کره d-بعدی برای اهالی بخش!

(هندسه ابعاد بالای سابق)

رامین جوادی

دانشگاه صنعتی اصفهان

مهر ۱۴۰۳

سعدی » گلستان » باب هفتم در تأثیر تربیت »

حکایت شمارهٔ ۱۴

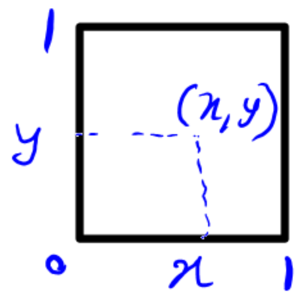
۱ مردکی را چشم درد خاست، پیش بیطار* رفت که دوا کن. بیطار از آنچه در چشم چارپای می‌کند در دیده او کشید و کور شد. حکومت به داور بردند گفت بر او هیچ تاوان نیست. اگر این خر نبودی، پیش بیطار نرفتی. مقصود از این سخن آن است تا بدانی که هر آن که ناآزموده را کار بزرگ فرماید با آن که ندامت برد به نزدیک خردمندان به خفت رای منسوب گردد.

۲ ندهد هوشمند روشن‌رای — به فرومایه کارهای خطیر

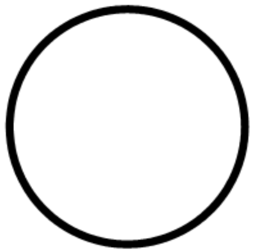
۳ بوریاباف اگر چه بافنده‌ست — نبرندش به کارگاه حریر

* بیطار: دامپزشک

انتخاب یک نقطه تصادفی در مربع واحد



$$x \sim U(0,1), \quad y \sim U(0,1) \Rightarrow (x,y)$$



انتخاب یک نقطه تصادفی در دایره واحد ؟

چند نماد

فضای اقلیدسی d بعدی $\mathbb{R}^d = \{ v = (v_1, \ldots, v_d) : v_i \in \mathbb{R} \}$

کره واحد d-بعدی $S^d = \{ v \in \mathbb{R}^d : \|v\|_2 = \sqrt{v_1^2 + \cdots + v_d^2} = 1 \}$

کره d-بعدی شعاع R $S^d_R = \{ v \in \mathbb{R}^d : \|v\|_2 = R \}$

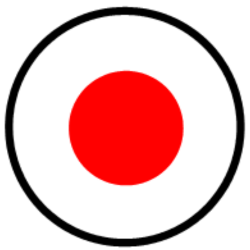
گوی واحد d-بعدی $B^d = \{ v \in \mathbb{R}^d : \|v\|_2 \leq 1 \}$

گوی d-بعدی شعاع R $B^d_R = \{ v \in \mathbb{R}^d : \|v\|_2 \leq R \}$

جعبه d-بعدی نقطع 2K $Box^d_{2K} = \{ v \in \mathbb{R}^d : \|v\|_\infty = \max |v_i| \leq K \}$

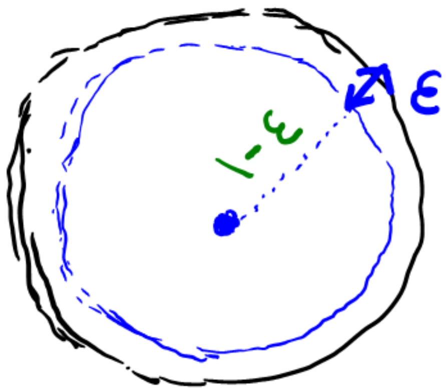
چند مشاهده درباره حجم کره d-بعدی (d بزرگ)

مشاهده اول: ٪۹۸ حجم کره واحد d-بعدی در پوسته‌ای به ضخامت $\frac{4}{d}$ است.



مساحت دایره به شعاع ۱ $= \pi$

$\frac{1}{2}$ " " " $= \frac{\pi}{4}$



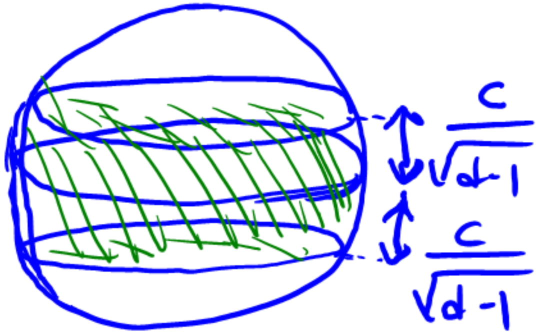
$$\mathrm{Vol}\left((1-\varepsilon)B^d\right) = (1-\varepsilon)^d\,\mathrm{Vol}(B^d)$$

$$\leq e^{-\varepsilon d}\,\mathrm{Vol}(B^d)$$

$$\varepsilon=\frac{4}{d} \longrightarrow\ = e^{-4}\,\mathrm{Vol}(B^d)$$

$$\leq 0/02\ \mathrm{Vol}(B^d)$$

مشاهده دوم: ٪۹۹ حجم کره واحد d-بعدی در نوار استوا به ضخامت $\frac{6}{\sqrt{d-1}}$ است.



$$\frac{\text{Vol}\left(\text{نوار استوا به ضخامت } \frac{2c}{\sqrt{d-1}}\right)}{\text{Vol}(B^d)} \geq 1 - \frac{2}{c} e^{-\frac{c^2}{2}}$$

$$(c=3) \quad \geq 0/99$$

$H =$ نیمکره

$A =$ عرقچین

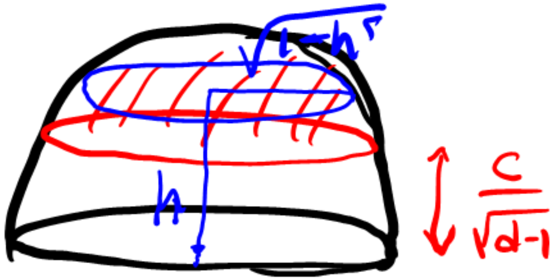
$V^d =$ حجم کره واحد d بعدی

$$\frac{\text{Vol}(A)}{\text{Vol}(H)} \leq \frac{2}{c} e^{-\frac{c^2}{2}}$$

$$\text{Vol}(H) \geq h \times \left(\sqrt{1-h^2}\right)^{d-1} V^{d-1} \underset{\left(h=\frac{1}{\sqrt{d-1}}\right)}{=} \frac{1}{\sqrt{d-1}} \left(1 - \frac{1}{d-1}\right)^{\frac{d-1}{2}} V^{d-1}$$

$$\overset{(1)}{\geq} \frac{1}{\sqrt{d-1}} \times \frac{1}{2} \times V^{d-1}$$

$$\left((1-x)^n \geq 1 - nx\right)$$



$$\mathrm{vol}(A) = \int_{\frac{c}{\sqrt{d-1}}}^{1} \left(\sqrt{1-h^2}\right)^{d-1} V^{d-1}\, dh$$

$(1-x \leq e^{-x}) \rightarrow$

$$\leq \int_{\frac{c}{\sqrt{d-1}}}^{1} e^{-\frac{h^2(d-1)}{2}} V^{d-1}\, dh$$

$\left(\frac{c}{\sqrt{d-1}} \leq h\right) \rightarrow$

$$\leq \int_{\frac{c}{\sqrt{d-1}}}^{1} \frac{\sqrt{d-1}}{c} h\, e^{-\frac{h^2(d-1)}{2}} V^{d-1}\, dh$$

$$= \frac{\sqrt{d-1}}{c} \times V^{d-1} \times \frac{-1}{d-1} \left. e^{-\frac{h^2(d-1)}{2}} \right]_{\frac{c}{\sqrt{d-1}}}^{1}$$

$$\overset{(2)}{\leq} \frac{1}{c\sqrt{d-1}} e^{-\frac{c^2}{2}}$$

$$(1),(2) \Rightarrow \frac{\mathrm{Vol}(A)}{\mathrm{vol}(H)} \leq \frac{2}{c} e^{-\frac{c^2}{2}}$$

مشاهده سوم: ۹۵٪ حجم کره واحد d بعدی در یک جعبه به ضلع $\frac{4\sqrt{\ln d}}{\sqrt{d-1}}$ است. $(d\geq 13)$

$$\frac{\mathrm{Vol}\left(\text{نوار استوایی به ضخامت } \frac{2c}{\sqrt{d-1}}\right)}{\mathrm{Vol}(B^d)} \geq 1-\frac{2}{c}e^{-\frac{c^2}{2}}$$

مشاهده دوم:

$$c=2\sqrt{\ln d} \Rightarrow \frac{\mathrm{Vol}\left(\text{نوار استوایی به ضخامت } \frac{4\sqrt{\ln d}}{\sqrt{d-1}}\right)}{\mathrm{Vol}(B^d)} \geq 1-\frac{1}{\sqrt{\ln d}}e^{-2\ln d}$$

$$=1-\frac{1}{d^2\sqrt{\ln d}}$$

اگر d نوار استوایی را اشتراک بگیریم، جعبه به ضلع $\frac{4\sqrt{\ln d}}{\sqrt{d-1}}$ حاصل می‌شود. پس

$$\frac{\mathrm{Vol}\left(\mathrm{Box}^d_{4\sqrt{\ln d}/\sqrt{d-1}}\right)}{\mathrm{Vol}(B^d)} \geq 1-\frac{1}{d\sqrt{\ln d}} \overset{(d\geq 13)}{\geq} 0.95$$

سؤال، آیا مشاهده اول و سوم تناقض دارد؟

نتایج مشاهدات:

قضیه: اگر n بردار تصادفی و مستقل $x_1, \dots, x_n$ در گوی یکه انتخاب کنیم آنگاه با احتمال $1-O(\frac{1}{n})$

(1) برای هر $1 \leqslant i \leqslant n$ ،
$$1 - \frac{2\ln n}{d} \leqslant \|x_i\| \leqslant 1$$

(2) برای هر $1 \leqslant i \neq j \leqslant n$ ،
$$|\langle x_i, x_j \rangle| \leqslant \sqrt{\frac{6\ln n}{d-1}}$$

نتیجه: برای هر $\varepsilon > 0$ ، در $\mathbb{R}^d$ به تعداد $2^{O(\varepsilon d)}$ بردار $x_1, \dots, x_n$ وجود دارد که

x_iها تقریباً ارتونرمال‌اند یعنی

(1) $\forall i \quad 1-\varepsilon \leqslant \|x_i\| \leqslant 1$

(2) $\forall i \neq j \quad |\langle x_i, x_j \rangle| \leqslant \varepsilon$

نحوه انتخاب بردار تصادفی در گوی یکه d بعدی

توزیع نرمال (گاوسی) $X \sim N(0,1)$

تابع چگالی $$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

توزیع گاوسی d بعدی $X = (X_1, \dots, X_d)$ و $X_i \overset{i.i.d}{\sim} N(0,1)$

تابع چگالی $$p(x) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^d} e^{-\frac{x_1^2 + \dots + x_d^2}{2}} = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} e^{-\frac{\|x\|_2^2}{2}}$$

در توزیع گاوسی d بعدی، همه نقاط روی کره چگالی یکسانی دارند (توزیع کروی)

نحوه انتخاب بردار تصادفی روی کره d بعدی:

$$\boxed{\begin{gathered} y = N^d(0,1) \\ x = \frac{y}{\|y\|} \end{gathered}}$$

نحوه انتخاب بردار تصادفی در گوی یکه d بعدی

اگر X بردار تصادفی در گوی یکه d بعدی باشد و $\rho = \|x\|$ در این صورت

$$F(a) = Pr(\rho \leq a) = a^d$$

توزیع تجمعی ρ

نحوه نمونه گیری از توزیع دلخواه F

$X \sim F$ i.e. $Pr(X \leq a) = F(a)$

$a \sim U(0,1)$

$X = F^{-1}(a) \Rightarrow X \sim F$

دلیل: $Pr(X \leq x_0) = Pr(F^{-1}(a) \leq x_0) = Pr(a \leq F(x_0))$

$= F(x_0)$

نحوه انتخاب بردار تصادفی در گوی یکه d بعدی

$$Y \sim N^d(0,1)$$

$$a \sim U(0,1)$$

$$\rho = F^{-1}(a) = a^{\frac{1}{d}}$$

$$X = \rho \frac{Y}{\|Y\|} = a^{\frac{1}{d}} \frac{Y}{\|Y\|}$$

توزیع گاوسی d-بعدی $X=(X_1, \dots, X_d)$ ، $X_i \overset{i.i.d}{\sim} N(0,1)$

تابع چگالی $$P(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} e^{-\frac{\|x\|_2^2}{2}}$$

$\mathbb{E}\|X\|^2$ چقدر است؟

$$\operatorname{Var} X_i = 1 \Rightarrow \mathbb{E} X_i^2 - (\mathbb{E} X_i)^2 = 1 \Rightarrow \mathbb{E} X_i^2 = 1$$

$$\mathbb{E} X_i = 0$$

$$\Rightarrow \mathbb{E}\|X\|^2 = \mathbb{E}\, X_1^2 + \dots + X_d^2 = d$$

(Gaussian Annulus Th. قضیه حلقه گاوسی)

اگر $X \sim N^d(0,1)$ و $0 < \beta < \sqrt{d}$ آنگاه

$$\Pr\left(\left|\|X\| - \sqrt{d}\right| > \beta\right) \leq 3 e^{-\frac{\beta^2}{100}}$$

اگر $X \sim N^d(0,1)$ آنگاه با احتمال حداقل $1-3e^{-\frac{\varepsilon^2 d}{100}}$ داریم $\|X\| = \sqrt{d}(1\pm\varepsilon)$

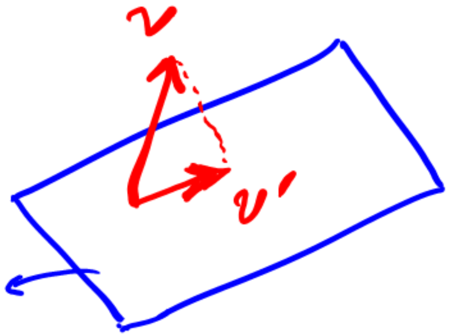
کاربرد قضیه حلقه گاوسی: کاهش بعد Dimension Reduction

ورودی: بردارهای $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}^d$

خروجی: بردارهای $v'_1, \dots, v'_n \in \mathbb{R}^k$ $\quad (k \ll d)$

$f: \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^k$

هدف: $\|f(u) - f(v)\| \approx \|u - v\|$



زیرفضای k بعدی در $\mathbb{R}^d$

تصویر تصادفی (Random Projection)

k بردار تصادفی مستقل گاوسی d-بعدی تولید کن

$$u_1, u_2, \dots, u_k \overset{i.i.d}{\sim} N^d(0,1)$$

v را روی u_i ها تصویر کن

$$f(v) = \left(\langle v, u_1\rangle, \langle v, u_2\rangle, \dots, \langle v, u_k\rangle\right)$$

لم: اگر $v \in \mathbb{R}^d$ یک بردار دلخواه باشد آنگاه

$$\Pr\left(\left| \|f(v)\| - \sqrt{k} \right| \geq \varepsilon\sqrt{k}\right) \leq 3e^{-\frac{\varepsilon^2 k}{100}}$$

نتیجه: برای هر دو بردار $u, v \in \mathbb{R}^d$

$$\Pr\left(\left| \frac{\|f(u) - f(v)\|}{\sqrt{k}} - \|u-v\| \right| \geq \varepsilon \|u-v\|\right) \leq 3e^{-\frac{\varepsilon^2 k}{100}}$$

پس

$$\tilde{f}(v) = \frac{f(v)}{\sqrt{k}}$$

$$\left(1-3e^{-\frac{\varepsilon^2 k}{100}}\ \text{با احتمال}\right) \quad \|\tilde{f}(u)-\tilde{f}(v)\| = (1\pm\varepsilon)\,\|u-v\| \ .$$

$$f(v) = \left(\langle v,u_1\rangle, \langle v,u_2\rangle, \dots, \langle v,u_k\rangle\right)$$

لم: اگر $v \in \mathbb{R}^d$ یک بردار یکه باشد آنگاه

$$\boxed{\Pr\left(\big|\,\|f(v)\| - \sqrt{k}\,\big| \geq \varepsilon\sqrt{k}\right) \leq 3e^{-\frac{\varepsilon^2 k}{100}}}$$

اثبات: ادعا: $f(v) \sim N^k(0,1)$ و لم از طلقه گاوسی حاصل می‌شود.

$$X, Y \sim N(0,1) \Rightarrow \alpha X + \beta Y \sim N\left(0, \sqrt{\alpha^2+\beta^2}\right)$$

$$\langle v, u_1\rangle \sim N\left(0, \sqrt{v_1^2+\dots+v_d^2}\right) = N(0,1)$$

نتیجه: اگر $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}^d$ و $k \geq \frac{300 \ln n}{\varepsilon^2}$ آنگاه، با احتمال $1-O(\frac{1}{n})$

$$\forall i \neq j \qquad \frac{\| f(v_i) - f(v_j) \|}{\sqrt{k}} = (1 \pm \varepsilon) \| v_i - v_j \|$$

با تشکر...