

تمرین نوبت سوم نظریه مجموعه‌ها

مهلت تحویل: جمعه ۳۰ آبان

تمرین ۱. کاردینال مجموعه های زیر را بدست بیاورید.

۱. مجموعه همه زیر مجموعه های $\mathbb{N}$.

۲. مجموعه همه توابع از $\mathbb{N}$ به $\mathbb{N}$. (سپس کاردینال $\aleph_0^{\aleph_0}$ را محاسبه کنید).

۳. مجموعه همه زیر مجموعه های نامتناهی $\mathbb{N}$.

تمرین ۲. (ضرب اوردینال ها). فرض کنید که $\alpha < cf(\beta)$ نشان دهید $\alpha\beta = \beta$. همچنان نشان دهید اگر β نامتناهی باشد. $\omega\beta = \beta$ آنگاه $\omega\beta = \beta$.

تمرین ۳. نشان دهید $cf(\alpha) \leq \alpha$.

تمرین ۴. فرض کنید α, β دو اوردینال باشند. نشان دهید $|\alpha| < |\beta|$ (به عنوان اوردینال) اگر و تنها اگر $|\alpha| < |\beta|$ (به عنوان کاردینال).

تمرین ۵. نشان دهید α وجود دارد به طوری که $\aleph_\alpha = \alpha$.

تمرین ۶. (بدون استفاده از اصل انتخاب). نشان دهید که ω_2 اجتماع شمارای مجموعه های شمارا نیست. (فرض کنید

$\omega_2 = \bigcup_{n < \omega} S_n$ که در آن هر S_n شمارا است، و بگذارید α_n نوع ترتیبی مجموعه S_n باشد. آنگاه $\alpha = \sup_n \alpha_n$ داریم که $\alpha \leq \omega_1$ ، و نگاشتی از $\omega \times \alpha$ روی ω_2 وجود دارد).