



تمرین شماره ۳

مهلت تحویل: ظهر دوشنبه ۲۶ آبان

تمرین ۱. درستی جملات زیر را در نظریه مجموعه‌ها (ZFC) بررسی کنید.

$$1) \quad \forall a \forall b \left(\bigcup a \subseteq b \longleftrightarrow \forall x (x \in a \rightarrow x \subseteq b) \right)$$

$$2) \quad \forall a \left(a \neq \emptyset \rightarrow \exists b \left(\forall x \ x \in b \longleftrightarrow \forall y (y \in a \rightarrow x \in y) \right) \right)$$

مجموعه b در بالا را به شکل $\bigcap a$ نشان می‌دهیم.

تمرین ۲. درستی عبارات زیر را بررسی کنید.

$$1. \quad \text{آیا } (A \cup B) - B = A \text{ ؟}$$

$$2. \quad \text{آیا } A \cup (B - C) = (A \cup B) - (A \cup C) \text{ ؟}$$

$$3. \quad \text{آیا } A \cup B = A \cup C \implies B = C \text{ ؟}$$

تمرین ۳. برای هر دو مجموعه A, B ، رابطه $A \oplus B$ را به شکل

$$A \oplus B = (A \cup B) - (A \cap B)$$

تعریف می‌کنیم. حال اگر X مجموعه باشد، ساختار $(P(X), \oplus)$ متشکل از مجموعه توانی X به همراه نگاشت یادشده را در نظر بگیرید. می‌توان تحقیق کرد که:

$$1. \quad \forall A, B \in X \quad A \oplus B \in X \quad (\text{آ})$$

$$2. \quad \forall A, B \in X \quad A \oplus B = B \oplus A \quad (\text{ب})$$

$$3. \quad \forall A, B, C \in X \quad A \oplus (B \oplus C) = (A \oplus B) \oplus C \quad (\text{ج})$$

$$4. \quad \forall A \quad A \oplus \emptyset = A \quad (\text{د})$$

حال با استفاده از خواص بالا عبارات زیر را تحقیق کنید:

$$1. \quad A \oplus A = \emptyset$$

$$2. \quad A \oplus B = A \oplus C \implies B = C$$

توجه ۱. بخش ۱ تمرین ۳ اختیاری است.