ساده بودن Simple

گروه $(G, *)$ $\quad G\times G \xrightarrow{*} G$

زیرگروه نرمال $N \longleftrightarrow gN=Ng \quad \forall g\in G$

گروه ساده = فاقد زیرگروه نرمال نابدیهی

حلقه $(R, +, \cdot)$ $\quad a\cdot(b+c) = a\cdot b + a\cdot c$

$(R, +)$ گروه آبلی

شرکت پذیر $a(bc) = (ab)c$

لی $a\cdot b$ معمولا به جای $=[a\ b]$

$a(bc)+c(ab)+b(ca)=0$

مثال $End(G) = \{f: G \xrightarrow{+} G\}$ $\quad R\times R \to R$

ایدآل $I \longleftrightarrow \forall a\in R \quad aI \cup Ia \subseteq I$

R-مدول M. $\quad R\times M \to M$

$(M, +)$ گروه آبلی

$(r_1 r_2) m_1 = r_1 (r_2 m)$

$r(m_1+m_2) = r m_1 + r m_2$

زیرمدول $K \longleftrightarrow rK \subseteq K \quad \forall r\in R$

مدول ساده = فاقد زیرمدول نابدیهی

مثال وقتی R یک میدان

R-مدول ها ، فضای برداری

$A\times B \xrightarrow{*} C$

$(a, b) \longmapsto a*b$

$A \longrightarrow \{f: B\to C\}$

$a \longmapsto l_a: B \to C$

$b \longmapsto a*b$

نظریه نمایش left multiplication map

$H \le G$

$X = \{gH \mid g\in G\}$

$G \xrightarrow{\Theta} S_X$

$a \longrightarrow l_a : X \longrightarrow X$

$gA \longrightarrow agH$

$\ker\Theta \trianglelefteq G$

اگر به عنوان R-مدول

$R \xrightarrow{\Theta} End(R)$

$a \longmapsto l_a$

اگر $1\in R$ Θ یک به یک است

اگر R شامل یک میدان F باشد، l_a تبدیل خطی هستند

اگر V فضای برداری روی F و $\dim_F V = n$

$$End(M_1\oplus M_2)\simeq \begin{pmatrix} End(M_1) & Hom(M_2,M_1)\\ Hom(M_1,M_2) & End(M_2)\end{pmatrix}$$

$$M_1 \xrightarrow{i_1} M_1\oplus M_2 \xrightarrow{T} M_1\oplus M_2 \xrightarrow{\pi_i} M_i$$

$$m_1 \longmapsto (m_1,0) \xrightarrow{T} (x_1,x_2) \longrightarrow x_i$$

$$T \longrightarrow \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12}\\ f_{21} & f_{22}\end{pmatrix}$$

$$f_{ij} = \pi_j T i_i$$

$$\to End(U^{(n)}) = M_n(End(U))$$

$$Hom(M_i,M_j)=0 \Rightarrow End(M_1\oplus M_2) = End(M_1)\times End(M_2)$$

$M_1 = U_1^{(n_1)}$

$M_2 = U_2^{(n_2)}$

$M_1\oplus M_2$

$$\boxed{f: U_1 \xrightarrow{\neq 0} U_2 \Rightarrow U_1\simeq U_2 \quad \ker f = 0,\ Im f = U_2}$$

نیم ساده مدول

$M = U_1\oplus U_2\cdots$

U_i ها مدول ساده هستند

قضیه:

(1) $R = U_1\oplus\cdots\oplus U_n$

U_i ها R-مدول ساده‌اند

(2) $R\simeq M_{n_1}(D_1)\times\cdots\times M_{n_t}(D_t)$, $D_1 = End(U_1)$

D_i ها حلقه تقسیم

این نمایش یکتاست

اثبات (1) ⇒ (2)

$R\simeq U_1^{(n_1)}\oplus\cdots\oplus U_t^{(n_t)}$

$U_i\not\simeq U_j$

لم:

$Hom(M_i,M_j) = \{f: M_i \to M_j\}$

$V\simeq F^{(n)}$

$End(F^{(n)}) \xrightarrow{\simeq} M_n(F)$

$T \longmapsto \begin{pmatrix} T(e_1) & T(e_2) & \cdots \end{pmatrix} = A$

$e_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\ \vdots\end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\\ \vdots\end{pmatrix}$

$T(v) = Av$

ساده بودن ← θ 1-1 است

آیا گروه ساده داریم که یک زیرگروه با اندیس ۳ داشته باشد؟

$|G| = 2\times q$ چطور؟ ۴

$(q\neq 2)$

یکتایی:

$$S = M_n(D) \overset{\theta}{\cong} M_k(F) = T \qquad F, D \text{ حلقه تقسیم}$$

$$\begin{array}{ccc} M_n(D) & & M_k(F) \\ \wr\wr & & \wr\wr \\ \mathrm{End}(D^{(n)}) & & \mathrm{End}(F^k) \end{array}$$

$g : F^k \to F^k$

$g^2 = g \qquad gF^k \leq F^k,$

$gF^k \simeq F^{k'}$

$e_{11}^2 = e_{11}$

$$e_{11} = \begin{pmatrix} 1 & \cdots \\ \vdots & \vdots \\ \cdot & \cdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ & & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ & \text{صفر} & \end{pmatrix}$$

$$D \simeq e_{11} S e_{11} \simeq \theta(e_{11}) T \theta(e_{11}) = gTg \overset{\text{قضیه}}{\cong} \mathrm{End}(gF^k)$$

$$\text{اگر } \theta(e_{11}) = g = g^2$$

$$\simeq \mathrm{End}(F^{k'})$$

$$\simeq M_{k'}(F)$$

$k' = 1$

چون D حلقه تقسیم:

$$D \simeq F \Rightarrow \boxed{M_n(F) \simeq M_k(F)} \to n^2 = k^2 \;\therefore\; \boxed{n = k}$$