

امتحان میان‌ترم اول نظریه مجموعه‌ها

مدرس: محسن خانی

۱۲ آبان ۱۴۰۴

از بین دو سوال ۱ و ۲ دقیقاً یکی را پاسخ دهید.

سوال ۱. نشان دهید که از هر اردینالی یک کاردینال بزرگتر وجود دارد.

سوال ۲. نشان دهید که $\alpha < \alpha^{cf(\alpha)}$.

سوال ۳ (ضرب کاردینالها). فرض کنید α یک الف باشد. نشان دهید که $\alpha \cdot \alpha = \alpha$.

از بین دو سوال ۴ و ۵ دقیقاً یکی را پاسخ دهید.

سوال ۴. نشان دهید که اردینالی مانند α وجود دارد به طوری که $\aleph_\alpha = \alpha$.

سوال ۵. نشان دهید که در هر رابطه خوش‌بنیاد دارای یک ارتفاع است.

توجه کنید که تعبیر ضرب اردینالها به این گونه است که $\alpha \cdot \beta$ یعنی β طبقه α . با استفاده از این نکته دو سوال زیر را پاسخ دهید:

سوال ۶. نشان دهید که $\omega \cdot 2 \neq 2 \cdot \omega$.

از بین دو سوال ۷ و ۸ یکی را پاسخ دهید:

سوال ۷ (ضرب اردینالها). فرض کنید که $\alpha < cf(\beta)$. نشان دهید که $\alpha \cdot \beta = \beta$. راهنمایی. به تعبیر ضرب اردینالها فکر کنید. از یک طرف نشان دهید $\alpha \cdot \beta \geq \beta$ و از طرف دیگر نشان دهید $\alpha \cdot \beta \leq \beta$. برای مورد آخر به تعریف هم‌پایانی فکر کنید.

سوال ۸ (ضرب اردینالها). نشان دهید اگر β ناشمارا باشد، آنگاه $\omega \cdot \beta = \beta$.