

بسم الله الرحمن الرحيم



دانشگاه صنعتی اصفهان

دانشکده علوم ریاضی

نام پروژه:

دیسک پوانکاره روش فشرده سازی پوانکاره

نام دانشجو:

آسیه حیدری

استاد راهنما:

رسول عاشقی حسین آبادی

تابستان ۱۴۰۴

فهرست

۱	مقدمه
۲	پوانکاره و فشردن سازی پوانکاره - لیاپانوف
۳	نمودارهای محلی
۱۲	نقاط تکین نامتناهی
۱۵	فشردن سازی پوانکاره - لیاپانوف
۱۶	فشردن سازی بندیکسون
۱۸	جریان سراسری یک میدان برداری چند جمله ای صفحه ای
۳۴	منابع

در مطالعه سیستم‌های دینامیکی و معادلات دیفرانسیل، درک رفتار جواب‌ها در مجاورت بینهایت از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است. فصل پنجم این پروژه به معرفی و بررسی دو روش کلیدی برای تحلیل چنین رفتارهایی می‌پردازد: فشرده‌سازی پوانکاره و فشرده‌سازی پوانکاره-لیاپانوف. این روش‌ها با تبدیل صفحه‌ی اقلیدسی R^2 به یک فضای فشرده (مانند کره یا دیسک)، امکان مطالعه‌ی نقاط تکین در بینهایت را فراهم می‌کنند. در فشرده‌سازی پوانکاره، با استفاده از تصویر مرکزی از مبدأ، یک میدان برداری چندجمله‌ای به میدانی تحلیلی روی کره تبدیل می‌شود. این تبدیل اگرچه کارآمد است، اما ممکن است در برخی موارد نقاط تکین پیچیده‌ای روی دایره بینهایت ایجاد کند. برای رفع این مشکل، فشرده‌سازی پوانکاره-لیاپانوف معرفی می‌شود که با تعمیم ساختار همگن به شبه-همگن، منجر به ساده‌سازی نقاط تکین در بینهایت می‌گردد. این روش نه تنها نمایش بهتری از رفتار سیستم در بینهایت ارائه می‌دهد، بلکه در رسم نماهای فازی و تحلیل کیفی سیستم‌های دینامیکی بسیار مفید است. در این فصل، علاوه بر تشریح ریاضی این دو روش، به بررسی نقاط تکین نامتناهی، محاسبه‌ی ماتریس ژاکوبین، و تحلیل رفتار محلی آن‌ها پرداخته شده و در نهایت با ارائه مثال‌های کاربردی، مقایسه‌ی بین دو روش انجام می‌گیرد.

پوانکاره و فشرده سازی پوانکاره - لیپانوف

برای مطالعه رفتار مسیرهای یک سامانه دیفرانسیلی صفحه ای در مجاورت بی نهایت می توان از فشرده سازی استفاده کرد. یکی از ساختارهای ممکن مبتنی بر تصویر استریوگرافیک (کنج نگاری) کره روی صفحه است که در آن یک به صفحه افزوده می شود؛ رجوع کنید به بندیکسون. رویکرد بهتر برای بررسی «نقطه در بی نهایت» رفتار مسیرها نزدیک بی نهایت استفاده از کره پوانکاره است که توسط پوانکاره معرفی شد. مزیت آن این است که نقاط تکین (نقاط تعادل) در بی نهایت در امتداد خط استوا کره پخش می شوند و در نتیجه از ماهیتی ساده تر نسبت به نقاط تکین (نقاط تعادل) کره بندیکسون برخوردارند. با این حال، برخی از نقاط تکین (نقاط تعادل) در بی نهایت روی کره پوانکاره ممکن است هنوز پیچیده باشند.

برای بهبود ساختار، کره پوانکاره-لیپانوف را معرفی می کنیم که البته مبتنی بر ساختاری انتزاعی تر از موارد پیشین است. تکینگی ها نیز روی استوا پخش می شوند اما عموماً ساده تر از کره پوانکاره اند. در فشرده سازی پوانکاره-لیپانوف ترجیح می دهیم روی یک نیم کره کار کنیم و آن را دیسک پوانکاره-لیپانوف بنامیم، و به طور مشابه از دیسک پوانکاره صحبت کنیم اگر کره پوانکاره را به یکی از نیم کره هایی که توسط استوا (نمایانگر نقاط در بی نهایت) جدا شده اند محدود کنیم.

۱,۵ نمودارهای محلی

برای رسم نمای فاز یک میدان برداری باید روی صفحه حقیقی کامل R^2 کار کنیم که عملی نیست. اگر توابع تعریف کننده میدان برداری چند جمله‌ای باشند، می‌توانیم از فشردگی پوانکاره استفاده کنیم که به ما می‌گوید چگونه آن را در ناحیه‌ای متناهی رسم کنیم. افزون بر این، این روش مداراتی را که به سمت بی‌نهایت می‌روند یا از بی‌نهایت می‌آیند کنترل می‌کند.

در این فصل از (x_1, x_2) به عنوان مختصات روی صفحه به جای (x, y) استفاده می‌کنیم.

فرض کنید $X = P\partial/\partial x_1 + Q\partial/\partial x_2$ یک میدان برداری چند جمله‌ای باشد (توابع P و Q چند جمله‌ای‌هایی از درجه دلخواه در متغیرهای x_1 و x_2 هستند)، یا به عبارت دیگر:

$$\dot{x}_1 = P(x_1, x_2),$$

$$\dot{x}_2 = Q(x_1, x_2),$$

یادآوری می‌کنیم که درجه X را d می‌نامیم اگر d بیشینه درجات P و Q باشد.

فشردگی پوانکاره به صورت زیر عمل می‌کند. ابتدا فضای R^2 را به صورت صفحه‌ای در R^2 تعریف

می‌کنیم که توسط $(y_1, y_2, y_3) = (x_1, x_2, 1)$ نمایش داده می‌شود. کره $S^2 = \{y \in \mathbb{R}^3 : y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = 1\}$

را در اینجا کره پوانکاره می‌نامیم؛ این کره در نقطه $(0, 0, 1)$ بر صفحه R^2 مماس است. می‌توانیم این کره

را به نیم کره شمالی $H_+ = \{y \in S^2 : y_3 > 0\}$ ، نیم کره جنوبی $H_- = \{y \in S^2 : y_3 < 0\}$ و استوا

$S^1 = \{y \in S^2 : y_3 = 0\}$ تقسیم کنیم. اکنون تصویر میدان برداری X از R^2 به S^2 را از طریق پرتاب‌های

مرکزی $f^+ : \mathbb{R}^2 \rightarrow S^2$ و $f^- : \mathbb{R}^2 \rightarrow S^2$ در نظر می‌گیریم. دقیق‌تر، $f^+(x)$ (به طور متناظر $f^-(x)$)

نقطه تقاطع خط راست گذرنده از مبدأ با خط راست گذرنده از نقطه x است که با نیم کره شمالی (به طور متناظر نیم کره جنوبی) تقاطع دارد. به عبارت دیگر $S^{\pm}$:

$$f^{+}(x) = \left(\frac{x_l}{\Delta(x)}, \frac{x_r}{\Delta(x)}, \frac{1}{\Delta(x)} \right),$$

$$f^{-}(x) = \left(\frac{-x_l}{\Delta(x)}, \frac{-x_r}{\Delta(x)}, \frac{-1}{\Delta(x)} \right),$$

که در آن

$$\Delta(x) = \sqrt{x_l^2 + x_r^2 + 1},$$

به این ترتیب در هر نیم کره میدانهای برداری القا شده‌ای به دست می‌آیند. روشن است که هر میدان برداری القا شده بصورت تحلیلی (analytic) با X هم‌ریخت است. میدان برداری القا شده روی H^{+} را می‌توان به صورت $\bar{X}(y) = Df^{+}(x)X(x)$ و میدان روی H^{-} را به صورت $\bar{X}(y) = Df^{-}(x)X(x)$ با $y = f^{-}(x)$ نوشت. ذکر می‌کنیم که $\bar{X}$ یک میدان برداری روی $S^{\pm} \setminus S^1$ است که در همه نقاط مماس بر $S^{\pm}$ باقی می‌ماند.

توجه می‌کنیم که نقاط بی‌نهایت R^2 (برای هر جهت دو نقطه) به صورت یک به یک متناظر با نقاط استوای $S^{\pm}$ هستند. اکنون می‌خواهیم میدان القا شده $\bar{X}$ را از $S^{\pm} \setminus S^1$ به کل $S^{\pm}$ گسترش دهیم. متأسفانه به طور کلی هنگامی که به S^1 نزدیک می‌شویم X مرزپذیر باقی نمی‌ماند و این مانع گسترش است. با این حال، معلوم می‌شود که اگر میدان برداری را در ضریب $P(x) = x_r^{d-1}$ ضرب کنیم، آنگاه همان‌طور که در لحظه‌ای بررسی خواهیم کرد، امکان گسترش فراهم می‌شود. میدان برداری توسعه یافته روی $S^{\pm}$ را فشرده‌سازی پوانکاره میدان برداری X روی R^2 می‌نامند و آن را با (x) نمایش می‌دهند.

روی هم نیم کره H_+ و H_- این میدان دیگر ضرورتی ندارد که C^0 هم‌ریخت با X باشد، اما همچنان C^0 معادل باقی می‌ماند.

بنابراین این تکنیک در ترسیم نمای فازی کارایی خوبی دارد، اما هنگام انجام محاسبات دقیق باید احتیاط‌هایی را رعایت کرد، مثلاً در محاسبه مقادیر ویژه در تکینگی‌ها و دوره‌های مدارهای بسته.

اکنون ساختار را به تفصیل انجام می‌دهیم. چنان که معمول است در کار با سطوح خمیده برای انجام محاسبات از چارت‌ها استفاده می‌کنیم. برای S^2 از شش نقشه یا چارت موضعی زیر استفاده می‌کنیم که به صورت $U_k = \{y \in S^2 : y_k > 0\}, V_k = \{y \in S^2 : y_k < 0\}$ برای $k=1,2,3$ تعریف می‌شوند. نگاشت‌های محلی متناظر $\phi_k: U_k \rightarrow \mathbb{R}^2$ و $\psi_k: V_k \rightarrow \mathbb{R}^2$ را به صورت $\phi_k(y) = -\psi_k(y) = (y_m / y_k, y_n / y_k)$ برای $m, n \neq k$ و $m < n$ تعریف می‌کنیم. مقدار $z = (u, v)$ یا $\phi_k(y)$ یا $\psi_k(y)$ را برای هر k با (u, v) نمایش می‌دهیم، به طوری که (u, v) بسته به نقشه‌ها یا چارت موضعی مورد نظر نقش‌های متفاوتی خواهند داشت. از نظر هندسی مختصات (u, v) را می‌توان همان‌طور که در شکل ۱،۵ نشان داده شده است نمایش داد. نقاط S^1 در هر چارت دارای $u=0$ هستند.

در ادامه تنها محاسبه دقیق عبارت $P(x)$ را در نقشه یا چارت موضعی U_1 انجام می‌دهیم. داریم

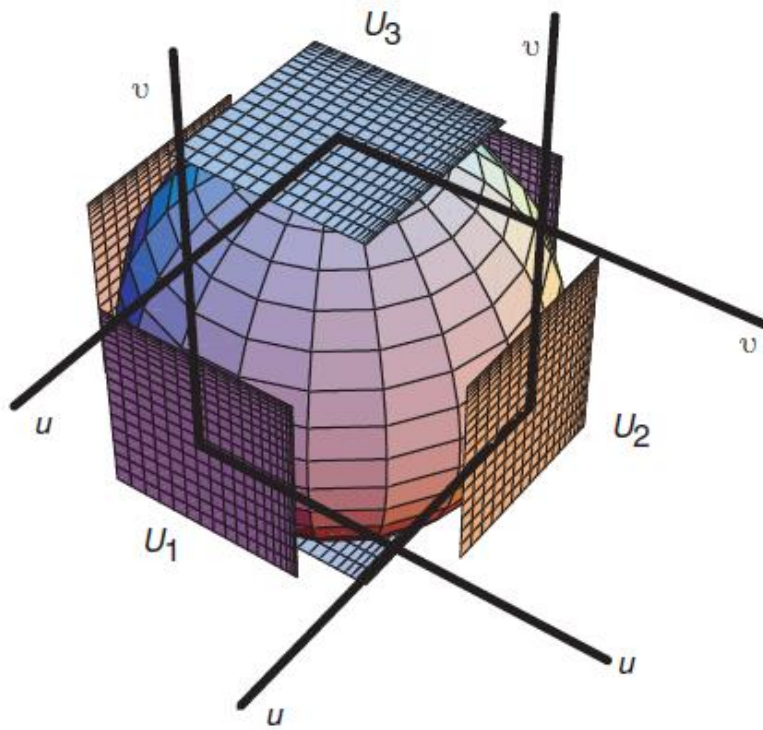
$$X(x) = (p(x_1, x_r)Q(x_1, x_r))$$

سپس $y = f^+(x)$ با $\bar{x}(y) = Df^+(x)X(x)$ و

$$D\phi(y)\bar{x}(y) = D\phi(y) \circ Df^+(x)X(x) = D(\phi \circ f^+)(x)X(x)$$

اجازه دهید $\bar{x}|_{U_r}$ دستگاه تعریف شده به صورت $D\phi(y)\bar{x}(y)$ باشد. از آنجا که

$$(\phi \circ f^+)(x) = \left(\frac{X_v}{X_u}, \frac{1}{X_u} \right) = (u, v),$$



۱-۵ چارت موضعی (U_k, k) و $k=1.2$ برای کره پوانکاره

ما داریم

$$\begin{aligned}\bar{X} | U_1 &= \begin{pmatrix} -\frac{x_r}{x_1} & \frac{1}{x_1} \\ -\frac{1}{x_1} & . \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P(x_r, x_r) \\ Q(x_1, x_r) \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{x_1^r} (-x_r P(x_1, x_r) + Q(x_1, x_r), -P(x_1, x_r)) \\ &= v^r \left(-\frac{u}{v} P\left(\frac{1}{v}, \frac{u}{v}\right) + \frac{1}{v} Q\left(\frac{1}{v}, \frac{u}{v}\right), -P\left(\frac{1}{v}, \frac{u}{v}\right) \right).\end{aligned}$$

حالا

$$P(y) = y_r^{d-1} = \frac{1}{\Delta(x)^{d-1}} = \frac{v^{d-1}}{\Delta(z)^{d-1}} = v^{d-1} m(z)$$

با قرار دادن $m(z) = (1 + u^r + v^r)^{(1-d)/r}$ می توان نوشت:

$$P(\bar{X} | U_1)(z) = v^{d+1} m(z) \left(-\frac{u}{v} P\left(\frac{1}{v}, \frac{u}{v}\right) + \frac{1}{v} Q\left(\frac{1}{v}, \frac{u}{v}\right), -P\left(\frac{1}{v}, \frac{u}{v}\right) \right).$$

برای اثبات اینکه توسعه $P\bar{X}$ به $P(X)$ بر روی کل S^r تعریف شده، توجه می کنیم که گرچه $P\bar{X} | U_1$

هنگام $v=0$ خوب تعریف شده نیست، عبارت $P\bar{X} | U_1$ روی $v=0$ خوب تعریف می شود، چون عامل

ضرب v^{d+1} هر عامل v موجود در مخرج را خنثی می کند. استدلال مشابه برای بقیه چارت ها صادق

است.

برای ساده‌سازی میدان برداری توسعه یافته، تغییر متغیر زمان انجام داده و عامل $m(z)$ را حذف می‌کنیم؛ نتیجه یک میدان برداری روی S^1 است که روی نیم کره‌ها H_+ و H_- با X هم‌مرتبه تحلیلی C^ω - است.

عبارت $P(X)$ در نقشه‌های یا چارت موضعی (U_1, ϕ) به صورت زیر است (فرمول ۲,۵)

$$\dot{u} = v^d \left[-uP\left(\frac{1}{v}, \frac{u}{v}\right) + Q\left(\frac{1}{v}, \frac{u}{v}\right) \right],$$

$$\dot{v} = -v^{d+1}P\left(\frac{1}{v}, \frac{u}{v}\right).$$

در چارت (U_1, ϕ) داریم (فرمول ۳,۵)

$$\dot{u} = v^d \left[P\left(\frac{u}{v}, \frac{1}{v}\right) - uQ\left(\frac{u}{v}, \frac{1}{v}\right) \right],$$

$$\dot{v} = -v^{d+1}Q\left(\frac{u}{v}, \frac{1}{v}\right)$$

و در (U_2, ϕ) ساده می‌شود به (فرمول ۴,۵)

$$\dot{u} = P(u, v)$$

$$\dot{v} = Q(u, v)$$

عبارت $P(X)$ در چارت‌های (V_k, ψ_k) مانند چارت‌های (U_k, ϕ_k) است با ضریب ضربی برابر

$$K = 1.2.3. \dots (-1)^{d-1}.$$

برای مطالعه X در صفحه کامل R^2 ، از جمله رفتار آن نزدیک بی‌نهایت، واضح است که کافی است روی H_+US^1 کار کنیم، که آن را دیسک پوانکاره می‌نامیم. تمام محاسبات را می‌توان در سه چارت $(U_1, \phi), (U_2, \phi)$ و (U_3, ϕ) انجام داد که در این صورت عبارت با فرمول‌های $(2,5)$ ، $(3,5)$ و $(4,5)$ داده شده‌اند.

واضح است که برای به دست آوردن این عبارات نیازی به گذر از ساختار هندسی کامل، آن‌طور که قبلاً ارائه شد، نداریم. عبارات در $(4,5)$ به روشنی هیچ توضیح اضافه‌ای لازم ندارند. برای حصول $(2,5)$ از $(1,5)$ شروع می‌کنیم و مختصات (u, v) را با فرمول‌های زیر معرفی می‌کنیم

$$(x_1, x_2) = \left(\frac{1}{v}, \frac{u}{v} \right).$$

این امر به یک میدان برداری $\bar{X}^u$ منجر می‌شود که آن را در v^{d-1} ضرب می‌کنیم. برای به دست آوردن $(3,5)$ از $(1,5)$ شروع کرده و مختصات (u, v) را به صورت زیر معرفی می‌کنیم

$$(x_1, x_2) = \left(\frac{y}{v}, \frac{1}{v} \right).$$

دوباره میدان برداری محاسبه شده $\bar{X}^u$ را در v^{d-1} ضرب می‌کنیم.

این روش انتزاعی‌تر برای ساختن یک میدان برداری روی یک کره (یا بهتر بگوییم روی نیم کره) به طور مستقیم به وسیله چارت‌ها، نه تنها مناسب‌ترین روش برای محاسبات دقیق است، بلکه به تعمیم (و بهبود) این ساختار که دیسک پوانکاره-لیاپانوف نامیده می‌شود نیز خواهد انجامید، همان‌طور که در بخش ۳,۵ خواهیم دید.

تا هم‌ارزی C^ω ، دو عمل $(5,5)$ و $(6,5)$ را می‌توان در یک ساختار سراسری در بی‌نهایت ترکیب کرد:

$$(x_l, x_r) = \left(\frac{\cos \theta}{v}, \frac{\sin \theta}{v} \right),$$

با گرفتن $\theta \in S^1$ و دوباره ضرب میدان برداری در v^{d-1} اگر این ساختار را پیاده کنیم به دست می آوریم

$$\dot{\theta} = v(\dot{x}_r \cos \theta - \dot{x}_l \sin \theta)$$

$$\dot{v} = -v^r(\dot{x}_l \cos \theta + \dot{x}_r \sin \theta).$$

این ساختار به طور کلی در مواردی که در بی نهایت (روی استوا) $P(X)$ هیچ تکنیکی ای ندارد ترجیح داده می شود، که دلالت بر این دارد که مجموعه نقاط در بی نهایت یک مدار بسته می شود. برای بررسی رفتار $P(X)$ نزدیک آن مدار بسته، مطالعه سراسری یک همسایگی از آن لازم است. هیچ یک از چارت های (U_1, ϕ) یا (U_r, ϕ_r) به تنهایی چنین همسایگی ای را به طور کامل در بر نمی گیرند.

ذکر می کنیم که در هر چارت موضعی، نماینده موضعی $P(X)$ یک میدان برداری چند جمله ای است.

ما نقاط تکین منتهای (به طور متناظر، نقاط تکین نامتنهای) X یا $P(X)$ را آن تکنیکی های $P(X)$ می نامیم که در $S^1 \setminus S^r$ (به طور متناظر، S^1 قرار دارند. توجه می کنیم که اگر $y \in S^1$ یک نقطه تعادل نامتنهای باشد، آنگاه $-y$ نیز یک نقطه تعادل است. از آنجا که رفتار موضعی نزدیک $-y$ ، همان رفتار موضعی نزدیک y است که در $(-1)^{d-1}$ ضرب شده، نتیجه می شود که جهت مدارها هنگامی که درجه زوج است تغییر می کند. برای مثال، اگر d زوج باشد و $y \in S^1$ یک گره پایدار میدان $P(X)$ باشد، آنگاه $-y$ یک گره ناپایدار است. به دلیل این که نقاط تعادل نامتنهای به صورت زوجی از نقاط قطری مقابل ظاهر می شوند، کافی است نیمی از آن ها را مطالعه کنیم، و با استفاده از درجه میدان برداری می توان نیمه دیگر را تعیین کرد.

همان‌طور که قبلاً مشاهده کردیم، منحنی‌های انتگرال S^2 نسبت به مبدأ متقارن‌اند، به طوری که نمایش جریان $P(X)$ تنها در نیم کره شمالی بسته - که دیسک پوانکاره نامیده می‌شود - کافی است. برای رسم این، برای مقاصد عملی، به صورت یک دیسک در صفحه می‌توان نقاط نیم کره شمالی بسته را روی دیسک $\{(y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 \leq 1, x_3 = 0\}$ تصویر کرد. این کار می‌تواند با تصویر هر نقطه کره روی دیسک با استفاده از یک خط راست موازی محور y_3 انجام شود؛ یا می‌توان با استفاده از خانواده‌ای از خطوط راست که از نقطه $(0, 0, y_3)$ با $IF y_3 < 0$ می‌گذرند تصویر گرفت. اگر y_3 مقداری نزدیک به $-\infty$ باشد، نتیجه همان خواهد بود. ولی اگر y_3 نزدیک صفر باشد ممکن است نمایش بهتری از آنچه در نزدیکی بی‌نهایت رخ می‌دهد به دست آید. در انجام این کار، در نواحی نزدیک به مبدأ در صفحه - (x_1, x_2) وضوح را از دست می‌دهیم.

۲,۵ نقاط تکین نامتناهی

ما می‌خواهیم نمای فازی محلی در نقاط تعادل نامتناهی را بررسی کنیم. برای این منظور یک نقطه تعادل نامتناهی $(u, \cdot)$ را انتخاب می‌کنیم و با نگاه کردن به عبارت بخش خطی میدان $P(X)$ شروع می‌کنیم. فرض کنید P_i و Q_i چند جمله‌ای‌های همگن درجه i برای $i = 0, 1, \dots, d$ باشند، $P = P_0 + P_1 + \dots + P_d$ و $Q = Q_0 + Q_1 + \dots + Q_d$. آنگاه $(u, \cdot) \in S^1 \cap (U_1 \cup V_1)$ دقیقاً زمانی یک نقطه تعادل نامتناهی $P(X)$ است که

$$F(u) \equiv Q_d(\cdot, u) - uP_d(\cdot, u) = 0.$$

به طریقی مشابه، $(u, \cdot) \in S^1 \cap (U_r \cup V_r)$ دقیقاً زمانی یک نقطه تعادل نامتناهی $P(X)$ است که

$$G(u) \equiv P_d(u, \cdot) - uQ_d(u, \cdot) = 0.$$

همچنین ژاکوبین میدان برداری $P(X)$ در نقاط $(u, \cdot)$ برابر است با

$$\begin{pmatrix} F'(u) & Q_{d-1}(\cdot, u) - uP_{d-1}(\cdot, u) \\ \cdot & -P_d(\cdot, u) \end{pmatrix}$$

یا

$$\begin{pmatrix} F'(u) & Q_{d-1}(u, \cdot) - uQ_{d-1}(\cdot, u) \\ \cdot & -Q_d(u, \cdot) \end{pmatrix}$$

برای حالت تعلق $(u, \cdot)$ به $(U_1 \cup V_1)$ یا برای حالت تعلق $(u, \cdot)$ به $(U_r \cup V_r)$.

ابتدا توجه می‌کنیم که استوا^۱ کره S^2 می‌تواند به کلی از تکین‌ها تشکیل شده باشد، اما در بیشتر موارد تکینالیه‌ها ایزوله‌اند. ما بحث خود را محدود به تکینالیه‌های ایزوله می‌کنیم.

در میان نقاط تکینی هذلولی در بی‌نهایت تنها گره‌ها و زین‌ها می‌توانند ظاهر شوند. تمامی نقاط تکینی نیمه هذلولی می‌توانند در بی‌نهایت رخ دهند.

از فصل ۲ می‌بینیم که اگر یکی از این تکینگی‌های هذلولی یا نیمه هذلولی در بی‌نهایت یک زین (به معنی توپولوژیک^۲) باشد، آنگاه خط مستقیم $\{v=0\}$ که نمایانگر استوای S^2 است، ناگزیر یک منحنی (مانیفولد^۳) پایدار یا ناپایدار، یا یک منحنی (مانیفولد) مرکز خواهد بود؛ رجوع شود به شکل ۲,۵.

این خاصیت برای تکینگی‌های نیمه هذلولی از نوع گره زینی هم صدق می‌کند. لذا بخش‌های هذلولی آن‌ها می‌توانند به دو طریق مختلف تقسیم شوند که بستگی به ژاکوبین سیستم در چارت‌های U_1 یا U_2 دارد. ژاکوبین^۴ می‌تواند یکی از دو صورت زیر باشد:

$$\begin{pmatrix} \lambda & * \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

یا

$$\begin{pmatrix} 0 & * \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

با $\lambda \neq 0$. در حالت اول می‌گوییم که گره زینی از نوع SN1 است و در حالت دوم از نوع SN2. این دو حالت در شکل ۳,۵ نشان داده شده‌اند. جهت گردش مدارها نیز می‌تواند بالعکس باشد.

^۱equator

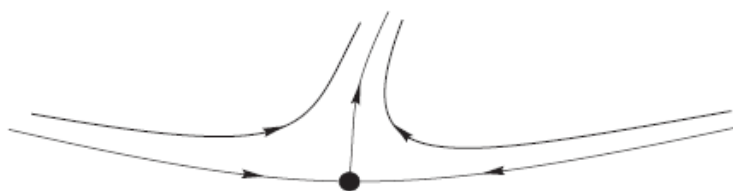
^۲Topological

^۳Manifold

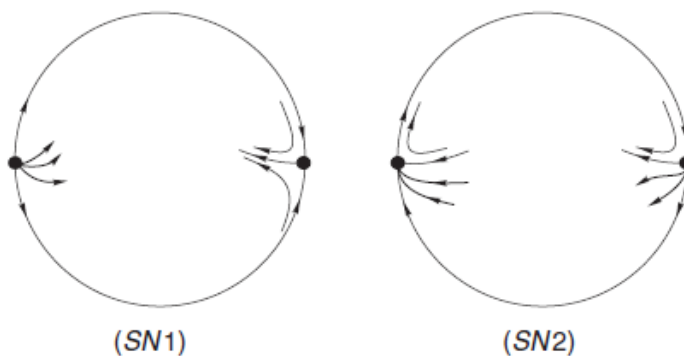
^۴Jacobian

در میان نقاط تکین نیل پتنت در بی نهایت تقریباً همه انواع می توانند ظاهر شوند به استثنای کاسپ^۱، فوکوس^۲ و مرکز.

نقاط نیل پتنت، و نیز تکینگی هایی که قسمت خطی شان صفر است، رفتار در بی نهایت شان بسیار پیچیده تر از تکینگی های هذلولی و تکینگی های ابتدایی است. برای مطالعه آن ها نیاز به عمل انفجار است. لازم نیست برای چنین تکینگی هایی که دو مدار در بی نهایت جداکننده^۳ باشند.



یک زیر هذلولی یا نیمه هذلولی روی استوای کره S^2



گره زینی از نوع SN1 و SN2 روی استوای کره S^2

^۱Cusp

^۲Focus

^۳separatrices

۳,۵ فشرده سازی پوانکاره- لیاپونف

گاهی اوقات تکنیکی‌ها در بی‌نهایت در یک فشرده سازی پوانکاره بسیار پیچیده‌اند، اما این امکان وجود دارد که با کار کردن با آنچه فشرده سازی پوانکاره- لیاپونف نامیده می‌شود آن‌ها را ساده‌تر کنیم. ساختار این فشرده سازی بسیار شبیه به آنچه در (۵,۵) و (۶,۵) یا در (۷,۵) بیان شده است می‌باشد. ما با یک تعمیم از (۷,۵) شروع می‌کنیم، به این معنا که دیگر ساختار را همگن نگه نمی‌داریم، بلکه آن را شبه همگن^۱ می‌کنیم. بنابراین قرار می‌دهیم

$$x_\gamma = \cos \theta / s^\alpha,$$

$$x_\gamma = \sin \theta / s^\delta,$$

برای برخی توان‌های مناسب $(\alpha, \beta \in \mathbb{N} \times \mathbb{N})$ با $\alpha, \beta \geq 1$. اگر به صرفه باشد، حتی می‌توانیم توابع پرئودیک $\cos \theta$ و $\sin \theta$ را با توابع پرئودیک $Cs\theta$ و $Sn\theta$ جایگزین کنیم؛ این توابع، حل‌های یکتای مسئله مقدار اولیه زیر هستند

$$\frac{d}{d\theta} Cs\theta = -Sn^{\gamma\alpha-1}\theta.$$

$$\frac{d}{d\theta} Sn\theta = Cs^{\gamma\beta-1}\theta.$$

$$Cs\bullet = 1,$$

$$Sn\bullet = 0,$$

^۱Quasi-homogeneous

که رابطه $\beta Sn^{\alpha}\theta + \alpha Cs^{\beta}\theta = \alpha$ را ارضا می‌کنند. ممکن است برای سیستمی که در آن فشردگی‌سازی معمول پوانکاره یک نقطه تعادل غیر عنصری در بی‌نهایت دارد، با انتخاب مناسب α و β ، فشردگی‌سازی پوانکاره-لیاپونف تنها نقاط تعادل عنصری در بی‌نهایت داشته باشد، یا حتی اصلاً نقطه تعادلی در بی‌نهایت نداشته باشد. برای محاسبات گاهی باز هم بهتر است در چارتهای متفاوتی کار شود، مشابه (۵,۵) و (۶,۵)، و این کار در بخش ۱,۹ انجام خواهد شد.

۴,۵ فشردگی‌سازی بندیکسون

فرض کنید $X = P\partial/\partial_{x_1} + Q\partial/\partial_{x_2}$ یک میدان برداری چند جمله‌ای باشد (توابع P و Q چند جمله‌ای با بیشینه درجه d). ۲ دستگاه دیفرانسیلی متناظر با آن توسط (۱,۵) داده می‌شود. ساخت فشردگی‌سازی بندیکسون^۱ به صورت زیر است (برای جزئیات بیشتر رجوع کنید به فصل ۱۳ از [۴]).

کره‌ای در R^3 را در نظر می‌گیریم که توسط $y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = 1/4$ تعریف شده و آن را کره بندیکسون می‌نامیم. صفحه- x_1x_2 که روی آن X تعریف شده است را با صفحه مماسی بر کره در نقطه $S = (0, 0, -1/2)$ که با معادله $y_3 = -1/2$ داده می‌شود یکی می‌گیریم. بگذارید نداشت کنج نگاری^۲ از قطب شمال $N = (0, 0, 1/2)$ روی صفحه $y_3 = -1/2$ باشد. بنابراین P_N^{-1} یک میدان برداری القایی X_N را روی $N \setminus S$ تعریف می‌کند. واضح است که بی‌نهایت صفحه $y_3 = -1/2$ توسط P_N^{-1} به قطب شمال N تبدیل می‌شود.

^۱Bendixson

^۲Stereographic

حال می‌خواهیم X_N را به یک میدان برداری روی S^2 بسط دهیم. این بسط فشرده‌سازی بندیکسون نامیده می‌شود و میدان برداری القا شده روی S^2 که قطب شمال را به عنوان یک نقطه تعادل دارد با $b(X)$ نمایش داده می‌شود.

ما از دو نقشه یا چارت موضعی برای بررسی میدان برداری $b(X)$ استفاده می‌کنیم که به ترتیب روی $U_N = S^2 \setminus N$ و $U_S = S^2 \setminus S$ تعریف شده‌اند. نگاشت‌های مختصاتی متناظر عبارتند از $PN: U_N \rightarrow \mathbb{R}^2$ و $PS: U_S \rightarrow \mathbb{R}^2$ ، که در آن PS نگاشت کج نگاری S^2 از قطب جنوب به صفحه $y_r = 1/2$ است.

نگاشت op_N^{-1} از صفحه $y_r = -1/2$ به جز S به صفحه $y_r = 1/2$ به جز N به صورت زیر داده می‌شود.

$$u = \frac{x_l}{x_l^r + x_r^r}, \quad v = \frac{x_r}{x_l^r + x_r^r},$$

که در آن (u, v) مختصات در صفحه $y_r = 1/2$ هستند. بنابراین بی‌نهایت دستگاه $(1, 5)$ به مبدأ دستگاه زیر تبدیل می‌شود.

$$\dot{u} = \frac{1}{(u^r + v^r)^d} \tilde{P}(u, v),$$

$$\dot{v} = \frac{1}{(u^r + v^r)^d} \tilde{Q}(u, v),$$

که در آن $\tilde{P}(u, v) = P(x_l(u, v), x_r(u, v))$ و $\tilde{Q}(u, v) = Q(x_l(u, v), x_r(u, v))$ هستند، و جمله‌های با حداقل مرتبه آن‌ها درجه‌ای لااقل $d+2$ دارند. در نهایت تغییر مقیاس زمانی $dt/dT = (u^r + v^r)^d$ را معرفی می‌کنیم و دستگاه $(9, 5)$ به شکل زیر درمی‌آید

$$\dot{u} = \tilde{P}(u, v),$$

$$\dot{v} = \tilde{Q}(u, v),$$

که در آن $\dot{u} = du/dT$ و $\dot{v} = dv/dT$. از آنجا که $d+2$ کمینه درجات بخش‌های همگن $\tilde{P}(u, v)$ و

$\tilde{Q}(u, v)$ است، روشن است که $(0, 0)$ یک نقطه تعادل برای دستگاه $(10, 5)$ می‌باشد.

۵,۵ جریان سراسری یک میدان برداری چند جمله‌ای صفحه‌ای

ابتدا، نمای فاز روی دیسک پوانکاره دستگاه زیر را تعیین می‌کنیم

$$\dot{x} = x_1$$

$$\dot{y} = -y$$

این دستگاه دارای یک نقطه تعادل متناهی یکتا است، مبدأ، که یک زینی است. بگذارید X میدان برداری

متناظر با دستگاه $(11, 5)$ باشد. آنگاه بیان $P(X)$ در نقشه یا چارت موضعی U_1 به صورت زیر است

$$\dot{u} = -2u$$

$$\dot{v} = -v$$

- بنابراین یک نقطه تعادل یکتا در U_1 داریم، مبدأ، که در بی‌نهایت گره پایدار است. چون درجه X فرد

است، مبدأ V_1 نیز گره پایدار دیگری است.

- عبارت $P(X)$ در نقشه یا چارت موضعی U_2 به صورت:

$$\dot{u} = 2u$$

$$\dot{v} = v$$

است.

بنابراین در مبدأ U_+ یک گره ناپایدار وجود دارد (و همین مطلب برای مبدأ V_+ نیز صادق است).

- اگر نمای فاز دستگاه (۱۱,۵) را روی دیسک پوانکاره بکشیم، شکل ۴,۵ به دست می‌آید. در این بخش

همواره نیم کره شمالی کره پوانکاره را به طور موازی با محور y_+ بر دیسک پوانکاره تصویر می‌کنیم.

جداسازهای یکتای این دستگاه همان جداسازهای زین در مبدأ هستند که در خطوط $x=0$ و

$y=0$ قرار دارند.

- حال دستگاه زیر را بررسی می‌کنیم (معادله ۱۲,۵)

$$\dot{x} = -x - y^2$$

$$\dot{y} = y + x^2$$

این دستگاه همیلتونی است چون می‌توان آن را نوشت به شکل

$$\dot{x} = -\partial H / \partial y$$

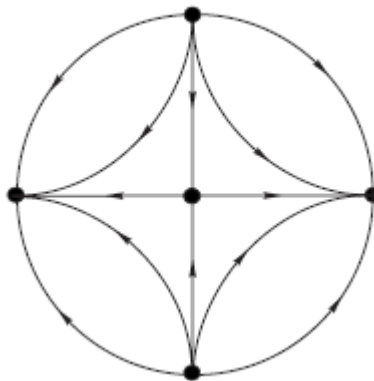
$$\dot{y} = \partial H / \partial x$$

با تابع همیلتونی:

$$H(x, y) = \frac{1}{3}(x^3 + y^3) + xy.$$

- بنابراین H یک در انتگرال اول دستگاه (۱۲,۵) است؛ یعنی H در امتداد جواب‌ها ثابت است، زیرا روی هر حل $(x(t), y(t))$ داریم.

$$\frac{dH}{dt}(x(t), y(t)) = \frac{\partial H}{\partial x}(-x - y^*) + \frac{\partial H}{\partial y}(y + x^*)|_{(x,y)=(x(t),y(t))} = 0.$$



- نتیجه کیفی این است که سطح‌های هم‌ارز H در صفحه فاز منحنی‌های بسته‌ای را می‌سازند که در شکل ۴,۵ نشان داده شده‌اند (منحنی‌های سطح انرژی ثابت).

سیستم (۱۲,۵) دو نقطه تعادل متناهی دارد، یک زین در $(0,0)$ و یک مرکز خطی در $(-1,-1)$ با ویژه مقادیر $\pm\sqrt{3}i$. از آن‌جا که انتگرال اول H در $(-1,-1)$ تعریف شده است، این نقطه یک مرکز است.

حال نقاط تعادل در بی‌نهایت را محاسبه می‌کنیم. فرض کنید X میدان برداری متناظر با (۱۲,۵) باشد.

آنگاه عبارت $P(X)$ در نقشه یا چارت موضعی U_1 برابر است با

$$\dot{u} = 1 + 2uv + u^*,$$

$$\dot{v} = v^* + u^*v.$$

بنابراین در U_1 یک نقطه تعادل یکتا وجود دارد، یعنی $(-1, 0)$ ، که یک گره ناپایدار در بی‌نهایت است. از آن جا که درجه X برابر ۲ است، نقطه قطری مقابل آن در V_1 یک گره پایدار خواهد بود. عبارت $P(X)$ در نقشه یا چارت موضعی U_7 چنین است:

$$\dot{u} = -1 - 2uv - u^2,$$

$$\dot{v} = -v^2 - u^2v.$$

از آن جا که مبدأ در U_7 یک نقطه تعادل نیست، نقاط تکین بی‌نهایت اضافی وجود ندارد.

جداسازهای یکتای سیستم $(12, 5)$ همان جداسازهای زین در $(0, 0)$ هستند. از آن جا که $H(0, 0) = 0$ ، برای یافتن چنین جداسازهایی کافی است منحنی $H(x, y) = 0$ را رسم کنیم. بنابراین نمای فاز سیستم $(12, 5)$ روی دیسک پوانکاره همان‌گونه است که در شکل ۵,۵ نشان داده شده است.

در ادامه، نمای فاز سیستم زیر روی دیسک پوانکاره را تحلیل می‌کنیم:

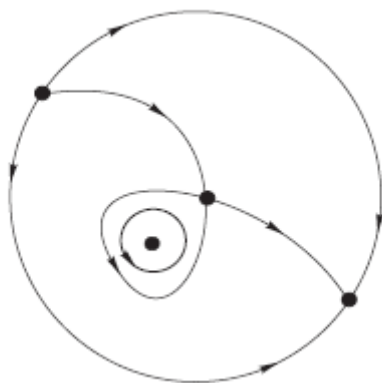
$$\begin{aligned} \dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= -(1+y)(x+y). \end{aligned} \quad (13, 5)$$

این سیستم یک نقطه تعادل متناهی یکتا دارد، مبدأ. از آن جا که ویژه مقادیر مبدأ برابر $(-1 \pm \sqrt{3}i)/2$ هستند، این نقطه یک فوکوس پایدار است.

فرض کنید X میدان برداری متناظر با سیستم $(13, 5)$ باشد. آنگاه عبارت $P(X)$ در نقشه یا چارت موضعی U_1 چنین است.

$$\dot{u} = -u - v - u^2 - uv - u^2v,$$

$$\dot{v} = -uv^2.$$



(شکل ۵,۵ نمای فاز سراسری (۱۲,۵) در دیسک پوانکاره را نشان می‌دهد)

بنابراین در U_1 دو نقطه تعادل در بی‌نهایت وجود دارد، $(0,0)$ و $(-1,0)$ ، که هر دو نیم‌هایپربولیک هستند. یک محاسبه نشان می‌دهد که $(0,0)$ یک زینی نیم‌هایپربولیک و $(-1,0)$ یک گره-زینی نیم‌هایپربولیک است. با بررسی قسمت خطی سیستم در گره-زینی و اطمینان از آنکه فضای ویژه مقدار ویژه غیر صفر بر استوای S^2 عمود است، به راحتی نتیجه می‌گیریم که دو بخش هایپربولیک در نمودار V_1 قرار دارند در حالی که بخش گره‌ای یا پارابولیک در نمودار U_1 است. البته دو تا از سپاراتریس‌های گره-زینی روی استوای کره پوانکاره قرار دارند.

عبارت $P(X)$ در نمودار محلی U_7 به صورت زیر است

$$\begin{aligned}\dot{u} &= u + v + u^2 + uv + u^2v, \\ \dot{v} &= v + uv + v^2 + uv^2.\end{aligned}\tag{۱۴,۵}$$

بنابراین مبدأ در U_7 یک گره هایپربولیک ناپایدار است. از آنجا که درجه X زوج است، نقطه مقابل قطری آن در V_7 یک گره پایدار است.

اینکه خط راست $y = -1$ نسبت به جریان X ناوردا است، به ما می‌گوید که نمای فاز سراسری $P(X)$ روی دیسک پوانکاره همان است که در شکل ۶,۵ توصیف شده است. می‌توان بررسی کرد که مانفولد

مرکزی- ناپایدار گره- زینی بی نهایت به صورت مارپیچی در جهت ساعت حول مرکز $(0,0)$ می پیچد، چون جریان روی نیم خط راست $\{(x,y): x=0, y>0\}$ به سمت راست حرکت می کند.

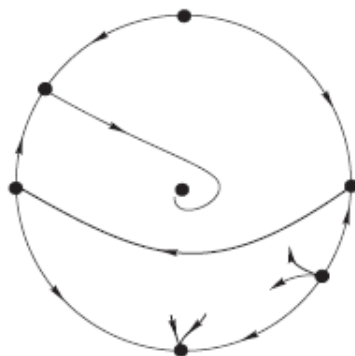
این فصل را با دو مثال به پایان می بریم که در آنها روشن است تکنیکی ها در بی نهایت در یک فشرده سازی پوانکاره- لیاپانوف خوب انتخاب شده می تواند بسیار ساده تر از فشرده سازی پوانکاره باشد.

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= -x^2 - xy.\end{aligned}\tag{۱۵,۵}$$

نماهای فاز سراسری در دیسک پوانکاره

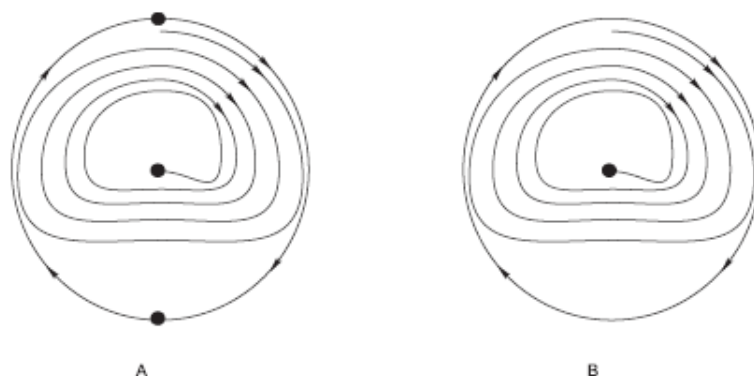
با انجام فشرده سازی معمول پوانکاره برای سیستم های درجه سه، روی دیسک پوانکاره تصویری فازی مانند شکل ۷,۵ a به دست می آید. روی دایره بی نهایت دو تکنیکی واژگون (تباهیده) داریم.

اما اگر از فشرده سازی پوانکاره- لیاپانوف از نوع $(1,2)$ استفاده کنیم، نمای فازی ای مانند شکل ۷,۵ b به دست می آید که در آن دایره بی نهایت یک مدار تناوبی است.

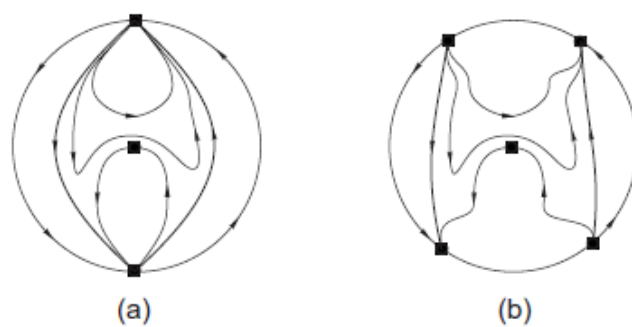


'degenerate

شکل ۶,۵ نمای فاز سراسری در دیسک پوانکاره برای سیستم (۱۳,۵)



شکل ۷,۵ فشرده سازی سیستم (۱۵,۵)



شکل ۸,۵ فشرده سازی سیستم (۱۶,۵)

مثال ۲,۵ سیستم زیر را در نظر می گیریم

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= x^5 - xy.\end{aligned}\tag{۱۶,۵}$$

با انجام فشرده سازی پوانکاره برای میدان های برداری درجه ۵، نمای فاز سراسری در دیسک پوانکاره مانند شکل ۸,۵ به دست می آید. روی دایره بی نهایت دو تکنیکی واژگون (تباهیده) به دست می آوریم.

اگر از فشرده‌سازی پوانکاره-لیاپانوف از نوع (۱,۳) استفاده کنیم، آنگاه یک نمای فازی مانند شکل b۸,۵ خواهیم داشت که روی دایره بی‌نهایت تنها تکین‌های هایپربولیک وجود دارند.

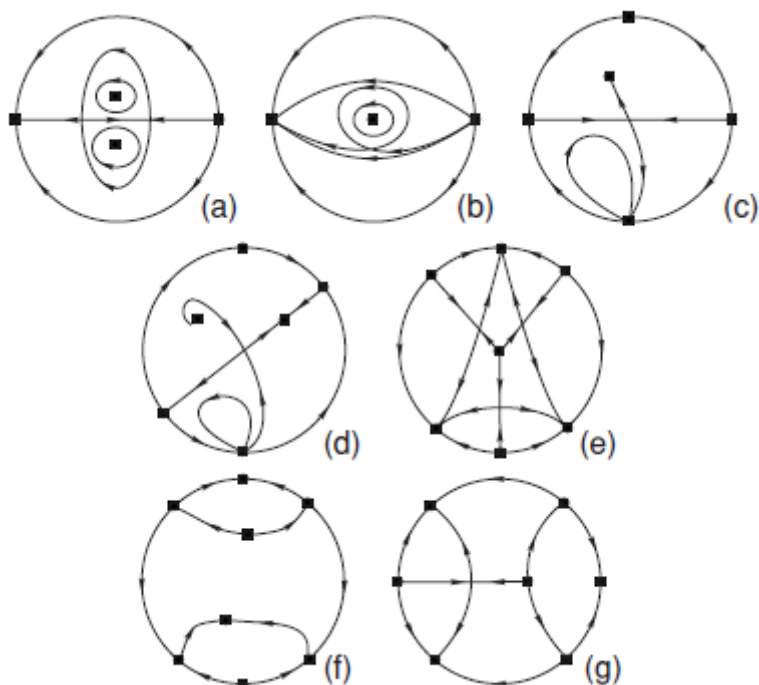
در هر دو مثال آن را به عنوان یک تمرین می‌گذاریم تا محاسبات لازم در بی‌نهایت را مطابق روش‌های توضیحی داده شده در این فصل انجام دهید.

۶,۵ تمرین‌ها

تمرین ۱,۵ تعیین نمای فاز سراسری در دیسک پوانکاره برای دستگاه‌های دیفرانسیل چند جمله‌ای زیر:

(i) $\dot{x} = x, \dot{y} = -y.$

(ii) $\dot{x} = x^2 + y^2 - 1, \dot{y} = \lambda(xy - 1)$



شکل ۹,۵

نمای فازی مربوط به تمرین ۲,۵

ادامه معادله $\dot{x} = -y(1+x) + ax + (a+1)x^2, \dot{y} = x(1+x)$ (iii) با توجه به پارامتر $\alpha \in (0,1)$

تمرین ۲,۵

تعیین کنید کدام یک از تصویرهای فازی سراسری نشان داده شد در شکل ۹,۵ متناظر با دستگاه‌های

درجه دوم زیر هستند (دو مورد از آن‌ها با هیچ یک از دستگاه‌های ارائه شده متناظر نیستند).

$$(i) \quad \dot{x} = -4y + 2xy - 1, \dot{y} = 4y^2 - x^2$$

پاسخ: دستگاه داده شده:

$$\dot{x} = -4y + 2xy - 1 \equiv P(x, y),$$

$$\dot{y} = 4y^2 + x^2 \equiv Q(x, y).$$

گام ۱: تحلیل نقاط تکین (نقاط تعادل) در صفحه منتهای

نقاط تعادل در صفحه منتهای جواب دستگاه معادلات $0 = (y, x)P$ و $0 = (x, y)Q$

حل معادلات:

$$1. \text{ از معادله } 0 = (x, y)Q$$

$$4y^2 + x^2 = 0 \rightarrow X = \pm 2y.$$

$$2. \text{ جایگذاری } y^2 = X \text{ در } 0 = (y, x)P$$

$$-4y + 2(2y)(y) - 1 = 0 \rightarrow -4y + 4y$$

ریشه‌ها:

$$y = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2} \rightarrow y = 2 \quad \text{یا}$$

نقاط تعادل: $(-2, -1)$, $(x, y) = (4, 2)$,

۳. جایگذاری: $y^2 = X$ در $\bullet = (y, x)P$

$$4y + 2(-2y)(y) - 8 = 0 \rightarrow -4y$$

این معادله جواب حقیقی ندارد.

نتیجه: دو نقطه تعادل در صفحه متناهی وجود دارد:

۱. $(4, 2)$

۲. $(-1, -2)$

گام ۲: رفتار موضعی حول نقاط تعادل

با استفاده از ماتریس ژاکوبین رفتار نقاط تعادل را تحلیل می‌کنیم.

$$j(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial p}{\partial x} & \frac{\partial p}{\partial y} \\ \frac{\partial Q}{\partial x} & \frac{\partial Q}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2y & -4+2 \\ -2x & 8y \end{pmatrix}$$

۱. برای نقاط $(2, 4)$

$$j(4, 2) = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ -8 & 16 \end{pmatrix}.$$

معادله مشخصه: $\lambda^2 - \text{tr}(J)\lambda + \det(J) = 0 \rightarrow \lambda^2$

$$\lambda = \frac{20 \pm \sqrt{400 - 384}}{2} = \frac{20 \pm 4}{2} \rightarrow \text{ریشه‌ها:}$$

نتیجه: گره ناپایدار (هر دو ویژه مقدار مثبت)

۲. برای نقاط $(-1, -2)$

$$J(-2, -1) = \begin{pmatrix} -2 & -8 \\ 4 & -8 \end{pmatrix}$$

معادله مشخصه: $\lambda^2 + 10\lambda + 48 = 0$

$$\lambda = \frac{-10 \pm \sqrt{100 - 192}}{2} = \frac{-10 \pm \sqrt{-92}}{2} \rightarrow \text{ریشه‌ها:}$$

نتیجه: فکوس پایدار (بخش حقیقی منفی)

گام سوم: تحلیل نقاط تعادل در بی‌نهایت با فشردن سازی پوانکاره

برای مطالعه رفتار سیستم در بی‌نهایت از فشردن سازی پوانکاره استفاده می‌کنیم. درجه سیستم $d = 2$ است.

نقشه U_1 :

تبدیل مختصات:

$$(x, y) = \left(\frac{1}{v}, \frac{u}{v} \right), v > 0$$

میدان برداری تبدیل شده:

$$\dot{u} = u^r \left[-uP\left(\frac{1}{v}, \frac{u}{v}\right) + Q\left(\frac{1}{v}, \frac{u}{v}\right) \right],$$

$$\dot{u} = u^r P\left(\frac{1}{v}, \frac{u}{v}\right),$$

محاسبات:

$$P\left(\frac{1}{v}, \frac{u}{v}\right) = -r\left(\frac{u}{v}\right) + r\left(\frac{1}{v}\right)\left(\frac{u}{v}\right) - \lambda:$$

$$Q\left(\frac{1}{v}, \frac{u}{v}\right) = r\left(\frac{u}{v}\right)^r - \left(\frac{1}{v}\right)^r = \frac{ru^r - 1}{v^r}$$

برای $v = 0$ (بی نهایت):

$$\dot{u} = ru^r - 1 \quad \text{و} \quad v = -ruv$$

نقاط تعادل در $v = 0$:

$$ru^r - 1 = 0 \rightarrow u = \pm \frac{1}{\sqrt{r}}$$

نقاط تکین در U_1

$$\left(\frac{1}{\sqrt{r}}, 0\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{r}}, 0\right)$$

نقشه U_r :

تبدیل مختصات:

$$(x, y) = \left(\frac{u}{v}, \frac{1}{v} \right), \quad v > 0.$$

میدان برداری تبدیل شده:

$$\dot{u} = u^r \left[P\left(\frac{u}{v}, \frac{1}{v}\right) - u Q\left(\frac{u}{v}, \frac{1}{v}\right) \right]$$

$$\dot{u} = u^r Q\left(\frac{u}{v}, \frac{1}{v}\right).$$

محاسبات

$$P\left(\frac{u}{v}, \frac{1}{v}\right) = -\mathfrak{F}\left(\frac{1}{v}\right) + \mathfrak{r}\left(\frac{u}{v}\right)\left(\frac{1}{v}\right) - \mathfrak{A}:$$

$$Q\left(\frac{u}{v}, \frac{1}{v}\right) = \mathfrak{F}\left(\frac{1}{v}\right)^r - \left(\frac{u}{v}\right)^r = \frac{\mathfrak{F}u^r - u^r}{v^r}$$

برای $v = 0$

$$\dot{u} = u^r - \mathfrak{r}u \quad \text{و} \quad \dot{u} = -u(\mathfrak{F} - u^r)$$

نقاط تعادل در $v = 0$

$$u^r - \mathfrak{r}u = 0 \quad u(u^r - \mathfrak{r}) = 0 \rightarrow u = 1$$

نقاط تکین در U_r :

$$(\cdot, \cdot), \quad (\sqrt{\mathfrak{r}}, \cdot) \quad (-\sqrt{\mathfrak{r}}, \cdot)$$

نقشه‌های V_1 و V_2

این نقشه‌ها مشابه U_1 و U_2 هستند اما برای $v=0$ نقاط تکین یکسانند.

گام چهارم: جمع‌بندی نقاط تکین در بی‌نهایت

در U_1 دو نقطه $\pm\sqrt{2}, 0$

در U_2 : سه نقطه $(-\sqrt{2}, 0)$ $(\sqrt{2}, 0)$ $(0, 0)$

در V_1 و V_2 : نقاط مشابه با $v < 0$

گام پنجم: تحلیل رفتار نقاط تکین در بی‌نهایت

برای تعیین نوع نقاط تکین ماتریس ژاکوبین سیستم تبدیل شده را محاسبه می‌کنیم.

مثال برای نقطه: $\frac{1}{\sqrt{2}}, 0$ در U_1

$$J = \begin{pmatrix} 4u & 0 \\ -2v & -2u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & -\frac{2}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

ویژه مقادیر:

$$\lambda_1 = \frac{4}{\sqrt{2}} > 0 \quad \lambda_2 = -\frac{2}{\sqrt{2}} < 0$$

نتیجه: نقطه زینی

$$(ii) \dot{x} = 2x - 2xy, \dot{y} = 2y - x^2 + y^2$$

$$(iii) \dot{x} = -x^r - y^r + 1, \dot{y} = 2x$$

$$(iv) \dot{x} = -x^r - y^r + 1, \dot{y} = 2xy$$

$$(v) \dot{x} = x^r - y^r - 1, \dot{y} = 2y$$

تمرین ۳,۵

یک دستگاه دیفرانسیل درجه دوم همگون را در نظر بگیرید

$$\dot{x} = ax^r + bxy + cy^r$$

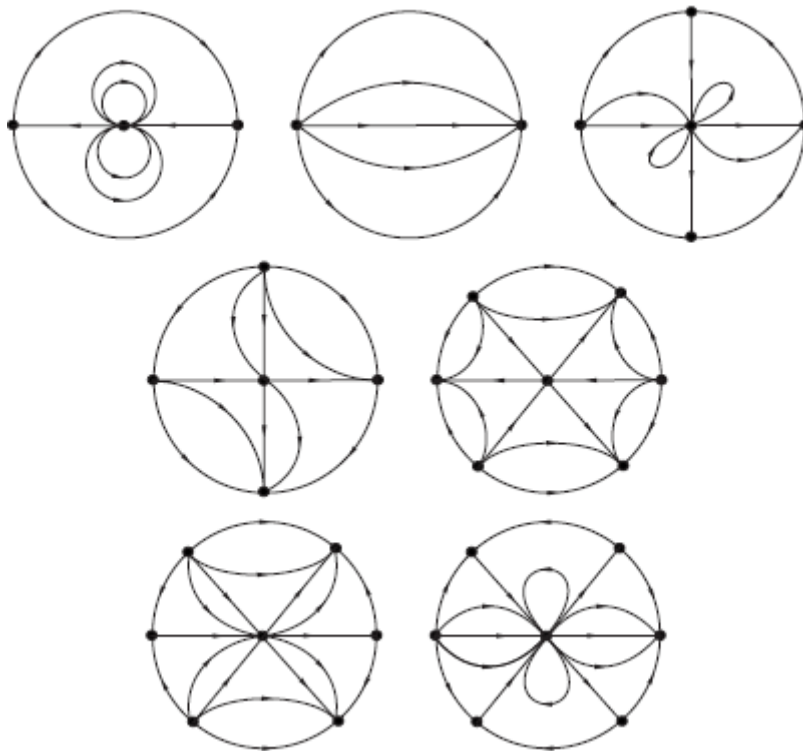
$$\dot{y} = dx^r + cxy + fy^r$$

با فرض اینکه نقطه تعادلی در مبدأ منفرد و در نتیجه یکتا باشد، نشان دهید که نمای فازی روی دیسک پوانکاره باید یکی از هفت نمای فازی داده شده در شکل ۱۰,۵ باشد.

۷,۵ ملاحظات کتاب نامه ای

برای اطلاعات بیشتر درباره فشرده سازی پوانکاره مراجعه کنید به کتاب اندرونف، لئونوویچ، گوردون و

مایر [۴]، کتاب سوتومايور [۱۵۱] و مقاله گونزالس [۷۶].



شکل ۱۰,۵ تصاویر فاز سیستم‌های همگن درجه دو

استفاده از یک جمع و جور سازی کوآزی همگن از میدان‌های برداری چند جمله‌ای صفحه‌ای و نام مرتبط جمع و جور سازی پوانکاره- لیاپونوف در مقالات دومورتیه در پایان دهه هشتاد میلادی معرفی شد. الهام از روش به شدت مرتبط انفجار کوآزی همگن تکنیک‌ها گرفته شده است که در فصل ۳ ارائه شده است. به عنوان یکی از کاربردها در میان دیگران، مطالعه‌ای نظام‌مند با استفاده از این تکنیک بر روی تمام معادلات لی‌نارد چند جمله‌ای در حوالی بی‌نهایت انجام شده است.

- 1- J. Sijbrand. Properties of center manifolds. Trans. Am. Math. Soc. 289:431-469, 1985.
- 2- M.F. Singer. Liouvillian first integrals of differential equations. Trans. Am. Math. Soc. 333:673-688, 1992.
- 3- J. Sotomayor. Curves definides per equações diferenciais no plano. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, 1979.
- 4- J. Sotomayor. Lições de equações diferenciais ordinárias, volume 11 of [Euclid Project. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, 1979.
- 5- S. Sternberg. On the structure of local homeomorphisms of euclidean nspace. ii. Am. J. Math. 80:623-631, 1958.
- 6- D. Stowe. Linearization in two-dimensions. J. Differ. Equat. 63:183-226, 1986 .
- 7- R. Sverdlove. Inverse problems for dynamical systems. J. Differ. Equat. 42:72-105, 1981.
- 8- F. Takens. Normal forms for certain singularities of vector fields. Ann. Inst. Fourier (Grenoble), 23:163-195, 1973.
- 9- J. Torregrosa. Punts singulars i òrbites periòdiques per a camps vectorials. PhD thesis, Universitat Autònoma de Barcelona, Barcelona, 1998.
- 10- R.T. Valeeva. Construction of a differential equation whith given limit cyclesand critical points. Volz Math. Sb., 5:83-85, 1966. (in Russian.
- 11- van den Essen. Reduction of singularities of the differential equation $Ady = Bdx$. Équations différentielles et systèmes de Pfaff dans le champ complexe (Sem., Inst. Rech. Math. Avancé, Strasbourg, 1975), volume 712 of Lecture Notes in Math., pages 44-59. Springer, Berlin Heidelberg New York, 1979 .
- 12- van der Pol. On relaxation-oscillations. Philos. Mag. 2:978-992, 1926 .
- 13- S.J. van Strien. Center manifolds are not C. Math. Z. 166:143-145, 1979 .

14- Vanderbauwhede. Centre manifolds, normal forms and elementary bifurcations. Dynamics reported, 2:89-169, 1989. Dynam. Report. Ser. Dynam. Syst. Appl. 2, Wiley, Chichester.

15- J.A. Weil. Constant et polynômes de Darboux en algèbre différentielle: applications aux systèmes différentiels linéaires. PhD thesis, École Polytechnique ,1995