ، مجددا تابعی چندجمله ای و در نتیجه پیوسته است، بنابر قضیه قبل، هر تابع چندجمله ای در هر نقطه از $\mathbb{R}^n$ مشتق پذیر است.

مانند آنچه در بحث پیوستگی بیان شد در اینجا نیز می توان ثابت کرد اگر دو تابع n متغیره f و g در نقطه $p \in \mathbb{R}^n$ مشتق پذیر باشند آنگاه هر یک از توابع $f \pm g$ ، λf ($\lambda \in \mathbb{R}$ ثابت) و fg نیز در p مشتق پذیر هستند. به علاوه اگر $g(p) \neq 0$ آنگاه تابع $\frac{f}{g}$ نیز در p مشتق پذیر خواهد بود. در بالا مشاهده کردیم اگر تابع f در نقطه $p \in \mathbb{R}^n$ مشتق پذیر باشد آنگاه کلیه مشتقات جزئی مرتبه اول آن در این نقطه وجود خواهد داشت. اکنون این سؤال مطرح می شود که در این حالت در مورد مشتق سویی تابع در این نقطه و در سویی خاص چه می توان گفت؟ قضیه زیر پاسخ این سؤال را بیان می کند.

قضیه

فرض کنیم تابع n متغیره f در یک همسایگی نقطه $p \in \mathbb{R}^n$ تعریف شده در این نقطه مشتق پذیر باشد. در این صورت برای هر $u \in \mathbb{R}^n$ با $\|u\| = 1$ ، مشتق سویی f در p و در سوی u وجود دارد و

$$D_u f(p) = u_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(p) + \cdots + u_n \frac{\partial f}{\partial x_n}(p)$$

نگاه مختصری به اثبات این قضیه داشته باشیم. طبق فرض قضیه، بنابر مشتق‌پذیری f در نقطه p و با استفاده از تقریب خطی f ، برای $x \in \mathbb{R}^n$ به اندازه کافی نزدیک p ، داریم

$$f(x_1, \dots, x_n) \approx f(p_1, \dots, p_n) + \frac{\partial f}{\partial x_1}(p)(x_1 - p_1) + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(p)(x_n - p_n)$$

و همان طور که اشاره شد، هر چه x به p نزدیک‌تر باشد تقریب فوق دقیق‌تر خواهد بود. اکنون برای $u = (u_1, \dots, u_n) \in \mathbb{R}^n$ با $\|u\| = 1$ و برای $t \in \mathbb{R}$ قرار می‌دهیم $x := p + tu = (p_1 + tu_1, \dots, p_n + tu_n)$ به این ترتیب

$$f(p + tu) - f(p) \approx \frac{\partial f}{\partial x_1}(p)(x_1 - p_1) + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(p)(x_n - p_n) = (tu_1) \frac{\partial f}{\partial x_1}(p) + \dots + (tu_n) \frac{\partial f}{\partial x_n}(p)$$

به این ترتیب

$$D_u f(p) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(p + tu) - f(p)}{t} = u_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(p) + \dots + u_n \frac{\partial f}{\partial x_n}(p)$$

تذکر

بنابر قضیه فوق، برای یک تابع دومتغیره و مشتق‌پذیر f در نقطه‌ای چون $p \in \mathbb{R}^2$ ، مشتق سویی f در این نقطه و در سوی بردار یکه $\vec{u} = a\vec{i} + b\vec{j}$ برابر $D_u f(p) = a \frac{\partial f}{\partial x}(p) + b \frac{\partial f}{\partial y}(p)$ خواهد بود. عبارت اخیر را می‌توانیم به صورت ضرب نقطه‌ای دو بردار $\vec{u}$ و بردار $\frac{\partial f}{\partial x}(p)\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}(p)\vec{j}$ بنویسیم. بردار اخیر را گرادیان f در نقطه p نامیده آن را با نماد $\nabla f(p)$ نشان می‌دهیم. به همین ترتیب برای یک تابع سه متغیره قرار می‌دهیم

$$\nabla f(p) = \frac{\partial f}{\partial x}(p)\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}(p)\vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z}(p)\vec{k}$$

بنابر قضیه اخیر، اگر تابع دو یا سه متغیره f در نقطه p مشتق‌پذیر باشد آنگاه برای هر بردار یکه $\vec{u}$ مانند $D_u f(p) = \nabla f(p) \cdot \vec{u}$ خواهیم داشت.

مثال. فرض کنیم دما در نقاط مختلف فضا از دستور $T(x, y, z) = x^2 - 4xyz$ پیروی کند.
 الف) اگر از نقطه $p(1, 1, 2)$ در سوی مبدا مختصات حرکت کنیم دما با چه سرعتی شروع به تغییر می‌کند.
 ب) از این نقطه در چه سویی حرکت کنیم تا دما با بیشترین سرعت ممکن شروع به افزایش کند.

(ج) در چه سویی حرکت کنیم تا دما با بیشترین سرعت ممکن کاهش یابد.

(الف) برداری که ابتدای آن نقطه $(1, 1, 2)$ و انتهای آن $(0, 0, 0)$ باشد بردار $-\vec{i} - \vec{j} - 2\vec{k}$ خواهد بود. بردار یکه هم جهت با این بردار نیز برابر $\vec{u} = \frac{1}{\sqrt{6}}(-\vec{i} - \vec{j} - 2\vec{k})$ است. با توجه به اینکه سرعت تغییرات تابع دما با حرکت از نقطه $(1, 1, 2)$ و در هر سویی با استفاده از مشتق سویی $D_u T(1, 1, 2)$ حاصل می‌شود و با توجه به مشتق‌پذیری تابع چندجمله‌ای T در هر نقطه از فضا و از جمله در نقطه p ، بنابر بحث فوق خواهیم داشت

$$D_u T(1, 1, 2) = \nabla T(p) \cdot \vec{u}$$

داریم

$$\begin{aligned} \nabla T(x, y, z) &= \frac{\partial T}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial T}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial T}{\partial z} \vec{k} = (3x^2 - 4yz)\vec{i} + (-4xz)\vec{j} + (-4xy)\vec{k} \\ \Rightarrow \nabla T(1, 1, 2) &= -5\vec{i} - 8\vec{j} - 4\vec{k} \end{aligned}$$

در نتیجه $D_u T(p) = (-5\vec{i} - 8\vec{j} - 4\vec{k}) \cdot \frac{1}{\sqrt{6}}(-\vec{i} - \vec{j} - 2\vec{k}) = \frac{21}{\sqrt{6}}$ حاصل نشان می‌دهد با حرکت از نقطه $(1, 1, 2)$ و در سوی مبدا مختصات، دما شروع به افزایش کرده، سرعت افزایش دما برابر $\frac{21}{\sqrt{6}}$ است.

(ب) فرض کنیم $\vec{u}$ بردار یکه دلخواهی باشد. مانند آنچه در قسمت قبل مشاهده کردیم، سرعت تغییر دما با حرکت از نقطه p و در سوی $\vec{u}$ برابر است با

$$D_u T(p) = \nabla T(p) \cdot \vec{u} = \|\nabla T(p)\| \|\vec{u}\| \cos \theta = \|\nabla T(p)\| \cos \theta$$

که در آن θ زاویه بین بردار $\nabla T(p)$ و بردار یکه $\vec{u}$ است. طبیعتاً بیشترین مقدار $D_u T(p)$ زمانی حاصل می‌شود که $\cos \theta = 1$ ، یا $\theta = 0$. به عبارت دیگر با حرکت در جهت بردار گرادیان، سرعت افزایش تابع T بیشترین مقدار ممکن را خواهد داشت. پس جهت حرکت یکه برای داشتن بیشترین سرعت افزایش دما، عبارت است از

$$\vec{u} = \frac{1}{\|\nabla T(p)\|} \nabla T(p) = \frac{1}{\sqrt{105}}(-5\vec{i} - 8\vec{j} - 4\vec{k})$$

(ج) مانند بحث قسمت (ب)، بیشترین سرعت کاهش تابع T زمانی حاصل می‌شود که $\theta = \pi$. به عبارت دیگر، با حرکت در خلاف جهت بردار گرادیان مقدار تابع با بیشترین سرعت ممکن کاهش می‌یابد. مشاهده کردیم در صورت مشتق‌پذیری تابع دو یا سه متغیره f در نقطه p ، مشتق سویی تابع در آن نقطه از دستور $D_u f(p) = \nabla f(p) \cdot \vec{u}$ به دست می‌آید. همانطور که مثال زیر نشان می‌دهد، این تساوی شرط لازم

برای مشتق‌پذیری است.

$$\text{مثال. تابع } f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \text{ با دستور } f(x, y) = \begin{cases} \frac{\sin(x^3 - y^3)}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

الف) نشان دهید f در نقطه $(0, 0)$ پیوسته بوده، مشتقات جزئی f در این نقطه وجود دارند.

ب) برای بردار یکه $\vec{u} = a\vec{i} + b\vec{j}$ ، مطلوب است محاسبه $D_u f(0, 0)$ و $\nabla f(0, 0) \cdot \vec{u}$. چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

الف) برای اثبات پیوستگی f در نقطه $(0, 0)$ ،

$$\begin{aligned} |f(x, y) - f(0, 0)| &= \left| \frac{\sin(x^3 - y^3)}{x^2 + y^2} \right| \leq \frac{|x^3 - y^3|}{x^2 + y^2} \\ &\leq \frac{|x^3|}{x^2 + y^2} + \frac{|y^3|}{x^2 + y^2} = \frac{x^2}{x^2 + y^2}|x| + \frac{y^2}{x^2 + y^2}|y| \\ &\leq |x| + |y| \leq \sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt{x^2 + y^2} = 2\sqrt{x^2 + y^2} \end{aligned}$$

اکنون وقتی $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ ، $\sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow 0$. در نتیجه با توجه به نامساوی فوق، $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} |f(x, y) - f(0, 0)| = 0$ و از آنجا

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y) = f(0, 0)$$

پس f در نقطه $(0, 0)$ پیوسته است. برای مشتقات جزئی f در این نقطه

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin(x^3)}{x^2}}{x} = 1 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(0, y) - f(0, 0)}{y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin(-y^3)}{y^2}}{y} = -1 \end{aligned}$$

ب) با توجه به متن سؤال، مشتق سویی تابع در نقطه $(0, 0)$ را مستقیماً حساب می‌کنیم.

$$D_u f(0, 0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(at, bt) - f(0, 0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin(t^3 a^3 - t^3 b^3)}{t^2 a^2 + t^2 b^2}}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin(t^3(a^3 - b^3))}{t^3} = a^3 - b^3$$

در فرمول فوق از این خاصیت استفاده کرده‌ایم که $a^2 + b^2 = 1$ نهایتاً با استفاده از قسمت (الف)،

$$\nabla f(0, 0) \cdot \vec{u} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)\vec{j} \right) \cdot (a\vec{i} + b\vec{j}) = (\vec{i} - \vec{j}) \cdot (a\vec{i} + b\vec{j}) = a - b$$

با توجه به اینکه تساوی $D_u f(0, 0) = \nabla f(0, 0) \cdot \vec{u}$ برای هر بردار یکه $\vec{u}$ لزوماً برقرار نیست پس f در نقطه

$(\circ, \circ)$ مشتق‌پذیر نیست.

تمرین‌های بخش مشتق‌پذیری.

۱. تابع دو متغیره f روی $D \subseteq \mathbb{R}^2$ همگن از درجه‌ی n ($n \in \mathbb{N}$) نامیده می‌شود اگر به ازای تمام $(x, y) \in D$ و تمام اعداد حقیقی و مثبت t داشته باشیم $f(tx, ty) = t^n f(x, y)$ (فرض بر آن است که $(tx, ty) \in D$). اگر این تابع مشتق‌پذیر باشد نشان دهید برای هر $(x, y) \in D$,

$$xf_x(x, y) + yf_y(x, y) = nf(x, y)$$

۲. نشان دهید اگر یک تابع دو متغیره f ، همگن درجه‌ی n باشد آنگاه توابع مشتقات جزئی آن، یعنی f_x و f_y ، همگن از درجه‌ی $n-1$ می‌باشند.

۳. تابع $f(x, y) = \begin{cases} x \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0 & x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$ مفروض است. (الف) نشان دهید f در $(0, 0)$ پیوسته است و مشتقات جزئی $\frac{\partial f}{\partial x}$ ، $\frac{\partial f}{\partial y}$ را در این نقطه به دست آورید. (ب) نشان دهید که f در $(0, 0)$ مشتق‌پذیر نیست.

۴. برای تابع f با ضابطه‌ی $f(x, y, z) = 2xy - 3xz + yz$ ، نمودار تابع یعنی

$$\Delta f = f(a + \Delta x, b + \Delta y, c + \Delta z) - f(a, b, c)$$

را در حالتی که $(a, b, c) = (2, 1, 4)$ ، $\Delta x = 3$ ، $\Delta y = -1$ و $\Delta z = 2$ محاسبه کنید.

۵. دیفرانسیل کل هر یک از توابع زیر را به دست آورید.

$$f(x, y, z) = \frac{x+y}{y+z} \quad (\text{ب}) \quad f(x, y, z) = x^2y - xy^3 + x^3y^2 \quad (\text{الف})$$

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1x_2 \dots x_n \quad (\text{ج})$$

۶. با استفاده از دیفرانسیل کل، مقدار تقریبی $\sqrt{(1/06)^2 + (1/97)^3}$ را به دست آورید.

۷. نشان دهید تابع $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ در مبدأ مشتق‌پذیر نیست.

۸. تابع f با ضابطه‌ی $f(x, y) = \begin{cases} x & |x| \leq |y| \\ -x & |x| > |y| \end{cases}$ مفروض است. نشان دهید که این تابع در مبدأ مختصات پیوسته است و مشتقات جزئی آن در این نقطه وجود دارند اما در مبدأ مشتق‌پذیر نیست.

$$9. \text{ نشان دهید که تابع } f \text{ با ضابطه‌ی } f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

مشتق‌پذیر است، هر چند که مشتقات جزئی آن در مبدأ پیوسته نیستند.

$$10. \text{ تابع } f(x, y) = \begin{cases} \frac{\sin^2(x+y)}{|x| + |y|} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

ولی در این نقطه مشتق‌پذیر نیست. نشان دهید f در مبدأ پیوسته است.

$$11. \text{ نشان دهید تابع } f \text{ با ضابطه‌ی } f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

مشتقات جزئی است ولی مشتق‌پذیر نیست. توضیح دهید چرا این موضوع تناقضی با قضایای مربوط به مشتق‌پذیری ندارد.

$$12. \text{ ثابت کنید تابع } f(x, y) = \sqrt[3]{x^3 + y^3} \text{ در مبدأ مشتق‌پذیر نیست.}$$

$$13. \text{ تابع } f(x, y) = \begin{cases} \frac{x(y-1)}{\sqrt{x^2 + (y-1)^2}} & (x, y) \neq (0, 1) \\ 0 & (x, y) = (0, 1) \end{cases}$$

الف) ثابت کنید f در نقطه‌ی $(0, 1)$ پیوسته است.

ب) مقادیر f_x و f_y را در نقطه‌ی $(0, 1)$ به دست آورید.

ج) آیا f در نقطه‌ی $(0, 1)$ مشتق‌پذیر است؟ (توضیح دهید)

$$14. \text{ فرض کنید } f(x, y) = 3xy^2 - 5x - 2xy \text{ و } \Delta x = 2 \text{ و } \Delta y = -1. \text{ مطلوب است نمو تابع } f \text{ در نقطه‌ی } (-1, 3) \text{ و دیفرانسیل کل تابع در همان نقطه.}$$

$$15. \text{ ثابت کنید تابع } f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^4 + y^4}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

همه جا مشتق‌پذیر است.

$$16. \text{ دیفرانسیل کل تابع } f \text{ با ضابطه‌ی } f(x, y) = \tan^{-1} \frac{x-y}{x+y} \text{ را محاسبه کنید.}$$

$$17. \text{ برای هر یک از توابع زیر مشتق سویی را در نقطه‌ی } P \text{ و در جهت بردار } \vec{a} \text{ پیدا کنید.}$$

$$\text{الف) } \vec{a} = \vec{i} + 2\vec{j}, P = (-1, 4), f(x, y) = x^3 - 2xy + y^2 + 8$$

$$\text{ب) } \vec{a} = -\vec{i} + \vec{j}, P = (1, 3), f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$$

$$\text{ج) } \vec{a} = -10\vec{i} + 10\vec{j} - 5\vec{k}, P = (-1, 1, 2), f(x, y, z) = \frac{z}{xy}$$

۱۸. اگر $f(x, y, z) = \ln(x + y + z)$ ، مشتق سویی f را در نقطه‌ی $P = (2, 3, -4)$ و در سویی که با جهت مثبت محورهای مختصات زوایای حاده مساوی می‌سازد پیدا کنید.

۱۹. اگر $f(x, y) = xy$ ، بردار یکه‌ی $\vec{u}$ را طوری بیابید که $D_{\vec{u}}f(3, 4) = 0$.

۲۰. تابع f با ضابطه‌ی $f(x, y) = \begin{cases} x \sin(\frac{y}{x^2 + y^2}) & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ کلیه‌ی سوهایی را به دست آورید که f در آن‌ها در مبدأ مختصات دارای مشتق سویی باشد.

۲۱. تابع $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x \sin(xy)}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ مفروض است.

الف) مشتق سویی این تابع را در نقطه‌ی $(0, 0)$ و در سوی بردار $\vec{v} = \vec{i} + \vec{j}$ تعیین کنید.

ب) مطوب است تعیین $D_{\vec{v}}f(0, 0) \cdot \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$. چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

۲۲. مشتق سویی توابع زیر را در نقاط داده شده و درجهت‌های مشخص شده تعیین نمایید.

الف) $f(x, y, z) = \cos(xy) + \sin(yz)$ ، $P_0 = (0, \pi, 1)$ ، $\vec{v} = \vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$

ب) $g(x, y, z) = ze^{xy}$ ، $P_0 = (1, 0, 1)$ ، $\vec{v} = \vec{j} - 2\vec{k}$

۲۳. تابع $f(x, y) = x^2 - 2xy^2$ و نقطه‌ی $P_0 = (1, -2)$ مفروضند.

الف) از نقطه‌ی P_0 در چه جهتی حرکت نماییم تا مقدار تابع با بیشترین سرعت افزایش یابد؟

ب) در چه جهتی حرکت کنیم تا مقدار تابع با بیشترین سرعت کاهش یابد؟

۲۴. رویه‌ی S به معادله‌ی $z = 4 - x^2 - y^2$ و نقطه‌ی $(1, 1, 2)$ بر آن مفروض است. از این نقطه در چه

جهتی بر روی رویه حرکت کنیم تا ارتفاع با بیشترین سرعت کاهش یابد. از این نقطه در چه جهتی بر

روی رویه حرکت کنیم تا ارتفاع تغییر ننماید.

یادآوری. قبلاً در مبحث توابع یک متغیره دیدیم که چگونه می‌توان مشتق تابع مرکب را محاسبه کرد. اگر $y = f(x)$ تابعی مشتق‌پذیر بر حسب x و $x = x(t)$ تابعی مشتق‌پذیر بر حسب t باشد، آنگاه $y = g(t) = f(x(t))$ نیز مشتق‌پذیر است و داریم

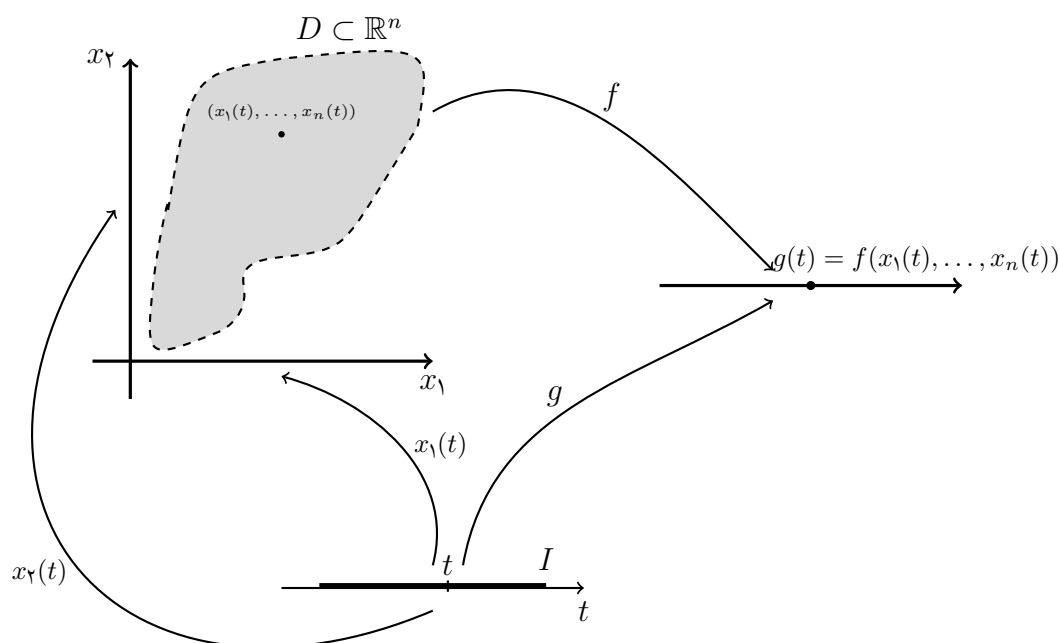
$$\frac{dy}{dt} = g'(t) = f'(x(t))x'(t).$$

در این بخش می‌خواهیم بحث مشتق تابع مرکب را به توابع چندمتغیره تعمیم دهیم. ابتدا ساده‌ترین حالت ترکیب توابع را در این حالت در نظر می‌گیریم.

فرض کنیم $D \subset \mathbb{R}^n$ و $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ تابعی n متغیره تعریف شده بر D باشد. فرض کنیم $I \subset \mathbb{R}$ و توابع $x_1(t), \dots, x_n(t)$ بر دامنه تعریف مشترک I تعریف شده، برای هر $t \in I$

$$(x_1(t), \dots, x_n(t)) \in D$$

در این صورت می‌توانیم تابعی چون $g: I \rightarrow \mathbb{R}$ با ضابطه $g(t) = f(x_1(t), \dots, x_n(t))$ تعریف کنیم.



فرض توابع $x_1(t), \dots, x_n(t)$ در نقطه‌ای درونی چون $t_0 \in I$ و تابع f نیز در نقطه $(x_1(t_0), \dots, x_n(t_0)) \in D$ مشتق‌پذیر باشند. برای سهولت نقطه اخیر را با نماد p نشان می‌دهیم. برای مقادیر کوچک Δt ، قرار می‌دهیم

$\Delta x_i := x_i(t_0 + \Delta t) - x_i(t_0)$ و $\Delta x := (\Delta x_1, \dots, \Delta x_n)$. با توجه به مشتق‌پذیری f در p_0 ، خواهیم داشت

$$f(p_0 + \Delta x) - f(p_0) \approx \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(p_0) \Delta x_i$$

در نتیجه

$$\begin{aligned} \frac{g(t_0 + \Delta t) - g(t_0)}{\Delta t} &= \frac{f(x_1(t_0 + \Delta t), \dots, x_n(t_0 + \Delta t)) - f(x_1(t_0), \dots, x_n(t_0))}{\Delta t} \\ &= \frac{f(x_1(t_0) + \Delta x_1, \dots, x_n(t_0) + \Delta x_n) - f(x_1(t_0), \dots, x_n(t_0))}{\Delta t} \\ &= \frac{f(p_0 + \Delta x) - f(p_0)}{\Delta t} \\ &\approx \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(p_0) \frac{\Delta x_i}{\Delta t} \end{aligned}$$

اکنون وقتی $\Delta t \rightarrow 0$ ، $(\Delta x_1, \dots, \Delta x_n) \rightarrow (0, \dots, 0)$ و در نتیجه تقریب فوق به سمت تساوی میل می‌کند. در عین حال $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x_i}{\Delta t} = x'_i(t_0)$. به این ترتیب قضیه زیر را خواهیم داشت.

قضیه

اگر توابع $x_1(t), \dots, x_n(t)$ در نقطه $t_0 \in I$ و تابع $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ در نقطه

$$p_0 = (x_1(t_0), \dots, x_n(t_0)) \in D$$

مشتق‌پذیر باشند آنگاه تابع مرکب $g(t) = f(x_1(t), \dots, x_n(t))$ در نقطه t_0 مشتق‌پذیر بوده، داریم

$$g'(t_0) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{g(t_0 + \Delta t) - g(t_0)}{\Delta t} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(p_0) x'_i(t_0)$$

رابطه فوق تحت نام قاعده زنجیری نامیده می‌شود. برای به خاطر سپردن این قاعده می‌توانیم از نماد لایبنیتس استفاده کنیم.

$$\frac{dg}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{dx_1}{dt} + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \frac{dx_n}{dt}.$$

البته توجه می‌کنیم که در فرمول بالا مشتق توابع x_i در نقطه t_0 و مشتقات جزئی تابع f در نقطه p_0 محاسبه می‌شوند.

مثال. فرض کنیم $f(x, y) = \sinh(xy)$ ، $x(t) = \ln t$ و $y(t) = e^t$. اگر $z(t) := f(x(t), y(t))$ ، در این صورت مقدار $z'(t)$ را بدست آورید.

داریم

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y \cosh(xy), \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x \cosh(xy)$$

در نتیجه، طبق قاعده زنجیری خواهیم داشت

$$z'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t)) \frac{dx}{dt}(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t)) \frac{dy}{dt}(t) = \ln t e^t \cosh(\ln t e^t) \frac{1}{t} + \ln t \cosh(\ln t e^t) e^t.$$

باید توجه داشت کاربرد اصلی قاعده زنجیری برای توابع چند متغیره، حل مسائلی مانند فوق نیست. چرا که در چنین مواردی می‌توانیم ضابطه تابع مرکب را مستقیماً محاسبه کرده، مشتق را به دست آوریم. کاربردهای اصلی این قاعده را در مباحث بعدی (مانند بحث صفحه مماس بر یک رویه) مشاهده خواهیم کرد.

حالت کلی قاعده زنجیری.

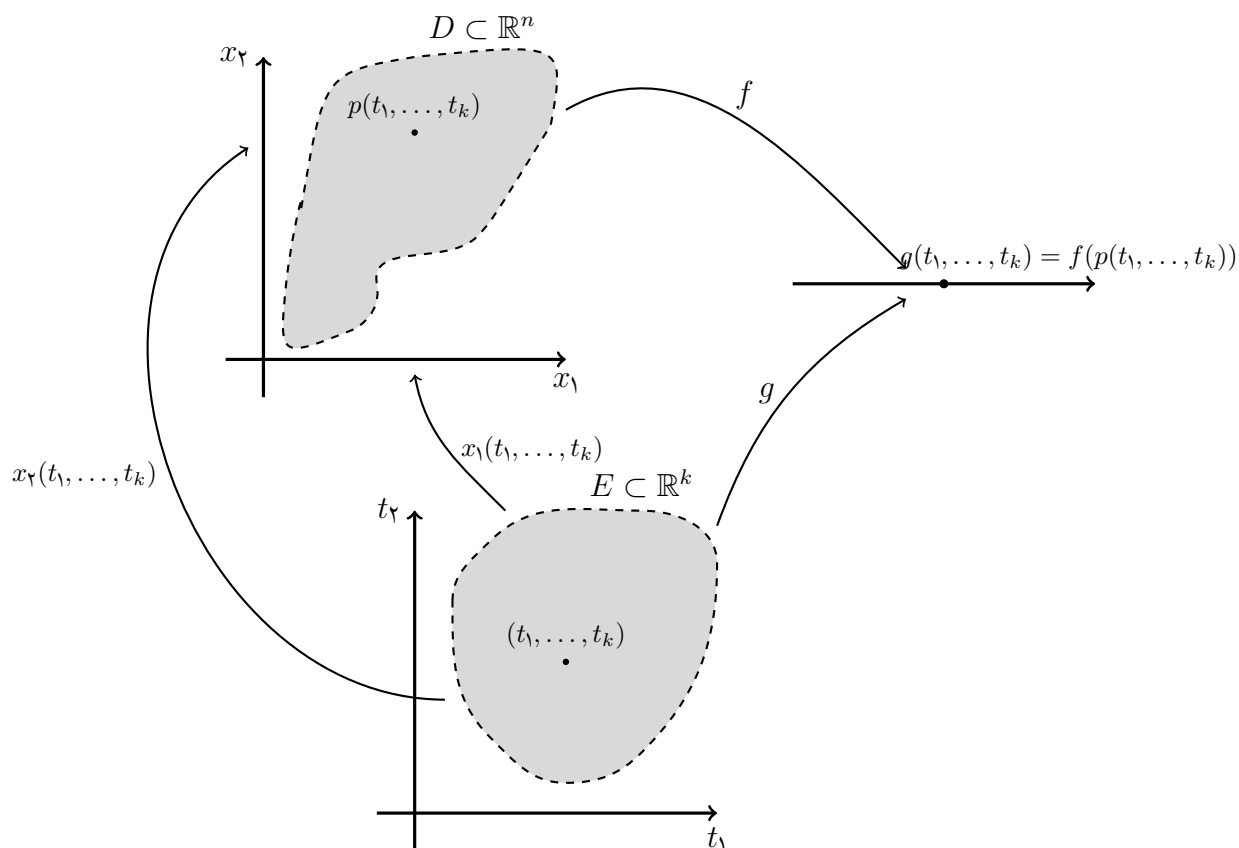
فرض کنیم $D \subset \mathbb{R}^n$ و $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ تابعی n متغیره باشد. همچنین فرض کنیم $E \subset \mathbb{R}^k$ و توابع $x_1(t_1, \dots, t_k), \dots, x_n(t_1, \dots, t_k)$ بر E تعریف شده برای هر $(t_1, \dots, t_k) \in E$

$$(x_1(t_1, \dots, t_k), \dots, x_n(t_1, \dots, t_k)) \in D$$

در این صورت تابع مرکب $g : E \rightarrow \mathbb{R}$ با دستور

$$g(t_1, \dots, t_k) = f(x_1(t_1, \dots, t_k), \dots, x_n(t_1, \dots, t_k))$$

قابل تعریف خواهد بود.



قضیه

تحت شرایط بیان شده در بالا، اگر f بر D و هر یک از توابع $x_i = x_i(t_1, \dots, t_k)$ ، $i = 1, \dots, n$ مشتق‌پذیر باشند آنگاه تابع مرکب g بر E مشتق‌پذیر است و

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial t_1} &= \frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial t_1} + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \frac{\partial x_n}{\partial t_1} \\ \frac{\partial g}{\partial t_2} &= \frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial t_2} + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \frac{\partial x_n}{\partial t_2} \\ &\vdots \\ \frac{\partial g}{\partial t_k} &= \frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial t_k} + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \frac{\partial x_n}{\partial t_k} \end{aligned}$$

مثال. فرض کنیم $f(x, y, z) = (x + y)e^z$. همچنین $x(u, v) = uv$ ، $y(u, v) = 2u$ و $z(u, v) = \ln(u + v)$. اگر $g(u, v) := f(x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ مطلوب است محاسبه $\frac{\partial g}{\partial u}$. با استفاده از قاعده فوق،

$$\frac{\partial g}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial u} = e^{\ln(u+v)} v + 2e^{\ln(u+v)} + (uv + 2u)e^{\ln(u+v)} \frac{1}{u+v}.$$

مثال. فرض کنید $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ تابعی مشتق‌پذیر باشد و $z = z(x, y) = xf(\frac{x}{y})$. نشان دهید z در معادله زیر صدق می‌کند.

$$x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = z.$$

اگر تابع دو متغیره $u(x, y)$ را باضابطه $u(x, y) = \frac{x}{y}$ در نظر بگیریم آنگاه $z(x, y) = xf(u(x, y))$ در نتیجه

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= f\left(\frac{x}{y}\right) + \frac{\partial}{\partial x}(f(u(x, y))) \\ &= f\left(\frac{x}{y}\right) + xf'(u(x, y)) \frac{\partial u}{\partial x} = f\left(\frac{x}{y}\right) + \frac{x}{y} f'\left(\frac{x}{y}\right) \end{aligned}$$

به همین ترتیب،

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x \frac{-x}{y^2} f'\left(\frac{x}{y}\right).$$

بنابراین

$$x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = xf\left(\frac{x}{y}\right) + \frac{x^2}{y} f'\left(\frac{x}{y}\right) - \frac{x^2}{y} f'\left(\frac{x}{y}\right) = xf\left(\frac{x}{y}\right) = z.$$

تمرین: فرض کنید f تابعی مشتق‌پذیر بوده، $z = z(x, y) = f(bx - ay)$. نشان دهید که تابع z در معادله $a \frac{\partial z}{\partial x} + b \frac{\partial z}{\partial y} = 0$ صدق می‌کند.

مثال. ثابت کنید که تابع $f(x, t) = \int_0^{\frac{x}{\sqrt{3t}}} e^{-\sigma^2} d\sigma$ در معادله دیفرانسیل $3 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial f}{\partial t} = 0$ صدق می‌کند. قرار می‌دهیم $u(x, t) = \frac{x}{\sqrt{3t}}$ و $g(u) = \int_0^u e^{-\sigma^2} d\sigma$. در این صورت $f(x, t) = g(u(x, t))$. باتوجه به قضیه اساسی حساب داریم $g'(u) = e^{-u^2}$. طبق قاعده زنجیری داریم

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} g'(u(x, t)) = \frac{1}{\sqrt{3t}} e^{-\frac{x^2}{3t}}.$$

بنابراین

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{-x}{\sqrt{3t} \sqrt{3t}} e^{-\frac{x^2}{3t}}.$$

مجدداً با استفاده از قاعده زنجیری داریم

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial t} g'(u(x, t)) = \frac{-x}{4\sqrt{3t^3}} e^{-\frac{x^2}{3t}}.$$

بنابراین

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial f}{\partial t} = 0.$$

مثال. فرض کنید $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ تابعی مشتق‌پذیر صادق در معادله $\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} = 0$ باشد. اگر تابع $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ با دستور $g(x, y) = f(x + y, x - y)$ تعریف شده باشد نشان دهید $\frac{\partial g}{\partial y} = 0$.
اگر قرار دهیم $u(x, y) = x + y$ و $v(x, y) = x - y$ آنگاه طبق تعریف تابع g ، $g(x, y) = f(u(x, y), v(x, y))$. در نتیجه، با استفاده از قاعده زنجیری

$$\frac{\partial g}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u} \times 1 + \frac{\partial f}{\partial v} \times (-1) = \frac{\partial f}{\partial u} - \frac{\partial f}{\partial v}$$

اما بنا به فرض، اگر متغیرهای مستقل f را به جای x و y ، متغیرهای u و v در نظر بگیریم آنگاه $\frac{\partial f}{\partial u} - \frac{\partial f}{\partial v} = 0$. در نتیجه $\frac{\partial g}{\partial y} = 0$.

مثال. فرض کنید $\phi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ تابعی مشتق‌پذیر باشد. اگر تابع $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ با ضابطه

$$f(x, y, z) = \phi(x - y, y - z)$$

تعریف شود نشان دهید f در معادله دیفرانسیل $\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z} = 0$ صدق می‌کند.

اگر قرار دهیم $u(x, y, z) := x - y$ و $v(x, y, z) := y - z$ آنگاه $f(x, y, z) = \phi(u(x, y, z), v(x, y, z))$. اکنون به کمک قاعده زنجیری به محاسبه مشتقات جزئی تابع f می‌پردازیم.

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial \phi}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} = \left(\frac{\partial \phi}{\partial u} \times 1 \right) + \left(\frac{\partial \phi}{\partial v} \times 0 \right) \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial \phi}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial \phi}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} = \left(\frac{\partial \phi}{\partial u} \times (-1) \right) + \left(\frac{\partial \phi}{\partial v} \times 1 \right) \\ \frac{\partial f}{\partial z} &= \frac{\partial \phi}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial \phi}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial z} = \left(\frac{\partial \phi}{\partial u} \times 0 \right) + \left(\frac{\partial \phi}{\partial v} \times (-1) \right) \end{aligned}$$

به این ترتیب با جمع طرفین تساوی‌های فوق، نتیجه به دست می‌آید.

تابع ضمنی. فرض کنیم f تابعی بر حسب n متغیر مستقل $x_1, \dots, x_n$ باشد. در این صورت معادله‌ای چون $f(x_1, \dots, x_n) = c$ ایجاد نوعی بستگی بین متغیرها می‌کند و در اثر این وابستگی، حداقل مقدار یکی

از متغیرها وابسته به سایر متغیرها می‌شود (یا در واقع یکی از متغیرها تابعی از سایر متغیرها خواهد بود). فرض کنیم معادله $f(x_1, \dots, x_n) = c$ باعث شود، به طور مثال، متغیر x_n به عنوان تابعی از متغیرهای $x_1, \dots, x_{n-1}$ به صورت $x_n = g(x_1, \dots, x_{n-1})$ حاصل شود. در این صورت تابع $x_n = g(x_1, \dots, x_{n-1})$ را تابع ضمنی متناظر با معادله فوق می‌نامیم.

تحت شرایطی می‌توانیم مشتقات جزئی تابع g را بدون داشتن ضابطه این تابع به دست آوریم. توجه می‌کنیم که بنا به فرض برای هر $(x_1, \dots, x_{n-1})$ در دامنه‌ای مناسب از فضای $\mathbb{R}^{n-1}$

$$f(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n) = f(x_1, \dots, x_{n-1}, g(x_1, \dots, x_{n-1})) = c$$

اکنون با فرض مشتق‌پذیری توابع f و g ، با مشتق‌گیری از طرفین این رابطه نسبت به متغیر x_i ، و با استفاده از قاعده زنجیری، خواهیم داشت

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} + \frac{\partial f}{\partial x_n} \frac{\partial x_n}{\partial x_i} = 0.$$

در نتیجه، اگر $\frac{\partial f}{\partial x_n} \neq 0$

$$\frac{\partial x_n}{\partial x_i} = \frac{\partial g}{\partial x_i} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x_i}}{\frac{\partial f}{\partial x_n}}.$$

برای حالت خاص $n = 2$ ، اگر تحت رابطه $f(x, y) = c$ متغیر y تابعی مشتق‌پذیر از x باشد، آنگاه

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}}.$$

مثال. فرض کنید z به عنوان تابعی مشتق‌پذیر از x و y به طور ضمنی توسط معادله $\ln(x^2 + y^2 + z^2) = z$ داده شده باشد. توابع $\frac{\partial z}{\partial x}$ و $\frac{\partial z}{\partial y}$ را تعیین کنید.

قرار می‌دهیم $f(x, y, z) = \ln(x^2 + y^2 + z^2) - z$. در این صورت طبق فرض z به عنوان تابعی مشتق‌پذیر بر حسب x و y توسط معادله $f(x, y, z) = 0$ معرفی می‌شود. در نتیجه

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial z}} = -\frac{\frac{-2x}{x^2 + y^2 + z^2}}{\frac{2z}{x^2 + y^2 + z^2} - 1} = \frac{2x}{x^2 + y^2 + z^2 - 2z},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-\frac{\partial f}{\partial y}}{\frac{\partial f}{\partial z}} = \frac{\frac{-2y}{x^2+y^2+z^2}}{\frac{2z}{x^2+y^2+z^2}-1} = \frac{2y}{x^2+y^2+z^2-2z}.$$

مثال. فرض کنید f تابعی مشتق‌پذیر بوده و z به عنوان تابعی مشتق‌پذیر از x و y به‌طور ضمنی توسط معادله $z = f(xyz)$ داده شده باشد. نشان دهید z در معادله زیر صدق می‌کند

$$x \frac{\partial z}{\partial x} - y \frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

اگر تابع سه متغیره g را با ضابطه $g(x, y, z) = z - f(xyz)$ تعریف کنیم آنگاه، طبق فرض z به عنوان تابعی مشتق‌پذیر بر حسب x و y توسط معادله $g(x, y, z) = 0$ داده شده است. در نتیجه طبق بحث فوق،

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-\frac{\partial g}{\partial x}}{\frac{\partial g}{\partial z}} = \frac{yzf'(xyz)}{1 - xyf'(xyz)},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-\frac{\partial g}{\partial y}}{\frac{\partial g}{\partial z}} = \frac{xzf'(xyz)}{1 - xyf'(xyz)}.$$

لذا واضح است که $x \frac{\partial z}{\partial x} = y \frac{\partial z}{\partial y}$.

تمرین‌های بخش قاعده زنجیری و مشتق تابع ضمنی.

۱. اگر توابع f و g حداقل دو مرتبه مشتق‌پذیر باشند و تابع u به صورت $u(x, y) = \frac{1}{x}(f(x+y) + g(x-y))$ تعریف شده باشد، نشان دهید

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(x^2 \frac{\partial u}{\partial x} \right) = x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

۲. اگر تابع z ، به عنوان تابعی از x و y ، به‌طور ضمنی توسط رابطه‌ی $\sin(x+y) + \sin(y+z) = 1$ تعریف شده باشد، عبارت $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ را محاسبه کنید.

۳. فرض کنید $u = xyz$. نشان دهید اگر u و z توابعی از متغیرهای مستقل x و y در نظر گرفته شوند، آنگاه

$$\frac{\partial u}{\partial x} = xy\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) + yz$$

حال آن که اگر x, y و z متغیرهای مستقل در نظر گرفته شوند آنگاه

$$\frac{\partial u}{\partial x} = yz$$

۴. فرض کنید f تابعی مشتق‌پذیر است و z به عنوان تابعی بر حسب x و y به صورت $z = f\left(\frac{x+y}{y}\right)$ تعریف شده باشد. ثابت کنید

$$x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

۵. اگر f تابعی مشتق‌پذیر باشد و $z = \frac{y}{f(x^2 + y^2)}$ ، ثابت کنید

$$-\frac{1}{x} \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{y} \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z}{y^2}$$

۶. فرض کنید f تابعی سه متغیره باشد به طوری که $f(x - y + z, x + y + z, x - y - z) = 3x - y + z$.
(الف) مطلوب است تعیین $f(x, y, z)$.

(ب) اگر $g(x, y, z) = f(x^2, y^2, z^2)$ ، مطلوب است تعیین رویه‌های تراز g .

(ج) با مفروضات قسمت (ب) ثابت کنید $\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial z}\right)^2 = 4g(x, y, z)$.

۷. فرض کنید $u(x, y) = e^y \cos x$ ، $x = 2t$ ، $y = t^2$ و $g(t) = u(x(t), y(t))$. تابع $g''(t)$ را با استفاده از قاعده‌ی زنجیره‌ای به دست آورید.

۸. فرض کنید $z = f(x, y)$ تابعی مشتق‌پذیر بر حسب x و y باشد، $x = x(r, \theta) = r \cos \theta$ و $y = y(r, \theta) = r \sin \theta$. ثابت کنید $\left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2 = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2$.
مطلوب است محاسبه‌ی $\frac{\partial z}{\partial x}$ و $\frac{\partial z}{\partial y}$ بر حسب $\frac{\partial z}{\partial r}$ و $\frac{\partial z}{\partial \theta}$.

۹. با فرض این که f و g توابعی مشتق‌پذیر باشند، ثابت کنید تابع $w(x, t) = f(x + at) + g(x - at)$ در معادله‌ی موج، یعنی $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = a^2 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$ ، صدق می‌کند.

۱۰. فرض کنید f تابعی با مشتقات مرتبه‌ی دوم پیوسته باشد. با فرض این که $z = f(x, y)$ در معادله‌ی $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 1$ صدق نماید، نشان دهید $w = w(x, y) = f(x + y, x - y)$ در معادله‌ی $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 1$ صدق می‌کند.

۱۱. با فرض این که f تابعی مشتق‌پذیر باشد، نشان دهید $z = xy + f(x^2 + y^2)$ در معادله‌ی $y \frac{\partial z}{\partial x} - x \frac{\partial z}{\partial y} = x^2 - y^2$ صدق می‌کند.

۱۲. فرض کنید f تابعی مشتق‌پذیر است و $z = f(x, y)$. اگر $x = u \cos \alpha - v \sin \alpha$ و $y = u \sin \alpha + v \cos \alpha$ (ثابت α)، نشان دهید $(\frac{\partial z}{\partial x})^2 + (\frac{\partial z}{\partial y})^2 = (\frac{\partial z}{\partial u})^2 + (\frac{\partial z}{\partial v})^2$.

۱۳. ثابت کنید تابع $f(x, t) = \int_0^{\frac{x}{\sqrt{kt}}} e^{-\sigma^2} d\sigma$ در معادله‌ی دیفرانسیل $k \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial f}{\partial t} = 0$ صدق می‌کند (ثابت k).

۱۴. با فرض این که f تابعی مشتق‌پذیر باشد، نشان دهید

(الف) $z = f(bx - ay)$ در معادله‌ی $a \frac{\partial z}{\partial x} - b \frac{\partial z}{\partial y} = 0$ صدق می‌کند.

(ب) $w = f(\frac{xy}{x^2 + y^2})$ در معادله‌ی $x \frac{\partial w}{\partial x} + y \frac{\partial w}{\partial y} = 0$ صدق می‌کند.

(ج) $z = f(\frac{x}{y})$ در معادله‌ی $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = 0$ صدق می‌کند.

(د) $z = xf(\frac{x}{y})$ در معادله‌ی $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = z$ صدق می‌کند.

۱۵. فرض کنید توابع f و g دوبار مشتق‌پذیر باشند. اگر $u = u(x, y) = xf(x + y) + yg(x + y)$ ، نشان دهید

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

۱۶. فرض کنید معادله‌ی $xz^2 = \ln(y^2 + z^2)$ ، تابع z را به عنوان تابعی مشتق‌پذیر بر حسب x و y بیان می‌کند (تابع ضمنی). مطلوب است تعیین $\frac{\partial z}{\partial x}$ و $\frac{\partial z}{\partial y}$ در نقطه‌ی $(0, 0, 1)$.

۱۷. فرض کنید تابع $z = z(x, y)$ به صورت ضمنی توسط معادله‌ی $1 = f(x + \frac{z}{y}, y + \frac{z}{x})$ داده شده است. با فرض این که f مشتق‌پذیر باشد، نشان دهید $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = 2 - xy$.

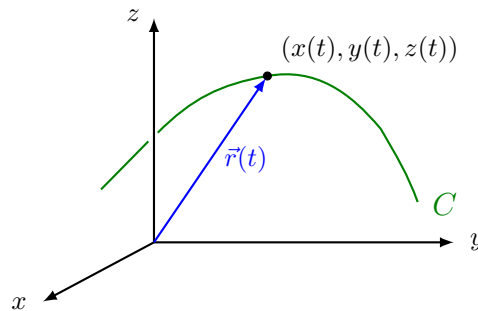
۱۸. اگر f یک تابع دو متغیره با مشتقات جزئی پیوسته باشد و

۱۹. فرض کنید f تابعی دو متغیره و مشتق‌پذیر بوده و z به عنوان تابعی مشتق‌پذیر از x و y به طور ضمنی توسط معادله $0 = f(x + \frac{z}{y}, y + \frac{z}{x})$ داده شده است. نشان دهید رابطه زیر برقرار است

$$x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = z - xy.$$

خم‌های پارامتری، خط عمود و صفحه مماس بر رویه

هدف ما در این بخش بررسی مفهوم هندسی صفحه مماس بر یک رویه است. از آنجا که ابزار اصلی در این راستا مفهوم خط مماس بر یک منحنی خواهد بود، لذا ابتدا بحث منحنی‌های پارامتری در فضا و خطوط مماس بر این منحنی‌ها را مطرح کرده، سپس به کمک آنها صفحه مماس بر یک رویه را تعریف خواهیم کرد. فرض کنیم $I \subseteq \mathbb{R}$ بازه‌ای از اعداد حقیقی و $x = x(t)$ ، $y = y(t)$ ، $z = z(t)$ توابعی یک متغیره با دامنه تعریف مشترک I باشند. در این صورت مجموعه نقاط $\{(x(t), y(t), z(t)) : t \in I\}$ زیرمجموعه‌ای از فضای $\mathbb{R}^3$ را مشخص می‌کند که در بسیاری از حالات به صورت یک خم (منحنی) در فضا مشاهده می‌شود. این خم را خم به معادلات پارامتری $x = x(t)$ ، $y = y(t)$ ، $z = z(t)$ یا خم به معادله برداری $t \in I$ ، $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$ می‌نامیم. خم‌ها را معمولاً با نماد C نمایش می‌دهیم.

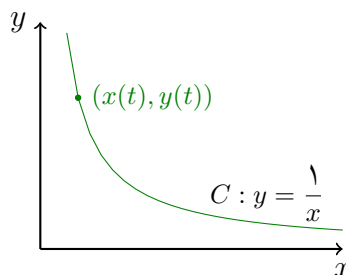


مثال. هر یک از خمهای پارامتری زیر را در صفحه مشخص کنید.

الف) $C : \begin{cases} x = e^t \\ y = e^{-t} \end{cases}, t \in \mathbb{R}$ جواب. توجه می‌کنیم که برای هر $t \in \mathbb{R}$ ، $x(t)$ و $y(t)$ مثبت هستند. در عین حال

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad x(t)y(t) = e^t e^{-t} = 1.$$

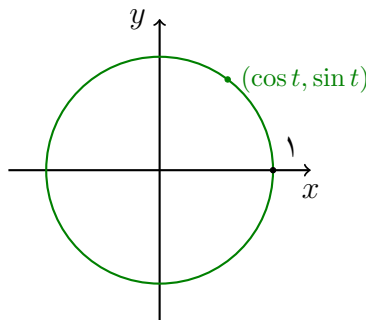
بنابراین خم فوق قسمتی از منحنی $y = \frac{1}{x}$ در ناحیه $x > 0$ است.



ب) $C : \begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases}, t \in [0, 2\pi]$ با استفاده از روابط مثلثاتی،

$$\forall t \in [0, 2\pi] \quad x^2(t) + y^2(t) = (\cos t)^2 + (\sin t)^2 = 1.$$

بنابراین نقاط خم فوق متعلق به دایره $x^2 + y^2 = 1$ در صفحه xoy است. با تغییر پارامتر t در بازه $[0, 2\pi]$ ، اگر مقادیر $x(t)$ و $y(t)$ و نقاط متناظر یعنی $(x(t), y(t))$ در صفحه را مورد توجه قرار دهیم مشاهده می‌شود C تمام دایره فوق است.

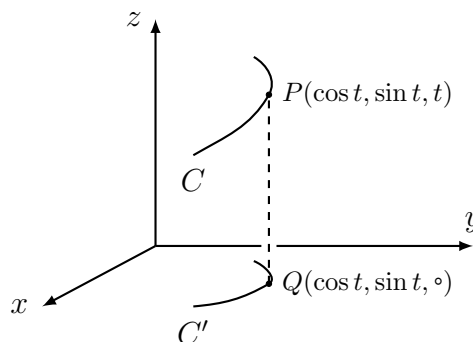


مثال. خم C به معادلات پارامتری $x = \cos t, y = \sin t, z = t, t \in \mathbb{R}$ مفروض است.

الف) اگر C' تصویر این خم بر صفحه xoy باشد، آنگاه C' را در صفحه مشخص کنید.

ب) خم C را در فضا توصیف کنید.

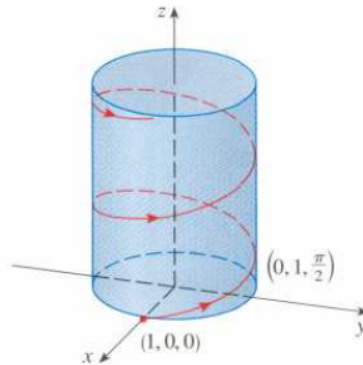
جواب. الف): فرض کنیم $P(\cos t, \sin t, t)$ نقطه‌ای دلخواه متناظر با پارامتر t روی خم C و Q تصویر این نقطه بر صفحه xoy باشد. در این صورت مختصات Q عبارت است از $(\cos t, \sin t, 0)$.



در نتیجه C' دارای معادلات پارامتری $\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$ در صفحه xoy است. بنابر مثال قبل، این منحنی همان دایره $x^2 + y^2 = 1$ در صفحه است.

ب): باتوجه به قسمت الف)، هر نقطه از منحنی C بر رویه استوانه‌ای استوار شده بر دایره $x^2 + y^2 = 1$ در

صفحه xoy و با محور استوانه به موازات محور z خواهد بود. از آنجا که تغییرات z بر حسب پارامتر t خطی است، با افزایش t متغیر z نیز متناسب با t افزایش یافته، بنابراین منحنی C در فضا یک مارپیچ یکنواخت



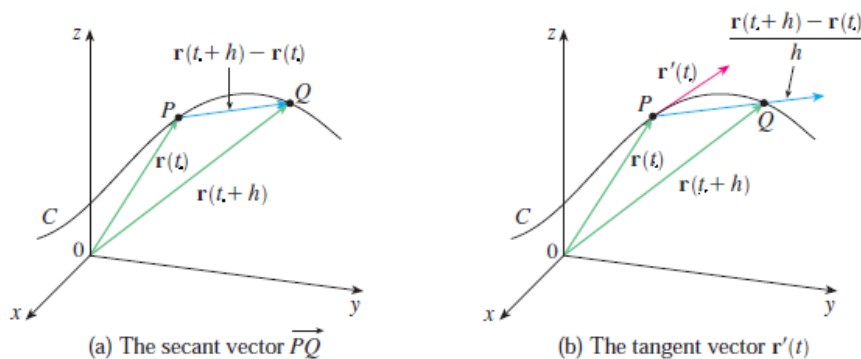
خواهد بود.

خط مماس بر خم‌های پارامتری

فرض کنیم C خمی به معادله برداری $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$ ، $t \in I$ و توابع $x(t)$ ، $y(t)$ و $z(t)$ بر I مشتق‌پذیر باشند. همچنین فرض کنیم $P, Q \in C$ نقاط نظیر $t_0, t_0 + h \in I$ باشند. در این صورت بردار $\frac{1}{h}(\vec{r}(t_0 + h) - \vec{r}(t_0))$ یک بردار هادی برای خط گذرنده از دو نقطه P و Q خواهد بود. اکنون اگر $h \rightarrow 0$ ، آنگاه نقطه Q بر روی خم C به سمت نقطه P و در نتیجه خط گذرنده از این دو نقطه به خط مماس بر خم C در نقطه P میل می‌کند. از طرفی

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h}(\vec{r}(t_0 + h) - \vec{r}(t_0)) = \begin{pmatrix} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x(t_0 + h) - x(t_0))}{h} \\ \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(y(t_0 + h) - y(t_0))}{h} \\ \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(z(t_0 + h) - z(t_0))}{h} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'(t_0) \\ y'(t_0) \\ z'(t_0) \end{pmatrix}$$

بردار اخیر را با نماد $\vec{r}'(t_0)$ نمایش می‌دهیم. بنابراین بردار $\vec{r}'(t_0) = x'(t_0)\vec{i} + y'(t_0)\vec{j} + z'(t_0)\vec{k}$ یک بردار هادی برای خط مماس بر C در نقطه P خواهد بود. بردار $\vec{r}'(t_0)$ را بردار سرعت یا بردار مماس بر C در نقطه P می‌نامیم.



مثال. خم C به معادله برداری $\vec{r}(t) = \cosh t \vec{i} + \sinh t \vec{j} + (t+1)\vec{k}$ ، $t \in \mathbb{R}$ مفروض است. معادله خط مماس بر C در نقطه $P(1, 0, 1)$ (نظیر $t=0$) را تعیین کنید. جواب. فرض کنیم خط مماس بر خم C در نقطه P باشد. با توجه به توضیحات قبل $\vec{r}'(0)$ یک بردار هادی برای این خط است. پس

$$\vec{r}'(t) = \sinh t \vec{i} + \cosh t \vec{j} + \vec{k} \implies \vec{r}'(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \parallel L, \\ P(1, 0, 1) \in L$$

در نتیجه معادلات پارامتری خط L عبارت است از:

$$s \in \mathbb{R}, L: \begin{cases} x = 1 \\ y = s \\ z = s + 1 \end{cases}$$

مثال. خم C به معادله برداری $\vec{r}(t) = (\cos t)\vec{i} + (\sin t)\vec{j} + (\cos^2 t)\vec{k}$ ، $t \in \mathbb{R}$ مفروض است.

الف) نشان دهید C بر یک رویه درجه ۲ در فضا قرار دارد.

ب) نقطه یا نقاطی از خم C را تعیین کنید که خط مماس بر C در این نقطه یا نقاط تمامی بر رویه فوق قرار گیرند.

جواب. الف): با توجه به معادله برداری خم C داریم $x(t) = \cos t$ ، $y(t) = \sin t$ و $z(t) = \cos^2 t$. در نتیجه

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad x(t)^2 - y(t)^2 = (\cos t)^2 - (\sin t)^2 = \cos^2 t = z(t).$$

پس هر نقطه $(x(t), y(t), z(t))$ از خم C در معادله رویه درجه دو (زین اسبی) $S: x^2 - y^2 = z$ صدق می‌کند.

یعنی خم فوق کاملاً بر رویه S قرار دارد.

(ب): فرض کنیم P نقطه‌ای روی خم C نظیر پارامتر t بوده و L_p خط مماس بر خم C در این نقطه باشد. بنابراین

$$\vec{r}'(t) = (-\sin t)\vec{i} + (\cos t)\vec{j} + (-2\sin 2t)\vec{k} \parallel L_p,$$

$$P(\cos t, \sin t, \cos 2t) \in L_p$$

در نتیجه معادلات پارامتری خط L_p عبارت است از:

$$L_p : \begin{cases} x = (-\sin t)s + \cos t \\ y = (\cos t)s + \sin t \\ z = (-2\sin 2t)s + \cos 2t \end{cases}, \quad s \in \mathbb{R}$$

می‌دانیم خط L_p بر رویه S قرار دارد اگر و تنها اگر معادلات پارامتری آن در معادله رویه صدق کند. به این ترتیب

$$L_p \subset S \iff \forall s \in \mathbb{R}; \quad (x(s), y(s), z(s)) \in S \iff x(s)^2 - y(s)^2 = z(s)$$

$$\iff \forall s \in \mathbb{R}; \quad ((-\sin t)s + \cos t)^2 - ((\cos t)s + \sin t)^2 = (-2\sin 2t)s + \cos 2t$$

$$\iff \forall s \in \mathbb{R}; \quad ((\sin t)^2 - (\cos t)^2)s^2 + \underbrace{(-4\sin t \cos t + 2\sin 2t)}_{\circ} s$$

$$+ \underbrace{((\cos t)^2 - (\sin t)^2 - \cos 2t)}_{\circ} = \circ$$

$$\iff \forall s \in \mathbb{R}; \quad ((\sin t)^2 - (\cos t)^2)s^2 = \circ$$

$$\iff (\sin t)^2 - (\cos t)^2 = \circ \iff \tan^2 t = 1 \iff t = k\pi \pm \frac{\pi}{4}.$$

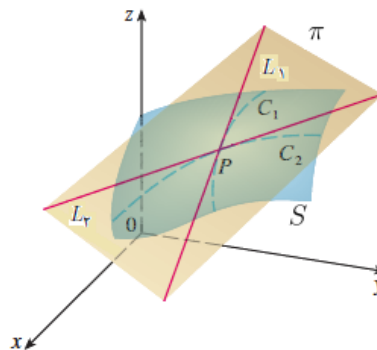
بنابر این در نقاط نظیر به مقادیر $t = k\pi \pm \frac{\pi}{4}$ ، خطوط مماس بر منحنی C کاملاً بر رویه S قرار خواهند گرفت.

صفحه مماس و خط عمود بر یک رویه

اکنون با استفاده از مفهوم خط مماس بر یک منحنی، به تعریف صفحه مماس بر یک رویه می‌پردازیم. ی

تعریف

فرض کنیم S رویه‌ای در فضا و $P \in S$ نقطه‌ای بر این رویه باشد. در این صورت صفحه π در فضا و گذرنده از نقطه P را صفحه مماس بر S در این نقطه نامیم، هرگاه برای هر خم C واقع بر S و گذرنده از P ، خط مماس بر C در نقطه P در صفحه π قرار گیرد. در صورت وجود چنین صفحه‌ای خط گذرنده از نقطه P و عمود بر این صفحه را خط عمود بر رویه در نقطه P می‌نامیم.



با استفاده از تذکر زیر می‌توانیم بردار نرمال صفحه مماس و بردار هادی خط عمود بر یک رویه را معرفی کنیم.

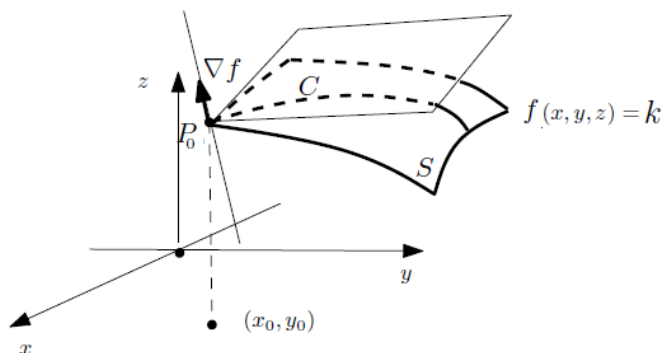
تذکر.

فرض کنیم S رویه‌ای در فضا به معادله $f(x, y, z) = k$ بوده، $P_0(x_0, y_0, z_0)$ نقطه‌ای واقع بر این رویه باشد. فرض کنیم C خمی به معادله برداری $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$ واقع بر رویه S و گذرنده از نقطه $P_0(x_0, y_0, z_0)$ باشد. به این ترتیب $t_0 \in I$ وجود دارد که $P_0 = (x(t_0), y(t_0), z(t_0))$. همچنین فرض کنیم تابع f و هر یک از توابع $x = x(t)$ ، $y = y(t)$ ، $z = z(t)$ مشتق‌پذیر هستند. در این صورت

$$\begin{aligned} C \subset S &\Rightarrow \forall t \in I; \quad f(x(t), y(t), z(t)) = k \\ &\Rightarrow \frac{d}{dt} f(x(t), y(t), z(t)) = 0 \\ &\Rightarrow f_x(P_0)x'(t_0) + f_y(P_0)y'(t_0) + f_z(P_0)z'(t_0) = 0 \\ &\Rightarrow \vec{\nabla} f(P_0) \cdot \vec{r}'(t_0) = 0 \\ &\Rightarrow \vec{\nabla} f(P_0) \perp \vec{r}'(t_0). \end{aligned}$$

در نتیجه اگر π صفحه‌ای گذرنده از P_0 با بردار نرمال $\vec{\nabla} f(P_0)$ باشد آنگاه خط مماس بر C در نقطه P_0 در این

صفحه قرار خواهد گرفت. از آنجا که این خاصیت برای هر منحنی واقع بر S و گذرنده از P_0 رخ می‌دهد، پس طبق تعریف، صفحه ممبور صفحه مماس بر S در P_0 خواهد بود. به همین ترتیب، بردار $\vec{\nabla} f(P_0)$ یک بردار هادی برای خط عمود بر رویه در نقطه P_0 است.



مثال. رویه S به معادله $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ مفروض است. معادله صفحه مماس و خط عمود بر این رویه را در نقطه $P(2, 2, \sqrt{5})$ به دست آورید.
جواب. فرض کنیم π صفحه مماس و L خط عمود بر رویه فوق در نقطه P باشند. در این صورت باتوجه به تذکر قبل،

$$\vec{\nabla} f(P) \perp \pi, \quad \vec{\nabla} f(P) \parallel L.$$

از طرفی

$$\vec{\nabla} f = \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ -2z \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{\nabla} f(P) = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -2\sqrt{5} \end{pmatrix}.$$

به این ترتیب

$$\left. \begin{aligned} \vec{\nabla} f(P) = 4\vec{i} + 4\vec{j} - 2\sqrt{5}\vec{k} &\perp \pi \\ P(2, 2, \sqrt{5}) &\in \pi \end{aligned} \right\} \Rightarrow \pi : 4(x - 2) + 4(y - 2) - 2\sqrt{5}(z - \sqrt{5}) = 0.$$

همچنین

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} f(P) = 4\vec{i} + 4\vec{j} - 2\sqrt{5}\vec{k} &\parallel L \\ P(2, 2, \sqrt{5}) &\in L \end{aligned}$$

در نتیجه معادلات پارامتری خط L عبارت است از:

$$L : \begin{cases} x = 4t + 2 \\ y = 4t + 2 \\ z = -2\sqrt{5}t + \sqrt{5} \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

مثال. فرض کنیم C خم حاصل از تلاقی رویه های $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ و $xy + z = 0$ باشد. معادلات پارامتری خط مماس بر C را در نقطه $P(2, 1, -2)$ بدست آورید.

جواب. فرض کنیم $S_1 : f_1(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 = 9$ و $S_2 : f_2(x, y, z) = xy + z = 0$ رویه های فوق باشند. در این صورت $C = S_1 \cap S_2$. فرض کنیم L خط مماس بر منحنی C در نقطه P بوده و π_1 و π_2 به ترتیب صفحات مماس بر S_1 و S_2 در این نقطه باشند. در این صورت $L \subset \pi_1 \cap \pi_2$ از طرفی

$$\left. \begin{matrix} \vec{\nabla} f_1(P) \perp \pi_1 \\ \vec{\nabla} f_2(P) \perp \pi_2 \end{matrix} \right\} \Rightarrow \left. \begin{matrix} \vec{\nabla} f_1(P) \perp L \\ \vec{\nabla} f_2(P) \perp L \end{matrix} \right\} \Rightarrow \vec{v} = \vec{\nabla} f_1(P) \times \vec{\nabla} f_2(P) \parallel L.$$

به این ترتیب با محاسبه بردارهای گرادیان، داریم

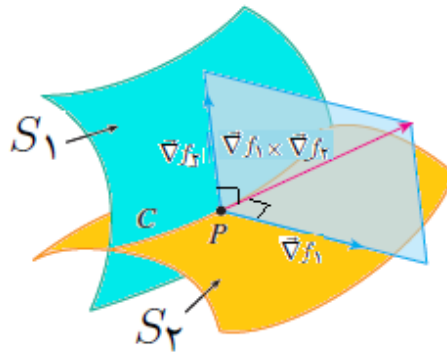
$$\begin{aligned} \vec{\nabla} f_1 &= (2x)\vec{i} + (2y)\vec{j} + (2z)\vec{k} \Rightarrow \vec{\nabla} f_1(P) = 4\vec{i} + 2\vec{j} - 4\vec{k}, \\ \vec{\nabla} f_2 &= y\vec{i} + x\vec{j} + \vec{k} \Rightarrow \vec{\nabla} f_2(P) = \vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}. \end{aligned}$$

در نتیجه

$$\vec{v} = \vec{\nabla} f_1(P) \times \vec{\nabla} f_2(P) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & 2 & -4 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 4 & -4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \vec{k}$$

بنابراین $\vec{v} = 10\vec{i} - 8\vec{j} + 6\vec{k}$. در نتیجه معادلات پارامتری خط L عبارت است از:

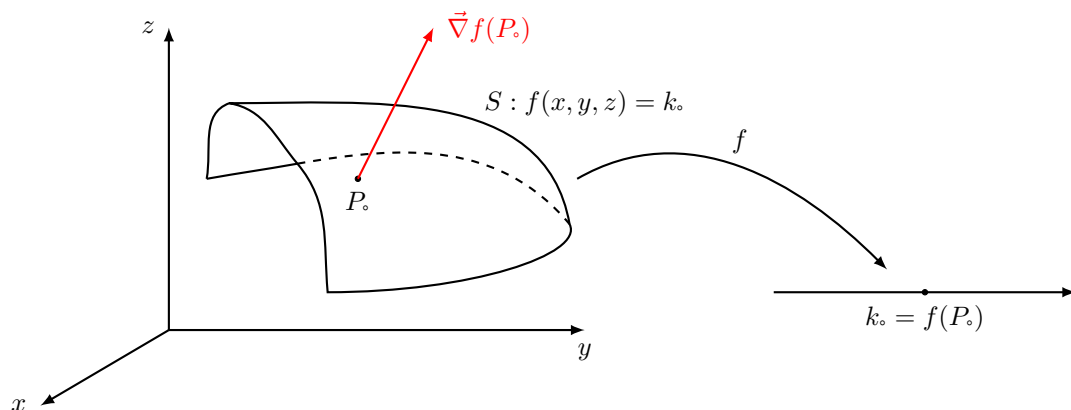
$$\left. \begin{matrix} \vec{v} = 10\vec{i} - 8\vec{j} + 6\vec{k} \parallel L \\ P(2, 1, -2) \in L \end{matrix} \right\} \Rightarrow L : \begin{cases} x = 10t + 2 \\ y = -8t + 1 \\ z = 6t - 2 \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$



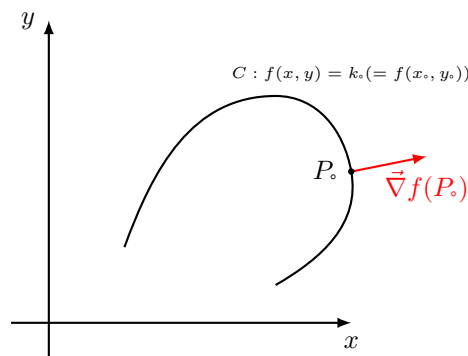
تعبیر هندسی بردار گرادیان. فرض کنیم f تابعی سه متغیره تعریف شده بر ناحیه‌ای از فضای $\mathbb{R}^3$ بوده، بر این ناحیه مشتق‌پذیر باشد. در این صورت برای هر نقطه چون $P_0(x_0, y_0, z_0)$ در این ناحیه، بردار

$$\vec{\nabla} f(P_0) = f_x(x_0, y_0, z_0)\vec{i} + f_y(x_0, y_0, z_0)\vec{j} + f_z(x_0, y_0, z_0)\vec{k}$$

بردار عمود بر رویه تراز f در برگیرنده نقطه P_0 خواهد بود.



به همین ترتیب، اگر f تابعی دومتغیره و مشتق‌پذیر بر ناحیه‌ای از صفحه در برگیرنده نقطه $P_0(x_0, y_0)$ باشد آنگاه $\vec{\nabla} f(P_0) = f_x(x_0, y_0)\vec{i} + f_y(x_0, y_0)\vec{j}$ برداری در صفحه عمود بر منحنی تراز f در برگیرنده نقطه P_0 است.



تمرین‌های بخش خم‌های پارامتری، صفحه مماس و خط عمود بر رویه.

۱. رویه S به معادله $z = e^{x^2+y^2}$ را در نظر بگیرید.

(الف) نشان دهید S یک رویه دوار است.

(ب) معادله صفحه مماس بر رویه S در نقطه $P(\frac{\sqrt{e}}{4}, \frac{\sqrt{e}}{4}, e)$ را بنویسید.

(ج) اگر خم C حاصل تلاقی رویه S و صفحه $z = e$ باشد، معادله خط مماس بر C در نقطه P را بنویسید.

۲. رویه S به معادله $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ مفروض است.

(الف) معادله صفحه مماس و خط عمود بر S در نقطه $(1, 1, 1) \in S$ را به دست آورید.

(ب) نشان دهید کلیه خطوط عمود بر S محور z را قطع می‌کند.

۳. فرض کنید $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ تابعی مشتق‌پذیر بوده و S رویه‌ای به معادله $f(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}) = 0$ باشد. نشان دهید کلیه صفحات مماس بر S از مبدا مختصات عبور می‌کنند.

۴. مکان هندسی نقاطی از رویه $x^2 + 2y^2 + 3z^2 + xy + 2xz + 4yz = 8$ را بیابید که صفحه‌ی مماس در آن نقاط موازی صفحه xy باشد.

۵. صفحات مماس در نقطه‌ی $M = (x, y, z)$ به ازای $x > 0, y > 0, z > 0$ بر رویه‌ی

$$x^{2/3} + y^{2/3} + z^{2/3} = a^{2/3} \quad (a \text{ عددی ثابت و مثبت})$$

محور ox و oy و oz را به ترتیب در نقاط A, B و C قطع می‌کنند. نشان دهید مقدار عبارت $OA^2 + OB^2 + OC^2$ ثابت و مستقل از نقطه (x, y, z) است.

۶. نشان دهید صفحه‌ی مماس بر رویه‌ی $z = x \sin(\frac{y}{x})$ در هر نقطه، از مبدأ مختصات می‌گذرد.

۷. بیضی‌گون (بیضی‌وار) به معادله $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ مفروض است. (الف) نقاطی از رویه را مشخص کنید که قائم بر رویه در این نقاط با محورهای مختصات زوایای مساوی بسازد. (ب) در چه نقاطی از رویه‌ی فوق صفحات مماس بر رویه موازی صفحات مختصات است؟ (چرا؟)

۸. معادلات صفحات مماس بر رویه‌ی $z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$ را که عمود بر خط $x - 1 = y = z - 3$ هستند، پیدا کنید. ضمناً نقاطی از رویه‌ی فوق را مشخص کنید که صفحات مماس بر رویه در آن نقاط عمود بر محور z باشند.

۹. رویه‌ی $1 = x^2 + y^2 - z^2$ مفروض است. (الف) معادله‌ی صفحه‌ی مماس و خط عمود بر رویه را در نقطه‌ی $(1, 1, 1)$ به دست آورید. (ب) نقطه‌ی برخورد دیگر خط عمود فوق با رویه را به دست آورید. (ج) ثابت کنید صفحه‌ی مماس فوق با این رویه‌ی دقیقاً در دو خط راست اشتراک دارد.

۱۰. رویه‌ی $z = x^2 + y^2$ و نقاط $A = (1, 1, 0)$ و $B = (2, 2, 2)$ خارج از رویه مفروضند. (الف) معادله‌ی خطی را به دست آورید که از نقطه‌ی A گذشته بر رویه‌ی فوق عمود باشد. (ب) معادله‌ی صفحه‌ای شامل A و B را به دست آورید که بر رویه‌ی فوق مماس باشد.

۱۱. نشان دهید بر مخروط $z^2 = 2x^2 + 4y^2$ خطی وجود دارد که صفحه‌ی مماس بر مخروط در امتداد آن با صفحه‌ی $25 = 12x + 14y + 11z$ موازی است. خط و صفحه‌ی مماس را بدست آورید.

۱۲. مطلوب است معادلات پارامتری منحنی حاصل از برخورد سهمی‌گون $z = x^2 + y^2$ و صفحه‌ی $z = 2$. اگر در هر نقطه از این منحنی، خطی عمود بر سطح سهمی‌گون رسم نماییم، مجموعه‌ی این خطوط تشکیل مخروطی در فضا می‌دهند. معادله‌ی مخروط را به دست آورید.

۱۳. نقاطی را بر رویه‌ی $1 = x^2 + y^2 - z^2$ پیدا کنید که صفحه‌ی مماس بر رویه در این نقاط عمود بر فصل مشترک دو صفحه‌ی $y = x$ و $y = z$ باشند.

۱۴. خط مماس بر خم γ حاصل از برخورد دو رویه‌ی $9 = x^2 + y^2 + z^2$ و $0 = xy + z$ را در نقطه‌ی $(2, 1, -2)$ بیابید.

۱۵. معادله‌ی خطوطی را بیابید که از مبدأ مختصات گذشته بر رویه‌ی $1 = x^2 + y^2 + 9z^2$ عمود باشند.

۱۶. ثابت کنید صفحات مماس بر رویه‌ی $xyz = a^3$ ($a > 0$ ثابت) با صفحات مختصات، چهار وجهی‌هایی با حجم ثابت می‌سازند.

۱۷. فرض کنید f تابعی مشتق‌پذیر باشد. نشان دهید کلیه‌ی صفحات مماس بر رویه‌ی $z = yf\left(\frac{y}{x}\right)$ از مبدأ مختصات عبور می‌کنند.

۱۸. معادله‌ی کلیه‌ی صفحات مماس بر کره‌ی $3 = x^2 + y^2 + z^2$ را تعیین کنید که شامل خط L باشد.

$$\begin{cases} x = t + 2 \\ y = -2t \\ z = t + 1 \end{cases}$$

۱۹. معادلات صفحه‌ی مماس و خط قائم بر رویه‌های زیر را در نقطه‌ی داده شده پیدا کنید. (الف) $xyz = a^3$ ،
 $P = (\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, 1)$ ، $z = 2 \sin x \cos y$ (ب) $\mathbb{R}^3$ است.

۲۰. در کدام نقطه (یا نقاط) از مخروط $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ صفحه‌ی مماس و خط قائم تعریف نشده‌اند؟
 توضیح دهید.

۲۱. بیضی‌گون $66 = x^2 + y^2 + 3z^2$ دارای دو صفحه‌ی مماس موازی با صفحه‌ی $x + y + z = 1$ می‌باشد.
 معادله‌ی این صفحات را همراه با نقاط تماسشان پیدا کنید.

۲۲. نشان دهید رویه‌های $z = xy - y^2 + 8y - 5$ و $z = e^{x+y+4}$ ، در نقطه‌ی $P = (-3, 2, 1)$ بر هم مماسند
 و صفحه‌ی مماس مشترکشان را پیدا کنید.

۲۳. فرض کنید C نمودار $f(x, y) = 0$ باشد و f دارای مشتقات جزئی پیوسته است که همزمان صفر
 نمی‌شوند. نشان دهید خط مماس بر این نمودار در نقطه‌ی $P = (x_0, y_0)$ دارای معادله‌ای به صورت
 زیر می‌باشد

$$f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) = 0$$

اکسترم‌های توابع چند متغیره

هدف ما در این بخش آشنایی با مفاهیم اکسترم‌های مطلق و نسبی برای توابع چند متغیره، و بررسی روش‌های مختلفی برای تعیین این مقادیر است. فرض کنیم $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ تابعی n متغیره باشد. در این صورت برای هر $x \in D$ ، $f(x)$ عددی حقیقی خواهد بود. اکنون با جابجا شدن نقطه x در دامنه D و تشکیل مقادیر مختلف برای f ، به طور طبیعی این سؤال مطرح می‌گردد که آیا در بین مقادیر حاصل برای f بیشترین مقدار یا کمترین مقدار وجود دارد؟ بر مبنای این نگرش، تعریف زیر را خواهیم داشت.

تعریف

فرض کنیم $D \subset \mathbb{R}^n$. تابع $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ را در نقطه $p \in D$ دارای ماکزیمم مطلق نامیم هرگاه

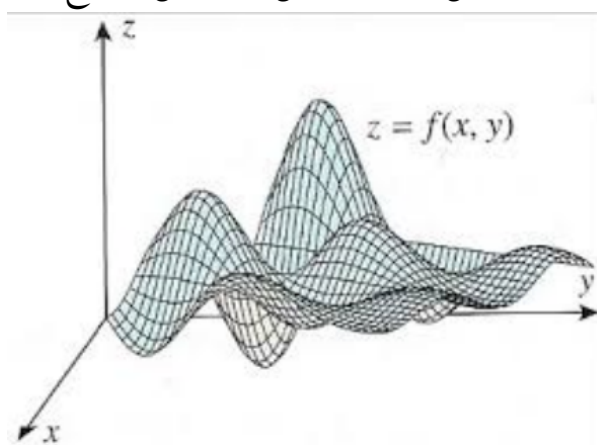
$$\forall x \in D, \quad f(x) \leq f(p).$$

به همین ترتیب، این تابع را در نقطه‌ای چون $q \in D$ دارای مینیمم مطلق گوئیم هرگاه

$$\forall x \in D, \quad f(q) \leq f(x).$$

ماکزیمم و مینیمم مطلق f بر D ، در صورت وجود، اکسترم‌های مطلق f بر D نامیده می‌شوند.

اگر $D \subset \mathbb{R}^2$ و f تابعی دو متغیره و نامنفی تعریف شده بر D باشد آنگاه با توجه به اینکه در این حالت، برای هر $(x, y) \in D$ ، عدد $f(x, y)$ بیانگر ارتفاع رویه بالای نقطه (x, y) است، اکسترم‌های مطلق f بر D ، در صورت وجود، نظیر نقاطی از رویه نمایش f با بیشترین و کمترین ارتفاع نسبت به صفحه xoy خواهد بود.



تعریف دیگری که در همین راستا از اهمیت برخوردار است مفهوم اکسترم‌های نسبی است. به طور ساده،

اکسترمم نسبی یک تابع اکسترمم مطلق آن تابع است وقتی دامنه تعریف آن به نحو مناسب محدود شود. به طور دقیق‌تر،

تعریف

تابع $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ را در نقطه $p \in D$ دارای یک ماکزیمم نسبی یا موضعی نامیم هرگاه عدد $r > 0$ یافت شود که $B(p; r) \subset D$ و

$$\forall x \in B(p; r), \quad f(x) \leq f(p)$$

و در این صورت $f(p)$ را یک ماکزیمم نسبی f بر D می‌نامیم. مفهوم مینیمم نسبی یا موضعی به نحو مشابه تعریف می‌شود. مقادیر ماکزیمم و مینیمم نسبی یک تابع را در صورت وجود، اکسترمم‌های نسبی تابع می‌نامیم.

باید توجه داشته برخلاف اکسترمم‌های مطلق که در صورت وجود منحصر به فرد هستند، اکسترمم‌های نسبی یک تابع، در صورت وجود، می‌توانند بیش از یکی باشند. همچنین، با توجه به تعریف فوق، یک تابع صرفاً در نقاط درونی می‌تواند اکسترمم نسبی داشته باشد، برخلاف اکسترمم‌های مطلق که در صورت وجود، می‌توانند در نقاط درونی یا روی مرز ناحیه واقع باشند. اگر اکسترمم مطلق یک تابع در یک نقطه درونی اتفاق بیفتد آنگاه این اکسترمم مطلق، طبق تعریف بالا، اکسترمم نسبی نیز قلمداد می‌شود. اگر $D \subset \mathbb{R}^2$ آنگاه اکسترمم‌های نسبی تابعی چون $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ نظیر نقاطی از رویه نمایش f است که نسبت به نقاط مجاور خود بیشتری یا کمترین ارتفاع را دارا باشد. در ادامه شرط لازم برای وجود اکسترمم نسبی برای یک تابع چند متغیره را بررسی می‌کنیم. برای سهولت فرض کنیم $D \subset \mathbb{R}^2$ و تابع دومتغیره $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ در نقطه درونی $p(a, b) \in D$ یک اکسترمم نسبی، مثلاً یک ماکزیمم نسبی داشته باشد. به این ترتیب، بنا به تعریف، عدد $r > 0$ وجود دارد که

$$\forall (x, y) \in B(p; r), \quad f(x, y) \leq f(a, b) \quad (3)$$

در این حالت، اگر تابع یک متغیره $g : (-r, r) \rightarrow \mathbb{R}$ با دستور $g(t) = f(a + t, b)$ تعریف شده باشد آنگاه برای هر $t \in (-r, r)$

$$\|(a + t, b) - (a, b)\| = |t| < r$$

در نتیجه $(a+t, b) \in B(p; r)$ و از آنجا، با استفاده از رابطه (۳)،

$$\forall t \in (-r, r), \quad g(t) = f(a+t, b) \leq f(a, b) = g(0)$$

بنابر این تابع g در $t=0$ یک ماکزیمم خواهد داشت. اکنون فرض کنیم f در نقطه p مشتق‌پذیر باشد. در این صورت، طبق بحث‌های انجام شده در مبحث قاعده زنجیری، تابع g نیز در $t=0$ مشتق‌پذیر بوده، در نتیجه $g'(0) = 0$. اما

$$g'(0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{g(t) - g(0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a+t, b) - f(a, b)}{t} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(a + \Delta x, b) - f(a, b)}{\Delta x} = \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)$$

در نتیجه $\frac{\partial f}{\partial x}(p) = 0$. به همین ترتیب $\frac{\partial f}{\partial y}(p) = 0$. این خاصیت در حالت کلی برای یک تابع n متغیره نیز برقرار است که در قضیه زیر بیان شده است.

قضیه

(شرط لازم برای اکسترم‌های نسبی یک تابع) فرض کنیم $D \subset \mathbb{R}^n$ و تابع $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ در نقطه درونی $p \in D$ یک اکسترم نسبی داشته باشد. در این صورت یا f در این نقطه مشتق‌پذیر نیست یا در صورت مشتق‌پذیری، کلیه مشتقات جزئی مرتبه اول f در این نقطه برابر صفر هستند.

بر اساس قضیه فوق، نقاط درونی از دامنه D که در آن یکی از دو حالت فوق رخ دهد دارای اهمیت خواهد بود.

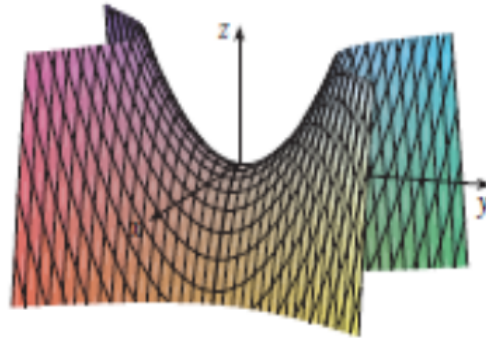
تعریف

نقطه درونی $p \in D$ را یک نقطه بحرانی برای تابع $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ نامیم هرگاه یا تابع در این نقطه مشتق‌پذیر نباشد یا در صورت مشتق‌پذیری، کلیه مشتقات جزئی مرتبه اول تابع در این نقطه برابر صفر باشند.

بنابر قضیه اخیر، اگر تابع $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ در نقطه $p \in D$ یک اکسترم نسبی داشته باشد آنگاه این نقطه یک نقطه بحرانی برای تابع f خواهد بود. ولی باید توجه داشت عکس این خاصیت لزوماً برقرار نیست. به عبارت دیگر هر نقطه بحرانی برای یک تابع لزوماً نظیر اکسترمی از تابع نیست. به طور مثال، فرض کنیم

f تابع با ضابطه $f(x, y) = y^2 - x^2$ باشد. در این صورت در نقطه $O(0, 0)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 0 \quad \text{و} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$$



رسمی ندارد.

برای مشاهده این امر با در نظر گرفتن یک همسایگی دلخواه از نقطه O چون $B(O; r)$ ، اگر $0 < |x| < r$ آنگاه $(x, 0) \in B(O; r)$. در عین حال، $f(x, 0) = -x^2 < 0 = f(0, 0)$. در نتیجه f در $(0, 0)$ مینیمم نسبی ندارد. به همین ترتیب، اگر $0 < |y| < r$ آنگاه $(0, y) \in B(O; r)$ و این بار در این نقطه $f(0, y) = y^2 > 0 = f(0, 0)$. پس f در این نقطه ماکزیمم نسبی نیز نخواهد داشت. پس f در نقطه $(0, 0)$ هیچ اکسترمم نسبی ای ندارد. نقطه بحرانی تابع f را که در آن تابع هیچ اکسترمم نسبی ندارد یک نقطه زینی برای f می نامیم. برای تشخیص وضعیت یک تابع دو متغیره در یک نقطه بحرانی می توانیم از آزمون مشتق دوم به صورت زیر استفاده کنیم.

قضیه

فرض کنیم $D \subset \mathbb{R}^2$ و $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ بر D مشتقات مرتبه دوم پیوسته داشته باشد. همچنین فرض کنیم $p \in D$ یک نقطه بحرانی برای f باشد. قرار می دهیم

$$A := \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(p), \quad B := \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(p), \quad C := \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(p) \quad \text{و} \quad D = \det \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix} = AC - B^2$$

در این صورت اگر $D > 0$ آنگاه f در p یک مقدار اکسترمم دارد. در این حالت، اگر $A > 0$ آنگاه این اکسترمم مینیمم و اگر $A < 0$ این اکسترمم ماکزیمم است. اگر $D < 0$ آنگاه p یک نقطه زینی برای f است. اگر $D = 0$ از این آزمون نتیجه ای حاصل نمی شود.

مثال. مطلوب است تعیین نقاط بحرانی و اکسترم‌های نسبی تابع $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ با ضابطه

$$f(x, y) = x(5 - x^2 - y^2 + 4y).$$

ابتدا نقاط بحرانی f بر $\mathbb{R}^2$ را به دست می‌آوریم. با توجه به اینکه f تابعی چندجمله‌ای و در نتیجه مشتق‌پذیر در هر نقطه از $\mathbb{R}^2$ است، نقاط بحرانی این تابع جواب‌های معادلات $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$ و $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ خواهند بود.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 5 - 3x^2 - y^2 + 4y = 0 \quad \text{و} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -2xy + 4x = 0$$

از حل $\frac{\partial f}{\partial y} = -2x(y - 2) = 0$ خواهیم داشت $x = 0$ یا $y = 2$. در حالتی که $x = 0$ ، از معادله $\frac{\partial f}{\partial x} = 5 - 3x^2 - y^2 + 4y = 0$ حاصل شود که $5 - y^2 + 4y = (y + 1)(y - 5) = 0$ در نتیجه $y = -1$ یا $y = 5$. به این ترتیب دو نقطه بحرانی $p_1(0, -1)$ و $p_2(0, 5)$ حاصل شود. در حالتی که $y = 2$ ، از معادله $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$ خواهیم داشت $-3x^2 + 9 = 0$. در نتیجه $x = \pm\sqrt{3}$. به این ترتیب دو نقطه بحرانی دیگر به صورت $p_3(\sqrt{3}, 2)$ و $p_4(-\sqrt{3}, 2)$ به دست می‌آیند. پس f بر $\mathbb{R}^2$ چهار نقطه بحرانی دارد. اکنون برای تعیین وضعیت f در این نقاط بحرانی، با توجه به اینکه مشتقات مرتبه دوم f بر $\mathbb{R}^2$ توابع چندجمله‌ای و در نتیجه پیوسته هستند، می‌توانیم از آزمون مشتق دوم استفاده نماییم. برای این منظور ابتدا مشتقات مرتبه دوم f را تعیین می‌کنیم.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -6x, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -2y + 4 \quad \text{و} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -2x$$

اکنون ضرایب A, B, C و D را برای هر یک از نقاط بحرانی فوق به دست می‌آوریم.

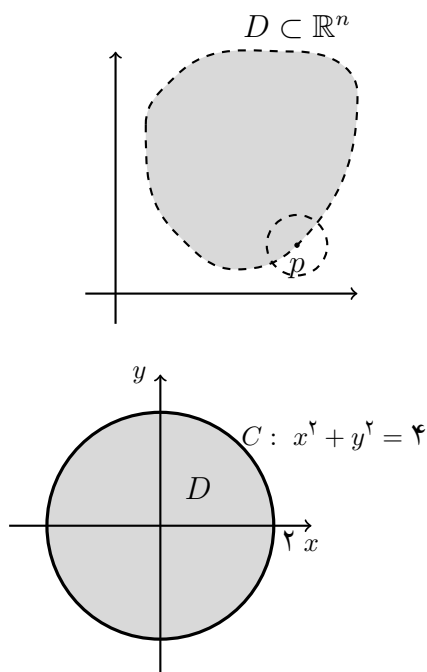
	$p_1(0, -1)$	$p_2(0, 5)$	$p_3(\sqrt{3}, 2)$	$p_4(-\sqrt{3}, 2)$
A	0	0	$-6\sqrt{3}$	$6\sqrt{3}$
B	2	-6	0	0
C	0	0	$-2\sqrt{3}$	$2\sqrt{3}$
D	$-4 < 0$	$-36 < 0$	$36 > 0$	$36 > 0$

به این ترتیب با توجه به آزمون مشتق دوم، تابع f در نقطه p_3 دارای یک ماکزیمم نسبی برابر $f(\sqrt{3}, 2)$ و در نقطه p_4 دارای یک مینیمم نسبی برابر $f(-\sqrt{3}, 2)$ است. نقاط p_1 و p_2 نیز برای این تابع نقاط زینی هستند. باید توجه داشت که دو اکسترمی که در اینجا به دست آورده‌ایم هر دو نسبی بوده، مطلق نیستند. چرا که با حرکت در صفحه xoy می‌توان مقادیر تابع f را بدون کران افزایش یا کاهش داد.

یکی دیگر از قضایایی که در یافتن اکستریم‌های مطلق یک تابع بر یک ناحیه می‌تواند مورد استفاده قرار گیرد، قضیه اکستریم‌های مطلق است. ولی برای بیان این قضیه نخست به تعریف زیر نیاز داریم.

تعریف

نقطه $p \in \mathbb{R}^n$ را یک نقطه مرزی برای ناحیه $D \subset \mathbb{R}^n$ نامیم هرگاه برای هر $r > 0$ ، همسایگی $B(p; r)$ با هر دو مجموعه D و $D^c = \mathbb{R}^n - D$ اشتراک داشته باشد.

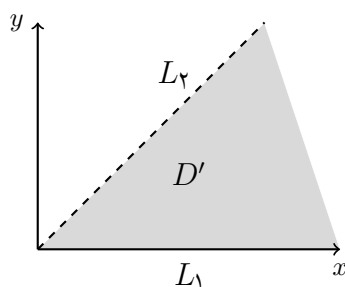


در شکل زیر، نقطه p به عنوان یک نقطه مرزی نمایش داده شده است. همانطور که مشاهده می‌شود همسایگی نقطه p (هر اندازه که کوچک هم باشد) هم نقاطی از D و هم نقاطی خارج از D را در بر می‌گیرد.

ناحیه D را ناحیه‌ای بسته نامیم هرگاه D کلیه نقاط مرزی خود را در بر داشته باشد. به طور مثال، مجموعه

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \leq 4\}$$

مجموعه‌ای بسته است. زیرا مرز این ناحیه برابر دایره $x^2 + y^2 = 4$ است که طبق تعریف D متعلق به این دامنه می‌باشد.



در مقابل اگر مجموعه $D' = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 0 \leq x < y\}$ را در نظر بگیریم آنگاه مرز ناحیه از دو نیم خط $L_1 = \{(x, 0) \mid x \geq 0\}$ و $L_2 = \{(x, y) \mid y = x, x \geq 0\}$ تشکیل شده است. همانگونه که در تعریف D' مشاهده می‌شود مجموعه نقاط L_3 به D' تعلق ندارد. پس D' بسته نیست.

اکنون می‌توانیم قضیه اکستریم‌های مطلق را بیان کنیم.

فرض کنیم $D \subset \mathbb{R}^n$ ناحیه‌ای بسته و کراندار باشد. اگر $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ تابعی پیوسته بر ناحیه D باشد آنگاه f اکسترم‌های مطلق خود را بر این ناحیه اتخاذ می‌کند. به عبارت دیگر، نقاطی چون p و q در D وجود دارند که

$$\forall x \in D, \quad f(p) \leq f(x) \leq f(q)$$

بنابر قضیه فوق، هر تابع پیوسته بر دامنه‌ای بسته و کراندار دارای مقادیر اکسترم مطلق است. روشن است که هر یک از نقاط نظیر این اکسترم‌ها می‌توانند در درون ناحیه یا روی مرز واقع باشند. بر این اساس، برای تعیین اکسترم‌های مطلق تابعی پیوسته بر دامنه‌ای بسته و کراندار به روش زیر اقدام می‌کنیم.

دستورالعمل یافتن اکسترم‌های مطلق تابعی پیوسته بر دامنه‌ای بسته و کراندار. ابتدا کلیه نقاط بحرانی f درون ناحیه را تعیین می‌کنیم. سپس با محدود کردن دامنه تعریف تابع به نقاط مرزی، نقاطی از مرز را تعیین می‌کنیم که این تابع محدود شده بیشترین و کمترین مقدار خود را اخذ نماید. نهایتاً با مقایسه مقادیر تابع در نقاط بحرانی درون و نقاط نظیر اکسترم بر مرز، بیشترین مقدار و کمترین مقدار تابع بر ناحیه داده شده را به دست می‌آوریم.

مثال. اکسترم‌های مطلق هر یک از توابع زیر را بر نواحی داده شده به دست آورید.

الف) $f(x, y) = x^2 + y^2 - 4xy$ $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \leq 2\}$

با توجه به اینکه تابع f یک چندجمله‌ای و در نتیجه تابعی پیوسته است و این که دامنه D دامنه‌ای بسته و کراندار است، بنابر قضیه اکسترم‌های مطلق، می‌دانیم f اکسترم‌های مطلق خود را بر این ناحیه اتخاذ می‌کند. بنابر دستورالعمل فوق، ابتدا نقاط بحرانی f در درون ناحیه D ، یعنی در مجموعه $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 2\}$ ، را تعیین می‌کنیم. چون مشتقات جزئی f توابعی پیوسته هستند در نتیجه f تابعی مشتق‌پذیر بوده، نقاط بحرانی f ، در صورت وجود، جواب‌های دستگاه معادلات $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$ و $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ خواهد بود.

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 2x - 4y = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 2y - 4x = 0 \end{cases} \Rightarrow (x, y) = (0, 0)$$

بنابر این $p_1(0, 0)$ تنها نقطه بحرانی f بر $\mathbb{R}^2$ است که در عین حال در نقاط درونی D نیز قرار دارد. اکنون مقادیر

f را بر روی مجموعه نقاط مرزی D ، یعنی مجموعه $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 2\}$ ، در نظر می‌گیریم. برای این منظور می‌توانیم منحنی مرزی را توسط معادلات پارامتری $y = y(t) = \sqrt{2} \sin t$ ، $x = x(t) = \sqrt{2} \cos t$ برای $t \in [0, 2\pi]$ بیان کرده، قرار دهیم

$$\forall t \in [0, 2\pi], \quad g(t) = f(x(t), y(t)) = x^2(t) + y^2(t) - 4x(t)y(t) = 2 - 8 \cos t \sin t = 2 - 4 \sin 2t$$

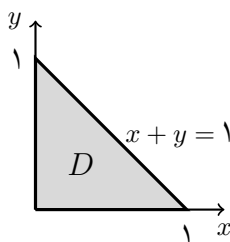
به این ترتیب، اکسترم‌های مطلق f بر مرز D متناظر با اکسترم‌های تابع یک متغیره g بر $[0, 2\pi]$ خواهد بود. به سادگی مشاهده می‌شود بیشترین مقدار g برابر ۶ و به ازای $t = \frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$ و کمترین مقدار آن برابر -2 و به ازای $t = \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}$ حاصل می‌شود. نقاط متناظر با مقادیر فوق از پارامتر t عبارتند از $p_2(-1, 1)$ ، $p_4(1, 1)$ ، $p_3(1, -1)$ و $p_5(-1, -1)$. اکنون در مرحله نهایی مقادیر f را در نقطه بحرانی درون دامنه و چهار نقطه مرزی فوق تشکیل می‌دهیم.

(x, y)	$p_1(0, 0)$	$p_2(-1, 1)$	$p_3(1, -1)$	$p_4(1, 1)$	$p_5(-1, -1)$
$f(x, y)$	$f(0, 0) = 0$	$f(-1, 1) = 6$	$f(1, -1) = 6$	$f(1, 1) = -2$	$f(-1, -1) = -2$

به این ترتیب ماکزیمم مطلق f بر D برابر ۶ بوده که در نقاط p_2 و p_3 اتخاذ می‌شود. مینیمم مطلق f بر D نیز برابر -2 است که در نقاط p_4 و p_5 اتخاذ می‌شود. توجه می‌کنیم بر اساس آنچه در اینجا به دست آورده‌ایم

$$\forall (x, y) \in D, \quad -2 \leq f(x, y) = x^2 + y^2 - 4xy \leq 6$$

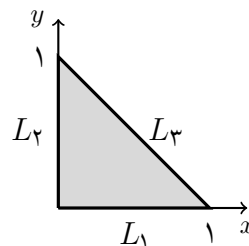
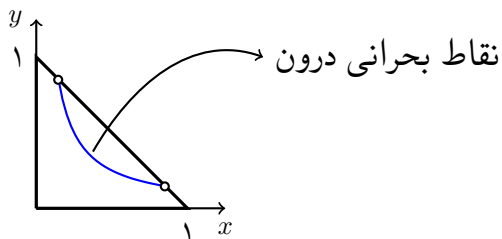
$$\text{ب) } f(x, y) = \sin(\pi xy) \quad D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1\}$$



ابتدا نقاط بحرانی f درون D را به دست می‌آوریم. با توجه به مشتق‌پذیری f بر $\mathbb{R}^2$ نقاط بحرانی این تابع بر $\mathbb{R}^2$ جواب‌های دستگاه $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$ و $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ است.

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = \pi y \cos(\pi xy) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = \pi x \cos(\pi xy) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \text{ یا } \cos(\pi xy) = 0 \\ x = 0 \text{ یا } \cos(\pi xy) = 0 \end{cases}$$

با بررسی معادلات فوق مجموعه نقاط $p_*(\circ, \circ)$ و $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = k + \frac{1}{\pi}, k \in \mathbb{Z}\}$ به عنوان نقاط بحرانی f بر $\mathbb{R}^2$ به دست می‌آید. نقاطی از مجموعه فوق که در بین نقاط درونی D قرار می‌گیرند عبارتند از $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > \circ, y > \circ, xy = \frac{1}{\pi}\}$.



اکنون مقادیر f را بر روی مرز D در نظر می‌گیریم. در

اینجا مرز D از سه پاره‌خط L_1, L_2, L_3 (مطابق شکل فوق) تشکیل شده است. بر روی مرزهای L_1 و L_2 ,

$$\forall (x, y) \in L_1 = \{(x, \circ) \in \mathbb{R}^2 \mid \circ \leq x \leq 1\} \quad f(x, \circ) = \sin(\pi x \times \circ) = \circ$$

$$\forall (x, y) \in L_2 = \{(\circ, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \circ \leq y \leq 1\} \quad f(\circ, y) = \sin(\pi \times \circ \times y) = \circ$$

بنابر این f بر روی این دو مرز ثابت و برابر $\circ$ است. برای مرز L_3 , $y = 1 - x$ که در آن $\circ \leq x \leq 1$. به این ترتیب با معرفی تابع $g : [\circ, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ با دستور $g(x) = \sin(\pi x(1 - x))$, اکستریم‌های مطلق g بر $[\circ, 1]$ منطبق بر اکستریم‌های f بر مرز L_3 خواهد بود.

$$g'(x) = \pi(1 - 2x) \cos(\pi x(1 - x)) = \circ \Rightarrow x = \frac{1}{\pi} \text{ یا } x(1 - x) = k + \frac{1}{\pi}, k \in \mathbb{Z}$$

توجه می‌کنیم برای $\circ \leq x \leq 1$ ، عبارت $x(1 - x)$ عبارتی در بازه $[\circ, 1]$ بوده، در نتیجه معادله $x(1 - x) = k + \frac{1}{\pi}$ به ازای $k \neq \circ$ جوابی در بازه $[\circ, 1]$ نخواهد داشت. بنابر این مقادیر اکستریم مطلق g بر $[\circ, 1]$ در بین مقادیر $x = \circ, x = \frac{1}{\pi}$ (نقطه ابتدای بازه) و $x = 1$ (نقطه انتهای بازه) اتخاذ می‌گردد. بر این اساس، نقاط $p_1(\frac{1}{\pi}, \frac{1}{\pi})$ (نظیر $(x = \frac{1}{\pi}, y = \frac{1}{\pi})$), $p_2(\circ, 1)$ (نظیر $(x = \circ, y = 1)$) و $p_3(1, \circ)$ (نظیر $(x = 1, y = \circ)$) از مرز L_3 انتخاب می‌شوند. توجه می‌کنیم تمام نقاط مرزهای L_1 و L_2 نیز در روند مقایسه مقادیر f مورد بررسی قرار می‌گیرند. اکنون در مرحله نهایی،

مقادیر f را در نقاط بحرانی درون و نقاط انتخاب شده بر روی مرز تشکیل می‌دهیم.

$$\forall (x, y) \in \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0, y > 0, xy = \frac{1}{4}\} \quad f(x, y) = \sin(\pi xy) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}$$

$$\forall (x, y) \in L_1 \cup L_2 \quad f(x, y) = \sin(\pi xy) = 0$$

$$(x, y) = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right) \in L_3 \quad f(x, y) = \sin\left(\pi \frac{1}{4} \times \frac{1}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$(x, y) = (0, 1) \text{ یا } (x, y) = (1, 0) \in L_3 \quad f(x, y) = 0$$

به این ترتیب با مقایسه مقادیر فوق مشاهده می‌شود ماکزیمم مطلق f بر D برابر ۱ و مینیمم مطلق آن برابر ۰ است.

اکسترم‌های مقید یا مشروط. فرض کنیم $D \subset \mathbb{R}^n$ و $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ تابعی تعریف شده بر D باشد. برای زیرمجموعه‌ای چون $C \subset D$ با محدود کردن دامنه تعریف f به مجموعه C و به این ترتیب، در نظر گرفتن تابع $f : C \rightarrow \mathbb{R}$ ، اکسترم‌های احتمالی تابع اخیر لزوماً بر اکسترم‌های تابع $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ منطبق نخواهند بود. در حالتی که مجموعه C مجموعه تراز تابعی چون g به ازای ثابت k باشد (یعنی $C = \{x \in D; g(x) = k\}$) آنگاه اکسترم‌های احتمالی تابع $f : C \rightarrow \mathbb{R}$ را اکسترم‌های مقید یا مشروط f تحت شرط $g(x) = k$ می‌نامیم. در این حالت، نقاط نظیر اکسترم‌های مقید را می‌توانیم با استفاده از قضیه زیر، که به قضیه تکثیرکننده‌های لاگرانژ معروف است، به دست آوریم.

قضیه

فرض کنیم توابع $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$ بر D مشتق‌پذیر بوده، f دارای یک اکسترم مقید در نقطه $p \in D$ تحت شرط $g(x) = k$ باشد (به عبارت دیگر، اگر $C := \{x \in D; g(x) = k\}$ آنگاه تابع $f : C \rightarrow \mathbb{R}$ در نقطه $p \in C$ دارای یک مقدار اکسترم باشد). به علاوه فرض کنیم مشتقات جزئی تابع g در نقطه p همه برابر صفر نباشند (یعنی $j = 1, \dots, n$ وجود داشته باشد که $\frac{\partial g}{\partial x_j}(p) \neq 0$). در این صورت ثابتی چون $\lambda \in \mathbb{R}$ وجود دارد که برای هر $i = 1, \dots, n$ ، ضریب λ را ضریب تکثیرکننده لاگرانژ می‌نامند.

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(p) = \lambda \frac{\partial g}{\partial x_i}(p)$$

در حالتی که f و g توابعی دو متغیره (یا سه متغیره) و مشتق‌پذیر بوده، تابع f اکسترم مقیدی تحت شرط $g = k$ داشته باشد آنگاه بنابر قضیه فوق، اسکالری چون λ وجود دارد که در نقطه نظیر به این اکسترم $\vec{\nabla} f = \lambda \vec{\nabla} g$.

مثال. اکسترم‌های مطلق تابع $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ با ضابطه $f(x, y, z) = x^2 - 2yz$ را بر مجموعه $D = \{(x, y, z); x^2 + y^2 + z^2 \leq 2\}$ به دست آورید.

نخست توجه می‌کنیم که تابع f یک چند جمله‌ای و در نتیجه همه جا بر $\mathbb{R}^3$ پیوسته است. از طرف دیگر، دامنه D دامنه‌ای بسته و کراندار است. بنابر قضیه اکسترم‌های مطلق، تابع پیوسته f اکسترم‌های مطلق خود را بر D اتخاذ می‌کند. بنابر دستورالعملی که در قسمت قبل مطرح گردید ابتدا نقاط بحرانی f درون دامنه D را تعیین می‌کنیم. با توجه به مشتق‌پذیری f ، نقاط بحرانی این تابع (در صورت وجود) جواب‌های دستگاه معادلات $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$ ، $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ و $\frac{\partial f}{\partial z} = 0$ است.

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 2x = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = -2z = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial z} = -2y = 0 \end{cases} \Rightarrow (x, y, z) = (0, 0, 0)$$

بنابر این $p_0(0, 0, 0)$ تنها نقطه بحرانی تابع f بر $\mathbb{R}^3$ است که در عین حال در درون D نیز قرار دارد. اکنون نقاط واقع بر مرز را مورد توجه قرار می‌دهیم. اگر $g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ آنگاه مرز D توسط معادله $g(x, y, z) = 2$ مشخص می‌شود. در عین حال توجه می‌کنیم که بر روی مرز فوق، $\vec{\nabla} g \neq \vec{0}$. به این ترتیب اگر f در نقطه‌ای بر روی مرز اکسترمی داشته باشد آنگاه طبق قضیه فوق، اسکالری چون λ وجود دارد که در نقطه نظیر به اکسترم، $\vec{\nabla} f = \lambda \vec{\nabla} g$. بنابر این کافی است تمام نقاطی را پیدا کنیم که به ازای اسکالر مناسبی چون λ در معادلات $\vec{\nabla} f = \lambda \vec{\nabla} g$ و $g(x, y, z) = 2$ صدق نمایند.

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = \lambda \frac{\partial g}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} = \lambda \frac{\partial g}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} = \lambda \frac{\partial g}{\partial z} \\ g(x, y, z) = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x = 2\lambda x & (1) \\ -2z = 2\lambda y & (2) \\ -2y = 2\lambda z & (3) \\ x^2 + y^2 + z^2 = 2 & (4) \end{cases}$$

توجه می‌کنیم که دستگاه فوق یک دستگاه چهار معادله با چهار مجهول x, y, z و λ است. برای حل دستگاه فوق با معادله (۱) آغاز می‌کنیم.

$$2x = 2\lambda x \Leftrightarrow x(\lambda - 1) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ یا } \lambda = 1$$

ابتدا فرض کنیم $x = 0$. توجه می‌کنیم اگر $y = 0$ آنگاه با توجه به معادله (۲)، $z = 0$ ولی $(0, 0, 0)$ در معادله

(۴) صدق نمی‌کند. پس $y \neq 0$. به همین ترتیب، با استفاده از معادله (۳) و استدلال فوق مشاهده می‌شود $z \neq 0$. با تقسیم طرفین دو معادله (۲) و (۳) به یکدیگر،

$$\frac{z}{y} = \frac{y}{z} \Rightarrow y^2 = z^2$$

در نتیجه با استفاده از معادله (۴)،

$$0^2 + y^2 + z^2 = y^2 + y^2 = 2y^2 = 2 \Rightarrow y = \pm 1 \Rightarrow z = \pm y = \pm 1$$

به این ترتیب چهار نقطه به صورت $p_1(0, 1, 1)$ ، $p_2(0, 1, -1)$ ، $p_3(0, -1, 1)$ و $p_4(0, -1, -1)$ در این حالت به دست می‌آیند. اکنون حالتی که $\lambda = 1$ را مورد بررسی قرار می‌دهیم. بنابر معادلات (۲) و (۳)، در این حالت $z = -y$. با استفاده از معادله (۴)،

$$x^2 + y^2 + z^2 = x^2 + y^2 + y^2 = 2$$

پس در این حالت مجموعه‌ای از نقاط به صورت $\{(x, y, z) \mid x^2 + 2y^2 = 2, z = -y\}$ به دست می‌آید. نهایتاً مقادیر تابع f را در نقطه بحرانی درون و نقاط انتخاب شده بر روی مرز با هم مقایسه می‌کنیم.

$p_0(0, 0, 0)$	$f(0, 0, 0) = 0$
$p_1(0, 1, 1)$	$f(0, 1, 1) = -2$
$p_2(0, 1, -1)$	$f(0, 1, -1) = 2$
$p_3(0, -1, 1)$	$f(0, -1, 1) = 2$
$p_4(0, -1, -1)$	$f(0, -1, -1) = 2$
$\{(x, y, z) \mid x^2 + 2y^2 = 2, z = -y\}$	$f(x, y, z) = x^2 - 2zy = x^2 + 2y^2 = 2$

بنابر این $\max_D f = 2$ و $\min_D f = -2$.

مثال. نزدیکترین نقطه از رویه S به معادله $z = x^2 - y^2 + 2$ نسبت به مبدا مختصات را تعیین کنید. فرض کنیم (x, y, z) نقطه‌ای واقع بر رویه فوق باشد. پس این نقطه در شرط $g(x, y, z) = x^2 - y^2 + 2 - z = 0$ صدق می‌کند. اگر f را با دستور $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ در نظر بگیریم (مجذور فاصله نقطه (x, y, z) تا مبدا) در این صورت مینیمم مقید f تحت شرط $g(x, y, z) = 0$ را به دست می‌آوریم. توجه می‌کنیم که $\vec{\nabla} g \neq \vec{0}$. در نتیجه بنابر قضیه تکثیرکننده‌های لاگرانژ، اسکالری چون λ وجود دارد که در نقطه نظیر به مینیمم

$\vec{\nabla} f = \lambda \vec{\nabla} g$. بنابر این کافی است دستگاه معادلات $\vec{\nabla} f = \lambda \vec{\nabla} g$ و $g(x, y, z) = 0$ را حل کنیم.

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 2x = \lambda \frac{\partial g}{\partial x} = 2\lambda x & (1) \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 2y = \lambda \frac{\partial g}{\partial y} = -2\lambda y & (2) \\ \frac{\partial f}{\partial z} = 2z = \lambda \frac{\partial g}{\partial z} = -\lambda & (3) \\ g(x, y, z) = x^2 - y^2 - z + 2 = 0 & (4) \end{cases}$$

از معادله (۱) خواهیم داشت $x = 0$ یا $\lambda = 1$.

در حالت $x = 0$:

$$(2) \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \xrightarrow{(4)} z = 2 \xrightarrow{(3)} \lambda = -4 \\ \text{یا} \\ \lambda = -1 \xrightarrow{(3)} z = \frac{1}{2} \xrightarrow{(4)} y^2 = \frac{3}{2} \end{cases}$$

بنابر این نقاط $p_1(0, 0, 2)$ ، $p_2(0, \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2})$ و $p_3(0, -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2})$ در این حالت به دست می‌آیند.
در حالت $\lambda = 1$:

$$(2) \Rightarrow y = 0, \quad (3) \Rightarrow z = -\frac{1}{2}, \quad (4) \Rightarrow x^2 - 0^2 + 2 - (-\frac{1}{2}) = 0 \Rightarrow x^2 = -\frac{5}{2}$$

تناقض حاصل نشان می‌دهد این حالت رخ نمی‌دهد. بنابر این فقط سه نقطه فوق را خواهیم داشت. اکنون مقادیر f را در سه نقطه فوق با هم مقایسه می‌کنیم.

$p_1(0, 0, 2)$	$f(0, 0, 2) = 4$
$p_2(0, \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2})$	$f(0, \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}) = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} = \frac{4}{2}$
$p_3(0, -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2})$	$f(0, -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}) = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} = \frac{4}{2}$

بنابر این کمترین مقدار f برابر $\frac{4}{2}$ و نظیر دو نقطه p_2 و p_3 خواهد بود. یعنی این دو نقطه نزدیکترین نقاط از رویه فوق به مبدا هستند.

مثال. فرض کنید S قسمتی از رویه $1 = x^2 + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9}$ در ناحیه $x > 0, y > 0, z > 0$ باشد.

الف) نشان دهید صفحه مماس بر S در نقطه‌ای چون $p(x_0, y_0, z_0) \in S$ با صفحات مختصات چهاروجهی با حجم $V = \frac{6}{x_0 y_0 z_0}$ ایجاد می‌کند.

ب) نقطه‌ای از این رویه را تعیین کنید که حجم چهاروجهی حاصل کمترین مقدار ممکن را داشته باشد.

الف) فرض کنیم π_0 صفحه مماس بر S در نقطه $p(x_0, y_0, z_0)$ باشد. اگر $f(x, y, z) = x^2 + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9}$ آنگاه S رویه تراز f (به ازای ثابت $k=1$) است. در نتیجه $\vec{\nabla} f(p)$ یک بردار نرمال برای صفحه مماس خواهد بود.

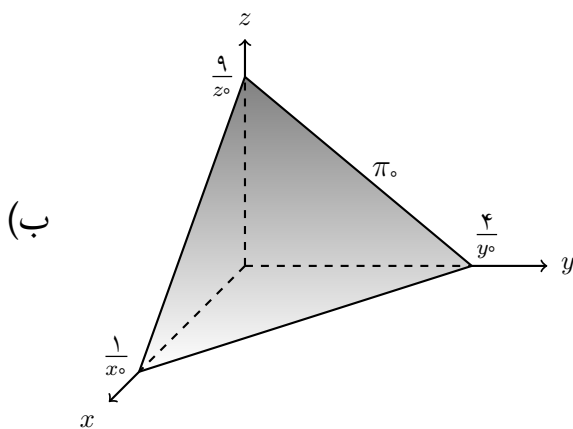
$$\vec{\nabla} f(x, y, z) = (2x)\vec{i} + \left(\frac{y}{2}\right)\vec{j} + \left(\frac{2z}{9}\right)\vec{k} \Rightarrow \vec{\nabla} f(p) = (2x_0)\vec{i} + \left(\frac{y_0}{2}\right)\vec{j} + \left(\frac{2z_0}{9}\right)\vec{k} \perp \pi_0.$$

در نتیجه معادله صفحه مماس به صورت زیر به دست می‌آید.

$$\pi_0 : 2x_0(x - x_0) + \frac{y_0}{2}(y - y_0) + \frac{2z_0}{9}(z - z_0) = 0 \quad \text{یا} \quad 2x_0x + \frac{y_0y}{2} + \frac{2z_0z}{9} = 2(x_0^2 + \frac{y_0^2}{4} + \frac{z_0^2}{9}) = 2$$

اکنون محل برخورد این صفحه با هر یک از محورهای مختصات را به دست می‌آوریم.

$$\begin{array}{ll} \text{محل برخورد با محور } x & y = z = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{x_0} \\ \text{محل برخورد با محور } y & x = z = 0 \Rightarrow y = \frac{4}{y_0} \\ \text{محل برخورد با محور } z & x = y = 0 \Rightarrow z = \frac{9}{z_0} \end{array}$$



یادآوری می‌کنیم حجم هرم قائم با اضلاع قائم برابر a, b و c برابر $V = \frac{1}{6}abc$ خواهد بود. پس هرم حاصل در این مسئله حجمی برابر $V = \frac{1}{6} \frac{36}{x_0 y_0 z_0} = \frac{6}{x_0 y_0 z_0}$ خواهد داشت.

فرض کنیم $V(x, y, z) = \frac{6}{xyz}$. در این صورت هدف یافتن کمترین مقدار V است به شرط آنکه (x, y, z) روی رویه S قرار بگیرد، یا، (x, y, z) در معادله رویه، یعنی $f(x, y, z) = x^2 + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} = 1$ صدق کند. بنابر قضیه اکسترم‌های مقید، اسکالری چون λ وجود دارد که در نقطه نظیر مینیم، $\vec{\nabla} V = \lambda \vec{\nabla} f$ و $f(x, y, z) = 1$.

پس این معادلات را حل می‌کنیم.

$$\begin{cases} \frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{6}{x^2 y z} = \lambda \frac{\partial f}{\partial x} = 2\lambda x & (1) \\ \frac{\partial V}{\partial y} = -\frac{6}{x y^2 z} = \lambda \frac{\partial f}{\partial y} = \lambda \frac{y}{2} & (2) \\ \frac{\partial V}{\partial z} = -\frac{6}{x y z^2} = \lambda \frac{\partial f}{\partial z} = \lambda \frac{2z}{9} & (3) \\ f(x, y, z) = x^2 + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} = 1 & (4) \end{cases}$$

اگر طرفین معادله (۱) را در x ، طرفین معادله (۲) را در y و طرفین معادله (۳) را در z ضرب کنیم آنگاه

$$-\frac{6}{xyz} = 2\lambda x^2 = \lambda \frac{y^2}{2} = \lambda \frac{2z^2}{9}$$

در نتیجه با توجه به اینکه $\lambda \neq 0$ خواهیم داشت $x^2 = \frac{y^2}{4} = \frac{z^2}{9}$. اکنون با استفاده از معادله (۴)،

$$x^2 + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} = x^2 + x^2 + x^2 = 1$$

در نتیجه $x^2 = \frac{1}{3}$ و از آنجا $x^2 = \frac{4}{9} y^2 = 3$ و $y^2 = 9x^2 = 3$ و $z^2 = 9x^2 = 3$ در نتیجه

$$x = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad y = \frac{2}{\sqrt{3}} \quad z = \sqrt{3}$$

توجه کنیم که بنابر فرض مسئله، رویه S در ناحیه $x > 0$ ، $y > 0$ و $z > 0$ قرار گرفته است. به این ترتیب کمترین مقدار حجم برابر $\frac{6}{\sqrt{3}} = 3\sqrt{3}$ خواهد بود.

تمرین‌های بخش اکسترم توابع چند متغیره.

۱. اکسترم‌های موضعی (نسبی) توابع زیر و نوع آن‌ها را بر ناحیه D داده شده تعیین کنید.

$$D = \mathbb{R}^2 \quad f(x, y) = xy(1 - x^2 - y^2) \quad (\text{الف})$$

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x > 0, y > 0\} \quad f(x, y) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + xy \quad (\text{ب})$$

۲. به کمک یک تابع دو متغیره مناسب و محاسبه‌ی مینیم مطلق این تابع، فاصله‌ی بین دو خط متنافر

$$L_2 : \begin{cases} x = t \\ y = -t \\ z = t \end{cases} \text{ را تعیین نمایید. } L_1 : \begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = t - 1 \end{cases}$$

۳. روی کره‌ی $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ ، نقطه‌ای را تعیین کنید که مجموع مربعات فواصل آن از دو نقطه‌ی $(0, 2, 0)$ و $(0, 0, 2)$ مینیمم باشد.

۴. ابعاد مکعب مستطیلی را در یک هشتم اول فضا $(x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0)$ بیابید که یک راس آن در مبدا مختصات، راس مقابل این راس روی صفحه‌ی $x + 2y + 3z = 1$ و حجم آن ماکزیمم باشد.

۵. ماکزیمم تابع $f(x, y, z) = xyz$ را با شرط $x + y + z = c$ ($c > 0$) مقدار ثابت بیابید و سپس نتیجه بگیرید که اگر x و y و z سه عدد مثبت باشند آنگاه $\sqrt[3]{xyz} \geq \frac{x + y + z}{3}$.

۶. فرض کنید x ، y و z اضلاع یک مثلث، p نصف محیط این مثلث و S مساحت این مثلث باشد. به کمک فرمول

$$S^2 = p(p - x)(p - y)(p - z)$$

ثابت کنید بین همه مثلث‌های با محیط ثابت $2k$ ، مثلث متساوی‌الاضلاع بیشترین مساحت را دارد.

۷. نقطه‌ای بر خط $L : \begin{cases} x + y = 1 \\ y + z = 1 \end{cases}$ بیابید که مجموع مربعات فواصل آن از صفحات مختصات کمترین مقدار ممکن باشد.

۸. مثلث ABC با اضلاعی به طول‌های a ، b و c و مساحت ۴ مفروض است. M نقطه‌ای در درون مثلث است که فاصله‌اش تا اضلاع مثلث به ترتیب x ، y و z می‌باشد. الف) تحقیق کنید $ax + by + cz = 8$. ب) x و y و z را طوری تعیین کنید که $x^2 + y^2 + z^2$ کمترین مقدار ممکن باشد.

۹. صفحه $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ مفروض است. a و b و c ($a, b, c > 0$) را چنان بیابید که در شرط $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ صدق کنند و حجم هرم حاصل از برخورد صفحه‌ی فوق با صفحات مختصات ماکزیمم باشد. (حجم هرم $\frac{1}{6}$ حجم متساوی‌السطوحی است که روی یال‌های آن ساخته می‌شود).

۱۰. معادله‌ی کره‌ای به مرکز مبدا را بنویسید که استوانه‌ی $xy = 1$ را در دو و تنها دو نقطه قطع کند.

۱۱. ماکزیمم مقدار تابع $f(x, y, z) = x + y + z$ را با شرط $x^2 + y^2 + z^2 = 3a^2$ که در آن $a > 0$ ، بدست آورید و با استفاده از آن نتیجه بگیرید

$$x + y + z \leq \sqrt{3(x^2 + y^2 + z^2)}$$

۱۲. بیشترین مقدار افزایش تابع $f(x, y, z) = xy^2z^3$ در نقطه‌ی $P = (2, 1, -1)$ چقدر است و در چه سویی اتفاق می‌افتد؟

۱۳. برای توابع زیر نقاط بحرانی را مشخص کرده و تعیین کنید این نقاط نظیر ماکزیمم نسبی، مینیمم نسبی یا نقطه‌ی زینی هستند.

الف) $f(x, y) = 2x^2 + (y - 1)^2$

ب) $f(x, y) = 8x^3 + y^3 - 12xy + 6$

ج) $f(x, y) = (x - 1) \ln xy \quad (xy > 0)$

۱۴. فرض کنید تابع f روی $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4\}$ با ضابطه‌ی $f(x, y) = x^2 - y^2$ تعریف شده باشد. مقادیر ماکزیمم و مینیمم مطلق f را روی D به دست آورید.

۱۵. در ریاضیات پیشرفته ثابت می‌شود که یک تابع سه متغیره‌ی f با مشتقات جزئی مرتبه‌ی دوم پیوسته دارای یک مینیمم موضعی در نقطه‌ی بحرانی $P = (a, b, c)$ است هرگاه سه مقدار A ، B و E که توسط عبارات

$$A = f_{xx} \quad , \quad D = \det \begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{bmatrix} \quad , \quad E = \det \begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} & f_{xz} \\ f_{yx} & f_{yy} & f_{yz} \\ f_{zx} & f_{zy} & f_{zz} \end{bmatrix}$$

تعریف می‌شوند، در نقطه‌ی P مثبت باشند. همچنین f در P دارای یک ماکزیمم موضعی اکید است هرگاه در نقطه‌ی P داشته باشیم $A < 0$ ، $D > 0$ ، $E < 0$. با استفاده از آنچه بیان شد مقادیر ماکزیمم و مینیمم موضعی تابع f با ضابطه‌ی $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + 2z^2 + xy - 9x - 3y + 4z + 10$ را در صورت وجود پیدا کنید.

۱۶. آیا تابع f با ضابطه‌ی $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - xyz$ در مبدأ دارای ماکزیمم یا مینیمم موضعی است؟

۱۷. با استفاده از روش تکثیر کننده‌های لاگرانژ ماکزیمم یا مینیمم توابع زیر را با قید داده شده در صورت وجود پیدا کنید.

الف) $f(x, y) = x^2 + 8y^2$ ، $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$

ب) $f(x, y, z) = 2x - 3y + z - 1$ ، $x^2 + y^2 + z^2 = 14$

ج) $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ ، $x - 2y + 2z = 6$

د) $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$, $2x^2 + y^2 - z^2 = 2$

ه) $f(x, y, z) = xy + xz$, $x^2 + 2y^2 + 2z^2 = 4$

۱۸. با استفاده از روش تکثیرکننده‌های لاگرانژ فاصله‌ی بین نقطه‌ی $P = (-1, 4)$ و خط $12x - 5y + 71 = 0$ را پیدا کنید.

۱۹. با استفاده از روش تکثیرکننده‌های لاگرانژ نقاطی از بیضی با معادله‌ی $3x^2 - 2xy + 3y^2 - 2 = 0$ را پیدا کنید که فاصله‌ی آن‌ها تا مبدا کمترین یا بیشترین مقدار است.

۲۰. با استفاده از روش تکثیرکننده‌های لاگرانژ فاصله‌ی بین نقطه‌ی $P = (1, 1, 1)$ و صفحه‌ی π به معادله‌ی $2x + 6y - 9z + 12 = 0$ را پیدا کنید.

۲۱. می‌توان نشان داد که اگر تابع سه متغیره‌ی f دارای ماکزیمم یا مینیمم موضعی در نقطه‌ی $P = (a, b, c)$ با قیدهای $g(a, b, c) = 0$ و $h(a, b, c) = 0$ باشد، و اگر بردارهای گرادیان توابع f, g و h غیر صفر و غیر موازی باشند، آنگاه دو عدد μ و λ وجود دارند که

$$\nabla f(a, b, c) = \lambda \nabla g(a, b, c) + \mu \nabla h(a, b, c)$$

(مقادیر μ و λ تکثیرکننده‌های لاگرانژ نامیده می‌شوند. در اینجا فرض بر آن است که توابع f, g و h دارای مشتقات جزئی پیوسته هستند). با استفاده از توضیحات فوق فاصله‌ی بین مبدا و فصل مشترک دو صفحه‌ی $5 = x + 2y - z$ و $3 = x - y + z$ را پیدا کرده و پاسخ خود را با حل این مساله به کمک روش‌های دیگر مقایسه نمایید.

۲۲. اکسترم‌های مطلق توابع زیر را روی ناحیه‌های مشخص شده تعیین نمایید.

الف) $f(x, y) = x^2 + xy$, $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \leq 1\}$

ب) $f(x, y) = 2x - y^2$, $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 0 \leq x, 0 \leq y, x + y \leq 1\}$

ج) $f(x, y) = \sin(\frac{\pi xy}{2})$, $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 1 \leq x \leq 2, 1 \leq y \leq 2\}$

د) $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x+y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$, $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$

۲۳. درجه‌ی حرارت در نقاط مختلف قرص $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \leq 4\}$ توسط $T(x, y) = x^2 + 2y^2 - x$ داده می‌شود. گرم‌ترین و سردترین نقاط قرص D را تعیین کنید.

۲۴. اکسترم‌های مقید توابع زیر را تحت شرط‌های داده شده تعیین نمایید.

(الف) $f(x, y, z) = x + y + z$, $g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 3 = 0$

(ب) $f(x, y, z) = xyz$, $g(x, y, z) = 2xy + 3xz + yz = 72$

(ج) $f(x, y, z) = xy$, $g(x, y, z) = y^2 + z^2 - 1$

۲۵. نقطه‌ای را بر صفحه‌ی $x + 4y + 3z = 2$ تعیین کنید که تابع $f(x, y, z) = 2x^2 + 3y^2 + z^2$ در آن دارای کمترین مقدار باشد.

۲۶. نزدیکترین نقطه‌ی واقع بر رویه‌ی $xyz = 8$ به مبدا مختصات را تعیین نمایید. ثابت کنید خط واصل از مبدا به این نقطه، بر رویه عمود است.

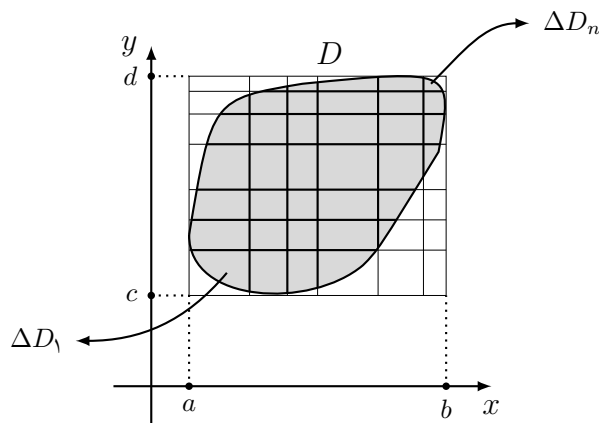
۲۷. در بین مجموعه‌ی مثلث‌ها، مثلی را تعیین کنید که مجموع سینوس زوایای آن بیشترین مقدار ممکن را داشته باشد.

فصل دوم انتگرال‌های چندگانه

مفهوم انتگرال یکی از پرکاربردترین مفاهیم ریاضی در علوم پایه و مهندسی است. تعریف انتگرال معین یک تابع حقیقی یک متغیره بر اساس حد حاصل جمع ریمان این تابع بر بازه‌ای بسته و کراندار را در درس ریاضی عمومی ۱ مشاهده کرده‌ایم. در این فصل، همین ساختار را برای توابع دو متغیره و سه متغیره گسترش داده، مفاهیم انتگرال دوگانه و سه‌گانه را تعریف خواهیم کرد. همین مفهوم برای یک تابع n متغیره نیز قابل تعریف است ولی بیان آن نیازمند چند مفهوم جدید خواهد بود که در این درس قابل ارائه نیست. بحث را با انتگرال دوگانه شروع می‌کنیم.

انتگرال دوگانه

فرض کنیم $D \subset \mathbb{R}^2$ ناحیه‌ای بسته و کراندار باشد. در این صورت می‌توانیم این ناحیه را به روش‌های مختلفی به مجموعه‌ای از نواحی کوچکتر افراز کنیم. یکی از روش‌های متداول، در نظر گرفتن کوچکترین مربع مستطیل در صفحه، مانند $[a, b] \times [c, d]$ ، در برگیرنده ناحیه D و سپس افراز هر یک از بازه‌های $[a, b]$ و $[c, d]$ است. به این ترتیب با استفاده از افراز این بازه‌ها می‌توانیم، مطابق شکل زیر، دامنه D را به مجموعه‌ای از نواحی کوچکتر، مانند $P = \{\Delta D_1, \dots, \Delta D_n\}$ افراز کنیم.



برای هر $i = 1, \dots, n$ فرض کنیم ΔA_i بیانگر مساحت ناحیه ΔD_i باشد. برای هر یک از نواحی ΔD_i می‌توانیم مفهوم قطر این ناحیه را نیز برابر قطر کوچکترین دایره در برگیرنده این ناحیه تعریف کنیم. قطر این ناحیه را با نماد $\text{diam}(\Delta D_i)$ نشان می‌دهیم. نهایتاً برای افراز P از ناحیه D قرار می‌دهیم $\|P\| := \max\{\text{diam}(\Delta D_i); i = 1, \dots, n\}$. روشن است که اگر $\|P\|$ کوچک شود آنگاه ابعاد هر یک از نواحی ΔD_i کوچک شده، تعداد این زیرناحیه‌ها، یعنی n ، افزایش خواهد یافت.

اکنون فرض کنیم $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ تابعی کراندار بر این دامنه باشد. برای افراز $P = \{\Delta D_1, \dots, \Delta D_n\}$

از ناحیه D ، فرض کنیم $p_1 \in \Delta D_1, \dots, p_n \in \Delta D_n$ نقاطی اختیاری باشند. در این صورت عبارت $f(p_1)\Delta A_1 + \dots + f(p_n)\Delta A_n = \sum_{i=1}^n f(p_i)\Delta A_i$ را یک حاصل جمع ریمان متناظر با افراز P نامیده آن را با نماد $S(f, P)$ نشان می‌دهیم. اگر با تغییر افراز P به گونه‌ای که $\|P\| \rightarrow 0$ عبارات $S(f, P)$ همگرا شوند آنگاه f را بر D انتگرال‌پذیر نامیده، $\lim_{\|P\| \rightarrow 0} S(f, P)$ را با یکی از نمادهای $\iint_D f dA$ ، $\iint_D f(x, y) dx dy$ یا $\iint_D f(x, y) dx dy$ نشان می‌دهیم.

مثال. فرض کنیم $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ تابع ثابت $f(x, y) = k$ باشد. در این صورت برای هر افراز $P = \{\Delta D_1, \dots, \Delta D_n\}$ از ناحیه D ، و برای هر انتخاب نقاط $p_i \in \Delta D_i$ مقدار $f(p_i)$ ثابت و برابر k خواهد بود. در نتیجه

$$S(f, P) = \sum_{i=1}^n f(p_i)\Delta A_i = k \sum_{i=1}^n \Delta A_i = kA$$

که در آن A مساحت ناحیه D است. در نتیجه $\iint_D f dA = \lim_{\|P\| \rightarrow 0} S(f, P) = kA$.

تذکر. در مباحث فوق، مفهوم مساحت یک ناحیه از صفحه را مفهومی شهودی در نظر گرفته‌ایم. در حالی که در واقع این مفهوم خود نیازمند تعریف است. فرض کنیم D ناحیه‌ای بسته و کراندار در صفحه بوده، مستطیل $[a, b] \times [c, d]$ کوچکترین مربع مستطیل در برگیرنده ناحیه D باشد. با در نظر گرفتن افرازهایی از بازه‌های $[a, b]$ و $[c, d]$ ، مستطیل $[a, b] \times [c, d]$ به مجموعه‌ای از مستطیل‌های کوچکتر افراز می‌شود. روشن است که مجموع مساحت زیرمستطیل‌هایی که کاملاً در ناحیه D قرار می‌گیرند یک تقریب پایینی برای مساحت این ناحیه محسوب می‌شود. به همین ترتیب مجموع مساحت زیرمستطیل‌هایی که با ناحیه D اشتراک غیرتهی دارند نیز یک تقریب بالایی برای مساحت ناحیه D خواهد بود. ناحیه D را مساحت‌پذیر (یا اندازه‌پذیر جردن) نامیم هرگاه عددی چون A وجود داشته باشد با این خاصیت که بتوانیم با ظریف‌تر کردن افرازهای دو بازه $[a, b]$ و $[c, d]$ هر دو تقریب بالایی و پایینی مساحت را به اندازه دلخواه به عدد A نزدیک کنیم و در این صورت عدد A را مساحت ناحیه D می‌نامیم. در ادامه بحث، با مفهوم مساحت به همان صورت شهودی کار خواهیم کرد.

اولین سؤالی که برایمان مطرح می‌شود این است که آیا هر تابع کراندار بر یک ناحیه داده شده انتگرال‌پذیر است؟ طبیعی که پاسخ این سؤال منفی خواهد بود اگرچه که ارائه مثالی از یک تابع انتگرال‌ناپذیر از حوصله این درس خارج است. با وجود این قضیه‌ای به صورت زیر داریم.

قضیه

فرض کنیم D ناحیه‌ای بسته و کراندار (و مساحت‌پذیر) در صفحه باشد. اگر $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ بر D پیوسته باشد آنگاه f بر D انتگرال‌پذیر است.

در ادامه، سعی می‌کنیم روشی برای محاسبه انتگرال دوگانه بیابیم. زیرا روشن است که استفاده از تعریف انتگرال دوگانه، یعنی محاسبه حد یک حاصل جمع ریمان، بسیار دشوار و در بسیاری از موارد غیرعملی است. قبل از انجام این کار نخست برخی از خاصیت‌های مهم انتگرال دوگانه را مورد توجه قرار می‌دهیم. برخی از این خاصیت‌ها به سادگی با استفاده از تعریف انتگرال دوگانه قابل اثبات هستند. با وجود این، در اینجا از ارائه اثبات آنها صرف‌نظر می‌شود.

خاصیت اول

اگر $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$ بر D انتگرال‌پذیر باشند آنگاه برای هر دو ثابت α و β ، تابع $\alpha f + \beta g$ نیز بر D انتگرال‌پذیر است و

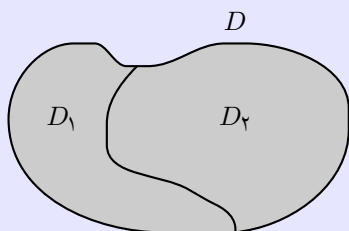
$$\iint_D (\alpha f + \beta g) = \alpha \left(\iint_D f \right) + \beta \left(\iint_D g \right)$$

خاصیت دوم

اگر f و g بر D انتگرال‌پذیر باشند و برای هر $(x, y) \in D$ ، $f(x, y) \leq g(x, y)$ آنگاه

$$\iint_D f \leq \iint_D g$$

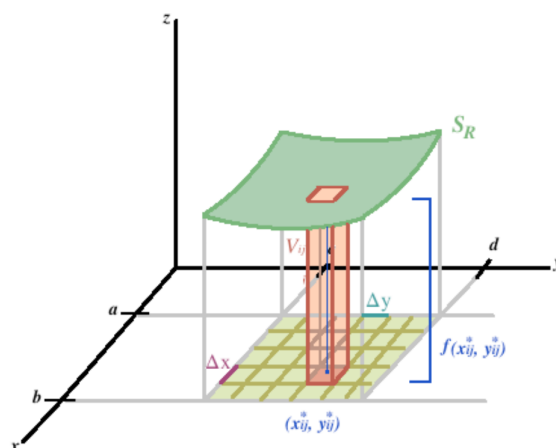
فرض کنیم $D = D_1 \cup D_2$ و $D_1 \cap D_2$ مجموعه‌ای از نقاط مرزی باشد. آنگاه f بر D انتگرال پذیر است اگر و تنها اگر f بر هر یک از ناحیه‌های D_1 و D_2 انتگرال پذیر باشد و در این صورت



$$\iint_D f = \iint_{D_1} f + \iint_{D_2} f$$

بعدها مشاهده می‌کنیم که چگونه خاصیت‌های فوق مورد استفاده قرار می‌گیرند.

تعبیر هندسی انتگرال دوگانه. فرض کنیم $D \subset \mathbb{R}^2$ ناحیه‌ای بسته و کراندار (و مساحت پذیر) و $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ تابعی پیوسته و نامنفی باشد. همچنین فرض کنیم S رویه نمایش تابع f بر دامنه D باشد. متناظر با افراز $P = \{\Delta D_1, \dots, \Delta D_n\}$ از ناحیه D و انتخاب نقاط $p_i \in \Delta D_i$ عبارت $f(p_i)\Delta A_i$ به طور تقریبی حجم زیر رویه S بالای ناحیه ΔD_i را نشان می‌دهد. به این ترتیب، مجموع ریمان $\sum_{i=1}^n f(p_i)\Delta A_i$ تقریبی از حجم زیر رویه S بالای ناحیه D خواهد بود. روشن است که این تقریب دقیق‌تر خواهد بود اگر ابعاد زیرناحیه‌های تشکیل‌دهنده افراز P کوچکتر بوده، تعداد آنها بیشتر باشد. به این ترتیب عبارت $\iint_D f = \lim_{\|P\| \rightarrow 0} S(f, P)$ بیانگر حجم مورد اشاره خواهد بود.

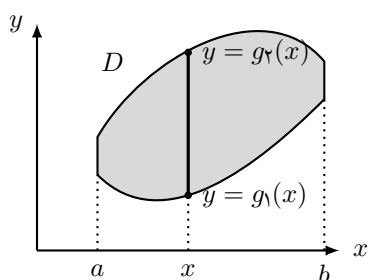


در حالتی که تابع f بر دامنه D تابعی پیوسته و دلخواه باشد (نه لزوماً نامنفی) آنگاه مقدار $\iint_D f$ برابر جمع جبری حجم‌های بین رویه S و صفحه xoy بر ناحیه D است. در این حالت، قسمت‌هایی که زیر صفحه xoy

قرار دارند ایجاد حجم جبری با علامت منفی می‌کنند.

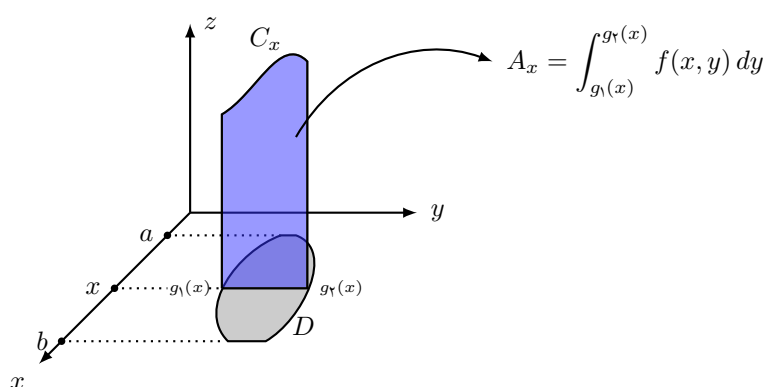
محاسبه انتگرال دوگانه. در این قسمت با روشی برای محاسبه انتگرال دوگانه آشنا می‌شویم. برای این منظور، ابتدا دو دسته از نواحی را در صفحه تعریف کرده، محاسبه انتگرال دوگانه توابع پیوسته بر هر یک از این نواحی را مشاهده می‌کنیم. نواحی کلی‌تر در صفحه را می‌توان با استفاده از خطوطی به موازات محورهای مختصات، به اجتماعی از این دو دسته ناحیه تقسیم کرده، سپس با استفاده از خواص انتگرال دوگانه به محاسبه انتگرال پرداخت. دو دسته ناحیه مورد اشاره به ترتیب ناحیه ساده عمودی و ناحیه ساده افقی نامیده می‌شوند.

نواحی ساده عمودی. ناحیه $D \subset \mathbb{R}^2$ را یک ناحیه ساده عمودی نامیم هرگاه بازه‌ای چون $[a, b] \subset \mathbb{R}$ و توابع $g_1, g_2 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ وجود داشته باشند که برای هر $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ،



$$(x, y) \in D \Leftrightarrow \begin{cases} a \leq x \leq b \\ g_1(x) \leq y \leq g_2(x) \end{cases}$$

در این حالت، اگر برای $x \in [a, b]$ ، C_x منحنی حاصل از برخورد رویه نمایش تابع پیوسته و نامنفی $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ با صفحه گذرنده از x و عمود بر محور x باشد آنگاه مساحت زیر منحنی C_x در بازه $[g_1(x), g_2(x)]$ برابر $A(x) = \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) dy$ خواهد بود.



با داشتن $A(x)$ برای هر $x \in [a, b]$ می‌توان حجم زیر رویه S را با استفاده از دستور $\int_a^b A(x) dx$ محاسبه

نمود. به این ترتیب، در مورد این دسته از نواحی

$$\iint_D f \, dA = \int_a^b \left(\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) \, dy \right) dx \quad (۴)$$

عبارت سمت راست فرمول فوق تحت نام انتگرال گیری مکرر نامیده می شود. در این عبارت، نخست انتگرال داخل که بر حسب متغیر y است محاسبه می شود. برای این امر لازم است تابع اولیه $f(x, y)$ نسبت به متغیر y (یعنی زمانی که متغیر x ثابت در نظر گرفته می شود) محاسبه شده، مطابق روش محاسبه انتگرال معین این انتگرال معین را با حد پایین $g_1(x)$ و حد بالای $g_2(x)$ محاسبه نماییم. روشن است که بعد از انجام این محاسبات، عبارتی بر حسب x حاصل خواهد شد. در نهایت انتگرال معین تابع حاصل بر حسب x را بر بازه $[a, b]$ محاسبه می کنیم.

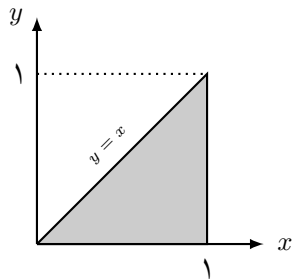
اگر چه برای رسیدن به رابطه (۴) از نامنفی بودن تابع f استفاده کرده ایم، ولی این رابطه برای هر تابع پیوسته دلخواه f بر دامنه D نیز برقرار می باشد.

مثال. فرض کنید f تابع با ضابطه $f(x, y) = 2x - 3y$ باشد. مطلوب است محاسبه $\iint_D f \, dA$ در هریک از حالت های زیر.

الف) ناحیه محصور توسط خطوط $y = 0$ ، $x = 1$ و $y = x$.

ب) ناحیه محصور توسط خطوط $y = 1$ ، $x = 0$ و $y = x$.

الف) برای ناحیه D در این قسمت،

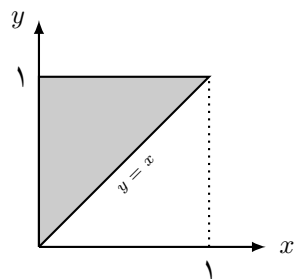


$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad (x, y) \in D \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq x \end{cases}$$

به این ترتیب D یک ناحیه ساده عمودی است که برای آن $[a, b] = [0, 1]$ ، تابع ثابت $g_1 = 0$ است و $g_2(x) = x$. به این ترتیب، طبق فرمول (۴)،

$$\begin{aligned} \iint_D f(x, y) \, dx \, dy &= \int_0^1 \left(\int_0^x (2x - 3y) \, dy \right) dx \\ &= \int_0^1 \left(2xy - \frac{3}{2}y^2 \Big|_0^x \right) dx \\ &= \int_0^1 \left(\frac{1}{2}x^2 \right) dx = \frac{1}{6}x^3 \Big|_0^1 = \frac{1}{6} \end{aligned}$$

(ب) برای این ناحیه



$$(x, y) \in D \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ x \leq y \leq 1 \end{cases}$$

به این ترتیب، این ناحیه نیز ساده عمودی بوده، توابع g_1 و g_2 بر بازه $[0, 1]$ با دستور $g_1(x) = x$ و $g_2(x) = 1$ تعریف شده‌اند. در نتیجه

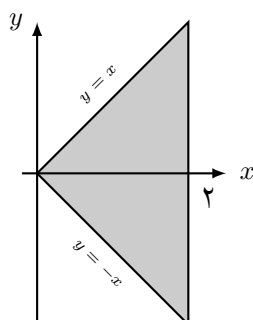
$$\begin{aligned} \iint_D f(x, y) dx dy &= \int_0^1 \left(\int_x^1 (2x - 3y) dy \right) dx \\ &= \int_0^1 \left(2xy - \frac{3}{2}y^2 \Big|_x^1 \right) dx \\ &= \int_0^1 \left(2x - \frac{3}{2} - \frac{1}{2}x^2 \right) dx = \left(x^2 - \frac{3}{2}x - \frac{1}{6}x^3 \right) \Big|_0^1 = -\frac{2}{3} \end{aligned}$$

مثال. مطلوب است محاسبه هر یک از انتگرال‌های زیر.

الف) $\iint_D e^{(x+y)} dx dy$ ناحیه محصور بین $x = 2$ و $x = |y|$

ب) $\iint_D (2xy - 1) dx dy$ ناحیه محصور بین دو منحنی $y = x$ و $y = x^3$

الف) برای ناحیه D در این قسمت

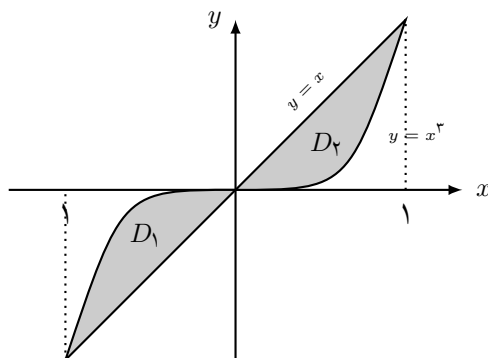


$$(x, y) \in D \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq x \leq 2 \\ -x \leq y \leq x \end{cases}$$

در نتیجه

$$\begin{aligned} \iint_D e^{(x+y)} dx dy &= \int_0^2 \left(\int_{-x}^x e^x e^y dy \right) dx = \int_0^2 e^x \left(e^y \Big|_{-x}^x \right) dx \\ &= \int_0^2 e^x (e^x - e^{-x}) dx = \int_0^2 (e^{2x} - 1) dx \\ &= \left(\frac{1}{2} e^{2x} - x \right) \Big|_0^2 = \frac{1}{2} e^4 - 2 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} e^4 - \frac{5}{2} \end{aligned}$$

ب) با ترسیم نمودار دو منحنی $y = x^3$ و $y = x$ در صفحه، مشاهده می‌شود ناحیه محصور بین این دو منحنی از دو ناحیه D_1 و D_2 تشکیل شده است. به این ترتیب، بنابر خاصیت سوم انتگرال دوگانه



$$\iint_D (2xy - 1) dx dy = \iint_{D_1} (2xy - 1) dx dy + \iint_{D_2} (2xy - 1) dx dy$$

اکنون هر یک از نواحی D_1 و D_2 را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

$$(x, y) \in D_1 \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leq x \leq 0 \\ x \leq y \leq x^3 \end{cases} \quad \text{و} \quad (x, y) \in D_2 \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ x^3 \leq y \leq x \end{cases}$$

در نتیجه

$$\begin{aligned} \iint_D (2xy - 1) dx dy &= \int_{-1}^0 \int_x^{x^3} (2xy - 1) dy dx + \int_0^1 \int_{x^3}^x (2xy - 1) dy dx \\ &= \int_{-1}^0 (xy^2 - y) \Big|_x^{x^3} dx + \int_0^1 (xy^2 - y) \Big|_{x^3}^x dx \\ &= \int_{-1}^0 (x^4 - 2x^3 + x) dx + \int_0^1 (2x^3 - x - x^4) dx = -\frac{1}{8} - \frac{1}{8} = -\frac{1}{4} \end{aligned}$$

نواحی ساده افقی. ناحیه $D \subset \mathbb{R}^2$ را یک ناحیه ساده افقی نامیم هرگاه بازه‌ای چون $[c, d] \subset \mathbb{R}$ و توابع $h_1, h_2 : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ وجود داشته باشند که برای هر $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

$$(x, y) \in D \Leftrightarrow \begin{cases} c \leq y \leq d \\ h_1(y) \leq x \leq h_2(y) \end{cases}$$

در این حالت اگر $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ تابعی پیوسته باشد آنگاه، با استدلالی مشابه نواحی ساده عمودی، می‌توان

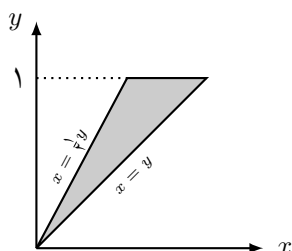
نشان داد که

$$\iint_D f \, dA = \int_c^d \left(\int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y) \, dx \right) dy \quad (5)$$

مثال. مطلوب است محاسبه هر یک از انتگرال‌های زیر.

- الف) $\iint_D x \, dx \, dy$ ناحیه محصور بین خطوط $y = 1$ و $y = 2x$ ، $y = x$
- ب) $\iint_D x^2 \sqrt{1-y^2} \, dA$ ناحیه محصور توسط دایره $x^2 + y^2 = 1$ در ناحیه $y \geq 0$
- ج) $\iint_D |x - y^3| \, dA$ $D = [0, 1] \times [0, 1]$

الف) برای ناحیه D در این قسمت

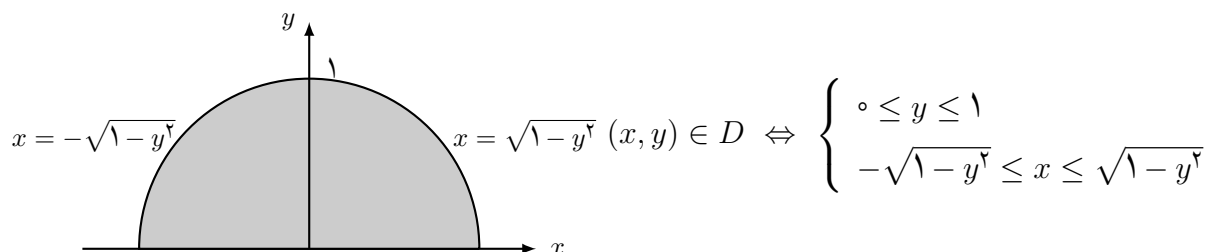


$$(x, y) \in D \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq y \leq 1 \\ \frac{1}{2}y \leq x \leq y \end{cases}$$

در نتیجه با استفاده از فرمول (5)،

$$\begin{aligned} \iint_D x \, dx \, dy &= \int_0^1 \left(\int_{\frac{1}{2}y}^y x \, dx \right) dy = \int_0^1 \left(\frac{1}{2}x^2 \right) \Big|_{\frac{1}{2}y}^y dy \\ &= \int_0^1 \frac{3}{8}y^2 \, dy = \frac{1}{8}y^3 \Big|_0^1 = \frac{1}{8} \end{aligned}$$

ب) توجه می‌کنیم ناحیه D در این جا، قسمتی از ناحیه محصور توسط دایره $x^2 + y^2 = 1$ بالای محور x است. به این ترتیب



$$(x, y) \in D \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq y \leq 1 \\ -\sqrt{1-y^2} \leq x \leq \sqrt{1-y^2} \end{cases}$$

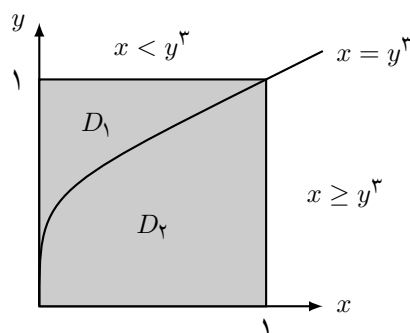
در نتیجه

$$\begin{aligned}\iint_D \sqrt{1-y^2} dx dy &= \int_0^1 \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} \sqrt{1-y^2} dx dy = \int_0^1 \sqrt{1-y^2} \left(\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} dx \right) dy \\ &= \int_0^1 2(1-y^2) dy = \left(2y - \frac{2}{3}y^3 \right) \Big|_0^1 = 2 - \frac{2}{3} = \frac{4}{3}\end{aligned}$$

ج) در این مثال، ساختار تابع $f(x, y) = |x - y^3|$ اجازه محاسبه تابع اولیه نسبت به x یا y را نمی‌دهد. لذا لازم است ابتدا ضابطه تابع را بدون وجود قدرمطلق بیان کنیم. بر این اساس

$$f(x, y) = \begin{cases} x - y^3 & x - y^3 \geq 0 \text{ یا } x \geq y^3 \\ y^3 - x & x - y^3 < 0 \text{ یا } x < y^3 \end{cases}$$

با توجه به نحوه تعریف f در دو ناحیه $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq y^3\}$ و $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x < y^3\}$ و با توجه به ناحیه D ، لازم است این ناحیه به دو ناحیه D_1 و D_2 (مطابق شکل زیر) تقسیم شود.



در نتیجه

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{D_1} f(x, y) dx dy + \iint_{D_2} f(x, y) dx dy = \iint_{D_1} (y^3 - x) dx dy + \iint_{D_2} (x - y^3) dx dy$$

اکنون نامعادلات هر یک از نواحی D_1 و D_2 را مورد توجه قرار می‌دهیم.

$$D_1 : \begin{cases} 0 \leq y \leq 1 \\ 0 \leq x \leq y^3 \end{cases} \quad \text{و} \quad D_2 : \begin{cases} 0 \leq y \leq 1 \\ y^3 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

به این ترتیب

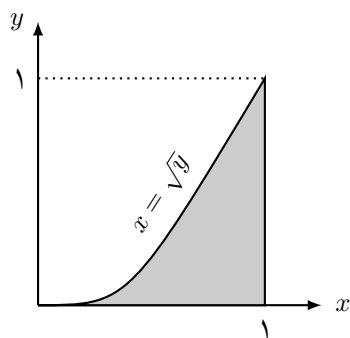
$$\begin{aligned}
 \iint_D |x - y^3| dx dy &= \iint_{D_1} (y^3 - x) dx dy + \iint_{D_2} (x - y^3) dx dy \\
 &= \int_0^1 \int_0^{y^3} (y^3 - x) dx dy + \int_0^1 \int_{y^3}^1 (x - y^3) dx dy \\
 &= \int_0^1 \left(y^3 x - \frac{1}{2} x^2 \right) \Big|_0^{y^3} dy + \int_0^1 \left(\frac{1}{2} x^2 - x y^3 \right) \Big|_{y^3}^1 dy \\
 &= \int_0^1 \frac{1}{2} y^6 dy + \int_0^1 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} y^6 \right) dy = \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

همانطور که در برخی مثال‌های فوق نیز مشاهده می‌شود، برخی نواحی در صفحه در هر دو دسته نواحی ساده عمودی و ساده افقی قرار می‌گیرند. طبیعتاً مقدار انتگرال دوگانه را می‌توان با لحاظ ناحیه تحت هر یک از قالب‌های فوق محاسبه نمود. با وجود این گاهی اوقات محاسبه انتگرال‌های مکرر تحت یک ترتیب اتخاذ شده امکان دارد غیر عملی باشد. در این حالت، با تغییر نامعادلات ناحیه، و در نتیجه تشکیل انتگرال‌های مکرر در قالب دیگر، شاید انتگرال‌ها قابل محاسبه باشند. این روند را اصطلاحاً تغییر ترتیب انتگرال‌گیری در انتگرال دوگانه می‌نامیم.

مثال. مطلوب است محاسبه هر یک از دو انتگرال زیر.

$$\text{الف) } \int_0^1 \int_{\sqrt{y}}^1 e^{\frac{y}{x}} dx dy$$

همان گونه که مشاهده می‌شود، در انتگرال‌های مکرر داده شده در این جا، انتگرال داخلی نسبت به متغیر x باید حساب شود و این در حالی است که تابع $f(x, y) = e^{\frac{y}{x}}$ تابع اولیه در فرم توابع مقدماتی نسبت به متغیر x ندارد. به این ترتیب، انتگرال‌های مکرر در ترتیب داده شده در این حالت قابل محاسبه نیست. اکنون برای تغییر ترتیب انتگرال‌گیری، ابتدا ناحیه انتگرال‌گیری در صفحه را بر اساس حدود انتگرال‌های مکرر داده شده تعیین می‌کنیم.



$$D : \begin{cases} 0 \leq y \leq 1 \\ \sqrt{y} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

در نتیجه، ناحیه مورد نظر در صفحه ناحیه محصور بین سهمی $y = x^2$ ، خط $x = 1$ و خط $y = 0$ است. توجه می‌کنیم نامعادلات فوق ناحیه D را به عنوان یک ناحیه ساده افقی توصیف می‌کنند. اکنون توصیف این ناحیه به عنوان یک ناحیه ساده عمودی را بیان می‌کنیم.

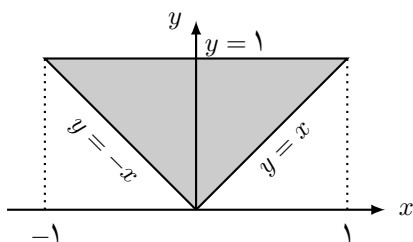
$$D : \begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq x^2 \end{cases}$$

به این ترتیب

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_{\sqrt{y}}^1 e^{\frac{y}{x}} dx dy &= \iint_D e^{\frac{y}{x}} dx dy \\ &= \int_0^1 \int_0^{x^2} e^{\frac{y}{x}} dy dx \\ &= \int_0^1 \left(x e^{\frac{y}{x}} \right) \Big|_0^{x^2} dx = \int_0^1 x(e^x - 1) dx = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

$$\text{ب) } \int_{-1}^1 \int_{|x|}^1 \sin\left(\frac{\pi x}{y}\right) dy dx$$

در ترتیب داده شده در اینجا، باید ابتدا انتگرال‌گیری نسبت به متغیر y انجام شود. در این حالت نیز تابع $f(x, y) = \sin\left(\frac{\pi x}{y}\right)$ تابع اولیه در فرم توابع مقدماتی نسبت به متغیر y ندارد. بنابر این محاسبه انتگرال‌های مکرر داده شده به صورت تحلیلی مقدور نیست. پس مانند قسمت قبل، ابتدا ناحیه انتگرال‌گیری در صفحه را با استفاده از حدود انتگرال‌های مکرر داده شده تعیین می‌کنیم.



$$D : \begin{cases} -1 \leq x \leq 1 \\ |x| \leq y \leq 1 \end{cases}$$

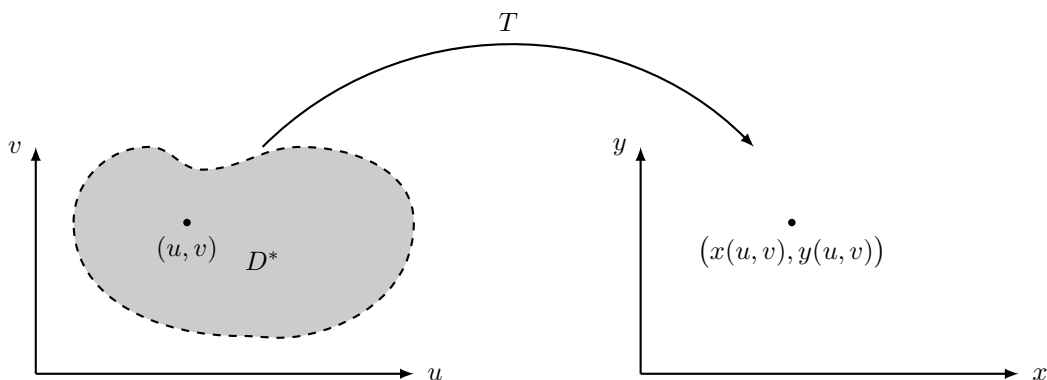
بیان فوق از ناحیه D این ناحیه را به عنوان یک ناحیه ساده عمودی توصیف می‌کند. اکنون برای تعویض ترتیب انتگرال‌گیری، توصیف ناحیه را عوض کرده، آن را به عنوان یک ناحیه ساده افقی معرفی می‌کنیم.

$$D : \begin{cases} 0 \leq y \leq 1 \\ -y \leq x \leq y \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \int_{|x|}^1 \sin\left(\frac{\pi x}{y}\right) dy dx &= \iint_D \sin\left(\frac{\pi x}{y}\right) dx dy \\ &= \int_0^1 \int_{-y}^y \sin\left(\frac{\pi x}{y}\right) dx dy \\ &= \int_0^1 \left(-\frac{y}{\pi} \cos\left(\frac{\pi x}{y}\right)\right) \Big|_{-y}^y dy = 0 \end{aligned}$$

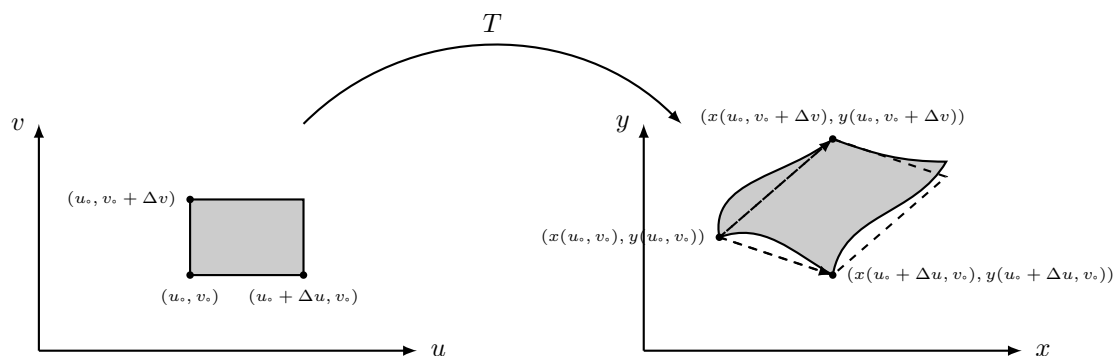
تغییر متغیر در انتگرال دوگانه. همانگونه که از بحث انتگرال توابع یک متغیره به خاطر داریم، انگیزه تغییر متغیر در این انتگرال‌ها ساده‌تر کردن انتگرال است. در بحث انتگرال دوگانه، علاوه بر این انگیزه، یعنی ساده‌تر کردن ساختار تابع $f(x, y)$ ، گاهی اوقات ساده‌تر کردن ساختار ناحیه انتگرال‌گیری در صفحه نیز می‌تواند انگیزه‌ای برای تغییر متغیر در انتگرال دوگانه باشد. بحث را به صورت زیر آغاز می‌کنیم.

فرض کنیم D^* ناحیه‌ای در صفحه uov بوده، توابع $x = x(u, v)$ و $y = y(u, v)$ توابعی تعریف شده بر این ناحیه باشند. در این صورت تابع جدیدی چون $T : D^* \rightarrow \mathbb{R}^2$ با دستور $T(u, v) = (x(u, v), y(u, v))$ قابل تعریف خواهد بود. نگاشت T را اصطلاحاً یک تبدیل می‌نامیم.



تحت این تبدیل، زیرمجموعه‌های مختلف ناحیه D^* تبدیل به زیرمجموعه‌هایی از صفحه xoy می‌شوند. فرض کنیم توابع $x(u, v)$ و $y(u, v)$ در نقاط درونی ناحیه D^* مشتقات جزئی پیوسته داشته باشند. به این ترتیب، بنابر مباحث قبلی، هر دو تابع در نقاط درونی D^* مشتق‌پذیر خواهند بود. فرض کنیم $(u_0, v_0) \in D^*$ نقطه‌ای درونی بوده، $(\Delta u, \Delta v)$ نمو کوچکی باشد با این خاصیت که اولاً Δu و Δv مثبت باشند و در ثانی مستطیل $[u_0, u_0 + \Delta u] \times [v_0, v_0 + \Delta v]$ درون D^* قرار بگیرد. همچنین فرض کنیم ΔD تصویر مستطیل فوق تحت تبدیل T در صفحه xoy باشد. اگر ΔA مساحت ناحیه ΔD را نشان دهد آنگاه (مطابق شکل زیر)، با تقریب ناحیه ΔD با متوازی‌اضلاع بنا شده بر سه نقطه $(x(u_0, v_0), y(u_0, v_0))$

خواهیم داشت $(x(u_0 + \Delta u, v_0), y(u_0 + \Delta u, v_0))$ و $(x(u_0, v_0 + \Delta v), y(u_0, v_0 + \Delta v))$ ،



$$\Delta A \approx \left\| \begin{pmatrix} x(u_0, v_0 + \Delta v) - x(u_0, v_0) \\ y(u_0, v_0 + \Delta v) - y(u_0, v_0) \\ \circ \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x(u_0 + \Delta u, v_0) - x(u_0, v_0) \\ y(u_0 + \Delta u, v_0) - y(u_0, v_0) \\ \circ \end{pmatrix} \right\| \quad (6)$$

با توجه به مشتق‌پذیری توابع $x(u, v)$ و $y(u, v)$ در نقطه (u_0, v_0) ، با استفاده از تقریب خطی توابع مشتق‌پذیر، خواهیم داشت

$$x(u_0, v_0 + \Delta v) - x(u_0, v_0) \approx \frac{\partial x}{\partial u}(u_0, v_0) \times \circ + \frac{\partial x}{\partial v}(u_0, v_0) \Delta v = \frac{\partial x}{\partial v}(u_0, v_0) \Delta v$$

به همین ترتیب،

$$\begin{aligned} x(u_0 + \Delta u, v_0) - x(u_0, v_0) &\approx \frac{\partial x}{\partial u}(u_0, v_0) \Delta u \\ y(u_0, v_0 + \Delta v) - x(u_0, v_0) &\approx \frac{\partial y}{\partial v}(u_0, v_0) \Delta v \\ y(u_0 + \Delta u, v_0) - y(u_0, v_0) &\approx \frac{\partial y}{\partial u}(u_0, v_0) \Delta u \end{aligned}$$

با جایگذاری عبارات فوق در فرمول (6)،

$$\Delta A \approx \left\| \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial v} \\ \circ \end{pmatrix} \Delta v \times \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} \\ \frac{\partial y}{\partial u} \\ \circ \end{pmatrix} \Delta u \right\| = \left| \det \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix} \right| \Delta u \Delta v = \left| \det \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix} \right| \Delta A^*$$

که در آن $\Delta A^* = \Delta u \Delta v$ مساحت مستطیل $[u_0, u_0 + \Delta u] \times [v_0, v_0 + \Delta v]$ در صفحه uov است. عبارت $\det \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix}$ را ژاکوبین تبدیل T ، یا اصلاحا ژاکوبین تغییر متغیر نامیده، آن را با نماد $\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}$ نیز نمایش می‌دهند.

قرار می‌دهیم $D = G(D^*)$. فرض کنیم

(الف) تبدیل $T : D^* \rightarrow D$ تابعی یک به یک باشد.

(ب) برای هر نقطه درونی $(u, v) \in D^*$ ، $\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \neq 0$.

تحت این شرایط، اگر $P^* = \{\Delta D_1^*, \dots, \Delta D_n^*\}$ افرازی از ناحیه D^* و $P = \{\Delta D_1, \dots, \Delta D_n\}$ افراز متناظر از ناحیه D باشد آنگاه برای هر $i = 1, \dots, n$ ، $\Delta A_i \approx \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \Delta A_i^*$. به این ترتیب اگر $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ تابعی پیوسته باشد آنگاه

$$\sum_{i=1}^n f(p_i) \Delta A_i \approx \sum_{i=1}^n f(p_i^*) \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| \Delta A_i^*$$

که در آن $p_i \in \Delta D_i$ و $p_i^* \in \Delta D_i^*$ نقاط متناظر تحت تبدیل T هستند. با توجه به اینکه تقریب فوق دقیق‌تر خواهد بود اگر $\|P^*\|$ (و از آنجا $\|P\|$) کوچک و کوچک‌تر شود، قضیه تغییر متغیر در انتگرال دوگانه به صورت زیر حاصل می‌شود.

قضیه

تحت شرایط بیان شده در بالا

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{D^*} f(x(u, v), y(u, v)) \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du dv$$

مثال. مطلوب است محاسبه هر یک از انتگرال‌های زیر.

(الف) $\iint_D e^{\frac{y}{x+y}} dA$ که در آن D ناحیه محصور بین خطوط $x = 0$ ، $y = 0$ ، $x + y = 1$ است.

همانگونه که اشاره کردیم، تغییر متغیر در انتگرال دوگانه به معنی معرفی صفحه‌ای جدید از متغیرها و ارتباط مناسب بین دو دسته متغیرهای قدیم و متغیرهای جدید است که ساختار انتگرال دوگانه (ساختار تابع یا ساختار ناحیه) را ساده‌تر نماید. در مثال اخیر، ساختار تابع $f(x, y) = e^{\frac{y}{x+y}}$ محاسبه انتگرال‌های مکرر را ناممکن می‌سازد. بر این مبنا، دو متغیر جدید، مانند u و v را به صورت زیر به متغیرهای x و y مربوط می‌کنیم.

$$u := x + y \quad \text{و} \quad v := y$$

در این صورت $x(u, v) = u - y = u - v$ و $y(u, v) = v$. تحت این تغییر متغیر، ناحیه D از صفحه xoy

متناظر با ناحیه محصور بین خطوط $u = 1$ (نظیر خط $x + y = 1$)، $v = 0$ (نظیر خط $y = 0$) و $u = v$ (نظیر خط $x = 0$) خواهد بود. در این تغییر متغیر

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1$$

به این ترتیب،

$$\iint_D e^{\frac{y}{x+y}} dx dy = \iint_{D^*} e^{\frac{v}{u}} \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du dv = \iint_{D^*} e^{\frac{v}{u}} du dv$$

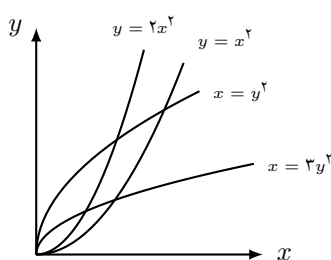
با در نظر گرفتن ناحیه D^* به عنوان یک ناحیه ساده عمودی، خواهیم داشت

$$(u, v) \in D^* \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq u \leq 1 \\ 0 \leq v \leq u \end{cases}$$

در نتیجه

$$\begin{aligned} \iint_{D^*} e^{\frac{v}{u}} du dv &= \int_0^1 \int_0^u e^{\frac{v}{u}} dv du = \int_0^1 \left(u e^{\frac{v}{u}} \right) \Big|_0^u du \\ &= \int_0^1 u(e - 1) du = \frac{e - 1}{2} \end{aligned}$$

ب) $\iint_D \frac{x}{y} dx dy$ که در آن D ناحیه محصور بین منحنی‌های $x = y^2$ ، $x = 3y^2$ ، $y = x^2$ و $y = 2x^2$ است.



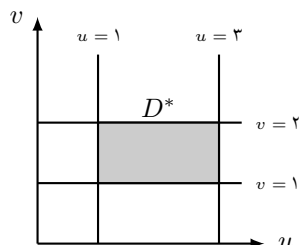
در اینجا انگیزه تغییر متغیر پیچیدگی ناحیه D است. بر این اساس متغیرهای جدید u و v را به صورت زیر به متغیرهای x و y مربوط می‌کنیم.

$$u := \frac{x}{y^2} \quad \text{و} \quad v := \frac{y}{x^2}$$

در نتیجه

$$x(u, v) = u^{-\frac{1}{3}} v^{-\frac{2}{3}} \quad \text{و} \quad y(u, v) = u^{-\frac{2}{3}} v^{-\frac{1}{3}}$$

ناحیه D نیز تحت این تغییر متغیر تبدیل به ناحیه واقع بین خطوط $u = 1, u = 3, v = 1, v = 2$ می‌شود.



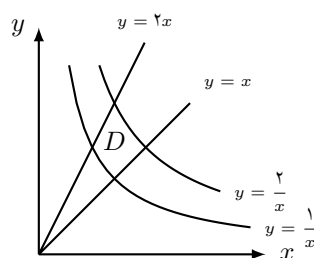
برای این تغییر متغیر

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = -\frac{1}{3} u^{-\frac{2}{3}} v^{-\frac{2}{3}}$$

به این ترتیب،

$$\begin{aligned} \iint_D \frac{x}{y} dx dy &= \iint_{D^*} \left| \frac{u^{-\frac{1}{3}} v^{-\frac{2}{3}}}{u^{-\frac{2}{3}} v^{-\frac{1}{3}}} \right| - \frac{1}{3} u^{-\frac{2}{3}} v^{-\frac{2}{3}} du dv \\ &= \int_1^3 \int_1^2 \frac{1}{3} u^{-\frac{1}{3}} v^{-\frac{1}{3}} dv du \\ &= \frac{1}{3} \left(\int_1^3 u^{-\frac{1}{3}} du \right) \left(\int_1^2 v^{-\frac{1}{3}} dv \right) = \frac{3}{8} \left(\frac{1}{\sqrt[3]{9}} - 1 \right) \left(\frac{1}{\sqrt[3]{27}} - 1 \right) \end{aligned}$$

مثال. مطلوب است محاسبه مساحت ناحیه محصور توسط منحنی‌های $y = \frac{1}{x}$, $y = \frac{2}{x}$ و خطوط $y = x$ و $y = 2x$ در $1/4$ اول صفحه.



قبلاً مشاهده کردیم مساحت ناحیه D در صفحه برابر $\iint_D 1 dx dy$ می‌باشد. اکنون برای محاسبه این انتگرال، با توجه به پیچیدگی ناحیه انتگرال‌گیری، از تغییر متغیری به صورت زیر استفاده می‌کنیم.

$$u := xy \quad \text{و} \quad v = \frac{y}{x}$$

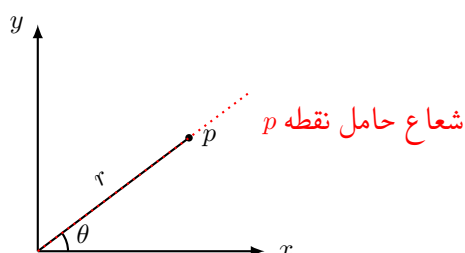
در نتیجه

$$x(u, v) = u^{\frac{1}{2}} v^{-\frac{1}{2}} \quad \text{و} \quad y(u, v) = u^{\frac{1}{2}} v^{\frac{1}{2}} \quad \text{و} \quad \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \frac{1}{2v}$$

ناحیه D نیز نظیر به ناحیه $D^*: [1, 2] \times [1, 2]$ خواهد بود. در نتیجه

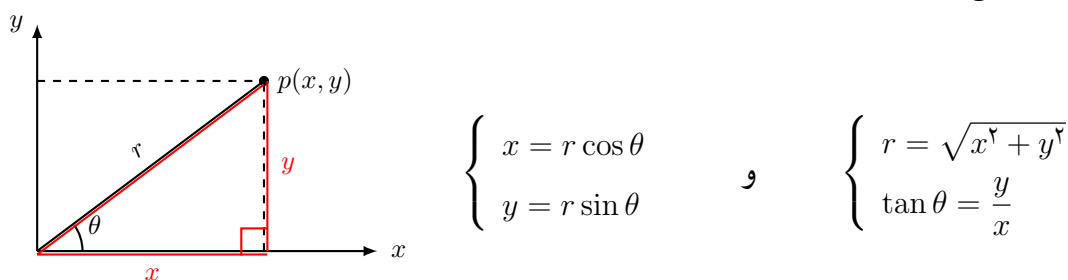
$$\begin{aligned} A = \iint_D 1 \, dx dy &= \iint_{D^*} \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du dv \\ &= \int_1^2 \int_1^2 \frac{1}{2v} dv du = \frac{1}{2} \left(\int_1^2 du \right) \left(\int_1^2 \frac{1}{v} dv \right) = \frac{1}{2} \ln 2 \end{aligned}$$

تغییر متغیر قطبی. قبل از بیان تغییر متغیر قطبی ابتدا به بیان مختصات قطبی نقاط در یک صفحه دکارتی می‌پردازیم. در یک صفحه دکارتی، برای تمایز نقاط از یکدیگر، علاوه بر استفاده از سیستم مختصات دکارتی می‌توانیم از روش دیگری به شرح زیر نیز استفاده کنیم. برای نقطه p در این صفحه فرض کنیم $r \geq 0$ فاصله این نقطه تا مبدا مختصات باشد. روشن است که مکان هندسی تمام نقاطی از صفحه که فاصله آن‌ها از مبدا مختصات برابر r است دایره‌ای به مرکز مبدا و شعاعی برابر r خواهد بود و p نیز بر روی این دایره قرار دارد.



اکنون برای تمایز نقطه p از سایر نقاط واقع بر این دایره، زاویه θ ایجاد شده بین نیم خط محور x (در جهت مثبت) و شعاع حامل نقطه p را نیز در نظر می‌گیریم. در این صورت با استفاده از زوج (r, θ) نقطه p نسبت به سایر نقاط صفحه متمایز می‌گردد.

مختصات (r, θ) به نام مختصات قطبی نقطه p نامیده می‌شود. در این روش مختصات دهی، عدد r فاصله قطبی (یا فاصله p از قطب، یعنی نقطه o) و زاویه θ به نام زاویه قطبی نقطه p نامیده می‌شود. در عین حال، با استفاده از تعابیر مناسب می‌توانیم محدودیت‌های $r \geq 0$ و $\theta \in [0, 2\pi]$ را رفع کرده، اجازه دهیم r یک عدد حقیقی دلخواه (مثبت یا منفی) و θ نیز زاویه دلخواهی (نه لزوماً در بازه $[0, 2\pi]$) باشد. اگر (x, y) مختصات دکارتی نقطه p در صفحه و (r, θ) مختصات قطبی این نقطه باشند آنگاه به سادگی مشاهده می‌شود



اکنون، بر اساس سیستم مختصات فوق، به بیان تغییر متغیر قطبی می‌پردازیم.

تغییر متغیر $x = x(r, \theta) = r \cos \theta$ و $y = y(r, \theta) = r \sin \theta$ به نام تغییر متغیر قطبی نامیده می‌شود. در این تغییر متغیر $\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} = r$. مثال‌های زیر نحوه استفاده از این تغییر متغیر را در محاسبه انتگرال دوگانه نشان می‌دهند.

مثال. مطلوب است محاسبه هر یک از انتگرال‌های زیر.

الف) $\iint_D \frac{1}{1+x^2+y^2} dx dy$ که در آن D ناحیه محصور توسط دایره $x^2+y^2=1$ است. اگر نقاط صفحه را با استفاده از مختصات قطبی آنها نمایش دهیم آنگاه برای $(r, \theta) \in \mathbb{R}^2$

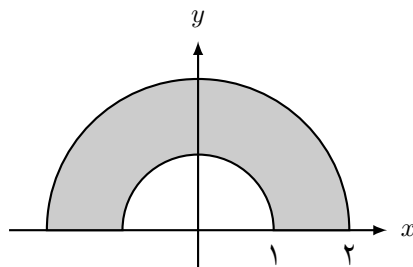
$$(r, \theta) \in D \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ 0 \leq r \leq 1 \end{cases}$$

در نتیجه

$$\begin{aligned} \iint_D \frac{1}{1+x^2+y^2} dx dy &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 \frac{1}{1+r^2} r dr d\theta \\ &= \left(\int_0^{2\pi} d\theta \right) \left(\int_0^1 \frac{r}{1+r^2} dr \right) = \frac{2\pi}{2} \ln(1+r^2) \Big|_0^1 = \pi \ln 2 \end{aligned}$$

ب) $\iint_D x dx dy$ که در آن D ناحیه محصور بین دایره $x^2+y^2=1$ و $x^2+y^2=4$ در نیم صفحه $y \geq 0$ است.

برای ناحیه D در این مثال، با استفاده از مختصات قطبی نقاط، خواهیم داشت



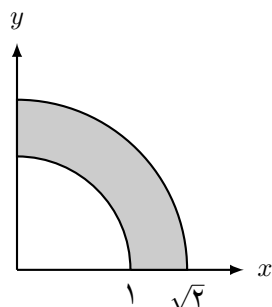
$$(r, \theta) \in D \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq \theta \leq \pi \\ 1 \leq r \leq 2 \end{cases}$$

در نتیجه

$$\begin{aligned} \iint_D x dx dy &= \int_0^\pi \int_1^2 (r \cos \theta) r dr d\theta \\ &= \left(\int_0^\pi \cos \theta d\theta \right) \left(\int_1^2 r^2 dr \right) = 0 \end{aligned}$$

ج) $\iint_D (x-2y) dx dy$ که در آن D ناحیه محصور بین دو نیم‌دایره $y = \sqrt{1-x^2}$ و $y = \sqrt{2-x^2}$ در $\frac{1}{4}$ اول صفحه است.

ناحیه D در اینجا در واقع ناحیه محصور بین دایره $x^2 + y^2 = 1$ و $x^2 + y^2 = 2$ در $\frac{1}{4}$ اول صفحه است. در نتیجه با استفاده از مختصات قطبی نقاط، خواهیم داشت



$$D : \begin{cases} 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \\ 1 \leq r \leq \sqrt{2} \end{cases}$$

به این ترتیب

$$\begin{aligned} \iint_D (x - 2y) dx dy &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_1^{\sqrt{2}} (r \cos \theta - 2r \sin \theta) r dr d\theta \\ &= \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos \theta - 2 \sin \theta) d\theta \right) \left(\int_1^{\sqrt{2}} r^2 dr \right) = -\frac{1}{3} (2\sqrt{2} - 1) \end{aligned}$$

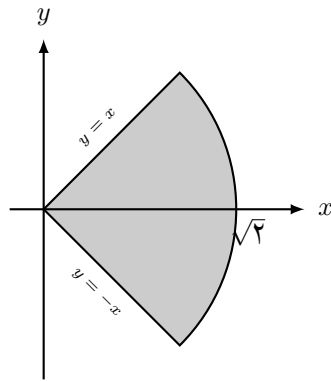
مثال. مطلوب است محاسبه هر یک از عبارات زیر.

الف) $\int_{-1}^1 \int_{|y|}^{\sqrt{2-y^2}} \frac{1}{1+x^2+y^2} dx dy$

محاسبه انتگرال‌های مکرر داده شده بسیار دشوار است. به همین دلیل، ابتدا ناحیه D را با استفاده از حدود انتگرال‌های مکرر شناسایی می‌کنیم.

$$D : \begin{cases} -1 \leq y \leq 1 \\ |y| \leq x \leq \sqrt{2-y^2} \end{cases}$$

به این ترتیب D ناحیه محصور توسط دایره $x^2 + y^2 = 2$ در ناحیه $|y| \leq x$ است. با استفاده از مختصات قطبی نقاط، داریم



$$D : \begin{cases} -\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{4} \\ 0 \leq r \leq \sqrt{2} \end{cases}$$

به این ترتیب

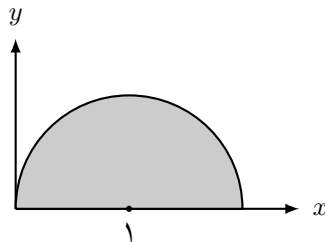
$$\begin{aligned} \iint_D \frac{1}{1+x^2+y^2} dx dy &= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{\sqrt{2}} \frac{1}{1+r^2} r dr d\theta \\ &= \frac{\pi}{2} \int_0^{\sqrt{2}} \frac{r}{1+r^2} dr = \frac{\pi}{4} \ln 3 \end{aligned}$$

ب) $\int_0^2 \int_0^{\sqrt{2x-x^2}} \sqrt{x^2+y^2} dy dx$

ابتدا ناحیه D را با استفاده از حدود انتگرال‌های مکرر مشخص می‌کنیم.

$$D; \begin{cases} 0 \leq x \leq 2 \\ 0 \leq y \leq \sqrt{2x-x^2} \end{cases}$$

به این ترتیب D ناحیه محصور توسط دایره $x^2+y^2=2x$ (یا دایره $(x-1)^2+y^2=1$) در نیم‌صفحه $y \geq 0$ است. توجه می‌کنیم معادله این دایره در مختصات قطبی عبارت است از $r^2=2r \cos \theta$ یا $r=2 \cos \theta$. در عین حال، برای نقاط (r, θ) مختلف در D ، $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$. به این ترتیب، با استفاده از مختصات قطبی،

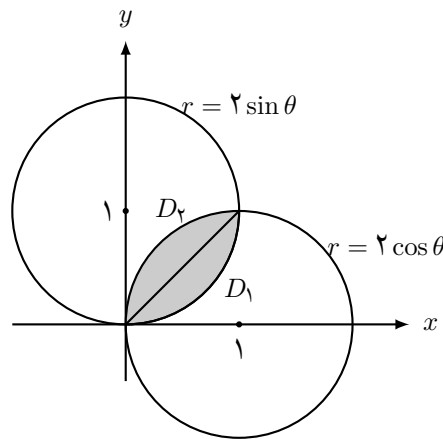


$$D; \begin{cases} 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \\ 0 \leq r \leq 2 \cos \theta \end{cases}$$

همچنین $\sqrt{x^2 + y^2} = r$ در نتیجه

$$\begin{aligned}\iint_D \sqrt{x^2 + y^2} \, dx dy &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{\sqrt{\cos \theta}} r \, r \, dr \, d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1}{3} r^3 \right) \Big|_0^{\sqrt{\cos \theta}} d\theta = \frac{1}{3} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^{\frac{3}{2}} \theta \, d\theta = \frac{16}{9}\end{aligned}$$

مثال. مطلوب است محاسبه مساحت ناحیه محصور بین دایره $x^2 + y^2 = 2x$ و $x^2 + y^2 = 2y$. همانطور که قبلاً نیز اشاره کردیم، مساحت ناحیه مورد نظر برابر $\iint_D 1 \, dx dy$ است. توجه می‌کنیم با استفاده از روابط $x = r \cos \theta$ و $y = r \sin \theta$ دایره $x^2 + y^2 = 2x$ و $x^2 + y^2 = 2y$ در مختصات قطبی به ترتیب معادلاتی به صورت $r = 2 \cos \theta$ و $r = 2 \sin \theta$ خواهند داشت. اگر با استفاده از خط $y = x$ ناحیه D بین دو دایره را به دو ناحیه D_1 و D_2 (مطابق شکل زیر) تقسیم کنیم آنگاه،



$$D_1 : \begin{cases} 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4} \\ 0 \leq r \leq 2 \sin \theta \end{cases} \quad \text{و} \quad D_2 : \begin{cases} \frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \\ 0 \leq r \leq 2 \cos \theta \end{cases}$$

به این ترتیب

$$\begin{aligned}\iint_D dx dy &= \iint_{D_1} dx dy + \iint_{D_2} dx dy \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{2 \sin \theta} r \, dr \, d\theta + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2 \cos \theta} r \, dr \, d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1}{2} r^2 \right) \Big|_0^{2 \sin \theta} d\theta + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{2} r^2 \right) \Big|_0^{2 \cos \theta} d\theta \\ &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 \theta \, d\theta + 2 \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \theta \, d\theta\end{aligned}$$

تکمیل محاسبات دو انتگرال آخر را به عهده خواننده می‌گذاریم.

تمرین. مطلوب است محاسبه مقدار عبارت

$$\int_0^1 \int_{-y}^y \frac{1}{\sqrt{1+x^2+y^2}} dx dy + \int_{-1}^1 \int_1^{\sqrt{2-x^2}} \frac{1}{\sqrt{1+x^2+y^2}} dy dx$$

تمرین‌های بخش انتگرال دوگانه.

۱. انتگرال‌های دوگانه زیر را حساب کنید.

- (الف) $\iint_D (x+2y) dx dy$ که در آن D ناحیه محصور بین سهمی $y=x^2$ و خط $y=x$ است.
 (ب) $\iint_D \sin(x+y) dA$ که در آن D ناحیه محصور بین خطوط $y=x$ ، $x+y=\frac{\pi}{4}$ و $x=0$ است.
 (ج) $\iint_D |x-y^2| dx dy$ که در آن $D = [0, 1] \times [0, 1]$.

۲. مطلوب است محاسبه‌ی هر یک از انتگرال‌های زیر.

- (الف) $\int_0^1 \int_1^2 \frac{y}{x^4} \sin\left(\frac{\pi x}{4}\right) dx dy + \int_1^2 \int_{\sqrt{y}}^2 \frac{y}{x^4} \sin\left(\frac{\pi x}{4}\right) dx dy$
 (ب) $\int_0^2 \int_0^{2-x^2} \frac{x e^{xy}}{4-y} dy dx$
 (ج) $\iint_A \sqrt{x^2+y^2} dx dy$ که در آن $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 1 \leq x^2+y^2 \leq 2\}$
 (د) $\int_0^1 \int_0^x \frac{dy dx}{(1+x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}} + \int_1^{\sqrt{2}} \int_0^{\sqrt{2-x^2}} \frac{dy dx}{(1+x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}}$
 (ه) $\iint_A (x-y) \sin(x^2-y^2) dx dy$ که در آن A ناحیه‌ی واقع بین خطوط $y-x=0$ ، $y-x=1$ ، $x+y=2$ و $x+y=0$ است.
 (و) $\iint_A e^{\frac{y}{x+y}} dx dy$ که در آن A ناحیه واقع بین خطوط $x+y=1$ ، $x=0$ و $y=0$ است.
 (ز) $\iint_D \frac{dx dy}{(xy)^{\frac{2}{3}}}$ که در آن D ناحیه محصور توسط منحنی $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$ است.

۳. مساحت هر یک از نواحی زیر را تعیین نمایید.

- (الف) مساحت داخل دایره‌ی $x^2+y^2=4$ و سمت راست خط $x=1$.
 (ب) مساحت محصور بین منحنی‌های $xy=1$ ، $xy=2$ و خطوط $x=1$ و $x=2$.
 (ج) مساحت محصور توسط منحنی‌های $x=4-3y^2$ و $x=y^2$.

۴. در انتگرال دوگانه‌ی زیر پس از نمایش ناحیه‌ی انتگرال‌گیری، ترتیب انتگرال‌گیری را عوض کرده و انتگرال دوگانه‌ی حاصل را به دست آورید (فرض بر آن است که تابع f پیوسته است).

$$\int_0^2 dy \int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} f(x, y) dx$$

۵. با تعویض ترتیب انتگرال‌گیری مجموع زیر را به صورت یک انتگرال دوگانه بنویسید.

$$\int_0^3 dx \int_0^x f(x, y) dy + \int_3^6 dx \int_0^{6-x} f(x, y) dy$$

فرض بر آن است که تابع f پیوسته است.

۶. انتگرال دوگانه‌ی $\iint_R xy \, dA$ را که در آن R ناحیه‌ای است محدود به محورهای مختصات و منحنی $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$ محاسبه کنید.

۷. انتگرال $\iint_D \frac{y}{x^2 + y^2} \, dx dy$ را روی ناحیه‌ی D ، محصور بین سهمی $y = x^2$ و خط $y = x$ ، به دست آورید.

۸. الف) نشان دهید اگر f و g دو تابع پیوسته بر فاصله‌ی $[a, b]$ باشند، آنگاه

$$\left| \int_a^b f(x)g(x) dx \right| \leq \sqrt{\int_a^b f^2(x) dx} \sqrt{\int_a^b g^2(x) dx}$$

(راهنمایی: از انتگرال $\iint_A (f(x)g(y) - f(y)g(x))^2 \, dx dy$ روی ناحیه‌ی مناسب A ، استفاده کنید)
ب) اگر تابع f تابعی پیوسته و مثبت روی $[a, b]$ باشد، نشان دهید

$$\left(\int_a^b f(x) dx \right) \left(\int_a^b \frac{dx}{f(x)} \right) \geq (b-a)^2$$

۹. مطلوب است محاسبه‌ی $I = \int_0^\infty e^{-x^2} dx$

(راهنمایی: $\int_0^\infty e^{-x^2} dx \int_0^\infty e^{-y^2} dy = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(x^2+y^2)} dx dy$ را با استفاده از مختصات قطبی به دست آورید.)

۱۰. انتگرال $\int_0^\infty \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} dx$ را حساب کنید. (راهنمایی: از رابطه‌ی $\int_a^b e^{-xy} dy = \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x}$ استفاده کنید.)

۱۱. انتگرال‌های دو زیر را به کمک تغییر متغیرهای مناسب محاسبه کنید.

الف) $\iint_D \frac{x \sin xy}{y} dx dy$ که در آن D ناحیه‌ی محدود به منحنی‌های $x^2 = \pi y$ ، $x^2 = \frac{\pi y}{4}$ ، $y = x$ و $y = \frac{x}{4}$ می‌باشد.

ب) $\iint_D \cos \frac{x-y}{x+y} dx dy$ که در آن D محدود است به خطوط $y = x$ ، $y = 0$ و $x + y = \frac{\pi}{4}$.

۱۲. به کمک تغییر متغیرهای $x = u \cos^4 v$ و $y = u \sin^4 v$ انتگرال دوگانه‌ی

$$\iint_D \sqrt{\sqrt{x} + \sqrt{y}} dx dy$$

را محاسبه کنید که در آن D ناحیه‌ی محدود به خطوط $x = 0$ ، $y = 0$ و منحنی $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$ می‌باشد.

۱۳. با استفاده از انتگرال دوگانه مساحت ناحیه محصور بین دایره $x^2 + y^2 = x$ و $x^2 + y^2 = 2x$ و خطوط $y = 0$ و $y = x$ را به دست آورید.

۱۴. مطلوب است مساحت ناحیه‌ی محصور به خم‌های $x^2 = y$ ، $x^2 = 2y$ ، $x^3 = y^2$ ، $x^3 = 2y^2$.

۱۵. مساحت ناحیه‌ی محدود به خم‌های $x^2 + y^2 = 2x$ و $x^2 + y^2 = 4x$ و خطوط $y = x$ و $y = 0$ را به دست آورید.

۱۶. مطلوب است محاسبه انتگرال دوگانه‌ی $\int_0^2 \left(\int_{y/2}^1 \cos\left(\frac{\pi}{4} x^2\right) dx \right) dy$.

۱۷. انتگرال دوگانه $\iint_D |x-y| e^{x-y} dx dy$ را حساب کنید که در آن ناحیه‌ی D محدود به خطوط $x-y = 0$ ، $x+y = 0$ ، $x-y = -4$ و $x+y = 4$ است.

۱۸. G ناحیه‌ی محصور به خم‌های $xy = 1$ و $xy = 3$ و $x(1-y) = 2$ و $x(1-y) = 1$ است. مطلوب است محاسبه انتگرال $\iint_G x dx dy$.

۱۹. انتگرال $\iint_D \cos\left(\frac{x-y}{x+y}\right) dx dy$ را روی ناحیه‌ی D محصور به خطوط $x = 0$ و $y = 0$ و $x + y = 2$ بیابید.

۲۰. با استفاده از مختصات قطبی انتگرال دوگانه‌ی

$$\iint_D \sqrt{\frac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2}} dx dy$$

را محاسبه کنید. که در آن D قرص واحد $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$ است.

۲۱. انتگرال‌های دوگانه‌ی زیر را با تبدیل مختصات دکارتی به قطبی محاسبه کنید.

الف) $\iint_D \sqrt{x^2 + y^2} dx dy$ که در آن $D = \{(x, y) \in R^2 : x^2 + y^2 \leq 9\}$

ب) $\iint_D \frac{\sin \sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx dy$ که در آن $D = \{(x, y) \in R^2 : \frac{\pi^2}{16} \leq x^2 + y^2 \leq \frac{\pi^2}{9}\}$

ج) $\iint_D \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) dx dy$ که در آن $D = \{(x, y) \in R^2 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, \frac{x}{\sqrt{3}} \leq y \leq \sqrt{3}x\}$

انتگرال سه گانه

بحث انتگرال سه گانه دقیقاً مانند انتگرال دو گانه است با این تفاوت که موضوع بحث توابع سه متغیره بوده، نواحی مورد نظر ناحیه هایی در فضای سه بعدی هستند.

فرض کنیم $D \subset \mathbb{R}^3$ ناحیه ای بسته و کراندار در فضا باشد. متناظر با افراز $P = \{\Delta D_1, \dots, \Delta D_n\}$ از ناحیه D به نواحی کوچکتر، فرض کنیم ΔV_i بیانگر حجم ناحیه ΔD_i و $diam(\Delta D_i)$ نیز برابر قطر کوچکترین کره حاوی این ناحیه باشد. در این صورت برای این افراز عدد $\max\{diam(\Delta D_i); i = 1, \dots, n\}$ را اندازه افراز P نامیده، آن را با نماد $\|P\|$ نشان می دهیم.

فرض کنیم $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ تابعی کراندار تعریف شده بر این ناحیه باشد. در این صورت با انتخاب نقاط دلخواه $p_1 \in \Delta D_1, \dots, p_n \in \Delta D_n$ عبارت $\sum_{i=1}^n f(p_i) \Delta V_i = f(p_1) \Delta V_1 + \dots + f(p_n) \Delta V_n$ را یک حاصل جمع ریمان تابع f نظیر به افراز P می نامیم. اگر با تغییر افراز P به گونه ای که $\|P\|$ به سمت صفر میل کند، عبارات فوق به عددی چون A همگرا شود آنگاه f را بر ناحیه D انتگرال پذیر نامیده، عدد A را با نماد $\iiint_D f dV$ یا $\iiint_D f(x, y, z) dx dy dz$ نشان می دهیم.

مثال. فرض کنیم $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ تابع ثابت $f(x, y, z) = 1$ باشد. در این صورت برای هر افراز $\{\Delta D_1, \dots, \Delta D_n\}$ از ناحیه D و برای هر انتخاب نقاط $p_i \in \Delta D_i$ با توجه به اینکه برای هر $i = 1, \dots, n$ $f(p_i) = 1$ خواهیم داشت

$$\sum_{i=1}^n f(p_i) \Delta V_i = \sum_{i=1}^n \Delta V_i = V$$

که در آن V حجم ناحیه D است. به این ترتیب

$$\iiint_D f dV = \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(p_i) \Delta V_i = V$$

باید توجه شود، دقیقاً مانند بحثی که برای مساحت یک ناحیه در صفحه داشتیم، مفهوم حجم یک ناحیه در فضا نیز مستلزم تعریف دقیق است. فرض کنیم $D \subset \mathbb{R}^3$ ناحیه ای بسته و کراندار در فضای بوده، مجموعه $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; a_1 \leq x \leq b_1, a_2 \leq y \leq b_2, a_3 \leq z \leq b_3\}$ کوچکترین مکعب مستطیل در فضا در برگیرنده این ناحیه باشد. در این صورت با استفاده از افرازهایی از بازه های $[a_i, b_i]$ ، $i = 1, 2, 3$ ، مکعب مستطیل فوق به مجموعه ای از مکعب مستطیل های کوچکتر افراز می شود. در این حالت، مجموع حجم مکعب مستطیل هایی که کاملاً در D قرار دارند یک تقریب پایینی برای حجم این ناحیه، و مجموع حجم مکعب مستطیل هایی که با ناحیه D اشتراک دارند یک تقریب بالایی برای این حجم خواهد بود. ناحیه D را

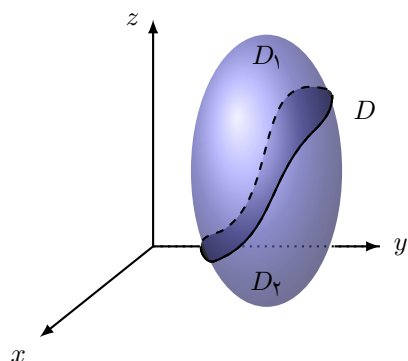
حجم‌پذیر می‌نامیم هرگاه عددی چون V وجود داشته باشد که با ظریف‌تر کردن افرازهای بازه‌های $[a_i, b_i]$ ، و در نتیجه ظریف‌تر کردن افراز مکعب مستطیل $[a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3]$ ، بتوانیم تقریب‌های پایینی و بالایی حجم را به دلخواه به عدد V نزدیک کنیم، و در این صورت عدد V را برابر حجم ناحیه D تعریف می‌کنیم. به منظور پرهیز از طولانی شدن بحث، مانند قبل، حجم را مفهومی شهودی فرض کرده، از ورود به نکات ظریف آن خودداری می‌کنیم.

مانند حالت دو بعدی در اینجا نیز قضیه‌ای به صورت زیر برقرار است.

قضیه.

فرض کنیم $D \subset \mathbb{R}^3$ ناحیه‌ای بسته و کراندار (و حجم‌پذیر) باشد. اگر $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ تابعی پیوسته بر D باشد آنگاه f بر D انتگرال‌پذیر است.

خاصیت‌های بیان شده برای انتگرال دوگانه، با تغییرات مناسب برای انتگرال سه‌گانه نیز قابل بیان و اثبات هستند. به طور مثال، اگر $D = D_1 \cup D_2$ و دو ناحیه D_1 و D_2 حداکثر در مجموعه‌ای از نقاط واقع بر مرز با یکدیگر اشتراک داشته باشند آنگاه برای هر تابع پیوسته $f : D \rightarrow \mathbb{R}$



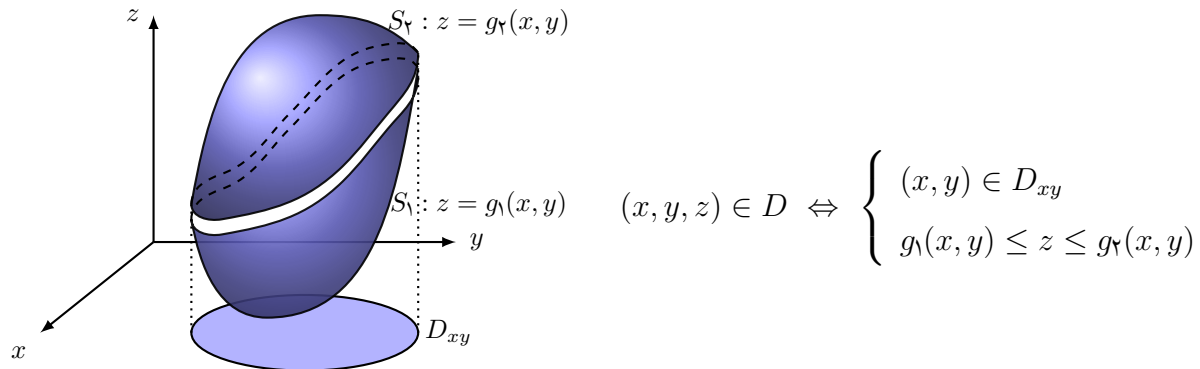
$$\iiint_D f = \iiint_{D_1} f + \iiint_{D_2} f$$

باید توجه داشت، برخلاف انتگرال دوگانه، انتگرال سه‌گانه در حالت کلی فاقد تعبیر هندسی است مگر آنکه $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ تابع ثابت $f = 1$ باشد و در این حالت، بنابر مثالی که حل کردیم، مقدار انتگرال برابر حجم ناحیه D خواهد بود.

محاسبه انتگرال سه‌گانه. مانند بحث انتگرال دوگانه، ابتدا محاسبه انتگرال سه‌گانه را برای سه دسته نواحی در فضای $\mathbb{R}^3$ ، تحت نام نواحی ساده، بیان می‌کنیم. سپس در صورت ضرورت، می‌توانیم یک ناحیه دلخواه در فضا را به نحو مناسب به اجتماعی از این نواحی ساده تفکیک کرده، با استفاده از خواص انتگرال سه‌گانه به محاسبه انتگرال بپردازیم.

ناحیه D از فضا را ناحیه‌ای z -ساده می‌نامیم هرگاه ناحیه‌ای بسته و کراندار از صفحه xoy چون D_{xy} و توابع

پیوسته $g_1, g_2 : D_{xy} \rightarrow \mathbb{R}$ وجود داشته باشند به گونه‌ای که برای هر $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$



برای چنین ناحیه‌ای، اگر $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ تابعی پیوسته باشد آنگاه می‌توان ثابت کرد

$$\iiint_D f \, dV = \iint_{D_{xy}} \left(\int_{g_1(x,y)}^{g_2(x,y)} f(x, y, z) \, dz \right) dx dy$$

در عبارت اخیر، ابتدا مقدار انتگرال معین $\int_{g_1(x,y)}^{g_2(x,y)} f(x, y, z) \, dz$ را با ثابت فرض کردن متغیرهای x و y حساب می‌کنیم. در این صورت مقدار این انتگرال معین تابعی بر حسب x و y خواهد بود. در نهایت انتگرال دوگانه این تابع دو متغیره را بر ناحیه D_{xy} محاسبه می‌کنیم.

نواحی y -ساده و x -ساده نیز به نحو مشابه تعریف هستند. به طور مثال، ناحیه بسته و کراندار $D \subset \mathbb{R}^3$ را ناحیه‌ای y -ساده نامیم هرگاه ناحیه‌ای بسته و کراندار از صفحه xoz مانند D_{xz} و توابع پیوسته‌ای مانند $h_1, h_2 : D_{xz} \rightarrow \mathbb{R}$ وجود داشته باشند که برای $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$

$$(x, y, z) \in D \Leftrightarrow \begin{cases} (x, z) \in D_{xz} \\ h_1(x, z) \leq y \leq h_2(x, z) \end{cases}$$

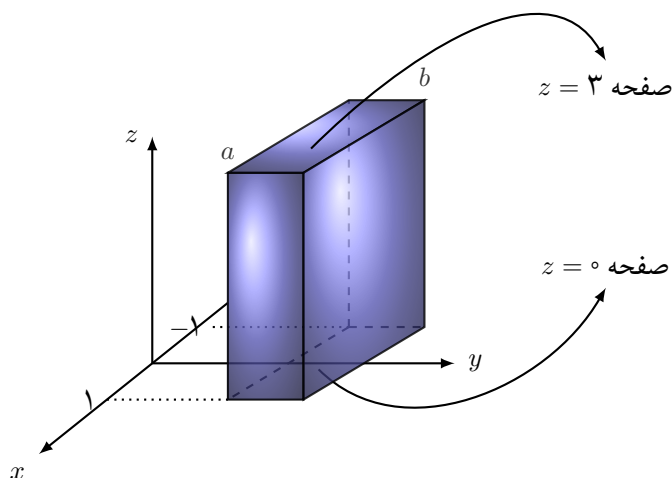
برای چنین ناحیه‌ای اگر $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ تابعی پیوسته باشد آنگاه، مشابه حالت قبل،

$$\iiint_D f(x, y, z) \, dx dy dz = \iint_{D_{xz}} \left(\int_{h_1(x,z)}^{h_2(x,z)} f(x, y, z) \, dy \right) dx dz$$

بیان ناحیه x -ساده و فرمول انتگرال بر این ناحیه به خواننده واگذار می‌شود.

مثال. مطلوب است محاسبه هر یک از انتگرال‌های زیر.

الف) $\iiint_D (x - 2yz) \, dx dy dz$ که در آن D مکعب مستطیلی به صورت $[-1, 1] \times [2, 3] \times [0, 3]$ است.



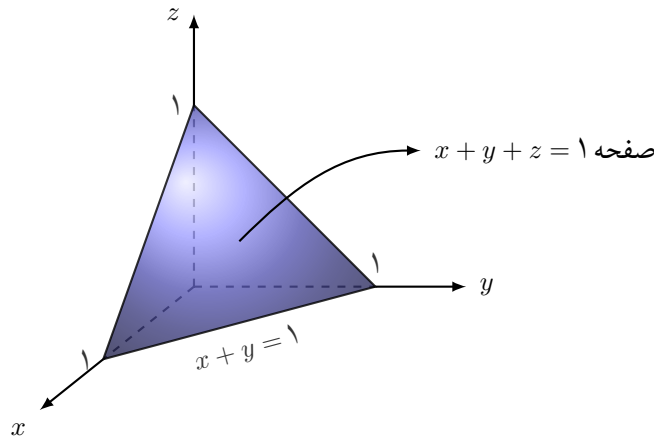
ناحیه D در این مثال در قالب هر یک از سه ناحیه ساده‌ای که بیان کردیم قرار می‌گیرد. در اینجا، به طور مثال، آن را به عنوان یک ناحیه z -ساده در نظر می‌گیریم. بر این مبنا، اگر $D_{xy} := [-1, 1] \times [2, 3]$ آنگاه

$$(x, y, z) \in D \Leftrightarrow \begin{cases} (x, y) \in D_{xy} \\ 0 \leq z \leq 3 \end{cases}$$

به این ترتیب، در این حالت، $g_1(x, y)$ تابع ثابت صفر و $g_2(x, y)$ تابع ثابت ۳ خواهند بود. در نتیجه

$$\begin{aligned} \iiint_D (x - 2yz) \, dx \, dy \, dz &= \iint_{D_{xy}} \left(\int_0^3 (x - 2yz) \, dz \right) \, dx \, dy \\ &= \iint_{D_{xy}} \left(xz - yz^2 \Big|_0^3 \right) \, dx \, dy = \iint_{D_{xy}} (3x - 9y) \, dx \, dy \\ &= \int_{-1}^1 \int_2^3 (3x - 9y) \, dy \, dx = \int_{-1}^1 \left(3xy - \frac{9}{2}y^2 \Big|_2^3 \right) \, dx \\ &= \int_{-1}^1 \left(3x - \frac{63}{2} \right) \, dx = -63 \end{aligned}$$

ب) $\iiint_D z \, dV$ که در آن D ناحیه محصور توسط صفحه $x + y + z = 1$ و صفحات مختصات است.



در این مثال نیز ناحیه D را به عنوان یک ناحیه z -ساده در نظر می‌گیریم (اگر چه که به عنوان هر یک از نواحی y -ساده یا x -ساده نیز می‌توان آن را در نظر گرفت). اگر ناحیه D را به موازات محور z بر صفحه xoy تصویر کنیم آنگاه مجموعه تصویر ناحیه محصور بین خطوط $x+y=1$ ، $x=0$ و $y=0$ خواهد بود. این ناحیه را D_{xy} می‌نامیم. در این حالت با در نظر گرفتن $g_1(x, y) = 0$ (تابع ثابت صفر) و $g_2(x, y) = 1 - x - y$ خواهیم داشت

$$(x, y, z) \in D \Leftrightarrow \begin{cases} (x, y) \in D_{xy} \\ g_1(x, y) = 0 \leq z \leq g_2(x, y) = 1 - x - y \end{cases}$$

در نتیجه

$$\begin{aligned} \iiint_D z \, dV &= \iint_{D_{xy}} \left(\int_0^{1-x-y} z \, dz \right) dx dy \\ &= \iint_{D_{xy}} \left(\frac{1}{2} z^2 \Big|_0^{1-x-y} \right) dx dy = \frac{1}{2} \iint_{D_{xy}} (1-x-y)^2 dx dy \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^{1-x} (1-x-y)^2 dy dx = \frac{1}{2} \int_0^1 \left(-\frac{1}{3} (1-x-y)^3 \right) \Big|_0^{1-x} dx \\ &= \frac{1}{6} \int_0^1 (1-x)^3 dx = \frac{1}{24} \end{aligned}$$

ج) $\iiint_D x \, dV$ که در آن D ناحیه محصور بین سهمیگون $z = x^2 + y^2$ و صفحه $z = 2y$ است. ابتدا تصویر منحنی حاصل از برخورد سهمیگون $z = x^2 + y^2$ و صفحه $z = 2y$ را بر صفحه xoy به دست می‌آوریم. برای این منظور کافی است متغیر z را بین دو معادله فوق حذف کنیم. در این صورت منحنی به معادله $x^2 + y^2 = 2y$ حاصل می‌شود که همان دایره $x^2 + (y-1)^2 = 1$ خواهد بود. به این ترتیب مشاهده می‌شود تصویر حجم ایجاد شده بین سهمیگون و صفحه داده شده بر صفحه xoy ، ناحیه محصور توسط این

دایره است. پس فرض کنیم D_{xy} ناحیه محصور توسط دایره $x^2 + y^2 = 2y$ باشد. برای هر $(x, y) \in D_{xy}$ با حرکت از این نقطه به موازات محور z ابتدا با برخورد با سهمیگون $z = x^2 + y^2$ وارد ناحیه D می‌شویم سپس با برخورد با صفحه $z = 2y$ از این ناحیه خارج خواهیم شد. پس

$$(x, y, z) \in D \Leftrightarrow \begin{cases} (x, y) \in D_{xy} \\ x^2 + y^2 \leq z \leq 2y \end{cases}$$

به این ترتیب،

$$\begin{aligned} \iiint_D x \, dV &= \iint_{D_{xy}} \left(\int_{x^2+y^2}^{2y} x \, dz \right) dx dy \\ &= \iint_{D_{xy}} \left(xz \Big|_{x^2+y^2}^{2y} \right) dx dy = \iint_{D_{xy}} (2xy - x(x^2 + y^2)) \, dx dy \end{aligned}$$

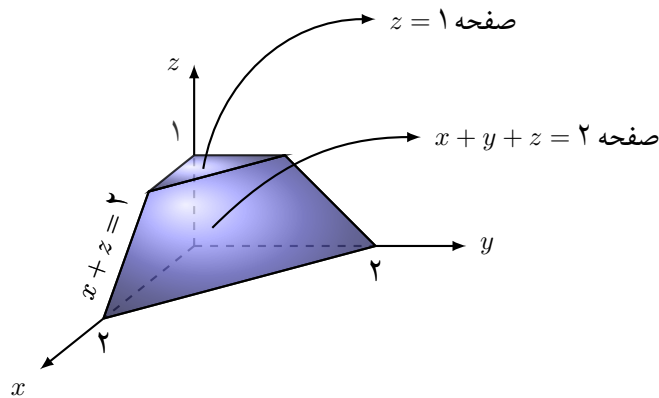
برای محاسبه انتگرال دوگانه اخیر می‌توانیم از تغییر متغیر قطبی استفاده کنیم. توجه می‌کنیم با استفاده از مختصات قطبی

$$(r, \theta) \in D_{xy} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq \theta \leq \pi \\ 0 \leq r \leq 2 \sin \theta \end{cases}$$

در نتیجه انتگرال دوگانه فوق به صورت زیر محاسبه می‌شود.

$$\begin{aligned} \iint_{D_{xy}} (2xy - x(x^2 + y^2)) \, dx dy &= \int_0^\pi \int_0^{2 \sin \theta} (2r^2 \sin \theta \cos \theta - r^3 \cos \theta) r \, dr \, d\theta \\ &= \int_0^\pi \left(\sin \theta \cos \theta \frac{r^4}{4} - \cos \theta \frac{1}{5} r^5 \right) \Big|_0^{2 \sin \theta} d\theta \\ &= \frac{1}{5} \int_0^\pi \sin^5 \theta \cos \theta \, d\theta = \frac{1}{30} \sin^6 \theta \Big|_0^\pi = 0 \end{aligned}$$

د) $\iiint_D (x - 2y) \, dV$ که در آن D ناحیه محصور توسط $x + y + z = 2$ و صفحات مختصات زیر صفحه $z = 1$ است.



در اینجا در نظر گرفتن ناحیه D به عنوان یک ناحیه $-z$ ساده مستلزم تقسیم ناحیه به دو ناحیه کوچکتر و تفکیک انتگرال به مجموع دو انتگرال است. در حالی که با در نظر گرفتن همین ناحیه به عنوان یک ناحیه $-y$ ساده یا $-x$ ساده به راحتی می‌توانیم مقدار انتگرال را حساب کنیم. به طور مثال، D را در اینجا به عنوان یک ناحیه $-y$ ساده در نظر می‌گیریم. برای این منظور کافی است D را به موازات محور y بر صفحه xoz تصویر کنیم و در این صورت ناحیه D_{xz} به عنوان ناحیه محصور بین خطوط $x=0$ ، $z=0$ ، $x+z=2$ و $z=1$ به دست می‌آید. در این حالت با در نظر گرفتن توابع $h_1(x,z)=0$ (تابع ثابت صفر) و $h_2(x,z)=2-x-z$ خواهیم داشت

$$(x, y, z) \in D \Leftrightarrow \begin{cases} (x, z) \in D_{xz} \\ h_1(x, z) = 0 \leq y \leq h_2(x, z) = 2 - x - z \end{cases}$$

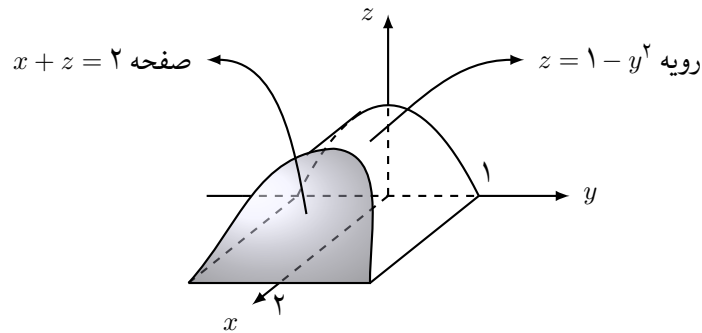
به این ترتیب،

$$\begin{aligned} \iiint_D (x - 2y) dV &= \iint_{D_{xz}} \left(\int_0^{2-x-z} (x - 2y) dy \right) dx dz \\ &= \iint_{D_{xz}} \left(xy - y^2 \Big|_0^{2-x-z} \right) dx dz = \iint_{D_{xz}} (x(2-x-z) - (2-x-z)^2) dx dz \\ &= \int_0^1 \int_0^{2-z} (x(2-x-z) - (2-x-z)^2) dx dz \end{aligned}$$

انجام محاسبات مربوط به انتگرال‌های مکرر فوق به خواننده واگذار می‌شود.

مثال. مطلوب است محاسبه حجم هر یک از نواحی زیر.

الف) حجم محصور توسط رویه $1-y^2$ ، $z=1$ ، صفحه $x+z=2$ ، صفحه $z=0$ و صفحه $x=0$.



اگر ناحیه فوق را با D نشان دهیم در این صورت، بنابر مثالی که در ابتدای کار بررسی کردیم، مقدار حجم D با استفاده از فرمول $\iiint_D 1 \, dx \, dy \, dz$ به دست می‌آید. اکنون برای محاسبه انتگرال سه‌گانه اخیر، ناحیه D را به عنوان یک ناحیه $-x$ ساده در نظر می‌گیریم. برای این منظور ابتدا تصویر این ناحیه به موازات محور x بر صفحه yz را به دست می‌آوریم. با توجه به سطوح محدودکننده ناحیه، این تصویر ناحیه محدود بین سهمی $z = 1 - y^2$ و خط $z = 0$ خواهد بود. این ناحیه از صفحه yz را ناحیه D_{yz} می‌نامیم. بر این اساس

$$(x, y, z) \in D \Leftrightarrow \begin{cases} (y, z) \in D_{yz} \\ 0 \leq x \leq 2 - z \end{cases}$$

در نتیجه، اگر حجم ناحیه D را با V نشان دهیم آنگاه

$$\begin{aligned} V = \iiint_D 1 \, dx \, dy \, dz &= \iint_{D_{yz}} \left(\int_0^{2-z} 1 \, dx \right) dy \, dz \\ &= \iint_{D_{yz}} (2 - z) \, dy \, dz = \int_{-1}^1 \int_0^{1-y^2} (2 - z) \, dz \, dy \\ &= \int_{-1}^1 \left(2z - \frac{1}{2}z^2 \right) \Big|_0^{1-y^2} dy = \int_{-1}^1 \left(2 - 2y^2 - \frac{1}{2}(1 - y^2)^2 \right) dy = \frac{32}{15} \end{aligned}$$

(ب) حجم محصور بین استوانه $x^2 + y^2 = 1$ و صفحات $z = y$ و $z = y + 2$.

مانند مثال قبل، اگر ناحیه توصیف شده فوق را با D و حجم آن را با V نشان دهیم آنگاه $V = \iiint_D 1 \, dV$. اکنون برای محاسبه این انتگرال، اگر ناحیه D را به عنوان یک ناحیه $-z$ ساده در نظر بگیریم آنگاه ناحیه D_{xy} ناحیه محصور توسط دایره $x^2 + y^2 = 1$ در صفحه xoy خواهد بود. با توجه به سطوح تشکیل‌دهنده مرز ناحیه D ،

$$(x, y, z) \in D \Leftrightarrow \begin{cases} (x, y) \in D_{xy} \\ y \leq z \leq y + 2 \end{cases}$$

به این ترتیب،

$$\begin{aligned} V = \iiint_D 1 dV &= \iint_{D_{xy}} \left(\int_y^{y+2} 1 dz \right) dx dy \\ &= \iint_{D_{xy}} \left(z \Big|_y^{y+2} \right) dx dy = \iint_{D_{xy}} 2 dx dy = 2\pi \end{aligned}$$

در محاسبه انتگرال دوگانه آخر از این خاصیت استفاده کردیم که مقدار انتگرال $\iint_{D_{xy}} 1 dx dy$ برابر مساحت ناحیه D_{xy} در صفحه xoy ، یعنی π ، می باشد.

تغییر متغیر در انتگرال سه گانه. بحث تغییر متغیر در انتگرال سه گانه دارای همان انگیزه های تغییر متغیر در انتگرال دوگانه بوده، به نحو مشابه مطرح می گردد. فرض کنیم D^* ناحیه ای از فضای متغیرهای u, v و w و توابع $x = x(u, v, w)$ ، $y = y(u, v, w)$ و $z = z(u, v, w)$ توابعی پیوسته تعریف شده بر این ناحیه باشند. فرض کنیم $T : D^* \rightarrow \mathbb{R}^3$ با دستور $T(u, v, w) = (x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w))$ بر ناحیه D^* تابعی یک به یک باشد و $D := T(D^*)$. همچنین فرض کنیم توابع $x(u, v, w)$ ، $y(u, v, w)$ و $z(u, v, w)$ در نقاط درونی D^* مشتقات جزئی مرتبه اول پیوسته داشته باشند و برای هر نقطه درونی

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} := \det \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{pmatrix} \neq 0$$

عبارت فوق را ژاکوبین تغییر متغیر می نامیم. در این صورت اگر $P^* = \{\Delta D_1^*, \dots, \Delta D_n^*\}$ افرازی از ناحیه D^* و $\{\Delta D_1, \dots, \Delta D_n\}$ افراز نظیر از ناحیه D باشد آنگاه برای هر $i = 1, \dots, n$

$$\Delta V_i \approx \left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} \right| \Delta V_i^*$$

به این ترتیب اگر $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ تابعی پیوسته بر D باشد آنگاه

$$\sum_{i=1}^n f(p_i) \Delta V_i \approx \sum_{i=1}^n f(p_i^*) \left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)}(p_i^*) \right| \Delta V_i^*$$

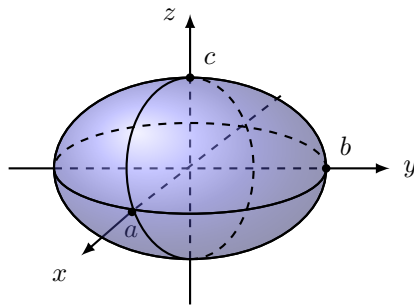
که در آن $p \in \Delta D_i$ و $p_i^* \in \Delta D_i^*$ نقاط متناظر هم در ناحیه های نظیر هستند. به این ترتیب، در حالت حدی،

وقتی $\|P^*\| \rightarrow 0$ (و در نتیجه وقتی $\|P\| \rightarrow 0$) خواهیم داشت

$$\iiint_D f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{D^*} f(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)) \left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} \right| du dv dw$$

فرمول فوق تحت نام فرمول تغییر متغیر در انتگرال سه‌گانه نامیده می‌شود.

مثال. مطلوب است محاسبه حجم ناحیه محصور توسط بیضیگون $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.



اگر متغیرهای جدید u, v, w را به صورت $u = \frac{x}{a}$, $v = \frac{y}{b}$, و $w = \frac{z}{c}$ تعریف کنیم آنگاه ناحیه D ، محصور توسط بیضیگون $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ ، نظیر به ناحیه D^* ، محصور توسط کره $u^2 + v^2 + w^2 = 1$ ، از فضای uvw خواهد بود. به علاوه با توجه به اینکه $x = x(u, v, w) = au$, $y = y(u, v, w) = bv$ و $z = z(u, v, w) = cw$ خواهیم داشت

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} = \det \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} = abc$$

در نتیجه، با استفاده از فرمول تغییر متغیر و با این فرض که ثوابت a, b و c مثبت باشند، خواهیم داشت

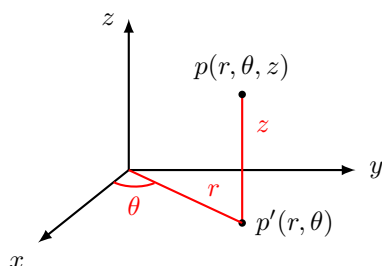
$$V = \iiint_D 1 dV = \iiint_{D^*} abc du dv dw = \frac{4}{3} \pi abc$$

در نتیجه فوق از این خاصیت استفاده کردیم که مقدار انتگرال $\iiint_{D^*} 1 du dv dw$ برابر حجم ناحیه D^* ، یعنی $\frac{4}{3} \pi$ است.

همانند بحث انتگرال دوگانه، در مبحث تغییر متغیر در انتگرال سه‌گانه، دو تغییر متغیر خاص وجود دارند که از دو سیستم مختصات متفاوت از سیستم دکارتی در فضا حاصل شده، در کاربردها دارای اهمیت هستند.

در ادامه این بحث، این دو دستگاه مختصات و تغییر متغیرهای متناظر آنها در انتگرال سه گانه را معرفی می‌کنیم.

تغییر متغیر استوانه‌ای. فرض کنیم $p(x, y, z)$ نقطه‌ای از فضای دکارتی و $p'(x, y)$ تصویر این نقطه بر صفحه xoy باشد.



در این صورت می‌توانیم نقطه p را با استفاده از سه تایی (r, θ, z) نیز نمایش دهیم که در آن (r, θ) مختصات قطبی نقطه تصویر، p' است. نمایش نقاط فضا به روش فوق را نمایش استوانه‌ای نقاط و متغیرهای r, θ, z را متغیرهای استوانه‌ای می‌نامیم.

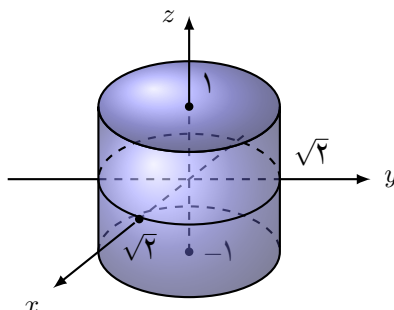
ارتباط بین دو دسته متغیرهای دکارتی و متغیرهای استوانه‌ای برای نقاط مختلف فضا به سادگی به صورت زیر حاصل می‌شوند.

$$\begin{cases} x = x(r, \theta, z) = r \cos \theta \\ y = y(r, \theta, z) = r \sin \theta \\ z = z(r, \theta, z) = z \end{cases}$$

بر این اساس، تغییر متغیر $x = x(r, \theta, z) = r \cos \theta$ ، $y = y(r, \theta, z) = r \sin \theta$ و $z = z(r, \theta, z) = z$ را تغییر متغیر استوانه‌ای می‌نامیم. در این تغییر متغیر $\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, z)} = r$. مثال‌های زیر نحوه استفاده از این تغییر متغیر را نشان می‌دهند.

مثال. هر یک از انتگرال‌های زیر را محاسبه کنید.

الف) $\iiint_D \sqrt{x^2 + y^2} dx dy dz$ که در آن D ناحیه محصور توسط استوانه $x^2 + y^2 = 2$ و صفحات $z = -1$ و $z = 1$ است.



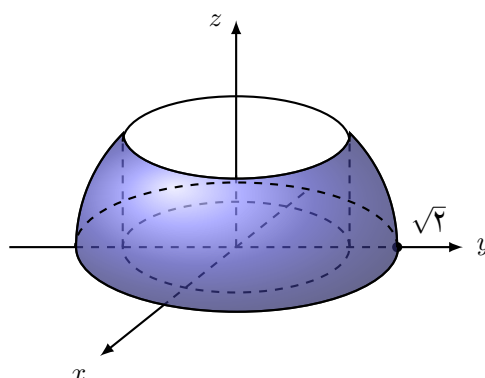
با استفاده از مختصات استوانه‌ای نقاط برای فضای دکارتی،

$$(r, \theta, z) \in D \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ 0 \leq r \leq \sqrt{2} \\ -1 \leq z \leq 1 \end{cases}$$

در نتیجه

$$\begin{aligned} \iiint_D \sqrt{x^2 + y^2} dV &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{2}} \int_{-1}^1 r \, r \, dz \, dr \, d\theta \\ &= \left(\int_0^{2\pi} d\theta \right) \left(\int_0^{\sqrt{2}} r^2 \, dr \right) \left(\int_{-1}^1 dz \right) = 2\pi \times \frac{(\sqrt{2})^3}{3} \times 2 = \frac{8\pi\sqrt{2}}{3} \end{aligned}$$

ب) $\iiint_D \frac{z^2}{x^2 + y^2} dx dy dz$ که در آن D ناحیه خارج استوانه $x^2 + y^2 = 1$ محصور توسط کره $x^2 + y^2 + z^2 = 2$ و بالای صفحه xoy است.



با استفاده از مختصات استوانه‌ای برای نقاط،

$$(r, \theta, z) \in D \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ 1 \leq r \leq \sqrt{2} \\ 0 \leq z \leq \sqrt{2 - r^2} \end{cases}$$

در به دست آوردن محدوده تغییرات متغیرهای استوانه‌ای از این خاصیت استفاده کردیم که تصویر ناحیه فوق بر صفحه xoy ناحیه محصور بین دایره $x^2 + y^2 = 1$ (یا $r = 1$) و $x^2 + y^2 = 2$ (یا $r = \sqrt{2}$) می‌باشد. با استفاده از این ناحیه در صفحه xoy ، محدوده تغییرات متغیرهای r و θ به دست می‌آیند. برای تعیین محدود متغیر z نیز از این خاصیت استفاده می‌کنیم که برای نقطه (r, θ) در مجموعه تصویر، اگر L پاره خط گذرکننده

از این نقطه به موازات محور z محدود در دامنه D باشد آنگاه کمترین مقدار z بر روی این پاره خط برابر 0 (واقع بر صفحه xoy) و بیشترین مقدار z بر آن برابر $\sqrt{2-r^2}$ (واقع بر نیم کره بالایی $z^2 + r^2 = 2$) است. به این ترتیب

$$\begin{aligned} \iiint_D \frac{z^2}{x^2+y^2} dx dy dz &= \int_0^{2\pi} \int_1^{\sqrt{2}} \int_0^{\sqrt{2-r^2}} \frac{z^2}{r^2} r dz dr d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \int_1^{\sqrt{2}} \frac{1}{r} \left(\frac{z^3}{3} \Big|_0^{\sqrt{2-r^2}} \right) dr d\theta \\ &= 2\pi \int_1^{\sqrt{2}} \frac{1}{3} \frac{(2-r^2)\sqrt{2-r^2}}{r} dr \\ &= \frac{2\pi}{3} \int_1^{\sqrt{2}} \frac{(2-r^2)\sqrt{2-r^2}}{r^2} r dr \end{aligned}$$

برای انتگرال آخر نیز می توانیم از تغییر متغیر $u = \sqrt{2-r^2}$ استفاده کنیم. در این صورت

$$\int_1^{\sqrt{2}} \frac{(2-r^2)\sqrt{2-r^2}}{r^2} r dr = \int_0^1 \frac{u^4}{2-u^2} du$$

که با استفاده از روش تجزیه کسرها قابل محاسبه خواهد بود.

ج) $\iiint_D 2z dV$ که در آن D ناحیه محصور درون استوانه $x^2 + y^2 = 2y$ بالای صفحه xoy و محدود شده توسط کره $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ است.

اگر ناحیه D را بر صفحه xoy تصویر کنیم، مجموعه تصویر ناحیه محصور توسط دایره $x^2 + y^2 = 2y$ در این صفحه خواهد بود. همچنین برای نقطه (x, y) در این ناحیه، محدوده تغییرات متغیر z برای آنکه $(x, y, z) \in D$ از پایین توسط $z = 0$ و از بالا توسط نیم کره $z = \sqrt{4-x^2-y^2}$ تعیین می شود. به این ترتیب با استفاده از مختصات استوانه ای برای نقاط فضا

$$(r, \theta, z) \in D \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq \theta \leq \pi \\ 0 \leq r \leq 2 \sin \theta \\ 0 \leq z \leq \sqrt{4-r^2} \end{cases}$$

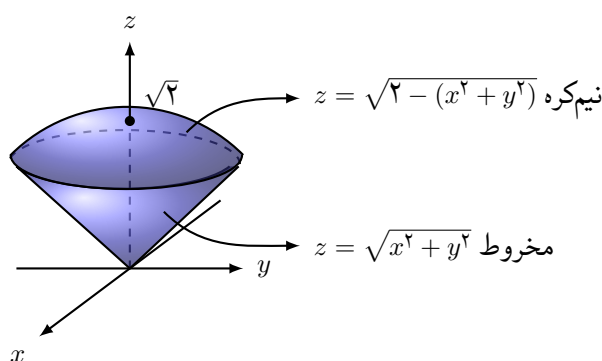
در نتیجه

$$\begin{aligned}
 \iiint_D z \, dV &= \int_0^\pi \int_0^{\sin \theta} \int_0^{\sqrt{4-r^2}} z \, r \, dz \, dr \, d\theta \\
 &= \int_0^\pi \int_0^{\sin \theta} r z \Big|_0^{\sqrt{4-r^2}} dr \, d\theta = \int_0^\pi \int_0^{\sin \theta} r(4-r^2) \, dr \, d\theta \\
 &= \int_0^\pi \left[-\frac{1}{3}(4-r^2)^3 \right]_0^{\sin \theta} d\theta = \frac{8}{3} \int_0^\pi (1 - \cos^3 \theta) \, d\theta \\
 &= \frac{8}{3} \int_0^\pi \sin^2 \theta (1 + \cos^2 \theta) \, d\theta = \frac{8}{3} \int_0^\pi (\sin^2 \theta + \frac{1}{4} \sin^2(2\theta)) \, d\theta
 \end{aligned}$$

انتگرال آخر نیز با استفاده از اتحاد مثلثاتی $\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$ ساده شده، قابل محاسبه خواهد بود.

مثال. حجم هر یک از نواحی زیر را به دست آورید.

الف) ناحیه بالای مخروط $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ درون نیمکره $z = \sqrt{4 - (x^2 + y^2)}$



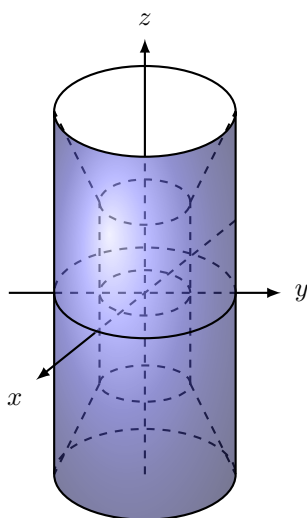
ناحیه فوق را با D و حجم آن را با V نشان می‌دهیم. در این صورت $V = \iiint_D 1 \, dV$. تصویر ناحیه D بر صفحه xy ناحیه محصور توسط دایره $x^2 + y^2 = 1$ در این صفحه است. بر روی این ناحیه تغییرات متغیر z از نیم مخروط $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ تا نیمکره $z = \sqrt{4 - (x^2 + y^2)}$ است. در نتیجه با استفاده از مختصات استوانه نقاط،

$$(r, \theta, z) \in D \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ 0 \leq r \leq 1 \\ r \leq z \leq \sqrt{4 - r^2} \end{cases}$$

به این ترتیب

$$\begin{aligned} V = \iiint_D 1 dV &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_r^{\sqrt{2-r^2}} r dz dr d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 r(\sqrt{2-r^2} - r) dr d\theta = \frac{4\pi(\sqrt{2}-1)}{3} \end{aligned}$$

ب) ناحیه محدود بین استوانه‌های $x^2 + y^2 = 1$ و $x^2 + y^2 = 4$ محصور توسط مخروط $z^2 = 4(x^2 + y^2)$.



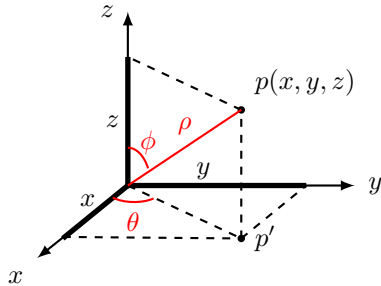
تصویر ناحیه فوق بر صفحه xoy ناحیه محصور بین دایره $x^2 + y^2 = 1$ و $x^2 + y^2 = 4$ است. همچنین بر روی این ناحیه از صفحه xoy ، تغییرات z از نیم‌مخروط پایینی به معادله $z = -2\sqrt{x^2 + y^2}$ تا نیم‌مخروط بالایی به معادله $z = 2\sqrt{x^2 + y^2}$ خواهد بود. در نتیجه با استفاده از مختصات استوانه‌ای،

$$(r, \theta, z) \in D \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ 1 \leq r \leq 2 \\ -2r \leq z \leq 2r \end{cases}$$

در نتیجه

$$\begin{aligned} V = \iiint_D 1 dV &= \int_0^{2\pi} \int_1^2 \int_{-2r}^{2r} r dz dr d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \int_1^2 4r^2 dr d\theta = \frac{56\pi}{3} \end{aligned}$$

تغییر متغیر کروی. علاوه بر سیستم مختصات دکارتی و سیستم مختصات استوانه‌ای در فضای $\mathbb{R}^3$ ، یک سیستم مختصات دیگر، تحت نام سیستم مختصات کروی، نیز از اهمیت زیادی برخوردار است.



برای نقطه $p \in \mathbb{R}^3$ ، فرض کنیم $\rho \geq 0$ فاصله این نقطه تا مبدا مختصات، $\phi \in [0, \pi]$ زاویه بین شعاع حامل نقطه p و نیم خط محور z در جهت مثبت و $\theta \in [0, 2\pi]$ زاویه قطبی نقطه p' ، تصویر نقطه p بر صفحه xoy ، باشد. در این صورت با داشتن این سه مشخصه می‌توان نقطه p را به نحوی منحصر به فرد نسبت به سایر نقاط فضا متمایز نمود.

نمایش نقاط فضا توسط سه‌تایی (ρ, ϕ, θ) به نام نمایش کروی نقاط و متغیرهای فوق به نام متغیرهای کروی نامیده می‌شوند. برای این که بتوان تمام نقاط فضا را با روش فوق مشخص نمود کافی است این متغیرها را در محدوده‌هایی به صورت $\theta \in [0, 2\pi]$ ، $\phi \in [0, \pi]$ و $\rho \in [0, \infty)$ انتخاب کنیم. اگر نقطه‌ای به مختصات دکارتی (x, y, z) و مختصات کروی (ρ, ϕ, θ) باشد آنگاه به سادگی مشاهده می‌شود

$$x = x(\rho, \phi, \theta) = \rho \sin \phi \cos \theta, \quad y = y(\rho, \phi, \theta) = \rho \sin \phi \sin \theta, \quad z = z(\rho, \phi, \theta) = \rho \cos \phi$$

بر اساس روابط فوق، تغییر متغیر $x = x(\rho, \phi, \theta)$ ، $y = y(\rho, \phi, \theta)$ و $z = z(\rho, \phi, \theta)$ تحت نام تغییر متغیر کروی نامیده می‌شود. در این تغییر متغیر $\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\rho, \phi, \theta)} = \rho^2 \sin \phi$.

مثال. مطلوب است محاسبه هر یک از انتگرال‌های زیر.

الف) $\iiint_D \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dx dy dz$ که در آن D ناحیه محصور توسط کره $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ است. توجه می‌کنیم که برای نقطه $p(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ اگر از سیستم مختصات کروی استفاده کنیم آنگاه

$$x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2 \sin^2 \phi \cos^2 \theta + \rho^2 \sin^2 \phi \sin^2 \theta + \rho^2 \cos^2 \theta = \rho^2 \sin^2 \phi + \rho^2 \cos^2 \phi = \rho^2$$

به این ترتیب کره $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ در سیستم کروی معادله‌ای به صورت $\rho = 1$ ، یا $\rho = 1$ خواهد داشت. نقاط محصور توسط این کره نیز با ویژگی $\rho \leq 1$ مشخص می‌شوند. به این ترتیب، با استفاده از سیستم

مختصات کروی، ناحیه D در این مثال به صورت زیر توصیف خواهد شد.

$$(\rho, \phi, \theta) \in D \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ 0 \leq \phi \leq \pi \\ 0 \leq \rho \leq 1 \end{cases}$$

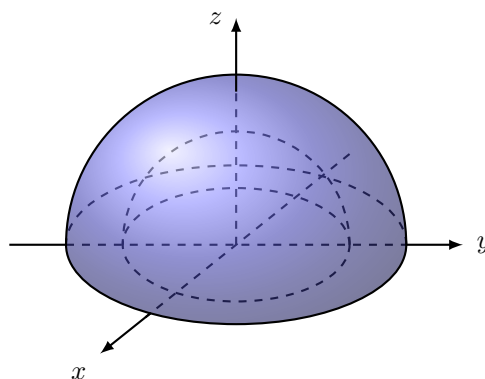
همچنین

$$f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{\rho^2} = \rho$$

در نتیجه

$$\begin{aligned} \iiint_D \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dV &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^1 \rho \rho^2 \sin \phi d\rho d\phi d\theta \\ &= \left(\int_0^{2\pi} d\theta \right) \left(\int_0^\pi \sin \phi d\phi \right) \left(\int_0^1 \rho^3 d\rho \right) = \pi \end{aligned}$$

ب) $\iiint_D \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2} dx dy dz$ که در آن D ناحیه محصور بین دو کره $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ و $x^2 + y^2 + z^2 = 2$ بالای صفحه xoy است.



توجه می‌کنیم که دو کره داده شده در سیستم مختصات کروی دارای معادلات به ترتیب $\rho = 1$ و $\rho = \sqrt{2}$ هستند. همچنین صفحه xoy نیز با ویژگی $\phi = \frac{\pi}{2}$ مشخص می‌شود. (به عبارت دیگر، این صفحه در سیستم کروی دارای معادله $\phi = \frac{\pi}{2}$ است.) بر این اساس با استفاده از مختصات کروی برای نقاط فضا،

$$(\rho, \phi, \theta) \in D \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ 0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{2} \\ 1 \leq \rho \leq \sqrt{2} \end{cases}$$

در نتیجه

$$\begin{aligned}\iiint_D \frac{1}{x^2+y^2+z^2} dx dy dz &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_1^{\sqrt{2}} \frac{1}{\rho^2} \rho^2 \sin \phi d\rho d\phi d\theta \\ &= \left(\int_0^{2\pi} \right) \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \phi d\phi \right) \left(\int_1^{\sqrt{2}} d\rho \right) = 2\pi(\sqrt{2}-1)\end{aligned}$$

ج) $\iiint_D (x^2+y^2) dV$ که در آن D ناحیه درون مخروط $z = \sqrt{3(x^2+y^2)}$ محصور توسط کره $x^2+y^2+z^2=4$ است.

قبل از مشخص کردن ناحیه D در سیستم مختصات کروی، توجه می‌کنیم با جایگذاری $x = \rho \sin \phi \cos \theta$ ، $y = \rho \sin \phi \sin \theta$ و $z = \rho \cos \phi$ در معادله مخروط $z = \sqrt{3(x^2+y^2)}$ خواهیم داشت

$$\rho \cos \phi = \sqrt{3(\rho^2 \sin^2 \phi \cos^2 \theta + \rho^2 \sin^2 \phi \sin^2 \theta)} = \sqrt{3(\rho^2 \sin^2 \phi)} = \sqrt{3} \rho \sin \phi$$

و از آنجا $\tan \phi = \frac{\sqrt{3}}{1}$ یا $\phi = \frac{\pi}{6}$. نتیجه حاصل به این معنی است که مخروط مورد بحث در اینجا مکان هندسی تمام نقاطی از فضا است که در سیستم مختصات کروی مولفه ϕ این نقاط ثابت و برابر $\frac{\pi}{6}$ است. به عبارت دیگر معادله این مخروط در سیستم کروی به صورت ساده $\phi = \frac{\pi}{6}$ می‌باشد. کره $x^2+y^2+z^2=4$ نیز دارای معادله $\rho=2$ در این سیستم مختصات است. پس

$$(\rho, \phi, \theta) \in D \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ 0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{6} \\ 0 \leq \rho \leq 2 \end{cases}$$

همچنین

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 = \rho^2 \sin^2 \phi \cos^2 \theta + \rho^2 \sin^2 \phi \sin^2 \theta = \rho^2 \sin^2 \phi$$

در نتیجه

$$\begin{aligned}\iiint_D (x^2+y^2) dV &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{6}} \int_0^2 \rho^2 \sin^2 \phi \rho^2 \sin \phi d\rho d\phi d\theta \\ &= 2\pi \left(\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin^3 \phi d\phi \right) \left(\int_0^2 \rho^4 d\rho \right) = \frac{64\pi}{5} \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin^3 \phi d\phi\end{aligned}$$

انتگرال آخر نیز با استفاده از رابطه $\sin^3 \phi = \sin \phi (1 - \cos^2 \phi)$ به سادگی محاسبه می‌شود که آن را به خواننده واگذار می‌کنیم.

مثال. حجم هر یک از نواحی زیر را به دست آورید.

(الف) ناحیه خارج مخروط $z^2 = x^2 + y^2$ درون کره $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

ناحیه فوق را با D و حجم آن را با V نشان می‌دهیم. برای مخروط $z^2 = x^2 + y^2$ در سیستم کروی خواهیم داشت

$$\rho^2 \cos^2 \phi = \rho^2 \sin^2 \phi$$

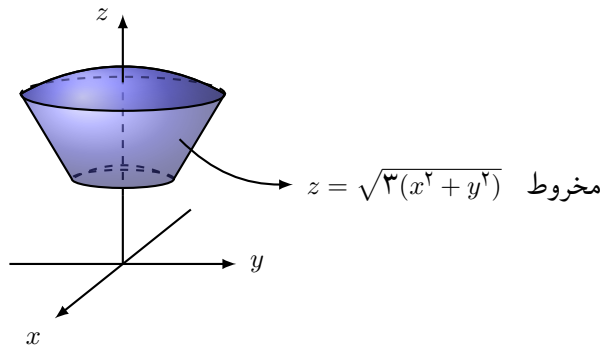
در نتیجه $\tan^2 \phi = 1$ و از آنجا $\tan \phi = \pm 1$ و یا $\phi = \frac{\pi}{4}$ و $\phi = \frac{3\pi}{4}$. نتیجه حاصل به این صورت قابل توضیح است که مخروط $z^2 = x^2 + y^2$ در واقع از دو نیم مخروط $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ و $z = -\sqrt{x^2 + y^2}$ تشکیل شده است و این دو نیم مخروط در سیستم کروی دارای معادلات، به ترتیب، $\phi = \frac{3\pi}{4}$ و $\phi = \frac{\pi}{4}$ هستند. بر این اساس فضای خارج مخروط $z^2 = x^2 + y^2$ در سیستم کروی با نامعادلات $\frac{\pi}{4} \leq \phi \leq \frac{3\pi}{4}$ توصیف می‌شود. ناحیه محصور توسط کره $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ نیز با نامعادلات $0 \leq \rho \leq 1$ مشخص می‌شود. بنابراین برای ناحیه D ,

$$D : \begin{cases} 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ \frac{\pi}{4} \leq \phi \leq \frac{3\pi}{4} \\ 0 \leq \rho \leq 1 \end{cases}$$

در نتیجه

$$\begin{aligned} V = \iiint_D 1 dV &= \int_0^{2\pi} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \int_0^1 \rho^2 \sin \phi d\rho d\phi d\theta \\ &= 2\pi \left(\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \sin \phi d\phi \right) \left(\int_0^1 \rho^2 d\rho \right) = \frac{2\pi\sqrt{2}}{3} \end{aligned}$$

(ب) ناحیه بین دو کره $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ و $x^2 + y^2 + z^2 = 3$ درون مخروط $z = \sqrt{3(x^2 + y^2)}$.



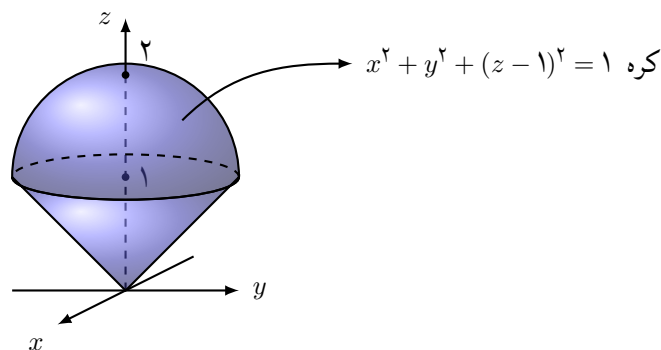
قبلا مشاهده کردیم نیم مخروط $z = \sqrt{3(x^2 + y^2)}$ در سیستم کروی معادله‌ای به صورت $\phi = \frac{\pi}{6}$ دارد. در نتیجه ناحیه درون این نیم مخروط با ویژگی $0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{6}$ نسبت به سایر نقاط فضا متمایز می‌شود. دو کره داده شده نیز دارای معادلات $\rho = 1$ و $\rho = \sqrt{3}$ بوده، از آنجا فضای بین دو کره دارای ویژگی $1 \leq \rho \leq \sqrt{3}$ است. در نتیجه

$$D : \begin{cases} 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ 0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{6} \\ 1 \leq \rho \leq \sqrt{3} \end{cases}$$

به این ترتیب

$$\begin{aligned} V = \iiint_D 1 dV &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{6}} \int_1^{\sqrt{3}} \rho^2 \sin \phi d\rho d\phi d\theta \\ &= 2\pi \left(\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin \phi d\phi \right) \left(\int_1^{\sqrt{3}} \rho^2 d\rho \right) = \frac{2\pi}{3} \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) (3\sqrt{3} - 1) \end{aligned}$$

ج) ناحیه درون مخروط $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ محصور توسط کره $x^2 + y^2 + z^2 = 2z$



ناحیه درون مخروط $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ با نامعادلات $0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{4}$ بیان می‌شود. برای کره $x^2 + y^2 + z^2 = 2z$

در سیستم کروی خواهیم داشت

$$\rho^2 = 2\rho \cos \phi$$

و از آنجا $\rho = 2 \cos \phi$ به عبارت دیگر معادله این کره در سیستم کروی به صورت $\rho = 2 \cos \phi$ است. فضای محصور توسط این کره توسط نامعادلات $0 \leq \rho \leq 2 \cos \phi$ بیان می‌شود. توجه می‌کنیم این نامساوی‌ها قابل قبول هستند هرگاه $0 \leq \cos \phi$ که در این حالت، یعنی $0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}$ ، برقرار است. پس

$$D : \begin{cases} 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ 0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{2} \\ 0 \leq \rho \leq 2 \cos \phi \end{cases}$$

بنابر این

$$\begin{aligned} V = \iiint_D dV &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2 \cos \phi} \rho^2 \sin \phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta \\ &= 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \phi \left(\int_0^{2 \cos \phi} \rho^2 \, d\rho \right) d\phi \\ &= \frac{16\pi}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \phi \cos^3 \phi \, d\phi = \pi \end{aligned}$$

تمرین‌های بخش انتگرال سه‌گانه.

۱. انتگرال‌های سه‌گانه‌ی زیر را حساب کنید.

(الف) $\int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 (xy + yz + zx) dx dy dz$

(ب) $\int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} dy \int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} \frac{dz}{\sqrt{1-x^2-y^2-z^2}}$

۲. مقدار متوسط تابع سه متغیره‌ی f روی $T \subseteq \mathbb{R}^3$ ، که حجم آن برابر V است به صورت

$$\frac{1}{V} \iiint_T f(x, y, z) \, dV$$

تعریف می‌شود. با توجه به این تعریف، مقدار متوسط تابع f با ضابطه‌ی $f(x, y, z) = xy + xz + yz$ را روی هرمی که از برخورد صفحه‌ی $x + y + z = 1$ با صفحات مختصات پدید می‌آید به دست آورید.

آیا می‌توان در T نقطه‌ای را به دست آورد که در آن f مقدار متوسط خود را اختیار کند؟

۳. مطلوب است انتگرال $\iiint_T \frac{xy}{\sqrt{z}} dV$ که در آن T ناحیه‌ای است در یک هشتم اول فضا محدود به مخروط بیضوی $z^2 = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{9}y^2$ و صفحات $x = 0$ ، $y = 0$ و $z = 1$.

۴. فرض کنیم f تابعی مشتق‌پذیر باشد. برای هر عدد مثبت t تعریف می‌کنیم

$$D_t = \{(x, y, z) \in R^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq t^2\}$$

$$g(t) = \iiint_{D_t} f(x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz$$

مطلوب است محاسبه $\frac{dg}{dt}$ بر حسب تابع f .

۵. حجم جسم محدود به استوانه‌های $y^2 = 4 - 3x$ و $y^2 = x$ و صفحات $z = 9$ و $z = -9$ را به دست آورید.

۶. حجم ناحیه‌ای را بدست آورید که توسط سه رویه $z^2 = 2xy$ ، $x + y = 2$ ، $x + y = 1$ محصور شده است.

۷. حجم محصور از بالا به کره‌ی $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ ، از زیر به مخروط $z^2 = (x^2 + y^2) \cot^2 \beta$ و از طرفین به صفحات $y = x \tan \alpha$ و $y = 0$ را به دست آورید. (α و β اعداد حقیقی ثابت و $0 < \alpha, \beta < \frac{\pi}{4}$ هستند).

۸. انتگرال‌های سه‌گانه‌ی زیر را با تغییر متغیر استوانه‌ای محاسبه کنید.

(الف) $\iiint_T x^2 y^2 dx dy dz$ که در آن T ناحیه محدود به مخروط $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ و صفحه‌ی $z = a$ ($a > 0$) است.

(ب) $\iiint_T (x^3 + y^3) dx dy dz$ که در آن T ناحیه محدود به استوانه‌ی $x^2 + y^2 = y$ ، سهمیگون $z = x^2 + y^2$ و صفحه‌ی $z = 0$ است.

۹. با استفاده از مختصات استوانه‌ای حجم ناحیه‌ی T شامل مبدأ مختصات و محدود به هذلولیگون $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ و کره‌ی $x^2 + y^2 + z^2 = 3$ را پیدا کنید.

۱۰. مقدار انتگرال‌های سه‌گانه‌ی زیر را به کمک تغییر متغیر کروی پیدا کنید.

(الف) $\iiint_T \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2} dx dy dz$ که در آن T محدود است به استوانه‌ی $x^2 + y^2 = 4$ و مخروط $x^2 + y^2 = z^2$.

(ب) $\iiint_T \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z - 2)^2}} dx dy dz$ که در آن T ناحیه‌ی درونی کره‌ی $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ است.

ج) $\iiint_T \frac{1}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}} dx dy dz$ که در آن T بین دو کره‌ی $x^2+y^2+z^2=1$ و $x^2+y^2+z^2=e$ قرار دارد.

۱۱. با استفاده از مختصات کروی حجم ناحیه‌ی مشترک بین کره‌ی $x^2+y^2+z^2=4z-3$ و مخروط $z^2=4(x^2+y^2)$ را پیدا کنید.

فصل سوم آنالیز برداری

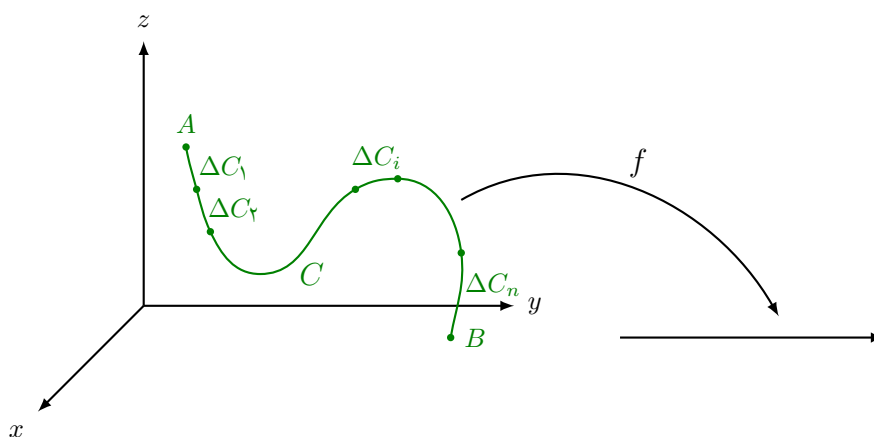
مفاهیم مطرح شده در این فصل حاصل تلاش جمعی از فیزیک‌دانان و ریاضی‌دانان در اواخر قرن نوزدهم برای بیان تعدادی از قوانین فیزیک الکتریسیته و الکترومغناطیس به زبان ریاضی است. این مفاهیم بعدها به عنوان ابزاری توانمند در زمینه‌های دیگری همچون سیالات نیز مورد استفاده قرار گرفته‌اند. از نظر ریاضی، کاری که در این فصل انجام می‌شود گسترش مفهوم انتگرال معین و انتگرال دوگانه به زیر مجموعه‌هایی کلی‌تر از بازه‌های بسته و کراندار یا نواحی بسته و کراندار در $\mathbb{R}^2$ است. در بخش اول با مفهوم انتگرال خط آشنا می‌شویم که گسترش مفهوم انتگرال توابع حقیقی مقدار با دامنه‌ای حاوی یک منحنی در صفحه یا فضا است. در بخش دوم نیز گسترش انتگرال دوگانه به انتگرال رویه را مشاهده خواهیم کرد.

انتگرال خط (انتگرال بر روی مسیر)

در این بخش، انتگرال خط، که به تعبیری گسترش مفهوم انتگرال تابع یک متغیره به صفحه یا فضا محسوب می‌شود، مطرح می‌گردد. این انتگرال خود به دو نوع تقسیم می‌گردد. نوع اول آن زمانی است که تابع تعریف شده بر یک مسیر در صفحه یا فضا، تابعی با مقادیر حقیقی باشد. انتگرال حاصل از چنین توابعی را گاهی اوقات انتگرال خط میدان‌های اسکالر نیز می‌نامند. این اصطلاح زمانی معنی واقعی خود را پیدا می‌کند که انتگرال خط نوع دوم، یعنی انتگرال خط میدان‌های برداری، تعریف شوند.

انتگرال خط نوع اول (انتگرال خط میدان‌های اسکالر).

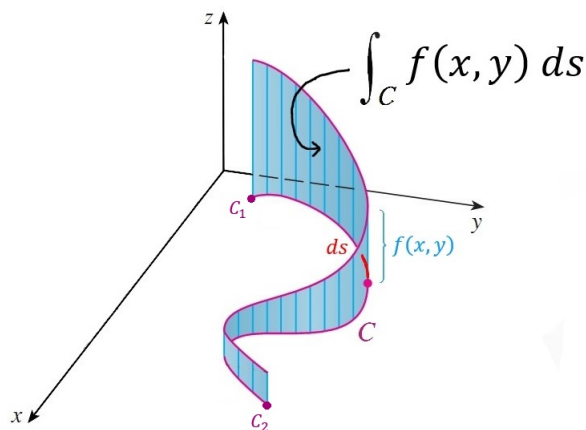
فرض کنیم $C \subset \mathbb{R}^3$ قطعه‌ای از یک خم پیوسته بین دو نقطه A و B در فضا بوده، $P = \{\Delta C_1, \dots, \Delta C_n\}$ افزایی از این خم به قطعات کوچکتر باشد. برای هر $i = 1, \dots, n$ فرض کنیم Δs_i طول قطعه ΔC_i بوده،

$$\|P\| := \max\{\Delta s_i; i = 1, \dots, n\}$$


اگر $f: C \rightarrow \mathbb{R}$ تابعی کراندار تعریف شده بر C باشد آنگاه با انتخاب نقاط $p_i \in \Delta C_i$ عبارت $\sum_{i=1}^n f(p_i) \Delta s_i$ را یک حاصل جمع ریمان تابع f بر C نامیده، حد آن را وقتی $\|P\| \rightarrow 0$ (در صورت وجود) با نماد $\int_C f ds$ نشان می‌دهیم و آن را انتگرال تابع (اسکالر) f بر روی مسیر C ، یا انتگرال خط f بر مسیر C ، می‌نامیم. مثال. فرض کنیم $f: C \rightarrow \mathbb{R}$ تابع ثابت ۱ باشد. در این صورت برای هر افراز $P = \{\Delta C_1, \dots, \Delta C_n\}$ از C ، و برای هر انتخاب نقاط p_i بر قطعات ΔC_i ، خواهیم داشت $\sum_{i=1}^n f(p_i) \Delta s_i = \sum_{i=1}^n \Delta s_i = s$ که در آن s طول خم C است. در نتیجه $\int_C f ds = \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(p_i) \Delta s_i = s$ یعنی در حالتی که تابع $f: C \rightarrow \mathbb{R}$ تابع ثابت ۱ باشد مقدار انتگرال خط $\int_C f ds$ برابر طول مسیر C خواهد بود.

خاصیت‌های بیان شده برای انتگرال‌های چندگانه، برای این نوع انتگرال نیز قابل بیان و اثبات هستند. به طور مثال، اگر $C = C_1 \cup C_2$ که در آن C_1 و C_2 دو قطعه منحنی از C بوده، $C_1 \cap C_2$ حداکثر از چند نقطه تشکیل شده باشد، آنگاه $\int_C f ds = \int_{C_1} f ds + \int_{C_2} f ds$.

تعبیر هندسی انتگرال خط نوع اول. فرض کنیم $C \subset \mathbb{R}^2$ خمی پیوسته در صفحه xoy بین دو نقطه A و B ، و f تابعی دو متغیره، پیوسته و نامنفی تعریف شده بر ناحیه‌ای از صفحه در برگیرنده منحنی C باشد. همچنین فرض کنیم S رویه نمایش f باشد. در این صورت نظیر هر افراز $P = \{\Delta C_1, \dots, \Delta C_n\}$ از این خم و نظیر هر انتخاب $p_i \in \Delta C_i$ ، عبارت $f(p_i) \Delta s_i$ تقریباً برابر مساحت رویه‌ای استوانه‌ای به موازات محور z ، ساخته شده بر قطعه ΔC_i ، زیر رویه S خواهد بود. بنابر این، در این حالت $\int_C f ds = \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(p_i) \Delta s_i$ برابر مساحت رویه استوانه‌ای به موازات محور z ، ساخته شده بر خم C بین صفحه xoy و رویه نمایش تابع f است.



در حالتی که مقادیر تابع f لزوماً مثبت نباشد آنگاه مقدار انتگرال خط $\int_C f ds$ برابر جمع جبری مساحت قطعاتی از این رویه استوانه‌ای تشکیل شده بین صفحه xoy و رویه نمایش f خواهد بود. محاسبه انتگرال خط نوع اول. فرض کنیم C خمی به معادله برداری $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$

$t \in [a, b]$ بین نقاط A (نظیر $t = a$) و B (نظیر $t = b$) باشد. همچنین فرض کنیم توابع $x(t)$ ، $y(t)$ و $z(t)$ توابعی مشتق‌پذیر با مشتقات پیوسته بر بازه $[a, b]$ باشند. در این حالت اگر $\Delta C \subset C$ قطعه‌ای از خم C متناظر با زیربازه $[t, t + \Delta t] \subset [a, b]$ با طولی برابر Δs باشد آنگاه می‌توان ثابت کرد

$$\Delta s \approx \|\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)\| \approx \|\vec{r}'(t)\| \Delta t$$

در نتیجه

$$\int_C f \, ds = \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(p_i) \Delta s_i = \int_a^b f(x(t), y(t), z(t)) \|\vec{r}'(t)\| \, dt$$

مثال. مطلوب است محاسبه $\int_C (2x - yz) \, ds$ که در آن C قسمتی از خط $x = t + 1$ ، $y = 2t - 4$ و $z = 1 - t$ بین دو نقطه $A(1, -4, 1)$ و $B(3, 0, -1)$ از این خط است.

اگر قرار دهیم $\vec{r}(t) = (t + 1)\vec{i} + (2t - 4)\vec{j} + (1 - t)\vec{k}$ آنگاه $\vec{r}'(t) = \vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$. در نتیجه در این مثال $\|\vec{r}'(t)\| = \sqrt{6}$. همچنین توجه می‌کنیم نقطه A متناظر با $t = 0$ و نقطه B متناظر با $t = 2$ هستند. بنابراین

$$\begin{aligned} \int_C (2x - yz) \, ds &= \int_0^2 (2x(t) - y(t)z(t)) \|\vec{r}'(t)\| \, dt \\ &= \int_0^2 (2t + 2 - (2t - 4)(1 - t)) \sqrt{6} \, dt = 2\sqrt{6} \int_0^2 (t^2 - 2t + 3) \, dt = \frac{28\sqrt{6}}{3} \end{aligned}$$

مثال. مساحت قسمتی از استوانه $x^2 + y^2 = 2y$ که بین صفحه xoy و نیم‌کره $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ قرار دارد را تعیین کنید.

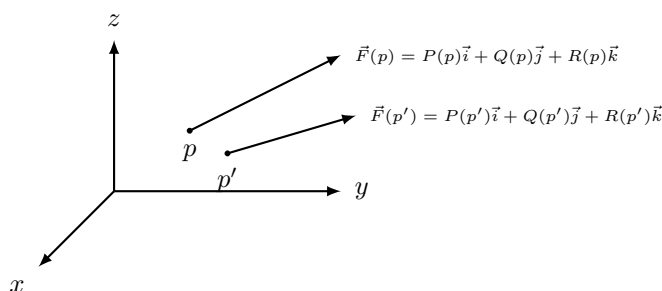
توجه می‌کنیم که تمام نقاط دایره $x^2 + y^2 = 2y$ در دامنه $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \leq 4\}$ ، دامنه تعریف تابع $f(x, y) = \sqrt{4 - (x^2 + y^2)}$ قرار دارند. بنابر تعبیر هندسی انتگرال خط، مساحت رویه استوانه‌ای مورد نظر برابر $\int_C f(x, y) \, ds$ است. برای محاسبه انتگرال خط فوق، ابتدا معادلات پارامتری خم C را بیان می‌کنیم. خم C دایره $x^2 + y^2 = 2y$ یا $x^2 + (y - 1)^2 = 1$ است. بنابر این می‌توانیم معادلات پارامتری آن را به صورت $x = \cos t$ و $y = \sin t + 1$ ، $t \in [0, 2\pi]$ در نظر بگیریم. پس خم C توسط معادله برداری $\vec{r}(t) = (\cos t)\vec{i} + (1 + \sin t)\vec{j}$ بیان شده، از آنجا $\vec{r}'(t) = (-\sin t)\vec{i} + (\cos t)\vec{j}$ و در نتیجه $\|\vec{r}'(t)\| = 1$.

$$\begin{aligned}
\int_C f \, ds &= \int_0^{2\pi} f(x(t), y(t)) \|\vec{r}'(t)\| \, dt \\
&= \int_0^{2\pi} \sqrt{4 - (\cos^2(t) + (1 + \sin t)^2)} \times 1 \, dt \\
&= \int_0^{2\pi} \sqrt{2 - 2 \sin t} \, dt = \sqrt{2} \int_0^{2\pi} \frac{\sqrt{1 - \sin^2 t}}{\sqrt{1 + \sin t}} \, dt \\
&= \sqrt{2} \int_0^{2\pi} \frac{|\cos t|}{\sqrt{1 + \sin t}} \, dt \\
&= \sqrt{2} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t}{\sqrt{1 + \sin t}} \, dt + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \frac{-\cos t}{\sqrt{1 + \sin t}} \, dt + \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \frac{\cos t}{\sqrt{1 + \sin t}} \, dt \right) = 8
\end{aligned}$$

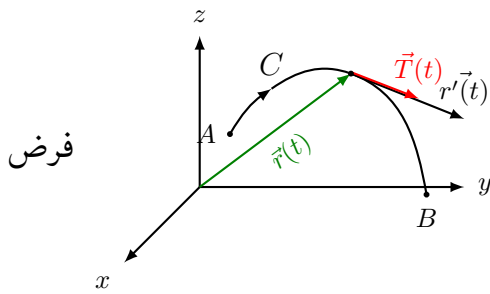
انتگرال خط نوع دوم (انتگرال خط میدان‌های برداری).

همانگونه که قبلاً اشاره شد، مطالعات انجام شده در اواخر قرن نوزدهم منجر به گسترش مفاهیم اصلی آنالیز برداری گردید. به خصوص ارائه تعریف بردار، و به طور خاص میدان‌های برداری، که به تعبیری، رده‌ای از توابع با مقادیر برداری هستند، باعث گردید تعاریف اصلی حسابان، یعنی مشتق و انتگرال، به شکل خاصی تعمیم پیدا کنند. در زیر نحوه وارد شدن این رده از توابع در تعریف نوع خاصی از انتگرال خط که به آن انتگرال خط نوع دوم یا انتگرال خط میدان‌های برداری می‌نامیم را مشاهده می‌کنیم.

فرض کنیم $D \subset \mathbb{R}^3$ ناحیه‌ای از فضای $\mathbb{R}^3$ بوده، توابع $P, Q, R : D \rightarrow \mathbb{R}$ تعریف شده بر این دامنه باشند. در این صورت دستور $\vec{F}$ که به هر نقطه $p \in D$ بردار $P(p)\vec{i} + Q(p)\vec{j} + R(p)\vec{k}$ با نقطه اثر p را نظیر می‌کند تحت نام یک میدان برداری تعریف شده بر D نامیده می‌شود.



این میدان برداری را بر D پیوسته (مشتق‌پذیر) نامیم هرگاه توابع P, Q و R بر D پیوسته (مشتق‌پذیر) باشند. به طور مثال میدان برداری $\vec{F}(x, y, z) = (x^2 + yz)\vec{i} + (y - x - z)\vec{j} + (z^3 - 1)\vec{k}$ یک میدان برداری پیوسته و مشتق‌پذیر بر فضای $\mathbb{R}^3$ است.



فرض کنیم $C \subset \mathbb{R}^3$ یک خم پیوسته در فضا با معادله برداری $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$ را یک خم هموار نامیم هرگاه توابع $x(t)$ ، $y(t)$ و $z(t)$ بر $[a, b]$ مشتق پیوسته داشته باشند و برای هر $t \in [a, b]$ ، $\vec{r}'(t) \neq \vec{0}$. در این حالت بردار $\frac{\vec{r}'(t)}{\|\vec{r}'(t)\|}$ را بردار مماس یکه بر C نامیده، آن را با نماد $\vec{T}(t)$ نمایش می‌دهیم.

کنیم $\vec{F}$ یک میدان برداری پیوسته تعریف شده بر دامنه $D \subset \mathbb{R}^3$ و $C \subset D$ یک خم هموار با معادله برداری $\vec{r}(t)$ ، $t \in [a, b]$ ، پیموده شده از نقطه A (نظیر $t = a$) به نقطه B (نظیر $t = b$) باشد. برای نقطه $p \in C$ ، اگر $\vec{T}(p)$ بردار مماس یکه بر این خم در امتداد حرکت بر روی آن باشد آنگاه $\vec{F}(p) \cdot \vec{T}(p)$ بیانگر مولفه‌ای از میدان $\vec{F}$ در راستای مماس بر مسیر C (و در جهت حرکت بر این منحنی) خواهد بود. در این صورت با در نظر گرفتن تابع $f: C \rightarrow \mathbb{R}$ با دستور $f(p) = \vec{F}(p) \cdot \vec{T}(p)$ ، انتگرال خط این تابع در امتداد C را انتگرال خط میدان برداری $\vec{F}$ بر C پیموده شده از A به سمت B نامیده آن را با نماد $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ نمایش می‌دهیم. پس

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_C \vec{F} \cdot \vec{T} ds$$

در حالتی که خم C خمی پیوسته و قطعه به قطعه هموار متشکل از قطعات هموار $C_1, \dots, C_k$ بوده، جهت حرکت بر روی قطعات هماهنگ بوده، از نقطه A (در ابتدای قطعه C_1) به نقطه B (در انتهای قطعه C_k) منجر شود آنگاه انتگرال میدان $\vec{F}$ در امتداد C را با همان نماد $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ نمایش داده به صورت

$$\int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \dots + \int_{C_k} \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad \text{تعریف می‌کنیم.}$$

تذکر. فرض کنیم C' خم هموار C طی شده در جهت خلاف (از نقطه B به نقطه A) باشد. در این صورت در هر نقطه p از این خم، بردار مماس یکه بر خم C و بردار مماس یکه بر خم C' در دو جهت مخالف هم هستند. در نتیجه $\int_{C'} \vec{F} \cdot d\vec{r} = - \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$. بر این اساس، خم C' را با نماد $-C$ نیز نمایش می‌دهیم و فرمول فوق را به صورت $\int_{-C} \vec{F} \cdot d\vec{r} = - \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ بیان می‌کنیم.

برای محاسبه انتگرال خط میدان برداری $\vec{F}$ در امتداد مسیر C پیموده شده از A به B ، فرض می‌کنیم خمی هموار با معادله برداری $\vec{r}(t)$ ، $t \in [a, b]$ ، باشد. در این صورت در نقطه $p \in C$ ، نظیر $t \in [a, b]$ ، $\vec{T}(p) = \frac{\vec{r}'(t)}{\|\vec{r}'(t)\|}$ در نتیجه با توجه به نحوه محاسبه انتگرال خط نوع اول، خواهیم داشت

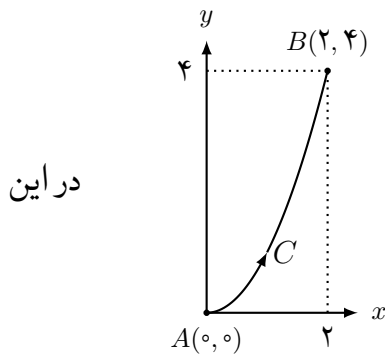
$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_C \vec{F} \cdot \vec{T} ds = \int_a^b \vec{F}(x(t), y(t), z(t)) \cdot \frac{\vec{r}'(t)}{\|\vec{r}'(t)\|} \|\vec{r}'(t)\| dt = \int_a^b \vec{F}(x(t), y(t), z(t)) \cdot \vec{r}'(t) dt$$

مثال. فرض کنیم $\vec{F}(x, y) = (x^2 - 2y)\vec{i} + (x + y)\vec{j}$. مطلوب است محاسبه $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ که در آن
 الف) قسمتی از سهمی $y = x^2$ پیموده شده از نقطه $A(0, 0)$ به نقطه $B(2, 4)$ است.
 ب) قسمتی از خط راست واصل از A به B است.

الف) سهمی مورد نظر را می‌توانیم با انتخاب $x(t) = t$ و $y(t) = t^2$ توسط معادله برداری

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} = t\vec{i} + t^2\vec{j}, \quad t \in [0, 2]$$

بیان کنیم.
 صورت



$$\begin{aligned} \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \int_0^2 \vec{F}(x(t), y(t)) \cdot \vec{r}'(t) dt \\ &= \int_0^2 (t^2 - 2t^2)\vec{i} + (t + t^2)\vec{j} \cdot (\vec{i} + 2t\vec{j}) dt \\ &= \int_0^2 (-t^2 + 2t(t + t^2)) dt = \int_0^2 (2t^3 + t^2) dt = \frac{32}{3} \end{aligned}$$

ب) فرض کنیم L خط راست گذرکننده از دو نقطه A و B باشد. در این صورت بردار $\vec{AB} = 2\vec{i} + 4\vec{j}$ را می‌توانیم به عنوان بردار هادی برای این خط در نظر بگیریم. به این ترتیب خط L دارای معادلات پارامتری $t \in [0, 1]$, $\vec{r}(t) = 2t\vec{i} + 4t\vec{j}$ بوده، قطعه مورد نظر با استفاده از تابع برداری $t \in \mathbb{R}$, $y(t) = 4t$, $x(t) = 2t$ قابل بیان خواهد بود. در نتیجه

$$\begin{aligned} \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \int_0^1 \vec{F}(x(t), y(t)) \cdot \vec{r}'(t) dt \\ &= \int_0^1 ((4t^2 - 8t)\vec{i} + (2t + 4t)\vec{j}) \cdot (2\vec{i} + 4\vec{j}) dt \\ &= \int_0^1 (8t^2 - 16t + 24t) dt = 8 \int_0^1 (t^2 + t) dt = \frac{20}{3} \end{aligned}$$

تذکر. الف) همانطور که در مثال فوق مشاهده می‌شود، مقدار انتگرال خط $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ ، در حالت کلی، به مسیر انتخاب شده بین دو نقطه A و B بستگی دارد. بعداً با میدان‌هایی آشنا می‌شویم که برای آن‌ها مقدار انتگرال مستقل از مسیر انتخاب شده بین دو نقطه بوده، فقط به نقاط ابتدا و انتهای مسیر بستگی دارد.
 ب) فرض کنیم $\vec{F}$ میدانی با دستور $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$ و C خمی هموار به معادلات $x = x(t)$, $y = y(t)$,

$t \in [a, b]$ ، $z = z(t)$ پیموده شده از نقطه نظیر $t = a$ به نقطه نظیر $t = b$ باشد. در این صورت مشاهده کردیم

$$\begin{aligned}\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \int_a^b \vec{F}(x(t), y(t), z(t)) \cdot \vec{r}'(t) dt \\ &= \int_a^b \left(P(x(t), y(t), z(t))x'(t) + Q(x(t), y(t), z(t))y'(t) + R(x(t), y(t), z(t))z'(t) \right) dt\end{aligned}$$

با استفاده از نمادهای دیفرانسیلی $dx = x'(t) dt$ ، $dy = y'(t) dt$ و $dz = z'(t) dt$ ، عبارت اخیر را می‌توانیم به صورت نمادین به فرم $\int_C P dx + Q dy + R dz$ نمایش دهیم. به این ترتیب، عبارت اخیر نمایش دیگری برای همان انتگرال خط $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ محسوب می‌شود.

مثال. مطلوب است محاسبه $\int_C (y + z) dx + (x + 2y) dy + (x - 4z) dz$ که در آن

(الف) قسمتی از خم $x = t$ ، $y = t^2$ و $z = t^3$ از نقطه $A(1, 1, 1)$ به نقطه $B(2, 4, 8)$ است.

(ب) قسمتی از خط راست از نقطه A به نقطه B است.

(ج) مسیری هموار و دلخواه از نقطه A به نقطه B است.

(الف) برای خم C ، $x(t) = t$ ، $y(t) = t^2$ و $z(t) = t^3$. در نتیجه $dx = dt$ ، $dy = 2t dt$ و $dz = 3t^2 dt$. همچنین توجه می‌کنیم نقطه A نظیر $t = 1$ و نقطه B بر این خم نظیر $t = 2$ است. در نتیجه

$$\begin{aligned}\int_C (y + z) dx + (x + 2y) dy + (x - 4z) dz &= \int_1^2 \left((y(t) + z(t)) + (x(t) + 2y(t))2t + (x(t) - 4z(t))3t^2 \right) dt \\ &= \int_1^2 (t^2 + t^3 + 2t^2 + 4t^3 + 3t^2 - 12t^5) dt = \int_1^2 (-12t^5 + 8t^3 + 3t^2) dt = -89\end{aligned}$$

(ب) اگر L خط گذرنده از دو نقطه $A(1, 1, 1)$ و $B(2, 4, 8)$ باشد آنگاه بردار $\vec{AB} = \vec{i} + 3\vec{j} + 7\vec{k}$ را به عنوان بردار هادی این خط در نظر می‌گیریم. در این صورت L معادلات پارامتری به صورت زیر خواهد داشت

$$L : \begin{cases} x = t + 1 \\ y = 3t + 1 \\ z = 7t + 1 \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

اگر C قسمتی از این خم از نقطه A (نظیر $t = 0$) به B (نظیر $t = 1$) باشد آنگاه بر روی این خم $dx = dt$ ،

$dz = 7dt$ و $dy = 3dt$ در نتیجه

$$\begin{aligned} \int_C (y+z) dx + (x+2y) dy + (x-4z) dz \\ = \int_0^1 \left((3t+1+7t+1) + (t+1+6t+2) \times 3 + (t+1-28t-4) \times 7 \right) dt \\ = \int_0^1 (-158t-10) dt = -89 \end{aligned}$$

ج) فرض کنیم C خمی هموار به معادلات پارامتری $x=x(t)$ ، $y=y(t)$ و $z=z(t)$ با $t \in [a, b]$ باشد که در آن $A(1, 1, 1) = (x(a), y(a), z(a))$ و $B(2, 4, 8) = (x(b), y(b), z(b))$ در این صورت

$$\begin{aligned} \int_C (y+z) dx + (x+2y) dy + (x-4z) dz \\ = \int_a^b \left((y(t)+z(t))x'(t) + (x(t)+2y(t))y'(t) + (x(t)-4z(t))z'(t) \right) dt \\ = \int_a^b g(t) dt \end{aligned}$$

که در آن $g(t) = (y(t)+z(t))x'(t) + (x(t)+2y(t))y'(t) + (x(t)-4z(t))z'(t)$ اگر

$$G(t) := x(t)y(t) + x(t)z(t) + y^2(t) - 2z^2(t)$$

آنگاه به سادگی مشاهده می‌شود $G'(t) = g(t)$ در نتیجه

$$\begin{aligned} \int_C (y+z) dx + (x+2y) dy + (x-4z) dz &= \int_a^b g(t) dt \\ &= \int_a^b G'(t) dt = G(b) - G(a) \\ &= \left(x(b)y(b) + x(b)z(b) + y^2(b) - 2z^2(b) \right) \\ &\quad - \left(x(a)y(a) + x(a)z(a) + y^2(a) - 2z^2(a) \right) = -89 \end{aligned}$$

تذکر. در مثال اخیر، اگر تابع $\phi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ را با دستور $\phi(x, y, z) = xy + xz + y^2 - 2z^2$ را در نظر بگیریم آنگاه $\vec{F} = \nabla \phi$. چنین میدانی را یک میدان گرادیان و تابع ϕ را یک تابع پتانسیل برای این میدان می‌نامیم. فرض کنیم میدان $\vec{F}$ بر دامنه D در فضا میدانی گرادیان با تابع پتانسیل ϕ باشد. پس برای هر نقطه از D ،

$$\vec{F} = \nabla \phi = \frac{\partial \phi}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial \phi}{\partial z} \vec{k}$$

برای دو نقطه A و B در D ، اگر $C \subset D$ خمی هموار به معادلات پارامتری $x = x(t)$ ، $y = y(t)$ و $z = z(t)$ ، $t \in [a, b]$ از نقطه A (نظیر $t = a$) به نقطه B (نظیر $t = b$) باشد آنگاه

$$\begin{aligned}\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \int P dx + Q dy + R dz \\ &= \int_a^b \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}(x(t), y(t), z(t)) x'(t) + \frac{\partial \phi}{\partial y}(x(t), y(t), z(t)) y'(t) + \frac{\partial \phi}{\partial z}(x(t), y(t), z(t)) z'(t) \right) dt \\ &= \int_a^b \frac{d}{dt} \phi(x(t), y(t), z(t)) dt = \phi(x(b), y(b), z(b)) - \phi(x(a), y(a), z(a))\end{aligned}$$

خاصیت فوق که به قضیه اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال برای میدان‌های برداری معروف است به صورت زیر بیان می‌شود.

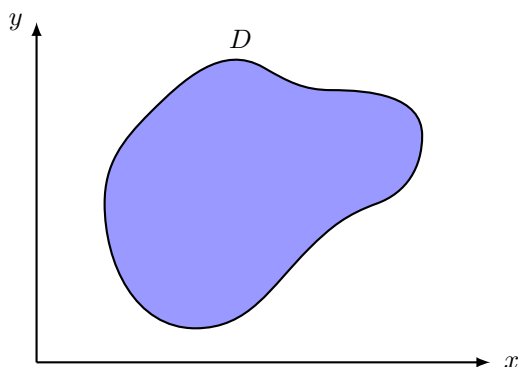
$$\int_C \nabla \phi \cdot d\vec{r} = \phi(B) - \phi(A)$$

که در آن C خمی هموار پیموده شده از نقطه A به سمت نقطه B است. همانگونه که در نتیجه فوق مشاهده می‌شود، مقدار انتگرال خط یک میدان گرادیان مستقل از انتخاب مسیر C از A به B است. این دسته از میدان‌ها را در فیزیک میدان‌های پایسته می‌نامند.

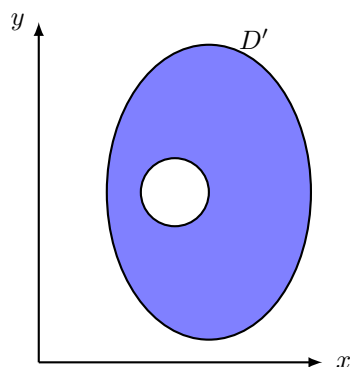
قضیه گرین در صفحه.

قضیه گرین یکی از قضایای بسیار مهم در آنالیز برداری است که برای بیان آن نیازمند چند مفهوم مقدماتی هستیم.

فرض کنیم $D \subset \mathbb{R}^2$. ناحیه D را یک ناحیه همبند نامیم هرگاه هر دو نقطه از D را بتوان توسط خمی پیوسته که تمام نقاط آن در D قرار گیرد به هم وصل نمود. خم $C \subset \mathbb{R}^2$ را یک خم بسته ساده نامیم هرگاه خمی بسته باشد (یعنی نقاط ابتدا و انتهای آن بر هم منطبق باشد) و در هیچ نقطه‌ای خود را قطع نکند. ناحیه همبند $D \subset \mathbb{R}^2$ را یک ناحیه همبند ساده نامیم هرگاه اگر $C \subset D$ یک منحنی بسته ساده باشد آنگاه تمام نقاط محصور توسط این منحنی متعلق به دامنه D باشند.



نمونه‌ای از یک ناحیه همبند ساده

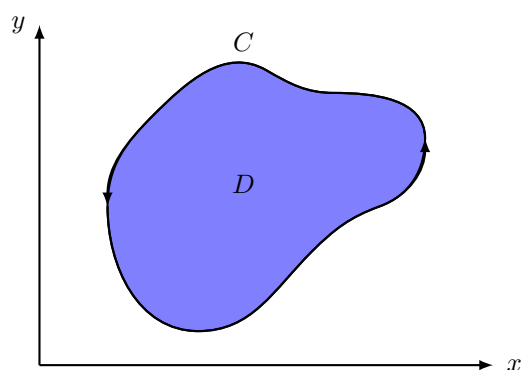


نمونه‌ای از یک ناحیه همبند غیر ساده

قضیه گرین

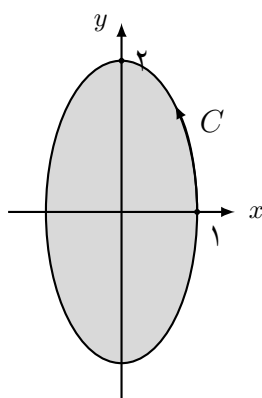
فرض کنیم $C \subset \mathbb{R}^2$ یک خم بسته ساده پیموده شده در خلاف جهت عقربه‌های ساعت و D ناحیه محصور توسط این خم باشد. همچنین فرض کنیم توابع P, Q بر منحنی C و نقاط محصور توسط آن مشتقات جزئی پیوسته داشته باشند. در این صورت

$$\int_C P dx + Q dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$$



مثال. مطلوب است محاسبه هر یک از انتگرال‌های زیر.

الف) $\int_C (x \sinh x - xy) dx + \left(\frac{y^3}{1+y^4} + x^2 \right) dy$ که در آن C بیضی $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$ طی شده در خلاف جهت عقربه‌های ساعت است.



در این مثال، $P(x, y) = x \sinh x - xy$ و $Q(x, y) = \frac{y^3}{1+y^4} + x^2$ که هر دو بر تمام $\mathbb{R}^2$ مشتقات جزئی پیوسته

دارند. اگر D ناحیه محصور توسط بیضی $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$ باشد آنگاه بنابر قضیه گرین

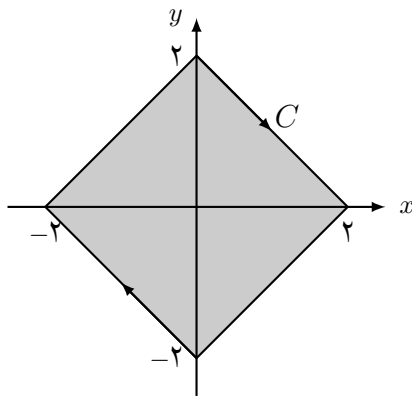
$$\begin{aligned}\int_C P dx + Q dy &= \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy \\ &= \iint_D (2x - (-x)) dx dy = \iint_D 3x dx dy\end{aligned}$$

برای محاسبه انتگرال اخیر، با توجه به مرز ناحیه، ابتدا از تغییر متغیر $u = x$ و $v = \frac{y}{2}$ یا $x = x(u, v) = u$ استفاده می‌کنیم. در این صورت ناحیه D تبدیل به ناحیه D^* ، ناحیه محصور توسط دایره $u^2 + v^2 = 1$ از صفحه uov شده، $\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = 2$. در نتیجه

$$\begin{aligned}\iint_D 3x dx dy &= \iint_{D^*} 3u \times 2 du dv = 6 \iint_{D^*} u du dv \\ &= 6 \int_0^{2\pi} \int_0^1 r \cos \theta \times r dr d\theta = 6 \left(\int_0^{2\pi} \cos \theta d\theta \right) \left(\int_0^1 r^2 dr \right) = 0.\end{aligned}$$

در محاسبه انتگرال دوگانه حاصل بر حسب متغیرهای u و v از تغییر متغیر قطبی در صفحه متناظر با این متغیرها، یعنی $u = r \cos \theta$ و $v = r \sin \theta$ استفاده کرده‌ایم.

ب) $\int_C \frac{y dx - x dy}{|x| + |y|}$ که در آن C خم بسته $|x| + |y| = 2$ پیموده شده در جهت عقربه‌های ساعت است.



در انتگرال خط اخیر $P(x, y) = \frac{y}{|x| + |y|}$ و $Q(x, y) = \frac{-x}{|x| + |y|}$ همانگونه که مشاهده می‌شود توابع P و Q در مبدا مختصات (که درون لوزی $|x| + |y| = 2$ قرار دارد) تعریف نشده‌اند. به علاوه این دو تابع در هیچیک از نقاط واقع بر محورهای x و y نیز مشتقات جزئی ندارند. پس شرایط استفاده از قضیه گرین در این مسئله برقرار نیستند. با وجود این، توجه می‌کنیم در امتداد مسیر C همواره $|x| + |y| = 2$. بنابر این انتگرال خط میدان برداری فوق در امتداد C با انتگرال خط $\int_C \frac{y}{2} dx + \frac{-x}{2} dy$ برابر است. برای انتگرال

خط اخیر $P(x, y) = \frac{1}{2}y$ و $Q(x, y) = -\frac{1}{2}x$ که توابعی با مشتقات جزئی پیوسته بر تمام $\mathbb{R}^2$ هستند. به این ترتیب برای محاسبه انتگرال خط اخیر می‌توانیم از قضیه گرین استفاده کنیم. توجه کنیم که جهت حرکت بر روی C در جهت عقربه‌های ساعت بوده، بنابر این جهت حرکت بر روی خم $-C$ جهت مناسب برای قضیه گرین خواهد بود. فرض کنیم D ناحیه محصور توسط لوزی $|x| + |y| = 2$ باشد. در این صورت

$$\begin{aligned} \int_C \frac{y}{|x| + |y|} dx + \frac{-x}{|x| + |y|} dy &= \int_C \left(\frac{1}{2}y\right) dx + \left(-\frac{1}{2}x\right) dy \\ &= - \int_{-C} P(x, y) dx + Q(x, y) dy \\ &= - \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx dy = \iint_D dx dy = 8 \end{aligned}$$

ج) $\int_C -\frac{y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy$ که در آن C دایره $x^2 + y^2 = a^2$ طی شده در جهت مثلثاتی است. در این مثال، $P(x, y) = \frac{-y}{x^2 + y^2}$ و $Q(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}$ بر $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$ توابعی با مشتقات جزئی پیوسته هستند ولی هیچیک در نقطه $(0, 0)$ که درون ناحیه محصور توسط دایره $x^2 + y^2 = a^2$ قرار گرفته است، تعریف نشده‌اند. بنابر این شرایط استفاده از قضیه گرین فراهم نیست. برای حل این مسئله، دو راه در پیش می‌گیریم.

روش اول: معادلات پارامتری خم C را بیان کرده مستقیماً به محاسبه انتگرال خط می‌پردازیم. دایره $x^2 + y^2 = a^2$ دارای معادلات پارامتری به صورت $x(t) = a \cos t$ ، $y(t) = a \sin t$ ، $t \in [0, 2\pi]$ است. در نتیجه

$$\begin{aligned} \int_C \frac{-y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy &= \int_0^{2\pi} \frac{-a \sin t}{a^2 \cos^2 t + a^2 \sin^2 t} (-a \sin t dt) + \frac{a \cos t}{a^2 \cos^2 t + a^2 \sin^2 t} (a \cos t dt) \\ &= \int_0^{2\pi} dt = 2\pi \end{aligned}$$

روش دوم: مانند مثال قبل، بر روی خم $C: x^2 + y^2 = a^2$

$$\int_C \frac{-y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy = \int_C \frac{-y}{a^2} dx + \frac{x}{a^2} dy = \frac{1}{a^2} \int_C -y dx + x dy$$

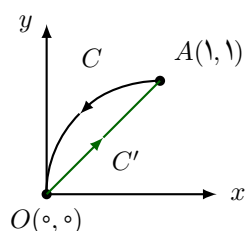
اکنون اگر قرار دهیم $P(x, y) = -y$ و $Q(x, y) = x$ آنگاه توابع P و Q بر تمام $\mathbb{R}^2$ مشتقات جزئی پیوسته

داشته، در نتیجه با استفاده از قضیه گرین

$$\begin{aligned}\int_C \frac{-y}{x^2+y^2} dx + \frac{x}{x^2+y^2} dy &= \frac{1}{a^2} \int_C P(x,y) dx + Q(x,y) dy \\ &= \frac{1}{a^2} \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy \\ &= \frac{1}{a^2} \iint_D 2 dx dy = \frac{1}{a^2} 2\pi a^2 = 2\pi\end{aligned}$$

در اینجا D ناحیه محصور توسط دایره $x^2 + y^2 = a^2$ است.

مثال. مطلوب است محاسبه $\int_C (3x^2 e^y) dx + (x^3 e^y + 1) dy$ که در آن C قسمتی از دایره $x^2 + y^2 = 2x$ از نقطه $A(1,1)$ به نقطه $O(0,0)$ در ناحیه $y \geq 0$ است.



توجه می‌کنیم در اینجا C خم بسته نیست. بنابراین از قضیه گرین برای محاسبه مستقیم این انتگرال نمی‌توانیم استفاده کنیم. اما اگر قسمتی از خط $y = x$ پیموده شده از نقطه $O(0,0)$ به $A(1,1)$ باشد آنگاه $C \cup C'$ خمی بسته پیموده شده در خلاف جهت عقربه‌های ساعت است. توابع $P(x,y) = 3x^2 e^y$ و $Q(x,y) = x^3 e^y + 1$ بر $\mathbb{R}^2$ مشتقات جزئی پیوسته دارند. بنابراین اگر D ناحیه محصور توسط خم بسته $C \cup C'$ باشد آنگاه با استفاده از قضیه گرین

$$\begin{aligned}\int_{C \cup C'} P(x,y) dx + Q(x,y) dy &= \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy \\ &= \iint_D (3x^2 e^y - 3x^2 e^y) dx dy = 0\end{aligned}$$

از طرف دیگر، بنابر خواص انتگرال خط،

$$\int_{C \cup C'} P dx + Q dy = \int_C P dx + Q dy + \int_{C'} P dx + Q dy$$

در نتیجه

$$\int_C P dx + Q dy = - \int_{C'} P dx + Q dy$$

اگر چه که در اینجا مجدداً مجبور به محاسبه انتگرال خط همان میدان هستیم ولی مسیر حرکت دارای معادلات پارامتری ساده‌تری نسبت به حالت اولیه است. برای مسیر C' ، $x(t) = t$ ، $y(t) = t$ ، $t \in [0, 1]$. در نتیجه

$$\begin{aligned}\int_C P dx + Q dy &= - \int_{C'} P dx + Q dy \\ &= - \int_0^1 (3t^2 e^t) dt + (t^3 e^t + 1) dt = - \int_0^1 \frac{d}{dt} (t^3 e^t + t) dt \\ &= -(t^3 e^t + t) \Big|_0^1 = -(e + 1)\end{aligned}$$

تمرین. مطلوب است محاسبه $\int_C (x^2 + y^2) dx + (\frac{y^3}{1+y^4} + xy) dy$ که در آن C قسمتی از دایره $x^2 + y^2 = 1$ در $\frac{1}{4}$ اول صفحه از نقطه $A(0, 1)$ به نقطه $B(1, 0)$ است.

تمرین‌های بخش انتگرال خط.

۱. انتگرال‌های خطی زیر را محاسبه کنید.

الف) $\int_C \frac{ds}{x-y}$ که در آن C پاره خط واصل بین دو نقطه‌ی $P = (0, -3)$ و $Q = (6, 0)$ است.

ب) $\int_C \frac{y}{\sqrt{x}} ds$ که در آن معادلات پارامتری C عبارتند از $x = 3t^2$ و $y = 2t^3$ به ازای $1 \leq t \leq 2$.

۲. انتگرال‌های خطی زیر را محاسبه کنید.

الف) $\int_C \frac{(x-y)dx + (x+y)dy}{x^2 + y^2}$ که در آن C دارای معادلات پارامتری $x = 2 \cos t$ ، $y = 2 \sin t$ به ازای $0 \leq t \leq \pi$ است.

ب) $\int_C \frac{dx + dy}{|x| + |y|}$ که در آن C مربعی است با رئوس $(1, 0)$ ، $(0, 1)$ ، $(-1, 0)$ ، $(0, -1)$ و جهت آن خلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت است.

ج) $\int_C \frac{xdy - ydx}{x^2 + xy + y^2}$ که در آن C دایره‌ای به معادلات پارامتری $x = a \cos t$ ، $y = a \sin t$ ، $(a > 0)$ به ازای $0 \leq t \leq 2\pi$ است.

۳. فرض کنید C خم بسته‌ی همواری است که نسبت به مبدا متقارن است. ثابت کنید

$$\oint_C (yx^3 + e^y)dx + (xy^3 + xe^y - 2y)dy = 0$$

۴. صحت قضیه‌ی گرین را برای انتگرال خط $\oint_C (-x^2 y)dx + (xy^2)dy$ بررسی کنید که در آن C مرز ناحیه‌ی محصور بین دواير $x^2 + y^2 = 4$ و $x^2 + y^2 = 16$ می‌باشد.

۵. فرض کنید $f(x, y) = (|x| + |y|)^{-1}$ و C مربعی با رئوس $A = (1, 0)$ ، $B = (0, 1)$ ، $C = (-1, 0)$ و $D = (0, -1)$ باشد که در جهت خلاف عقربه‌های ساعت یکبار پیموده می‌شود. مطلوب است محاسبه‌ی

$$\int_C f(x, y) dx + f(x, y) dy$$

۶. الف) با استفاده از قضیه‌ی گرین نشان دهید هرگاه توابع دو متغیره‌ی P و Q روی حوزه‌ی همبند ساده‌ی D دارای مشتقات نسبی پیوسته باشند و در هر نقطه‌ی $(x, y) \in D$ داشته باشیم $\frac{\partial P}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y)$ آنگاه

$$\vec{F}(x, y) = P(x, y)\vec{i} + Q(x, y)\vec{j}$$

یک میدان گرادیان است.

ب) مطلوب است محاسبه انتگرال $\int_C \frac{x-y}{x^2+y^2} dx + \frac{x+y}{x^2+y^2} dy$ وقتی که C یک منحنی هموار بسته حول مبدأ مختصات باشد.

ج) انتگرال قسمت (ب) را در حالتی محاسبه کنید که C یک منحنی هموار ساده‌ی بسته باشد ولی مبدأ مختصات در داخل C نباشد.

۷. اگر γ کمان OA از خم به معادله‌ی $y = xe^{x-1}$ باشد، به طوری که $A = (1, 1)$ و $O = (0, 0)$ ، مطلوب است محاسبه انتگرال منحنی الخط $\int_{\gamma} (3x^2y + y^3) dx + (x^3 + 3xy^2) dy$

۸. مطلوب است محاسبه‌ی انتگرال خط $\int_C |y| dx + |x| dy$ که C منحنی متشکل از کمان AB ، قسمتی از دایره‌ی $x^2 + y^2 = 2y$ بین نقطه‌ی $A = (0, 2)$ و $B = (-1, 1)$ و BC قسمتی از خط $x + 6y = 5$ بین نقطه‌ی $B = (-1, 1)$ و $C = (2, 0/5)$ است.

۹. در هر یک از حالات زیر تحقیق کنید آیا میدان $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j}$ یک میدان گرادیان است؟ در صورت مثبت بودن جواب یک تابع دو متغیره‌ی f همراه با دامنه‌اش چنان تعیین کنید که در آن دامنه بردار گرادیان تابع f برابر $\vec{F}$ باشد.

الف) $\vec{F} = (y - \frac{\sin^2 y}{x^2})\vec{i} + (x + \frac{\sin^2 y}{x})\vec{j}$

ب) $\vec{F} = (2x \cos^2 y)\vec{i} + (2y - x^2 \sin^2 y)\vec{j}$

۱۰. به کمک قضیه‌ی گرین انتگرال‌های خطی زیر را، که در آن‌ها جهت حرکت بر خلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت است، محاسبه کنید.

الف) $\int_C \sqrt{x^2 + y^2} dx + (xy^2 + y \ln(x + \sqrt{x^2 + y^2})) dy$ که در آن C مربعی است با رئوس $(0, 1)$ ، $(4, 0)$ ، $(4, 5)$ و $(1, 5)$.

ب) $\int_C \frac{xy^2}{1+x^2} dx + y \ln(1+x^2) dy$ که در آن C دایره‌ی $x^2 + y^2 + 2y = 0$ می‌باشد.

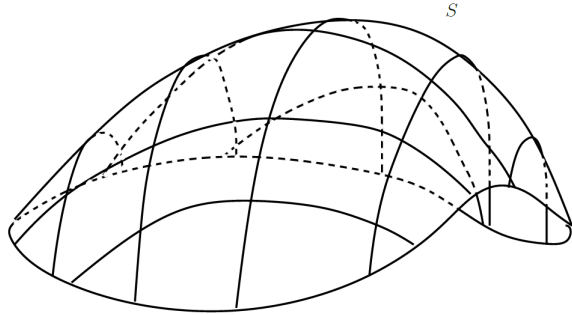
۱۱. به کمک انتگرال خط مساحت A از نواحی داده شده‌ی زیر را محاسبه کنید.

الف) D محدود است به منحنی بسته‌ی C با معادلات پارامتری $x = a \cos^3 t$, $y = a \sin^3 t$ ، که در آن $a > 0$ و $0 \leq t \leq 2\pi$.

ب) D محدود است به منحنی بسته‌ی C (کاردیوئید) با معادلات پارامتری $x = 2a \cos t - a \cos 2t$, $y = 2a \sin t - a \sin 2t$ ، که در آن $a > 0$ و $0 \leq t \leq 2\pi$.

انتگرال رویه

در این بخش مفهوم انتگرال رویه، که از نظر ریاضی نوعی تعمیم برای انتگرال دوگانه محسوب می‌شود، را بیان می‌کنیم.



فرض کنیم $S \subset \mathbb{R}^3$ رویه‌ای کراندار و $P = \{\Delta S_1, \dots, \Delta S_n\}$ افزایی از این رویه به قطعات کوچکتر باشد. مساحت قطعه ΔS_i از افزای فوق را با نماد $\Delta \sigma_i$ نشان داده، عدد $\max\{\Delta \sigma_i; i = 1, \dots, n\}$ را با $\|P\|$ نشان می‌دهیم.

باید توجه داشت که در اینجا، ما فرض کرده‌ایم مفهوم مساحت یک رویه مفهومی شهودی است. در حالی که باید توجه داشت این مفهوم نیازمند ارائه تعریفی دقیق است. ولی برای پرهیز از طولانی شدن بحث از ارائه تعریف ریاضی آن خودداری می‌کنیم. اگر $f: S \rightarrow \mathbb{R}$ تابعی کراندار تعریف شده بر S باشد آنگاه برای افزای فوق از این رویه، و با انتخاب نقاط $p_i \in \Delta S_i$ (به طور دلخواه) عبارت $\sum_{i=1}^n f(p_i) \Delta \sigma_i$ را یک حاصل جمع ریمان تابع f بر رویه S نظیر افزای P می‌نامیم. اگر با تغییر افزای P به گونه‌ای که $\|P\| \rightarrow 0$ ، عبارات فوق همگرا شوند آنگاه تابع f را بر S انتگرال‌پذیر نامیده، حد عبارات فوق را با نماد $\iint_S f d\sigma$ نشان می‌دهیم و آن را انتگرال f بر رویه S می‌نامیم. پس

$$\iint_S f d\sigma = \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(p_i) \Delta \sigma_i$$

عبارت $\iint_S f d\sigma$ را یک انتگرال رویه می‌نامیم.

به طور مثال، فرض کنیم $f: S \rightarrow \mathbb{R}$ تابع ثابت ۱ باشد. در این صورت برای افزای $P = \{\Delta S_1, \dots, \Delta S_n\}$ از S و برای هر انتخاب نقاط $p_i \in \Delta S_i$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n f(p_i) \Delta \sigma_i &= f(p_1) \Delta \sigma_1 + \dots + f(p_n) \Delta \sigma_n \\ &= \Delta \sigma_1 + \dots + \Delta \sigma_n = \sigma \end{aligned}$$

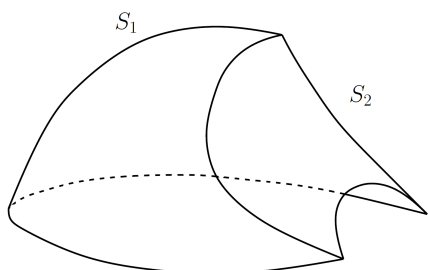
که در آن σ نشان دهنده مساحت رویه S است. در نتیجه

$$\iint_S 1 d\sigma = \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(p_i) \Delta \sigma_i = \sigma$$

خاصیت‌های متعارفی که برای انتگرال دوگانه بیان شد برای انتگرال رویه نیز برقرار است. به طور مثال، اگر توابع $f, g : S \rightarrow \mathbb{R}$ بر S انتگرال‌پذیر باشند آنگاه برای هر دو ثابت α و β ،

$$\iint_S (\alpha f + \beta g) d\sigma = \alpha \left(\iint_S f d\sigma \right) + \beta \left(\iint_S g d\sigma \right)$$

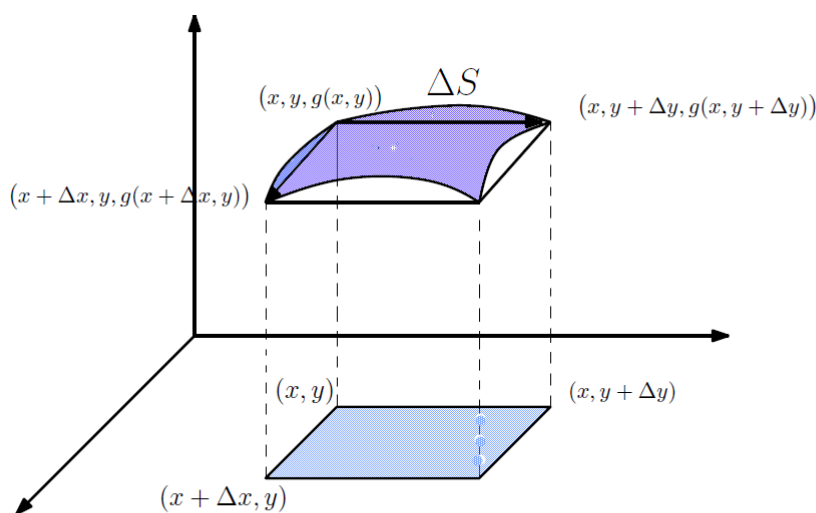
و یا، اگر $S = S_1 \cup S_2$ که در آن S_1 و S_2 حداکثر در یک یا چند منحنی مرزی اشتراک داشته باشند آنگاه



$$\iint_S f d\sigma = \iint_{S_1} f d\sigma + \iint_{S_2} f d\sigma$$

مفهوم انتگرال رویه دارای کاربردهای زیادی در شاخه‌های مختلف علوم و مهندسی است. بنابر این لازم است راهی برای محاسبه مقدار آن، بدون توسل به تعریف آن پیدا کنیم. برای این منظور ابتدا فرض کنیم S رویه‌ای به معادله $z = g(x, y)$ باشد که در آن $(x, y) \in D$ ناحیه‌ای بسته و کراندار از صفحه xoy و $g : D \rightarrow \mathbb{R}$ تابعی با مشتقات جرنی پیوسته باشد.

اگر $[x, x + \Delta x] \times [y, y + \Delta y] \subset D$ زیرناحیه‌ای از D ، و $\Delta S \subset S$ زیرناحیه نظیر بر رویه S باشد آنگاه می‌توانیم مساحت ΔS را با مساحت متوازی‌الاضلاع ساخته شده بر رئوس $(x, y, g(x, y))$ ، $(x + \Delta x, y, g(x + \Delta x))$ و $(x, y + \Delta y, g(x, y + \Delta y))$ تقریب بزنیم.



با توجه به تعریف ضرب برداری دو بردار، مساحت متوازی‌الضلاع اخیر برابر است با

$$\left\| \begin{pmatrix} \Delta x \\ \circ \\ g(x + \Delta x, y) - g(x, y) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \circ \\ \Delta y \\ g(x, y + \Delta y) - g(x, y) \end{pmatrix} \right\|$$

با توجه به مشتق‌پذیری تابع g بر D ، مقدار اخیز نیز قابل تقریب با

$$\left\| \begin{pmatrix} \Delta x \\ \circ \\ \frac{\partial g}{\partial x}(x, y) \Delta x \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \circ \\ \Delta y \\ \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) \Delta y \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ \circ \\ \frac{\partial g}{\partial x} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \circ \\ 1 \\ \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix} \right\| \Delta x \Delta y = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2} \Delta x \Delta y$$

خواهد بود. در نتیجه، اگر $P = \{\Delta S_1, \dots, \Delta S_n\}$ افرازی از رویه S متناظر با افراز $\{\Delta D_1, \dots, \Delta D_n\}$ از ناحیه D بوده، نقاط $p_i \in \Delta S_i$ متناظر با نقاط $(x_i, y_i) \in \Delta D_i$ انتخاب شده باشند آنگاه برای تابع پیوسته‌ای $f: S \rightarrow \mathbb{R}$ چون

$$\sum_{i=1}^n f(p_i) \Delta \sigma_i \approx \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i, g(x_i, y_i)) \sqrt{1 + \left(\frac{\partial g}{\partial x}(x_i, y_i)\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial y}(x_i, y_i)\right)^2} \Delta A_i$$

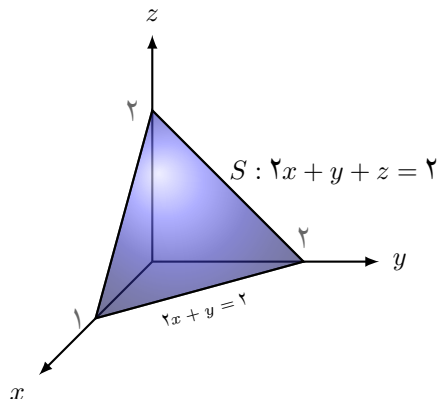
که در n مساحت ناحیه ΔD_i از افراز $\{\Delta D_1, \dots, \Delta D_n\}$ است. در نتیجه، در حالت حدی

$$\iint_S f \, d\sigma = \iint_D f(x, y, g(x, y)) \sqrt{1 + \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2} \, dx \, dy$$

برای بخاطر سپردن فرمول فوق، توجه می‌کنیم اگر $dS \subset S$ یک جزء کوچک از رویه S با مساحتی برابر $d\sigma$ باشد آنگاه، با تجزیه و تحلیلی مشابه بحث فوق، مقدار $d\sigma$ برابر $\sqrt{1 + \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2} \, dx \, dy$ خواهد بود. در حالتی که S معادله‌ای به صورت $y = g(x, z)$ ، $(x, z) \in D$ ناحیه‌ای بسته و کراندار در صفحه xoz یا $x = g(y, z)$ ، $(y, z) \in D$ ناحیه‌ای بسته و کراندار در صفحه $yo z$ باشد محاسبات به نحو مشابه (با تغییر نقش متغیرها، به نحو مناسب) انجام می‌شود.

مثال. مطلوب است محاسبه هر یک از انتگرال‌های زیر.

الف) $\iint_S (xy - 2z) \, d\sigma$ که در آن S قسمتی از صفحه $2x + y + z = 2$ در $\frac{1}{8}$ اول صفحه است. با توجه به تعریف S ، اگر $D \subset \mathbb{R}^2$ ناحیه محصور توسط خطوط $x = 0$ ، $y = 0$ و $2x + y = 2$ در صفحه xoy باشد آنگاه S معادله‌ای به صورت $z = g(x, y) = 2 - 2x - y$ ، $(x, y) \in D$ خواهد داشت.



در این حالت

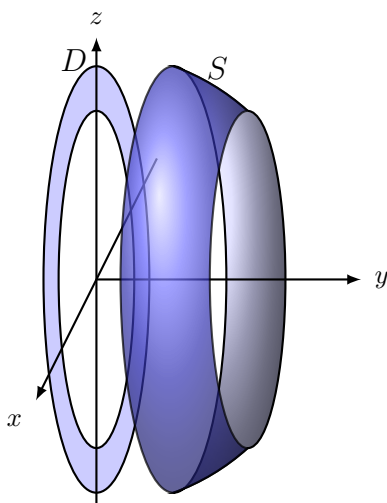
$$d\sigma = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2} \, dx \, dy = \sqrt{1 + 4 + 1} \, dx \, dy = \sqrt{6} \, dx \, dy$$

در نتیجه با در نظر گرفتن $f(x, y, z) = xy - 2z$ خواهیم داشت

$$\begin{aligned}\iint_S (xy - 2z) d\sigma &= \iint_S f(x, y, z) d\sigma = \iint_D f(x, y, 2 - 2x - y) \sqrt{1 + \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2} dx dy \\ &= \iint_D (xy - 4 + 4x + 2y) \sqrt{6} dx dy \\ &= \sqrt{6} \int_0^1 \int_0^{2-2x} (xy + 4x + 2y - 4) dy dx\end{aligned}$$

محاسبه انتگرال مکرر اخیر را به خواننده واگذار می‌کنیم.

ب) $\iint_S (y^2 + xz) d\sigma$ که در آن S قسمتی از کره $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ بین صفحات $y = 1$ و $y = 2$ است.



با توجه به تعریف رویه S ، اگر $D := \{(x, z) \in \mathbb{R}^2; 5 \leq x^2 + z^2 \leq 8\}$ آنگاه S معادله‌ای به صورت

$$y = g(x, z) = \sqrt{9 - x^2 - z^2}, \quad (x, z) \in D$$

خواهد داشت. به این ترتیب

$$d\sigma = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial z}\right)^2} dx dz = \sqrt{1 + \frac{x^2}{9 - x^2 - z^2} + \frac{z^2}{9 - x^2 - z^2}} dx dz = \frac{3}{\sqrt{9 - x^2 - z^2}} dx dz$$

و از آنجا،

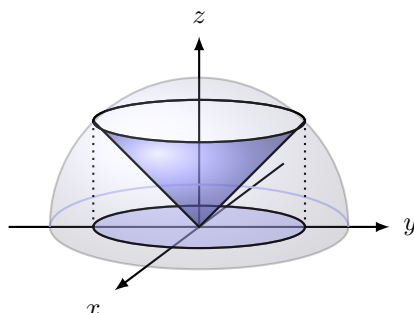
$$\begin{aligned}
 \iint_S (y^2 + xz) d\sigma &= \iint_D (9 - x^2 - z^2 + xz) \frac{r^3}{\sqrt{9 - x^2 - z^2}} dx dz \\
 &= 3 \int_0^{2\pi} \int_{\sqrt{5}}^{\sqrt{4}} \frac{9 - r^2 + r^2 \cos \theta \sin \theta}{\sqrt{9 - r^2}} r dr d\theta \\
 &= 3 \int_0^{2\pi} \int_{\sqrt{5}}^{\sqrt{4}} \sqrt{9 - r^2} r dr d\theta + \frac{3}{2} \int_0^{2\pi} \int_{\sqrt{5}}^{\sqrt{4}} \frac{r^3}{\sqrt{9 - r^2}} \sin^2 \theta dr d\theta \\
 &= 3 \int_0^{2\pi} \int_{\sqrt{5}}^{\sqrt{4}} \sqrt{9 - r^2} r dr d\theta = 14\pi
 \end{aligned}$$

در محاسبه انتگرال دوگانه حاصل در صفحه xoz ، از تغییر متغیر قطبی در این صفحه استفاده کرده‌ایم. همچنین در جریان محاسبه انتگرال‌های مکرر فوق، توجه می‌کنیم که

$$\int_0^{2\pi} \int_{\sqrt{5}}^{\sqrt{4}} \frac{r^3}{\sqrt{9 - r^2}} \sin^2 \theta dr d\theta = \left(\int_0^{2\pi} \sin^2 \theta d\theta \right) \left(\int_{\sqrt{5}}^{\sqrt{4}} \frac{r^3}{\sqrt{9 - r^2}} dr \right) = 0$$

مثال. مساحت هر یک از رویه‌های زیر را تعیین کنید.

الف) قسمتی از مخروط $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ درون کره $x^2 + y^2 + z^2 = 2$.



فرض کنیم S قسمتی از مخروط $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ درون کره $x^2 + y^2 + z^2 = 2$ باشد. با برخورد دادن مخروط با کره، معادله $x^2 + y^2 = 1$ حاصل می‌شود که معادله تصویر منحنی حاصل از برخورد دو رویه بر صفحه xoy است. بر این اساس تصویر رویه S بر صفحه xoy نقاط محصور توسط دایره $x^2 + y^2 = 1$ خواهد بود. به این ترتیب اگر $D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \leq 1\}$ آنگاه S رویه‌ای به معادله $z = g(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ خواهد بود. در نتیجه

$$d\sigma = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2} dx dy = \sqrt{1 + \frac{x^2}{x^2 + y^2} + \frac{y^2}{x^2 + y^2}} dx dy = \sqrt{2} dx dy$$

و از آنجا، اگر σ مساحت رویه S باشد آنگاه

$$\sigma = \iint_S 1 d\sigma = \iint_D \sqrt{2} dx dy = \sqrt{2}\pi$$

در حصول نتیجه فوق از این خاصیت استفاده کرده‌ایم که $\iint_D dx dy$ برابر مساحت دایره $x^2 + y^2 = 1$ ، یعنی π ، است.

ب) قسمتی از هذلولیگون یک‌پارچه $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ بین صفحات $z = 1$ و $z = 2$. فرض کنیم S رویه توصیف شده در بالا باشد. با برخورد رویه فوق با صفحات $z = 1$ و $z = 2$ دایره‌هایی به معادلات $x^2 + y^2 = 2$ و $x^2 + y^2 = 5$ حاصل می‌شوند که در واقع تصویر منحنی‌های حاصل از برخورد هذلولیگون فوق با دو صفحه $z = 1$ و $z = 2$ بر صفحه xoy است. بر این اساس، رویه S معادله‌ای به صورت $z = g(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2 - 1}$ خواهد داشت.

$$d\sigma = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2} dx dy = \sqrt{1 + \frac{x^2}{x^2 + y^2 - 1} + \frac{y^2}{x^2 + y^2 - 1}} dx dy = \sqrt{\frac{2(x^2 + y^2) - 1}{x^2 + y^2 - 1}} dx dy$$

اگر σ مساحت رویه S باشد آنگاه

$$\begin{aligned} \sigma = \iint_S 1 d\sigma &= \iint_D \sqrt{\frac{2(x^2 + y^2) - 1}{x^2 + y^2 - 1}} dx dy \\ &= \int_0^{2\pi} \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{5}} \sqrt{\frac{2r^2 - 1}{r^2 - 1}} r dr d\theta \\ &= 2\pi \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{5}} \sqrt{\frac{2r^2 - 1}{r^2 - 1}} r dr \\ &= \pi \int_1^4 \sqrt{\frac{2u + 1}{u}} du = \pi \int_1^4 \frac{2u + 1}{\sqrt{u(2u + 1)}} du \\ &= \frac{\pi}{2} \int_1^4 \frac{2u + 1 + 1}{\sqrt{2u^2 + u}} du = \frac{\pi}{2} \int_1^4 \frac{2u + 1}{\sqrt{2u^2 + u}} du + \frac{\pi}{2} \int_1^4 \frac{1}{\sqrt{2u^2 + u}} du \\ &= \pi(6 - \sqrt{3}) + \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \int_1^4 \frac{1}{\sqrt{(u + \frac{1}{4})^2 - \frac{1}{8}}} du \end{aligned}$$

برای محاسبه انتگرال آخر می‌توانیم از تغییر متغیر $(u - \frac{1}{4}) = \frac{1}{4} \cosh t$ استفاده کنیم. تکمیل محاسبات را به خواننده واگذار می‌کنیم.

ج) قسمتی از زین اسبی $z = y^2 - x^2$ درون استوانه $x^2 + y^2 = 1$.
اگر رویه فوق را با S نشان دهیم آنگاه S معادله‌ای به صورت

$$z = g(x, y) = y^2 - x^2, \quad (x, y) \in D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \leq 1\}$$

دارد. در نتیجه

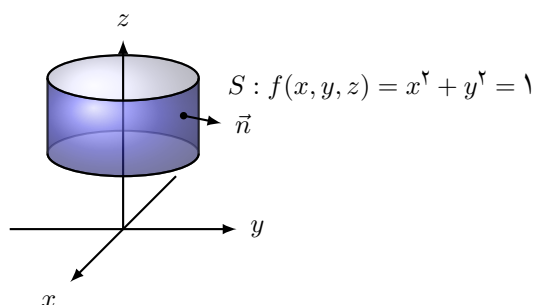
$$\begin{aligned} \sigma = \iint_S 1 d\sigma &= \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2} dx dy \\ &= \iint_D \sqrt{1 + 4(x^2 + y^2)} dx dy \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 \sqrt{1 + 4r^2} r dr d\theta \\ &= 2\pi \int_0^1 \sqrt{1 + 4r^2} r dr = \frac{\pi}{4} \int_1^5 \sqrt{u} du = \frac{\pi}{6} (5\sqrt{5} - 1) \end{aligned}$$

شار حاصل از یک میدان. رویه S را در فضا رویه‌ای هموار نامیم هرگاه در هر نقطه از آن بتوانیم صفحه‌ای بر آن مماس نماییم. در این حالت، در هر نقطه از رویه دو بردار قائم یک‌به‌یک بر رویه قابل تصور خواهد بود. بر این اساس می‌توانیم میدان‌های برداری مختلفی متشکل از بردارهای قائم یک‌به‌یک بر S تعریف کنیم. رویه S را جهت‌پذیر نامیم هرگاه یک میدان برداری پیوسته متشکل از بردارهای قائم یک‌به‌یک بر S وجود داشته باشد. رویه‌هایی که تاکنون در این درس با آنها آشنا شده‌ایم همه جهت‌پذیر هستند. به عنوان رویه‌ای هموار که جهت‌پذیر نباشد می‌توانیم نوار موبیوس را معرفی کنیم.

فرض کنیم $D \subset \mathbb{R}^3$ و $\vec{F}$ یک میدان برداری پیوسته بر D باشد. همچنین فرض کنیم $S \subset D$ رویه‌ای جهت‌پذیر و $\vec{n}$ یک میدان برداری پیوسته متشکل از بردارهای قائم یک‌به‌یک بر S باشد. در این حالت، تابع $f: S \rightarrow \mathbb{R}$ با دستور $f(p) = \vec{F}(p) \cdot \vec{n}(p)$ یک تابع اسکالر پیوسته بر S خواهد بود. انتگرال این تابع بر S ، که برای سهولت آن را با همان نماد $\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma$ نشان می‌دهیم، را شار (Flux) حاصل از میدان $\vec{F}$ گذرکننده از S در جهت میدان $\vec{n}$ می‌نامیم. در حالتی که S رویه‌ای قطعه به قطعه هموار و جهت‌پذیر متشکل از قطعات هموار $S_1, \dots, S_n$ باشد آنگاه شار حاصل از میدان $\vec{F}$ را با همان نماد $\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma$ نمایش داده، مقدار آن را برابر $\iint_{S_1} \vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma + \dots + \iint_{S_n} \vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma$ تعریف می‌کنیم.

مثال. شار حاصل از هر یک از میدان‌های برداری زیر گذرکننده از رویه داده شده را تعیین کنید.

الف) $\vec{F}(x, y, z) = (x+z)\vec{i} + y\vec{j} + (x^2 + yz)\vec{k}$ قسمتی از استوانه $x^2 + y^2 = 1$ بین صفحات $z = 1$ و $z = 2$ ، همه جا رو به سمت بیرون استوانه.



ابتدا میدان برداری $\vec{n}$ ، قائم یکه بر S مطابق توصیف مسئله را تعیین می‌کنیم. اگر معادله رویه فوق را در قالب مجموعه تراز تابعی سه متغیره به صورت $f(x, y, z) = x^2 + y^2 = 1$ نمایش دهیم آنگاه مطابق آنچه قبلاً مشاهده کرده‌ایم بردار ∇f در هر نقطه عمود بر S خواهد بود. در نتیجه $\frac{1}{\|\nabla f\|} \nabla f$ یک میدان برداری قائم یکه بر S خواهد بود. به سادگی مشاهده می‌شود جهت این میدان برداری در هر نقطه از S به سمت خارج است. پس

$$\vec{n} = \frac{1}{\|\nabla f\|} \nabla f = \frac{1}{\sqrt{4(x^2 + y^2)}} \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$$

توجه می‌کنیم بر استوانه فوق، همواره $x^2 + y^2 = 1$. به این ترتیب

$$\vec{F} \cdot \vec{n} = x(x+z) + y^2 = (x^2 + y^2) + xz$$

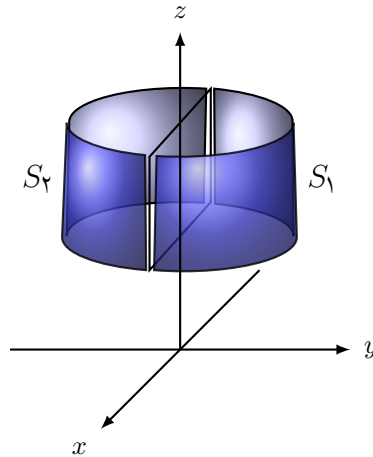
در نتیجه

$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, d\sigma = \iint_S ((x^2 + y^2) + xz) \, d\sigma = \iint_S (1 + xz) \, d\sigma$$

در عبارت اخیر مجدداً از این خاصیت استفاده کرده‌ایم که همه جا بر S ، $x^2 + y^2 = 1$.

اکنون برای محاسبه انتگرال رویه‌ای اخیر، اگر با استفاده از صفحه xoz رویه S را به دو رویه S_1 (قسمتی از استوانه فوق در نیم فضای $y \geq 0$) و S_2 (قسمتی از رویه S در نیم فضای $y \leq 0$) تفکیک کنیم آنگاه

$$\iint_S (1 + xz) \, d\sigma = \iint_{S_1} (1 + xz) \, d\sigma + \iint_{S_2} (1 + xz) \, d\sigma$$



برای محاسبه انتگرال‌های اخیر ابتدا رویه‌های S_1 و S_2 را بر صفحه xoz تصویر می‌کنیم. به این ترتیب اگر $y = g_1(x, z) = \sqrt{1 - x^2}$ معادله‌ای به صورت $D := \{(x, z) \in \mathbb{R}^2; -1 \leq x \leq 1, 1 \leq z \leq 2\}$ آنگاه S_1 معادله‌ای به صورت $y = g_2(x, z) = -\sqrt{1 - x^2}$ و $(x, z) \in D$ خواهد داشت. داریم

$$\begin{aligned} \iint_{S_1} (1 + xz) d\sigma &= \iint_D (1 + xz) \sqrt{1 + \left(\frac{\partial g_1}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial g_1}{\partial z}\right)^2} dx dz \\ &= \iint_D (1 + xz) \sqrt{1 + \frac{x^2}{1 - x^2}} dx dz \\ &= \iint_D \frac{1 + xz}{\sqrt{1 - x^2}} dx dz \\ &= \int_{-1}^1 \int_1^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} + \frac{xz}{\sqrt{1 - x^2}} \right) dz dx = \pi + \frac{3}{2} \int_{-1}^1 \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}} dx = \pi \end{aligned}$$

به نحو مشابه

$$\iint_{S_2} (1 + xz) d\sigma = \iint_D (1 + xz) \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} dx dz = \pi$$

و در نتیجه $\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma = 2\pi$.

ب) $\vec{F}(x, y, z) = (x + y + z)\vec{i} + (y - z)\vec{j} + (z - x)\vec{k}$ رویه بسته متشکل از نیم‌کره $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ و قسمتی از صفحه $z = 0$ درون نیم‌کره فوق. میدان برداری $\vec{n}$ همه جا رو به سمت بیرون این رویه بسته. در اینجا S رویه‌ای قطعه به قطعه هموار متشکل از دو رویه هموار S_1 ، نیم‌کره $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ و S_2 ، قسمتی از صفحه $z = 0$ درون نیم‌کره فوق است. بتایر خاصیت عمومی انتگرال‌ها،

$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma = \iint_{S_1} \vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma + \iint_{S_2} \vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma$$

به این ترتیب لازم است هر یک از انتگرال‌های فوق را جداگانه حساب نماییم. ابتدا برای رویه S_1 ، برای محاسبه میدان برداری قائم یکه این رویه، آن را در قالب رویه تراز یک تابع سه متغیره قرار می‌دهیم. اگر $f_1(x, y, z) := x^2 + y^2 + z^2$ آنگاه S_1 قسمتی از رویه تراز f_1 به ازای ثابت ۱ است. به این ترتیب $\vec{\nabla} f_1$ یک میدان برداری قائم بر S_1 تعریف می‌کند.

$$\vec{\nabla} f_1(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix}$$

به سادگی مشاهده می‌شود بردارهای حاصل از این میدان در هر نقطه از S_1 رو به سمت خارج کره است. در نتیجه

$$\vec{n} = \frac{1}{\|\vec{\nabla} f_1\|} \vec{\nabla} f_1 = \frac{1}{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 4z^2}} \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

در عبارت فوق از این خاصیت استفاده کرده‌ایم که همه جا بر S_1 ، $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. به این ترتیب، بر این رویه

$$\vec{F} \cdot \vec{n} = (x + y + z)x + (y - z)y + (z - x)z = x^2 + y^2 + z^2 + xy + xz - zy - xz = 1 + xy - zy$$

در نتیجه

$$\iint_{S_1} \vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma = \iint_{S_1} (1 + xy - yz) d\sigma$$

اکنون برای محاسبه انتگرال رویه اخیر، ابتدا توصیف مناسبی از رویه S_1 ارائه می‌دهیم. اگر D تصویر این رویه بر صفحه xy باشد آنگاه $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \leq 1\}$. به این ترتیب

$$(x, y, z) \in S_1 \Leftrightarrow \begin{cases} (x, y) \in D \\ z = g_1(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2} \end{cases}$$

بر این اساس می‌توانیم المان مساحت را برای این رویه حساب کنیم.

$$d\sigma = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial g_1}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial g_1}{\partial y}\right)^2} dx dy = \sqrt{1 + \frac{x^2}{1 - x^2 - y^2} + \frac{y^2}{1 - x^2 - y^2}} dx dy = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}} dx dy$$

در نتیجه

$$\begin{aligned}
 \iint_{S_1} (1 + xy - yz) d\sigma &= \iint_D (1 + xy - y\sqrt{1-x^2-y^2}) \frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}} dx dy \\
 &= \iint_D \left(\frac{1+xy}{\sqrt{1-x^2-y^2}} - y \right) dx dy \\
 &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 \left(\frac{1+r^2 \cos \theta \sin \theta}{\sqrt{1-r^2}} + r \sin \theta \right) r dr d\theta \\
 &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-r^2}} r dr d\theta = 2\pi
 \end{aligned}$$

اکنون بحث مشابهی را برای رویه S_2 انجام می‌دهیم. چون این رویه قسمتی از صفحه $z = 0$ است، با توجه به توصیف مسئله در مورد میدان برداری قائم یکه بر S ، برای این رویه $\vec{n} = -\vec{k}$ در نتیجه

$$\vec{F} \cdot \vec{n} = (z - x)(-1) = x - z$$

و از آنجا $\iint_{S_2} \vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma = \iint_{S_2} (x - z) d\sigma$ برای محاسبه انتگرال رویه اخیر، اگر D همان ناحیه از صفحه xy باشد که در بالا اشاره گردید، آنگاه

$$(x, y, z) \in S_2 \Leftrightarrow \begin{cases} (x, y) \in D \\ z = g_2(x, y) = 0 \end{cases}$$

(توجه می‌کنیم که در اینجا g_2 تابع ثابت صفر است.) در نتیجه بر این رویه $d\sigma = dx dy$. بنابر این

$$\begin{aligned}
 \iint_{S_2} \vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma &= \iint_{S_2} (x - z) d\sigma \\
 &= \iint_D (x - 0) dx dy = \int_0^{2\pi} \int_0^1 r \cos \theta r dr d\theta = 0
 \end{aligned}$$

به این ترتیب

$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma = \iint_{S_1} \vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma + \iint_{S_2} \vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma = 2\pi + 0 = 2\pi$$

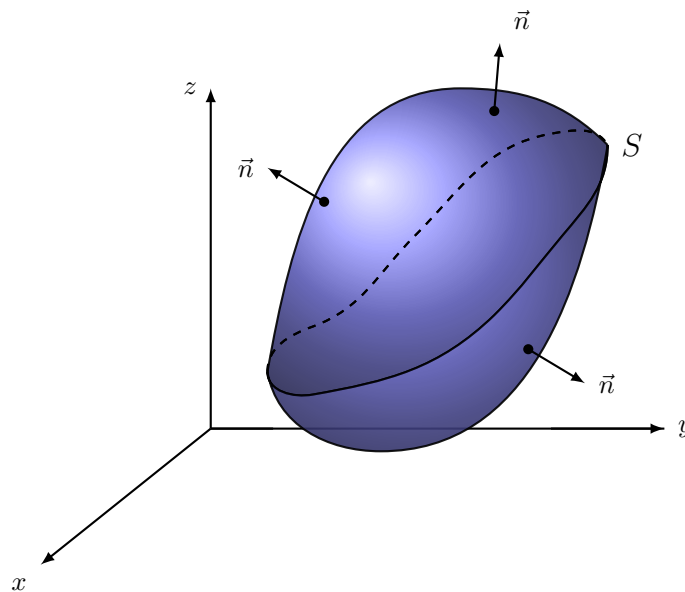
در مواردی مانند مثال قبل که رویه مورد نظر رویه‌ای بسته (در برگیرنده ناحیه‌ای بسته و کراندار در فضا) باشد می‌توانیم از قضیه زیر استفاده کنیم.

قضیه دیورژانس (قضیه گاوس)

فرض کنیم S رویه‌ای بسته و قطعه به قطعه هموار و جهت‌پذیر در $\mathbb{R}^3$ بوده، $\vec{n}$ همه جا رو به سمت بیرون S باشد. اگر توابع P ، Q و R بر S و نقاط محصور توسط آن مشتقات جزئی پیوسته داشته باشند آنگاه برای میدان برداری $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$ ،

$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, d\sigma = \iiint_D \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz$$

که در آن D ناحیه محصور توسط رویه S است.



برای میدان برداری $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$ ، عبارت $\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$ را واگرایی میدان $\vec{F}$ نامیده آن را با نماد $\text{div} \vec{F}$ نمایش می‌دهیم. با استفاده از نماد $\vec{\nabla} := \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}$ (این نماد را عملگر برداری نابلا می‌نامیم) واگرایی میدان $\vec{F}$ را می‌توانیم به صورت $\vec{\nabla} \cdot \vec{F}$ نیز نمایش دهیم. به این ترتیب تحت شرایط بیان شده در قضیه فوق

$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, d\sigma = \iiint_D \vec{\nabla} \cdot \vec{F} \, dV$$

در اینجا برای نمونه، مثال قبل را با استفاده از قضیه دیورژانس حل می‌کنیم. برای میدان $\vec{F}$ در این مثال،

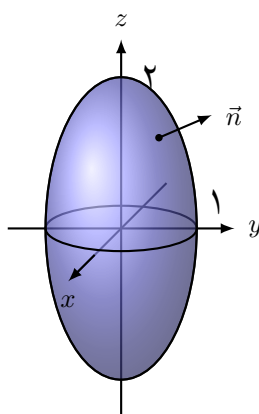
$$\text{div} \vec{F} = \vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \frac{\partial}{\partial x}(x + y + z) + \frac{\partial}{\partial y}(y - z) + \frac{\partial}{\partial z}(z - x) = 3$$

در نتیجه

$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma = \iiint_A \vec{\nabla} \cdot \vec{F} dx dy dz = \iiint_A 3 dx dy dz$$

در رابطه فوق A ناحیه محصور توسط رویه S است. مقدار انتگرال اخیر ۳ برابر حجم نیمکره به شعاع ۱، یعنی $\frac{4}{3}\pi 1^3 = 2\pi$ خواهد بود.

مثال. اگر $\vec{F}(x, y, z) = (x^2 + 5yz^2)\vec{i} + (y + 4xz)\vec{j} + (x^3 - y^3)\vec{k}$ و S رویه بیضیگون $x^2 + y^2 + \frac{z^2}{4} = 1$ با $\vec{n}$ همه جا رو به سمت بیرون S باشد آنگاه مقدار $\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma$ را حساب کنید.



فرض کنیم $D \subset \mathbb{R}^3$ ناحیه محصور توسط بیضیگون فوق باشد. با توجه به اینکه توابع مولفه‌ای برای میدان $\vec{F}$ بر تمام $\mathbb{R}^3$ مشتقات جزئی پیوسته دارند، برای محاسبه $\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma$ می‌توانیم از قضیه دیورژانس استفاده کنیم.

$$\operatorname{div}(\vec{F}) = \frac{\partial}{\partial x}(x^2 + 5yz^2) + \frac{\partial}{\partial y}(y + 4xz) + \frac{\partial}{\partial z}(x^3 - y^3) = 2x + 1$$

در نتیجه

$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma = \iiint_D \nabla \cdot \vec{F} dV = \iiint_D (2x + 1) dx dy dz$$

اکنون برای محاسبه انتگرال سه‌گانه اخیر، ابتدا با استفاده از تغییر متغیر $u = x$ ، $v = y$ و $w = \frac{z}{2}$ ، یا در جهت عکس، با استفاده از تغییر متغیر

$$\begin{cases} x = x(u, v, w) = u \\ y = y(u, v, w) = v \\ z = z(u, v, w) = 2w \end{cases}$$

ناحیه محصور توسط بیضیگون $u^2 + v^2 + \frac{z^2}{4} = 1$ را تبدیل به ناحیه محصور توسط کره $u^2 + v^2 + w^2 = 1$ می‌کنیم. در این تغییر متغیر $\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} = 2$ به این ترتیب

$$\iiint_D (2x + 1) dx dy dz = \iiint_{D^*} (2u + 1) 2 du dv dw$$

نهایتاً برای محاسبه انتگرال سه‌گانه اخیر می‌توانیم از تغییر متغیر کروی استفاده کنیم. در نتیجه

$$\begin{aligned} \iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma &= \iiint_D \nabla \cdot \vec{F} dV \\ &= 2 \iiint_{D^*} (2u + 1) du dv dw \\ &= 2 \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^1 (2\rho \sin \phi \cos \theta + 1) \rho^2 \sin \phi d\rho d\phi d\theta \\ &= 2 \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^1 (2\rho^3 \sin^2 \phi \cos \theta d\rho d\phi d\theta + \rho^2 \sin \phi d\rho d\phi d\theta) \\ &= 0 + 2 \times \frac{4}{3} \pi = \frac{8\pi}{3} \end{aligned}$$

مثال. فرض کنید S قسمتی از سهمیگون $z = x^2 + y^2$ زیر صفحه $z = 4$ و $\vec{n}$ همه جا رو به سمت درون سهمیگون باشد. مطلوب است محاسبه $\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma$ که در آن $\vec{F}(x, y, z) = (x + y^2 z^2)\vec{i} + (y - x^3)\vec{j} + (z + x)\vec{k}$.

توجه می‌کنیم S رویه بسته نیست. پس استفاده از قضیه دیورژانس در شکل حاضر مسئله مقدور نیست. اگر S' قسمتی از صفحه $z = 4$ محصور توسط سهمیگون $z = x^2 + y^2$ باشد آنگاه $S \cup S'$ رویه‌ای قطعه به قطعه هموار و بسته در فضای $\mathbb{R}^3$ تشکیل می‌دهد. با توجه به توصیف مسئله از جهت میدان برداری قائم یک‌ه بر رویه سهمیگون، لازم است جهت میدان برداری قائم یک‌ه بر این رویه بسته را رو به سمت داخل سطح بسته در نظر بگیریم (خلاف جهت مورد نیاز برای استفاده در قضیه دیورژانس). پس جهت قام یک‌ه بر S' را برابر $-\vec{k}$ اختیار می‌کنیم. با توجه به اینکه مولفه‌های میدان $\vec{F}$ بر تمام $\mathbb{R}^3$ مشتقات جزئی پیوسته دارند شرایط استفاده از قضیه دیورژانس برای محاسبه $\iint_{S \cup S'} \vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma$ فراهم است.

$$\operatorname{div}(\vec{F}) = \frac{\partial}{\partial x}(x + y^2 z^2) + \frac{\partial}{\partial y}(y - x^3) + \frac{\partial}{\partial z}(z + x) = 3$$

به این ترتیب، اگر D ناحیه محصور توسط رویه بسته $S \cup S'$ باشد، خواهیم داشت

$$\begin{aligned} \iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma + \iint_{S'} \vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma &= \iint_{S \cup S'} \vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma \\ &= - \iiint_D \operatorname{div}(\vec{F}) dV = -3 \iiint_D dV = -3V \end{aligned}$$

که در آن V حجم ناحیه D است. توجه کنیم که علامت منفی قبل از انتگرال سه‌گانه به دلیل آن است که جهت میدان برداری قائم یک‌ه بر رویه بسته $S \cup S'$ خلاف جهت لازم برای قضیه دیورژانس است. با توجه به محاسبات فوق

$$\iiint_S \vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma = -3V - \iint_{S'} \vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma = -3V - \iint_{S'} \vec{F} \cdot (-\vec{k}) d\sigma = -3V + \iint_{S'} (x+z) d\sigma$$

محاسبه حجم V را به خواننده واگذار می‌کنیم. برای محاسبه انتگرال رویه آخر در عبارت فوق، ابتدا تصویر S' بر صفحه xoy را تعیین می‌کنیم. به سادگی مشاهده می‌شود مجموعه تصویر ناحیه $D' = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \leq 4\}$ است. به این ترتیب توصیف رویه S' به صورت زیر خواهد بود.

$$(x, y, z) \in S' \leftrightarrow \begin{cases} (x, y) \in D' \\ z = g(x, y) = 4 \end{cases}$$

در نتیجه المان مساحت رویه S' به صورت $d\sigma = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2} dxdy = dxdy$ به دست می‌آید و از آنجا

$$\iint_{S'} (x+z) d\sigma = \iint_{D'} (x+4) dxdy = \int_0^{2\pi} \int_0^2 (r \cos \theta + 4) r dr d\theta = 16\pi$$

آخرین قضیه‌ای که در این درس بیان می‌کنیم قضیه استوکس است که به آن قضیه گرین در فضا هم گفته می‌شود. نقش اصلی این قضیه ایجاد ارتباط بین انتگرال خط یک میدان حول یک مسیر بسته در فضا و شار حاصل از میدان برداری وابسته به میدان داده شده نسبت به رویه‌ای است که توسط منحنی بسته احاطه می‌شود. برای بیان این قضیه نیازمند مفهومی به نام میدان گردشی نظیر به یک میدان برداری داده شده هستیم.

تعریف. فرض کنیم $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$ میدانی تعریف شده بر ناحیه D از فضای $\mathbb{R}^3$ باشد. با استفاده از

عملگر برداری $\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}$ و با استفاده از شکل‌های ظاهری ضرب برداری و محاسبه دترمینان یک ماتریس 3×3 ، خواهیم داشت

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = \det \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{pmatrix} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\vec{i} - \left(\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\vec{k}$$

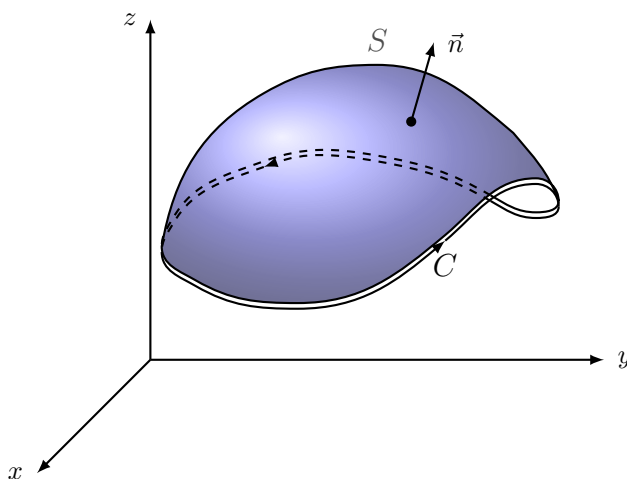
میدان اخیر را میدان گردشی متناظر میدان $\vec{F}$ نامیده آن را با نماد $\text{curl} \vec{F}$ نمایش می‌دهیم.

قضیه استوکس (قضیه گرین در فضا)

فرض کنیم S رویه‌ای کراندار و قطعه به قطعه هموار بوده، C خم مرزی آن خمی بسته و ساده باشد. فرض کنیم جهت حرکت بر C نسبت به جهت میدان برداری قائم یکه بر S از قانون دست راست پیروی کند (این جهت را جهت مثبت یا جهت مثلثاتی نسبت به میدان $\vec{n}$ نیز می‌نامند). اگر توابع P ، Q و R بر S مشتقات جزئی پیوسته داشته باشند آنگاه برای میدان $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$

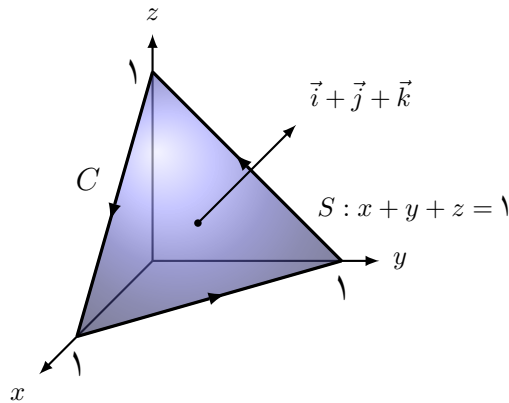
$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_C P dx + Q dy + R dz = \iint_S (\text{curl} \vec{F}) \cdot \vec{n} d\sigma$$

تذکر. نماد $\oint_C$ نمادی است که برای انتگرال خط بر روی مسیر C استفاده می‌شود که در آن تاکید بر بسته بودن این مسیر است.



مثال. مطلوب است محاسبه هر یک از انتگرال‌های زیر.

الف) $\oint_C (x^2 - y^2) dx + (y^2 - z^2) dy + (z^2 - x^2) dz$ که در آن C خم حاصل از تلاقی صفحه $x + y + z = 1$ با صفحات مختصات در $\frac{1}{8}$ اول فضا بوده، جهت حرکت بر روی C نسبت به بردار $\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ در جهت مثبت است.



در حل این مسئله می‌توانیم خم C را که از سه قطعه خط تشکیل شده شناسایی کنیم و سپس انتگرال خط خواسته شده را مستقیماً محاسبه کنیم. با توجه به ساختار میدان، کاملاً روشن است که این روند طولانی خواهد بود. در مقابل، اگر S رویه محصور توسط خم C باشد، یعنی S قسمتی از صفحه $x + y + z = 1$ در $\frac{1}{8}$ اول فضا باشد آنگاه میدان داده شده بر S مشتقات جزئی پیوسته دارد. بنابر این برای محاسبه انتگرال خط این میدان حول مسیر بسته C می‌توانیم از قضیه استوکس استفاده کنیم. برای این منظور نخست میدان گردشی نظیر به میدان $\vec{F}$ را حساب می‌کنیم.

$$\text{curl}(\vec{F}) = \nabla \times \vec{F} = \det \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x^2 - y^2 & y^2 - z^2 & z^2 - x^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2z \\ 2x \\ 2y \end{pmatrix}$$

از طرف دیگر میدان برداری قائم یکه بر رویه S نیز طبق توصیف مسئله برابر

$$\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{3}}(\vec{i} + \vec{j} + \vec{k})$$

خواهد بود. در نتیجه، بنابر قضیه استوکس

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_S (\text{curl} \vec{F}) \cdot \vec{n} d\sigma = \iint_S \frac{2}{\sqrt{3}}(z + x + y) d\sigma = \frac{2}{\sqrt{3}} \iint_S 1 d\sigma$$

توجه داریم که بر رویه S همواره $x + y + z = 1$. نهایتاً برای محاسبه انتگرال رویه حاصل، اگر D ناحیه محصور توسط خطوط $x + y = 1$ ، $x = 0$ و $y = 0$ در صفحه xoy باشد آنگاه

$$(x, y, z) \in S \Leftrightarrow \begin{cases} (x, y) \in D \\ z = g(x, y) = 1 - x - y \end{cases}$$

در نتیجه بر این رویه $d\sigma = \sqrt{3} \, dxdy$ و از آنجا

$$\begin{aligned} \oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \iint_S (\text{curl} \vec{F}) \cdot \vec{n} \, d\sigma = \iint_S \frac{2}{\sqrt{3}} (z + x + y) \, d\sigma = \frac{2}{\sqrt{3}} \iint_S 1 \, d\sigma \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}} \iint_D \sqrt{3} \, dxdy = 2 \iint_D dxdy = 1 \end{aligned}$$

ب) $\oint_C xz \, dx + (3yz + x^2) \, dy + y^2 \, dz$ که در آن C خم حاصل از تلاقی نیم‌کره $z = \sqrt{2 - x^2 - y^2}$ با سهمیگون $z = x^2 + y^2$ و جهت حرکت بر روی C با توجه به بردار $\vec{k}$ در جهت مثبت است. برای شناسایی خم C نیم‌کره $z = \sqrt{2 - x^2 - y^2}$ و سهمیگون $z = x^2 + y^2$ را تلاقی می‌دهیم.

$$\begin{aligned} \begin{cases} z = \sqrt{2 - x^2 - y^2} \\ z = x^2 + y^2 \end{cases} &\Rightarrow z = \sqrt{2 - z} \\ &\Rightarrow z = 1 \quad \text{و} \quad x^2 + y^2 = 1 \end{aligned}$$

به عبارت دیگر خم C دایره $x^2 + y^2 = 1$ واقع در صفحه $z = 1$ در فضا است. به این ترتیب اگر چه که خم C به عنوان محل تلاقی نیم‌کره فوق با سهمیگون $z = x^2 + y^2$ معرفی شده است ولی می‌توانیم خم C را خم محصورکننده قسمتی از صفحه $z = 1$ نیز در نظر بگیریم. بر این اساس، اگر S قسمتی از صفحه $z = 1$ محصور درون نیم‌کره (یا سهمیگون) باشد و $\vec{n} = \vec{k}$ آنگاه

$$\nabla \times \vec{F} = \begin{pmatrix} i\vec{\nabla} \cdot \vec{j} & \vec{k} & \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ xz & 3yz + x^2 & y^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 2x \end{pmatrix}$$

در نتیجه بنابر قضیه استوکس

$$\begin{aligned}\oint_C xz \, dx + (y^2z + x^2) \, dy + y^2 \, dz &= \iint_S (\nabla \times \vec{F}) \cdot \vec{n} \, d\sigma \\ &= \iint_S (\nabla \times \vec{F}) \cdot \vec{k} \, d\sigma = \iint_S 2x \, d\sigma\end{aligned}$$

اگر $D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \leq 1\}$ آنگاه

$$(x, y, z) \in S \Leftrightarrow \begin{cases} (x, y) \in D \\ z = g(x, y) = 1 \end{cases}$$

در نتیجه بر S ، $d\sigma = dx dy$ و از آنجا

$$\oint_C xz \, dx + (y^2z + x^2) \, dy + y^2 \, dz = \iint_S 2x \, d\sigma = \iint_D 2x \, dx dy = 2 \int_0^{2\pi} \int_0^1 r \cos \theta \, r \, dr d\theta = 0$$

تمرین‌های بخش انتگرال رویه.

۱. مساحت رویه‌ی S را در هر یک از حالات زیر پیدا کنید.

(الف) قسمتی از کره‌ی $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ است که توسط استوانه‌ی $x^2 + y^2 = ax$ بریده می‌شود ($a > 0$).

(ب) قسمتی از استوانه‌ی $x^2 + y^2 = ax$ است که در کره‌ی $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ قرار دارد ($a > 0$).

(ج) قسمتی از مخروط $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ است که بین صفحه‌ی $z = 0$ و استوانه‌ی $x^2 + y^2 = 2y$ قرار دارد.

۲. انتگرال‌های رویه‌ای زیر را حساب کنید.

(الف) $\iint_S xyz \, d\sigma$ که در آن S قسمتی از صفحه‌ی $x + y + z = 1$ است که در یک هشتم اول فضا قرار دارد.

(ب) $\iint_S y \, d\sigma$ که در آن S قسمتی از سهمی‌گون $y = 2 - x^2 - z^2$ به ازای $y \geq 0$ است.

(ج) $\iint_S (x^2y^2 + x^2z^2 + y^2z^2) \, d\sigma$ که در آن S قسمتی از مخروط $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ است که توسط استوانه‌ی $x^2 + y^2 = 2x$ بریده می‌شود.

۳. انتگرال‌های رویه‌ای زیر را محاسبه کنید.

(الف) $\iint_S \vec{F} \cdot n \, d\sigma$ که در آن $\vec{F} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ و S نیم کره‌ی $z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$ می‌باشد.

(ب) $\iint_S \vec{F} \cdot n \, d\sigma$ که در آن $\vec{F} = \vec{i} - y^2\vec{j} - z\vec{k}$ و S قسمتی از رویه‌ی $z = xy$ است که در بالای مربع $D = \{(x, y) : 0 \leq y \leq 2, 0 \leq x \leq 3\}$ قرار دارد.

(ج) $\iint_S \vec{F} \cdot n \, d\sigma$ که در آن $\vec{F} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ و S رویه‌ی بسته حاصل از برخورد استوانه‌ی $x^2 + y^2 = 1$ و صفحات $z = 0$ و $z = 3$ است.

۴. به کمک قضیه واگرایی گوس انتگرال رویه‌ای $\iint_S \vec{F} \cdot n \, d\sigma$ را در هر یک از حالات زیر پیدا کنید.

(الف) $\vec{F} = 4x\vec{i} - 2y\vec{j} + \vec{k}$ و S کره‌ی $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ است.

(ب) $\vec{F} = 3x\vec{i} - y^2\vec{j} + z^2\vec{k}$ و S رویه‌ی بسته حاصل از برخورد استوانه $x^2 + y^2 = 2$ و صفحات $z = 0$ و $z = 1$ است.

(ج) $\vec{F} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ و S هر رویه‌ی بسته‌ای است که دارای شرایط قضیه‌ی واگرایی است.

۵. به کمک قضیه‌ی استوکس انتگرال خطی $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ را در هر یک از حالات زیر محاسبه کنید.

(الف) $\vec{F} = z\vec{i} + x\vec{j} - y\vec{k}$ و C منحنی بسته‌ای است که در صفحه‌ی $z = x$ از برخورد صفحات $x = 0$ ، $x = 1$ و $y = 0$ به وجود می‌آید.

(ب) $\vec{F} = -y\vec{i} + x^2\vec{j} + z\vec{k}$ و C منحنی بسته‌ای است که از برخورد استوانه‌ی $x^2 + y^2 = 1$ با صفحه‌ی $x + y + z = 2$ پدید می‌آید.

(ج) $\vec{F} = -y\vec{i} + x\vec{j} - z\vec{k}$ و C مثلی است که رؤس آن به ترتیب عبارتند از $(0, 0, 3)$ ، $(1, 0, 3)$ و $(2, 1, 3)$.

(د) $\vec{F} = -y\vec{i} + x\vec{j} - z\vec{k}$ و C منحنی حاصل از برخورد صفحه‌ی $z = x$ با کره‌ی $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ است (جهت حرکت روی C از طرف مثبت محور z ها بر خلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت در نظر گرفته می‌شود).

۶. فرض کنید f تابعی سه متغیره با مشتقات مرتبه دوم پیوسته است. نشان دهید

$$\nabla \cdot (f \nabla f) = \|\nabla f\|^2 + f \nabla^2 f$$

که در آن $\nabla^2 f := \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$ بنام لاپلاسین تابع f نامیده می‌شود.

۷. فرض کنید $\mathbf{F} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$ میدانی برداری تعریف شده بر ناحیه‌ای از فضای $\mathbb{R}^3$ بوده، توابع P ، Q و R مشتقات مرتبه دوم پیوسته باشند.

(الف) مطلوبست محاسبه $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{F})$.

ب) نشان دهید $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{F}) = -\nabla^2 \mathbf{F} + \nabla(\nabla \cdot \mathbf{F})$ ، که در آن $\nabla^2 \mathbf{F} := (\nabla^2 P) + (\nabla^2 Q)_j + (\nabla^2 R)$.

۸. فرض کنید $\mathbf{F}$ و $\mathbf{G}$ دو میدان برداری مشتقپذیر هستند. نشان دهید

$$\nabla \cdot (\mathbf{F} \times \mathbf{G}) = \mathbf{G} \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) - \mathbf{F} \cdot (\nabla \times \mathbf{G})$$

۹. فرض کنید f و g دو تابع سه متغیره با مشتقات مرتبه دوم پیوسته در ناحیه‌ای از فضا در برگیرنده سطح S و منحنی مرزی آن، C ، بوده، $\mathbf{n}$ بردار قائم یک بر سطح S باشد. نشان دهید

$$\begin{aligned} \text{الف)} \quad \int_C (f \nabla g) \cdot d\mathbf{r} &= \iint_S (\nabla f \times \nabla g) \cdot \mathbf{n} \, d\sigma \\ \text{ب)} \quad \int_C (f \nabla g + g \nabla f) \cdot d\mathbf{r} &= 0 \end{aligned}$$

۱۰. برای بردار یک $\mathbf{n}$ ، نماد $\frac{\partial f}{\partial n}$ نماد دیگری برای مشتق سویی تابع f در راستای $\mathbf{n}$ است (به عبارت دیگر $\frac{\partial f}{\partial n} = D_{\mathbf{n}} f$ و در نتیجه اگر f تابعی مشتقپذیر باشد، $\frac{\partial f}{\partial n} = \nabla f \cdot \mathbf{n}$). فرض کنید T ناحیه‌ای بسته و کراندار از فضای $\mathbb{R}^3$ و S سطح محصورکننده آن باشد. به علاوه فرض کنید $\mathbf{n}$ بردار قائم یک بیرونی سطح S است. اگر f و g دو تابع با مشتقات مرتبه دوم پیوسته در ناحیه‌ای از فضا در برگیرنده حجم T و سطح S باشند، نشان دهید

$$\begin{aligned} \text{الف)} \quad \iint_S \frac{\partial f}{\partial n} \, d\sigma &= \iiint_T \nabla^2 f \, dV \\ \text{ب)} \quad \iint_S f \frac{\partial g}{\partial n} \, d\sigma &= \iiint_T (f \nabla^2 g + \nabla f \cdot \nabla g) \, dV \\ \text{ج)} \quad \iint_S \left(f \frac{\partial g}{\partial n} - g \frac{\partial f}{\partial n} \right) d\sigma &= \iiint_T (f \nabla^2 g - g \nabla^2 f) \, dV \end{aligned}$$