

شبه‌هندسه و حدس شانوئل

نگاهی وحدت‌بخش به مفاهیم بعد و استقلال

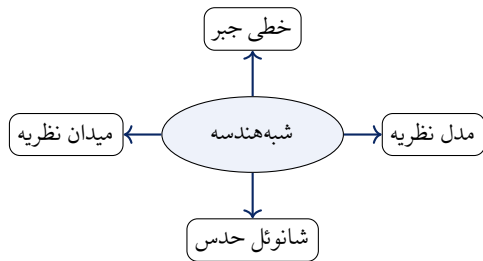
امیر محبی

دانشگاه صنعتی اصفهان

دانشکده علوم ریاضی

استاد راهنما: دکتر محسن خانی

تاریخ ارائه: _____



۱. مقدمه و انگیزه
۲. استقلال و بعد در جبر خطی
۳. استقلال و بعد در نظریه‌ی میدان‌ها
۴. شبیه‌هندسه: چارچوبی یکپارچه
۵. عملگر بستار جبری
۶. کاربردها در نظریه‌ی مدل
۷. حدس شانوئل

- مفاهیم **بعد** و **استقلال** در شاخه‌های مختلف ریاضیات ظاهر می‌شوند:
- در فضاها: برداری: استقلال خطی، بعد، پایه.
- در نظریه‌ی میدان‌ها: استقلال جبری، درجه‌ی تعالی، پایه‌ی متعالی.
- در نظریه‌ی مدل: استقلال و بعد در یک ساختار.

پرسش

آیا می‌توان این مفاهیم را در چارچوبی **یکپارچه** و **مستقل از ماهیت عناصر** تعریف و مطالعه کرد؟

- پاسخ این پرسش، ما را به مفهوم **شبه‌هندسه** می‌رساند.
- شبه‌هندسه = مجموعه‌ای X به همراه عملگر بستار cl که در آن خاصیت تبادل برقرار است.
- با داشتن خاصیت تبادل:
 - وجود پایه تضمین می‌شود.
 - یکتایی اندازه‌ی پایه‌ها تضمین می‌شود.
 - بعد به‌طور یکتا تعریف‌پذیر می‌شود.
- در این پروژه نشان می‌دهیم که ساختارهایی مانند فضاها، برداری، میدان‌های بسته‌ی جبری و میدان‌های بسته‌ی حقیقی همگی نمونه‌هایی از شبه‌هندسه هستند.

تعریف. مجموعه‌ی S از بردارهای K -فضای برداری V را **مستقل خطی** گوییم هرگاه برای هر n بردار $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in S$ و اسکالرهای $c_1, \dots, c_n \in K$:

$$c_1\alpha_1 + \dots + c_n\alpha_n = \mathbf{0} \implies c_1 = \dots = c_n = \mathbf{0}.$$

مشاهده‌ی کلیدی

اگر S مستقل خطی باشد و $\alpha \notin \langle S \rangle$ ، آنگاه $S \cup \{\alpha\}$ نیز مستقل خطی است.

تعریف. مجموعه‌ی $S \subset V$ را یک **پایه** برای V گوئیم هرگاه هم مولد V باشد و هم مستقل خطی.

قضیه (وجود پایه). فرض کنید I مجموعه‌ای مستقل خطی و S مجموعه‌ای مولد برای V باشد که $I \subset S$. در این صورت پایه‌ای چون B برای V وجود دارد که:

$$I \subset B \subset S.$$

ایده‌ی اثبات

با لم زرن روی خانواده‌ی مجموعه‌های مستقل خطی شامل I و زیرمجموعه‌ی S ، عنصر ماکسیمال B را می‌یابیم. ماکسیمال بودن B ، مولد بودن آن را نتیجه می‌دهد.

قضیه. فرض کنید V فضای برداری، $I = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ مستقل خطی و $B = \{\beta_1, \dots, \beta_m\}$ مولد باشد. در این صورت $n \leq m$.

نتیجه. اندازه‌ی هر دو پایه از یک فضای برداری برابر است.

تعریف. اندازه‌ی پایه‌ی V را **بعد** V می‌نامیم.

ایده‌ی اثبات

فرایند تبادل گام‌به‌گام بین بردارهای I و B : در هر گام، یک β_i را با یک α_j جایگزین می‌کنیم. خاصیت تبادل، هم‌زمان مولد بودن سمت چپ و مستقل بودن سمت راست را حفظ می‌کند.

تعریف. فرض کنید K توسیع میدانی از F و $S \subset K$. گوییم S **مستقل جبری** است هرگاه برای هر $t_1, \dots, t_n \in S$ و هر چندجمله‌ای ناصفر $f \in F[x_1, \dots, x_n]$:

$$f(t_1, \dots, t_n) \neq 0.$$

تعریف. S را **پایه‌ی متعالی** برای K/F گوییم هرگاه S مستقل جبری بوده و K روی $F(S)$ جبری باشد.

تعریف. اندازه‌ی پایه‌ی متعالی را **درجه‌ی متعالی** K روی F می‌نامیم.

قضیه (وجود پایه‌ی متعالی). اگر $S \subset K$ مستقل جبری و $K/F(T)$ جبری باشد، آنگاه X با $S \subset X \subset T$ وجود دارد که پایه‌ی متعالی K/F است.

قضیه (یکتایی اندازه). اگر S مولد متعالی و T مستقل جبری با $S \subset T$ باشد، آنگاه $|T| \leq |S|$. به‌ویژه اندازه‌ی هر دو پایه‌ی متعالی برابر است.

نکته

ساختار اثبات‌ها **کاملاً مشابه** جبر خطی است: جانشینی گام‌به‌گام + لم زرن.

تعریف. میدان F **بسته‌ی جبری** است هرگاه هیچ توسیع جبری سره‌ای نداشته باشد.

قضیه. دو میدان بسته‌ی جبری یکرخت هستند اگر و تنها اگر مشخصه و درجه‌ی تعالی یکسان باشند.

تعریف. میدان K **بسته‌ی حقیقی** است هرگاه حقیقی باشد (یعنی $\Sigma K^2 \not\subseteq -1$) و هیچ توسیع جبری سره‌ای حقیقی نباشد.

قضیه (معادل‌های بسته‌ی حقیقی). برای میدان F ، موارد زیر معادل‌اند:

۱. F بسته‌ی حقیقی است.
۲. هر عنصر مثبت ریشه‌ی دوم دارد و هر چندجمله‌ای با درجه‌ی فرد ریشه دارد.
۳. $F(i)$ بسته‌ی جبری است.

قضیه (قضیه‌ی اشتورم). فرض کنید R میدان بسته‌ی حقیقی، $f \in R[x]$ و $a < b$ که هیچ‌کدام ریشه‌ی f نباشند. در این صورت تعداد ریشه‌های متمایز f در (a, b) برابر است با:

$$v(f, \cdot, a) - v(f, \cdot, b)$$

که v تعداد تغییر علامت در دنباله‌ی اشتورم است.

قضیه. هر میدان مرتب $(K, \leq)$ دارای **بستر حقیقی** است و این بستر تا یکرختی یکتاست.

تعریف. فرض کنید X مجموعه‌ای و $\text{cl} : \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}(X)$ عملگری باشد. دوتایی (X, cl) را **شبه‌هندسه** گوئیم هرگاه برای هر $A, B \subset X$ و $a, b \in X$:

۱. (بازتابی) $A \subset \text{cl}(A)$.
۲. (تعدی) $A \subset B \Rightarrow \text{cl}(A) \subset \text{cl}(B)$.
۳. (مشخصه‌ی متناهی) $\text{cl}(A) = \bigcup_{A' \subset_{\text{fin}} A} \text{cl}(A')$.
۴. (تبادل) اگر $a \in \text{cl}(A, b) \setminus \text{cl}(A)$ ، آنگاه $b \in \text{cl}(A, a)$.

چرا خاصیت تبادل مهم است؟

خاصیت تبادل، همان چیزی است که **وجود پایه و یکتایی بعد** را تضمین می‌کند.

تعریف. $A \subset X$ **مستقل** است هرگاه برای هر $a \in A$: $a \notin \text{cl}(A \setminus \{a\})$.

تعریف. B **پایه** برای Y است هرگاه B مستقل بوده و $Y \subset \text{cl}(B)$.

لم (گسترش پایه). اگر $A \subset Y$ مستقل و $A \subset B \subset Y$ مولد باشد، آنگاه پایه‌ای چون S با $A \subset S \subset B$ برای Y وجود دارد.

لم (یکتایی بعد). اگر B و B' دو پایه برای Y باشند، آنگاه $|B| = |B'|$.

تعریف. شبه‌هندسه‌ی (X, cl) را **پیمانه‌ای** گوئیم هرگاه برای هر دو مجموعه‌ی بسته‌ی A, B :

$$\dim(A \cup B) = \dim(A) + \dim(B) - \dim(A \cap B).$$

قضیه (معادل‌های پیمانه‌ای بودن). برای شبه‌هندسه‌ی (X, cl) موارد زیر معادل‌اند:

۱. (X, cl) پیمانه‌ای است.
۲. اگر A بسته و ناتهی و $x \in \text{cl}(A, b)$ ، آنگاه $a \in A$ وجود دارد که $x \in \text{cl}(a, b)$.
۳. اگر A, B بسته و ناتهی باشند، عناصر $a \in A$ و $b \in B$ وجود دارند که $x \in \text{cl}(a, b)$.

نکته. پیمانه‌ای بودن، امکان تجزیه‌ی بعد را به مؤلفه‌های ساده‌تر فراهم می‌کند.

تعریف. فرض کنید M یک $\mathcal{L}$ -ساختار باشد.

- $\mathcal{L}_A$ -فرمول $\varphi(x)$ را **جبری** گوئیم هرگاه $\varphi(M)$ متناهی باشد.
- $b \in M$ **جبری روی A** است هرگاه فرمول جبری $\varphi(x)$ با پارامترهای A وجود داشته باشد که $M \models \varphi(b)$.
- بستار جبری A ، مجموعه‌ی همه‌ی عناصر جبری روی A است و با $\text{acl}(A)$ نشان داده می‌شود.

لم. عملگر acl سه خاصیت اول شبه‌هندسه (بازتابی، تعدی، مشخصه‌ی متناهی) را همیشه دارد.

پرسش کلیدی

چه زمانی acl خاصیت تبادل دارد؟

تعریف. مجموعه‌ی تعریف‌پذیر نامتناهی D را **قویاً کمینه** گوئیم هرگاه در هر توسیع مقدماتی، هر زیرمجموعه‌ی تعریف‌پذیر از آن متناهی یا هم‌متناهی باشد.

قضیه (قضیه‌ی محوری). اگر $D \subset M$ مجموعه‌ای قویاً کمینه باشد، آنگاه (D, acl) یک **شبه‌هندسه** است؛ به‌ویژه خاصیت تبادل برقرار است.

ایده‌ی اثبات

با استفاده از درجه‌ی فرمول (تعداد جواب‌ها) و یک استدلال شمارشی: فرض خلف می‌کنیم $b \notin \text{acl}(A, a)$ و از قویاً کمینه بودن D به تناقض می‌رسیم.

تعریف. ساختار $(M, <, \dots)$ را **کمینه‌ی ترتیبی** گوئیم هرگاه هر زیرمجموعه‌ی تعریف‌پذیر از M ، اجتماع‌ی متناهی از بازه‌ها و نقطه‌ها باشد.

قضیه. اگر M یک مجموعه‌ی کمینه‌ی ترتیبی باشد، آنگاه (M, acl) یک شبه‌هندسه است.

نکته

هر دو دسته‌ی «قویاً کمینه» و «کمینه‌ی ترتیبی»، خاصیت تبادل را برای acl نتیجه می‌دهند؛ اما با دو مکانیزم متفاوت.

قضیه (حذف سور). نظریه‌ی K - فضاهای برداری دارای **حذف سور** است.

قضیه. اگر V یک K - فضای برداری باشد، برای هر $A \subset V$:

$$\text{acl}(A) = \langle A \rangle.$$

نتیجه. هر K - فضای برداری به همراه عملگر acl یک شبه‌هندسه است، و بعد آن از لحاظ شبه‌هندسه برابر با بعد جبر خطی است.

نتیجه

بعد فضای برداری، صرفاً یک ویژگی جبر خطی نیست؛ بلکه یک ویژگی منطقی است که از ساختار عملگر بستار ناشی می‌شود.

قضیه (حذف سور). نظریه‌ی میدان‌های بسته‌ی جبری با مشخصه‌ی p ، دارای حذف سور است.

قضیه. اگر K میدان بسته‌ی جبری و $A \subset K$ ، آنگاه:

$$\text{acl}(A) = \overline{A} \quad (A \text{ بستار جبری کلاسیک}).$$

نتیجه. هر میدان بسته‌ی جبری K به همراه acl ، یک شبه‌هندسه است و:

$$\dim_{\text{acl}}(A) = \text{trd}(A).$$

قضیه (حذف سور در زبان مرتب). نظریه‌ی میدان‌های بسته‌ی حقیقی در زبان $\mathcal{L}_{or}$ دارای حذف سور است.

نتیجه. اگر R میدان بسته‌ی حقیقی و $A \subset R$ ، آنگاه A اجتماعی از بازه‌ها و نقطه‌ها است.

نتیجه. (R, acl) یک شبه‌هندسه است و برای هر $A \subset R$:

$$\text{acl}(A) = A_{\text{alg}}, \quad \dim_{\text{acl}}(A) = \text{trd}(A).$$

ابزار اثبات

ابزار اصلی: **الگوریتم اشتورم** و ارتباط آن با علامت چندجمله‌ای‌ها در نقاط مختلف.

حذف سور	$\dim_{\text{acl}}(A)$	$\text{acl}(A)$	ساختار
✓	$\dim_K$	$\langle A \rangle$	K - فضای برداری
✓	$\text{trd}(A)$	$\overline{A}$	میدان بسته جبری
✓	$\text{trd}(A)$	A_{alg}	میدان بسته حقیقی

پیام اصلی

سه ساختار ظاهراً متفاوت، همگی نمونه‌هایی از یک ساختار واحد به نام **شبه هندسه** هستند. این یکپارچگی، نتیجه‌ی مستقیم حذف سور + خاصیت تبادل است.

قضیه (لیندمن-وایراشتراس - صورت اول). اگر $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ اعداد جبری متمایز روی $\mathbb{Q}$ باشند، آنگاه $e^{\alpha_1}, \dots, e^{\alpha_m}$ روی $\mathbb{Q}$ مستقل خطی اند.

قضیه (لیندمن-وایراشتراس - صورت اصلی). اگر $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ روی $\mathbb{Q}$ جبری و مستقل خطی باشند، آنگاه $e^{\alpha_1}, \dots, e^{\alpha_m}$ روی $\mathbb{Q}$ مستقل جبری هستند.

ایده‌ی اثبات (طرح کلی)

- ساخت چند جمله‌ای f با توان‌های بزرگ (Hermite).
- نشان دادن $F(\gamma_j) \mid p$ و $F(\gamma_j) \nmid p$ برای p اول به اندازه‌ی کافی بزرگ.
- رسیدن به تناقض بین کران پایین ۱ و کران بالای میل‌کننده به صفر.

نتیجه. اعداد π و e روی $\mathbb{Q}$ متعالی هستند.

ایده‌ی اثبات.

- اگر e جبری باشد، $e^0, e^1, \dots, e^n$ وابسته‌ی خطی روی $\mathbb{Q}$ می‌شوند؛ اما $0, 1, \dots, n$ متمایز و جبری‌اند $\square$ تناقض با LW.
- اگر π جبری باشد، $i\pi$ جبری است؛ پس $e^{i\pi} = -1$ و $e^0 = 1$ باید مستقل خطی باشند $\square$ تناقض.

گام بعدی

درجه‌ی تعالی میدان $\mathbb{Q}(\pi, e)$ روی $\mathbb{Q}$ چقدر است؟

حدس شانوئل (Schanuel's Conjecture)

اگر $z_1, \dots, z_n$ اعداد مختلط و روی $\mathbb{Q}$ مستقل خطی باشند، آنگاه:

$$\text{trd}_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}(z_1, \dots, z_n, e^{z_1}, \dots, e^{z_n}) \geq n.$$

- این حدس، تعمیم طبیعی قضیه‌ی لیندمن-وایراشتراس به اعداد مختلط دلخواه است.
- همچنان یکی از مسائل باز مهم در نظریه‌ی جبری اعداد محسوب می‌شود.

- اگر حدس شانوئل درست باشد، به‌ویژه نتیجه می‌دهیم:

$$\text{trd}_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}(\pi, e) \geq 2.$$

- یعنی π و e **مستقل جبری** هستند (نه فقط هر کدام متعالی).
- این نتیجه‌ای است که تاکنون **بدون فرض حدس** قابل اثبات نیست.
- حدس شانوئل، رابطه‌ی تابع نمایی و استقلال جبری را به‌طور عمیق به هم پیوند می‌زند.

ارتباط با پروژه

حدس شانوئل نمونه‌ای است از اینکه مفاهیم *بعد و استقلال* — همان‌طور که در شبه‌هندسه فرمول‌بندی شدند — در نظریه‌ی اعداد نیز نقش محوری دارند.

- مشاهده کردیم که **استقلال** و **بعد** مفاهیمی هستند که در جبر خطی، نظریه‌ی میدان و نظریه‌ی مدل ظاهر می‌شوند.
- چارچوب **شبه‌هندسه** به ما امکان می‌دهد این مفاهیم را به‌طور یکپارچه تعریف کنیم.
- خاصیت تبادل، **عنصر کلیدی است که وجود پایه و یکتایی بعد را تضمین می‌کند.**
- عملگر بستار جبری acl :
 - در فضاهاى بردارى: بستار خطی.
 - در میدان‌های بسته‌ی جبری: بستار جبری کلاسیک.
 - در میدان‌های بسته‌ی حقیقی: بستار حقیقی.
- حدس شانوئل، **نمونه‌ای از کاربرد این مفاهیم در نظریه‌ی جبری اعداد است.**

پیام نهایی

با انتخاب چارچوبی مناسب، می‌توان مفاهیم بنیادینی چون «بعد» و «استقلال» را در گستره‌ی وسیعی از ساختارها به‌طور یکسان تعریف و مطالعه کرد.

- P. Morandi, *Field and Galois Theory*.
- K. Hoffman, R. Kunze, *Linear Algebra*.
- D. Marker, *Model Theory: An Introduction*.
- J. Bochnak, M. Coste, M.-F. Roy, *Real Algebraic Geometry*.
- کلاس‌های فیلم برداری‌شده‌ی هندسه‌ی جبری حقیقی — دکتر محسن خانی.

با تشکر از توجه شما

پرسش و پاسخ