

فصل ۱

فرسینگ

در این فصل مدلی برای ZFC معرفی می‌کنیم که در آن فرضیه پیوستار برقرار نیست. در مدل نظر ما خواهیم داشت:

$$2^{\aleph_0} = \aleph_2.$$

ساخت چنین مدلی با استفاده از روش فرسینگ صورت می‌پذیرد که توسط «پاول کوهن» معرفی شد. در این بخش کوتاه، و نیز در یک دوره نظریه مجموعه‌ها در سطح کارشناسی، امکان پرداختن به همه جزئیات فرسینگ نیست؛ اما در عین حال کوشیده‌ایم که تا حدی، ایده را به دانشجویان منتقل کنیم.

۱.۱ تعاریف اولیه - مجموعه شروط

تعریف ۱. ساختار $(P, \leq)$ را یک مجموعه مرتب جزئی می‌نامیم هرگاه

$$1. \forall x \in P \quad x \leq x$$

$$2. \forall x, y, z \in P \quad (x \leq y \wedge y \leq z \rightarrow x \leq z)$$

$$3. \forall x, y \in P \quad (x \leq y \wedge y \leq x \rightarrow x = y)$$

هر یک از عناصر مجموعه P را یک «شروط» می‌نامیم. وقتی $p, q \in P$ به گونه‌ای هستند که وقتی $q \leq p$ ، می‌گوییم q از p «شروط قوی‌تری است».

تعریف ۲. فرض کنید P یک مجموعه مرتب جزئی باشد. مجموعه $G \subseteq P$ را یک فیلتر می‌نامیم هرگاه

$$1. \text{ برای هر } q \in G, \text{ اگر } p \in P \text{ شرط قوی‌تری از } q \text{ باشد، آنگاه } p \in G.$$

$$2. \text{ برای هر } p, q \in G, \text{ یک عنصر } r \in G \text{ وجود دارد که شرط قوی‌تری از هر دوی } p, q \text{ است.}$$

$$3. G \neq \emptyset.$$

تعریف ۳. فرض کنید P یک مجموعه مرتب باشد. مجموعه $D \subseteq P$ را در P چگال می‌نامیم هرگاه برای هر $p \in P$ ، یک $q \in D$ وجود داشته باشد که $q \leq p$ (یعنی q شرط قوی‌تری از p باشد).

۲.۱ قضیه رازیوا - سیکورسکی

از این جا نکات کمی گیج‌کننده‌ای وارد بحث می‌شود. فرض کنید $\mathcal{M}$ یک مدل شمارا برای نظریه مجموعه‌ها باشد. همچنین فرض کنید $P \in \mathcal{M}$ یک مجموعه از شروط باشد و $G \subseteq P$ یک فیلتر باشد. دقت کنید که

توجه ۴. ما علاقه مند به فیلترهایی مانند $G \subseteq P$ خواهیم بود که M مجموعه بودن آنها را تشخیص نمی دهد. یعنی از دید V داریم $G \subseteq P$ یک مجموعه است، اما از دید M با این که همه اعضای G در M هستند، خود G یک گردایه است که مجموعه نیست.

تعریف ۵. فرض کنید M یک مدل، $P \in M$ یک مجموعه از شروط، و $G \subseteq P$ یک فیلتر باشد. می گوییم G یک فیلتر P - ژنریک نسبت به M است هرگاه G با هر زیرمجموعه $D \subseteq M$ که در P چگال است، اشتراک داشته باشد.

برای یک مدل شمارا، برای یک مجموعه از شروط، همیشه یک فیلتر ژنریک وجود دارد:

قضیه ۶ (رازیوا - سیکورسکی). فرض کنید M یک مدل شمارا و P یک مجموعه مرتب جزئی باشد که $p \in P$. در این صورت یک فیلتر P - ژنریک روی M وجود دارد که شامل p است.

اثبات. فرض کنید $(D_n)_{n \in \mathbb{N}}$ شمارشی از تمام مجموعه های متعلق به M باشد که در P چگال هستند. دقت کنید که خود M شماراست و به این علت این گردایه را شمارا فرض کرده ایم. یک دنباله q_n به صورت زیر بسازید:

$$q_0 = p \quad (۱)$$

$$q_{n+1} \leq q_n \quad (۲)$$

$$q_{n+1} \in D_n \quad (۳)$$

همچنین، فرض کنید G فیلتر تولید شده توسط q_i ها باشد. ^۱ در این صورت، G یک فیلتر P - ژنریک روی M است. $\square$

تعریف ۷. فرض کنید r و q دو شرط باشند. می گوییم r و q با هم «غیرقابل انطباق» هستند هرگاه

$$\neg \exists s (s \leq r \wedge s \leq q).$$

در این حالت می نویسیم: $q \perp r$.

توجه ۸. ما علاقه مند به فیلترهایی مانند $G \subseteq P$ خواهیم بود که M مجموعه بودن آنها را تشخیص نمی دهد. یعنی از دید V داریم $G \subseteq P$ یک مجموعه است، اما از دید M با این که همه اعضای G در M هستند، خود G یک گردایه است که مجموعه نیست.

قضیه زیر را با توجه ۸ مقایسه کنید:

قضیه ۹. فرض کنید M یک مدل شمارای متعدی باشد که اصل تصریح در آن برقرار است. همچنین فرض کنید P یک مجموعه مرتب جزئی با ویژگی زیر باشد:

$$\forall p \in P \exists q, r \in P \quad ((q, r \leq p) \wedge q \perp r). \quad *$$

اگر فیلتر G روی M ، P - ژنریک باشد، آنگاه

$$G \notin M.$$

اثبات. نشان می دهیم که $P - G \notin M$ در نتیجه $G \notin M$ کند.

به برهان خلف فرض کنید که $P - G \in M$. نخست ادعا می کنیم که شرط * نتیجه می دهد که $P - G$ در P چگال است. اگر این ادعا ثابت شود به تناقض می رسیم چون G باید همه مجموعه های چگال را قطع کند اما واضح است که G با $P - G$ اشتراکی ندارد.

برای اثبات ادعا فرض کنید $p \in P$. بنابر فرض، دو عنصر $q, r \in P$ وجود دارند که هر دو از p قوی تر هستند و غیر قابل انطباق با هم هستند.

هر دوی این شرطها نمی توانند در G باشند، چون در این صورت بنا به فیلتر بودن G قابل انطباق می شوند. پس یکی از آنها در $P - G$ است. $\square$

^۱ برای ساختن چنین فیلتری باید برای هر شرط، شرطهای قوی تر را اضافه کرد.

۳.۱ نام‌ها

تعریف ۱۰. می‌گوییم τ یک P -نام است هرگاه هر عنصر متعلق به τ به صورت $\langle \sigma, p \rangle$ باشد که $p \in P$ و σ یک P -نام است.

دقت کنید که در تعریف بالا، از قضیه بازگشت استفاده شده است. در واقع «تابع مشخصه» نام بودن، به عنوان تابع کمکی در قضیه بازگشت استفاده شده است.

مجموعه تهی، ساده‌ترین نام است.

تعریف ۱۱. ۱. V^P مجموعه تمام P -نام‌هاست،

۲. $M^P = V^P \cap M$. دقت کنید که می‌توان نشان داد که M^P برابر با مجموعه «نام‌ها از نظر M » است.

تعریف ۱۲. فرض کنید $\tau \in V^P$ و $G \in V$. در این صورت، ارزش‌دهی نام τ با استفاده از G را به صورت زیر (دوباره با استفاده از قضیه بازگشت) تعریف می‌کنیم:

$$\tau_G = \{\sigma_G \mid \exists p \in G \quad \langle \sigma, p \rangle \in \tau\}$$

تعریف ۱۳. فرض کنید M تراپایی باشد و $p \in M$. تعریف می‌کنیم:

$$M[G] = \{\tau_G \mid \tau \in M^P\}.$$

قضیه ۱۴. (۱) $M[G]$ مدل ZFC است.

(۲) اردینال‌های $M[G]$ ، همان اردینال‌های V هستند.

۴.۱ مثالهای آموزنده

مثال ۱۵ (یک عدد حقیقی جدید). فرض کنید P یک مفهوم فرسینگ باشد که عناصر آن عبارتند از دنباله‌های متناهی تشکیل شده از $\cdot$ و 1 ؛ یعنی هر $p \in P$ به صورت زیر است:

$$p = \langle p(0), p(1), \dots, p(n) \rangle$$

به طوری که هر $p(i)$ یا $\cdot$ است، یا 1 (منظور از دنباله، یک تابع از n به $\{0, 1\}$ است). دقت کنید که در این جا M یک مدل زمینه است و دنباله‌های متناهی از نظر همین M در نظر گرفته شده است. روی P ترتیب زیر را در نظر بگیرید:

$$p < q \Leftrightarrow q \subset p.$$

فرض کنید $G \subseteq P$ یک فیلتر ژنریک باشد. قرار دهید $f = \bigcup G$. پس f یک تابع است. دقت کنید که f از نظر V یک تابع است.

$$\text{Dom}(f) = \omega \text{ (ادعا)}$$

قرار دهید $D_n = \{p \in P \mid n \in \text{Dom } p\}$. در این صورت D_n در P چگال است. از طرفی $G \cap D_n \neq \emptyset$. بنابراین $\text{Dom}(f) = \omega$.

حال نشان می‌دهیم که تابع f در M نیست (یعنی در $M[G]$ عنصر f را داریم که در خود M نیست. این f یک دنباله از صفر و یک است که M آن را نمی‌شناسد. پس f در واقع یک «عدد حقیقی جدید» است. f را یک عدد حقیقی کوهن می‌نامیم).

برای این که نشان دهیم که f در M نیست، نشان می‌دهیم که f با هر $g \in M$ متفاوت است. فرض کنید $g \in M$. قرار دهید $D_g = \{p \in P \mid p \not\subseteq g\}$. به آسانی می‌توان دید که D_g در P چگال است. از آنجایی که G ژنریک است، داریم $G \cap D_g \neq \emptyset$ ؛ یعنی تابع f با g متفاوت است.

مثال ۱۶ (فروریزش یک کاردینال). فرض کنید M یک مدل زمینه‌ای و P مجموعه دنباله‌های متناهی ساخته شده از اردینال‌های شمارا باشد. مانند مثال قبل، این دنباله‌ها را مرتب می‌کنیم. فرض کنید G یک فیلتر ژنریک باشد و $f = \bigcup G$. مشابه مثال قبل می‌توان نشان داد که $\text{Dom}(f) = \omega$.

$$\text{Range}(f) = \omega_1^M \text{ (ادعا)}$$

برای هر $\omega_1^M < \alpha$ ، قرار دهید

$$E_\alpha = \{p \in P \mid \alpha \in \text{Range}(p)\}.$$

به راحتی می‌توان نشان داد که E_α چگال است و در نتیجه ادعا اثبات می‌شود.

بنابراین، برای هر $\mathcal{N}$ که $\mathcal{M}[G] \subset \mathcal{N}$ ، ω_1^M شماراست. به این عمل، فروریختن یک کاردینال می‌گوییم.

دقت کنید که ω_1^M از دید خود $\mathcal{M}$ ناشماراست. اما از دید V در تناظر یک به یک با ω^M است. تابعی که این تناظر یک به یک را تضمین می‌کند در $\mathcal{M}$ نیست.

۵.۱ فرسینگ و قضیه اساسی

تعریف ۱۷ (فرسینگ). فرض کنید $\mathcal{M}$ یک مدل شمارای متعددی و $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ یک فرمول باشد. همچنین فرض کنید $p \in P$ و $\tau_1, \dots, \tau_n \in P$. $\mathcal{M}^p$ در این صورت، می‌گوییم p برقرای فرمول $\varphi(\tau_1, \dots, \tau_n)$ را اجبار می‌کند هرگاه برای هر G که روی $\mathcal{M}$ ژنریک است، داشته باشیم

$$\varphi^{\mathcal{M}[G]}((\tau_1)_G, \dots, (\tau_n)_G)$$

و در این صورت می‌نویسیم $p \Vdash_{P, \mathcal{M}} \varphi(\tau_1, \dots, \tau_n)$.

قضیه ۱۸ (قضیه اساسی فرسینگ). با فرضیات بالا، داریم

$$\varphi^{\mathcal{M}[G]}((\tau_1)_G, \dots, (\tau_n)_G) \Leftrightarrow \exists p \in G \ p \Vdash \varphi(\tau_1, \dots, \tau_n).$$

۶.۱ لم گل آفتابگردان و قضیه شنین

مطالب این بخش، مستقیماً به فرسینگ مربوط نیست. اما حاوی ترکیباتی است که برای اثبات سازگاری نقیض پیوستار لازم است.

تعریف ۱۹. فرض کنید W گردایه‌ای از زیرمجموعه‌های یک مجموعه U باشد. می‌گوییم W یک Δ -سیستم (یا یک گل آفتابگردان) است هرگاه یک مجموعه $S \subseteq U$ وجود داشته باشد به طوری که

$$\forall A, B \in W \quad A \cap B = S.$$

قضیه ۲۰ (اردوش-رادو). برای هر $k > 0$ و $r > 0$ ، یک عدد $f(k, r)$ وجود دارد که هر سیستم متشکل از مجموعه‌های k عضوی اگر بیشتر از $f(k, r)$ عضو داشته باشد، آنگاه شامل یک گل آفتابگردان با اندازه r است.

(معادل شمارای قضیه اردوش-رادو) هر گردایه شمارا از مجموعه‌های k عضوی، شامل یک گل آفتابگردان شماراست.

قضیه ۲۱ (گل آفتابگردان ناشمارا - قضیه شنین). فرض کنید W یک گردایه ناشمارا از مجموعه‌های متناهی باشد. در این صورت، یک $Z \subset W$ ناشمارا وجود دارد که یک Δ -سیستم است.

اثبات. W ناشماراست. پس به تعداد ناشمارا مجموعه در W هم‌اندازه هستند. پس فرض می‌کنیم ناشمارا مجموعه با اندازه n داریم.

حکم را با استقرا روی n اثبات می‌کنیم. به وضوح، حکم برای $n = 1$ برقرار است. فرض کنید حکم برای n درست است. نتیجه را برای $n + 1$ اثبات می‌کنیم. اگر عنصری مانند a وجود داشته باشد که در ناشمارا مجموعه X است، حکم اثبات می‌شود. فرض کنید چنین عنصری وجود نداشته باشد. در این صورت، یک Δ -سیستم ناشمارا با اشتراک تهی مانند $(X_\xi)_{\xi < \alpha}$ می‌سازیم. برای این کار، هر گاه مجموعه‌های قبلی ساخته شده باشند، دقت می‌کنیم که می‌توانیم در n جای خالی، عناصری قرار دهیم که در هیچ‌کدام از مجموعه‌های قبلی نیستند. (روی این فکر و اثبات را دقیق کنید). $\square$

۷.۱ مدلی که در آن، دو به توان الف صفر برابر با الف دو است: سازگاری نقیض پیوستار

قضیه ۲۲. یک توسیع ژنریک $V[G]$ وجود دارد که در آن $\aleph_1 > 2^{\aleph_0}$ (نقیض پیوستار سازگار است).

اثبات قضیه — با قضیه بعدی تکمیل می‌شود. P را مجموعه همه توابع متناهی از $\omega_2 \times \omega$ به مجموعه $\{0, 1\}$ در نظر بگیرید. ترتیب را شمول در نظر بگیرید. همچنین فرض کنید G یک فیلتر ژنریک باشد و قرار دهید $f = \bigcup G$.
 f از دید بیرونی، یک تابع است. ادعا می‌کنیم که دامنه f برابر با $\omega \times \omega_2$ است.
 برای اثبات ادعا قرار دهید

$$D_{\alpha, n} = \{p : (\alpha, n) \in \text{dom}(p)\}$$

نشان دهید که هر $D_{\alpha, n}$ چگال است. آنجا که G ژنریک است تمام $D_{\alpha, n}$ ها را قطع می‌کند؛ پس دامنه f تمام (α, n) هاست.
 دقت کنید که f تابعی از $\omega_2 \times \omega$ به $\{0, 1\}$ است. پس برای هر $\alpha \in \omega_2$ یک تابع f_α از ω به $\{0, 1\}$ داریم (کافی است قرار دهید $f_\alpha(t) = f(\alpha, t)$). بنابراین $(f_\alpha)_{\alpha \in \omega_2}$ لیستی از ω_2 تا عدد حقیقی است! وجود این تعداد عدد حقیقی، فرضیه پیوستار را نقض می‌کند.
 برای این که اثبات دقیق‌تر شود، نیاز است دو مورد زیر تحقیق شود:

۱. تمام f_α ها با هم متفاوت هستند.

۲. اندازه $\omega_2^{\aleph_1}$ واقعاً برابر با $\aleph_2$ است.

اثبات اولی ساده است. فرض کنید $\alpha, \beta \in \omega_2$. برای اثبات این که $f_\alpha \neq f_\beta$ کافی است، مطابق معمول، نشان دهیم که مجموعه زیر چگال است:

$$D = \{p : p(\alpha, n) \neq p(\beta, n)\}.$$

□

برای اثبات قسمت دوم، نیاز به کمی کار و قضیه داریم:

قضیه ۲۳. فرض کنید P یک مفهوم فرسینگ باشد که ویژگی CCC دارد (تعداد عناصر غیرقابل انطباق در آن حداکثر شمارا باشد). در این صورت در $\mathcal{M}$ و $\mathcal{M}[G]$ ، کاردینال‌ها هم‌اندازه هستند.

قضیه فوق را اثبات نمی‌کنیم. اما در ادامه اثبات قبلی، نشان می‌دهیم که فورسینگ مورد نظر اثبات قبل، ویژگی ccc را داراست.

اثبات. فرض کنید F یک مجموعه ناشمارا از عناصر P باشد. نشان می‌دهیم که عناصر F قابل انطباق هستند (یعنی این تعداد عنصر نمی‌توانند غیر قابل انطباق باشند). قرار دهید

$$W = \{\text{Dom}(p) \mid p \in F\}.$$

مجموعه فوق ناشماراست پس (بنا به قضیه شنین) یک Δ — سیستم ناشمارای $Z \subseteq W$ وجود دارد. فرض کنید دامنه مشترک به دست آمده در این دلتا سیستم برابر با S باشد. قرار دهید

$$G = \{f \mid S = \text{Dom}(f)\}.$$

□

به راحتی می‌توان دید که ناشمارا تابع وجود دارند که روی این دامنه با هم برابرند. بنابراین F غیرقابل انطباق نیست.