



دانشگاه صنعتی اصفهان

دانشکده علوم ریاضی

پروژه کارشناسی

نظریه رمزی و پارامترهای گراف

حسنا مجاهدی

استاد راهنما: دکتر بهناز عمومی

تابستان ۱۴۰۵

فهرست مطالب

۲	۱	مقدمه
۲	۱.۱	مفاهیم پایه
۳	۲.۱	تعریف عدد رمزی
۵	۲	اعداد رمزی و پارامترهای گراف
۵	۱.۲	کلاس A
۹	۲.۲	کلاس B
۱۱	۳.۲	کلاس X
۱۴	۴.۲	کلاس $\mathcal{X}$
۱۸	۵.۲	کلاس $\mathcal{Y}$
۲۰	۶.۲	کلاس C
۲۲	۷.۲	جمع بندی
۲۴	۳	اعداد رمزی کوچک برای کتاب‌ها، چرخ‌ها و تعمیم‌ها
۲۴	۱.۳	تعاریف و مفاهیم مقدماتی
۲۵	۲.۳	نتایج اصلی
۲۷	۳.۳	روش‌های مورد استفاده
۲۷	۱.۳.۳	روش جستجوی تابو
۲۸	۲.۳.۳	گراف‌های چندچرخشی
۲۹	۳.۳.۳	روش جبر پرچم
۳۰	۴.۳.۳	تولید از پایین به بالا
۳۰	۴.۳	اعداد رمزی تعمیم یافته
۳۱	۵.۳	مقایسه با روش‌های دیگر
۳۱	۶.۳	جمع بندی

فصل ۱

مقدمه

نظریه‌ی رمزی یکی از شاخه‌های ترکیبیات است که به بررسی این پرسش می‌پردازد: در یک ساختار به‌اندازه‌ی کافی بزرگ، تا چه حد می‌توان از پیدایش نظم پرهیز کرد؟ به بیان دیگر، نظریه‌ی رمزی نشان می‌دهد که بی‌نظمی کامل در مقیاس بزرگ غیرممکن است؛ هر ساختار بزرگ، به‌ناچار، حاوی زیرساختارهای منظم خواهد بود.

برای درک شهودی این ایده، مثال کلاسیک «مسئله‌ی مهمانی» را در نظر بگیرید. فرض کنید در یک مهمانی با شش نفر شرکت‌کننده، هر دو نفر با یکدیگر آشنا یا غریبه هستند. ادعا می‌شود که همواره یا سه نفر وجود دارند که دوبه‌دو با یکدیگر آشنا هستند، یا سه نفر وجود دارند که دوبه‌دو با یکدیگر غریبه‌اند. این گزاره، که در نگاه اول شگفت‌انگیز به نظر می‌رسد، دقیقاً معادل این واقعیت است که عدد رمزی $R(3, 3)$ برابر با ۶ است.

این مثال را می‌توان با زبان نظریه‌ی گراف صورت‌بندی کرد. هر شرکت‌کننده را با یک رأس، و هر رابطه‌ی آشنایی یا غریبگی را با یک یال نشان می‌دهیم، یال‌ها را با دو رنگ (مثلاً قرمز برای آشنایی و آبی برای غریبگی) رنگ‌آمیزی می‌کنیم. مسئله به این تبدیل می‌شود: کوچک‌ترین n ای که در هر رنگ‌آمیزی دویالی یال‌های گراف کامل K_n ، یک مثلث تک‌رنگ (یعنی سه رأس که یال‌های میان آن‌ها همگی یک رنگ‌اند) وجود دارد چیست؟

۱.۱ مفاهیم پایه

پیش از بیان تعریف رسمی عدد رمزی، چند مفهوم پایه از نظریه‌ی گراف را یادآوری می‌کنیم. در این بخش، اصطلاحات و تعاریف پایه مطابق با [۱] به کار می‌روند.

تعریف ۱ (گراف کامل) گراف کامل K_n گرافی با n رأس است که هر دو رأس متمایز آن با یک یال به هم متصل هستند.

تعریف ۲ (خوشه) خوشه زیرمجموعه‌ای از رئوس یک گراف است که هر دو رأس آن به یکدیگر متصل باشند. یک خوشه با p رأس را خوشه‌ی p -رأسی می‌نامیم.

تعریف ۳ (مجموعه‌ی مستقل) مجموعه‌ی مستقل زیرمجموعه‌ای از رئوس یک گراف است که هیچ دو رأس آن به یکدیگر متصل نباشند.

تعریف ۴ (رنگ‌آمیزی یال‌ها) رنگ‌آمیزی یال‌های یک گراف، انتساب یک رنگ (از میان مجموعه‌ای متناهی از رنگ‌ها) به هر یال آن گراف است.

تعریف ۵ (زیرگراف القایی) به ازای زیرمجموعه‌ی S از رئوس گراف G ، زیرگراف القایی $G[S]$ گرافی است که رئوس آن دقیقاً S است و یال‌های آن دقیقاً همان یال‌هایی از G هستند که هر دو سر آن‌ها در S قرار دارد.

تعریف ۶ (رده‌ی ارثی) یک رده از گراف‌ها را ارثی^۱ می‌نامیم اگر نسبت به گرفتن زیرگراف القایی بسته باشد؛ یعنی اگر گراف G در این رده باشد، آن‌گاه هر زیرگراف القایی G نیز در همین رده قرار دارد.

تعریف ۷ (گراف خطی) به ازای گراف G ، گراف خطی^۲ $L(G)$ گرافی است که رئوس آن متناظر با یال‌های G هستند و دو رأس در $L(G)$ به یکدیگر متصل‌اند اگر و تنها اگر یال‌های متناظرشان در G در یک رأس مشترک باشند.

تعریف ۸ (گراف n -رنگ‌پذیر) گراف G را n -رنگ‌پذیر می‌نامیم اگر بتوان به هر رأس آن یکی از n رنگ را طوری انتساب داد که هیچ دو رأس مجاور هم‌رنگ نباشند. کوچک‌ترین n ی که برای آن G n -رنگ‌پذیر است را عدد رنگی^۳ G می‌نامند و با $\chi(G)$ نشان می‌دهند.

۲.۱ تعریف عدد رمزی

تعریف ۹ عدد رمزی $R(p, q)$ کوچک‌ترین عدد صحیح n است به‌طوری‌که اگر یال‌های گراف K_n را با دو رنگ (مثلاً قرمز و آبی) رنگ کنیم، یا یک خوشه قرمز p -رأسی یا یک خوشه آبی q -رأسی وجود دارد.

برای یک رده‌ی دلخواه از گراف‌ها مانند $\mathcal{K}$ ، عدد رمزی محدودشده به آن رده را با $R_{\mathcal{K}}(p, q)$ نشان می‌دهیم و آن را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

تعریف ۱۰ (عدد رمزی محدودشده به یک رده) به ازای یک رده‌ی $\mathcal{K}$ از گراف‌ها، عدد رمزی $R_{\mathcal{K}}(p, q)$ کوچک‌ترین عدد صحیح n است به‌طوری‌که هر گراف $G \in \mathcal{K}$ با n رأس، یا شامل یک خوشه‌ی p رأسی باشد یا یک مجموعه‌ی مستقل q رأسی.

واضح است که، $R_{\mathcal{K}}(p, q) \leq R(p, q)$ ، زیرا هر گراف در $\mathcal{K}$ خود یک گراف دلخواه است، اما ممکن است گراف‌های خارج از $\mathcal{K}$ دارای ویژگی‌های متفاوتی باشند.

¹hereditary

²line graph

³chromatic number

قضیه‌ی رمزی^۴ (اثبات شده توسط فرانک رمزی در سال ۱۹۳۰) [۸] تضمین می‌کند که چنین عددی برای هر p و q دلخواه وجود دارد و متناهی است.

نکته‌ی مهم این است که محاسبه‌ی دقیق $R(p, q)$ حتی برای مقادیر کوچک p و q بسیار دشوار است. به عنوان نمونه، مقدار دقیق $R(5, 5)$ تاکنون ناشناخته است و تنها کران‌های بالا و پایین برای آن وجود دارد. همین دشواری محاسباتی انگیزه‌ی رویکردی است که در دو مقاله‌ای که در ادامه دنبال می‌کنیم وجود دارد. در اینجا به جای محاسبه‌ی عدد رمزی برای گراف‌های کلی و دلخواه، تمرکز را بر رده‌های محدود شده‌ای از گراف‌ها قرار می‌دهیم، جایی که ساختار اضافی این رده‌ها امکان محاسبه‌ی دقیق یا کران‌های دقیق‌تر را فراهم می‌کند.

در فصل بعد، به بررسی نتایج [۵] درباره‌ی اعداد رمزی در رده‌های مختلف از گراف‌ها می‌پردازیم و می‌بینیم که چگونه محدودیت‌های ساختاری این رده‌ها محاسبه‌ی دقیق اعداد رمزی را ممکن می‌سازد. در فصل سوم، به مقاله [۴] می‌پردازیم و روش‌های محاسباتی‌ای که در یافتن اعداد رمزی برای برخی رده‌های خاص از گراف‌ها، از جمله گراف‌های کتاب و گراف‌های چرخ، مؤثر بوده‌اند را بررسی می‌کنیم.

⁴Ramsey's theorem

فصل ۲

اعداد رمزی و پارامترهای گراف

در این فصل به بررسی مقاله‌ی «اعداد رمزی و پارامترهای گراف» [۵] از وادیم لوزین می‌پردازیم که رویکردی نظری و ساختاری را دنبال می‌کند. این مقاله به جای محاسبه‌ی اعداد رمزی برای یک گراف خاص، اعداد رمزی را برای رده‌های کامل از گراف‌ها محاسبه می‌کند.

ایده‌ی اصلی این رویکرد این است که اگر رده‌ی گراف‌ها را با محدودیت‌های ساختاری مشخص تعریف کنیم، آن‌گاه مسئله‌ی رمزی درون آن رده بسیار ساده‌تر از حالت کلی می‌شود. به‌عنوان مثال، اگر به جای همه‌ی گراف‌ها، فقط گراف‌های ۳-رنگ‌پذیر را در نظر بگیریم، به‌دلیل ساختار خاص این گراف‌ها (امکان افراز رؤس به سه مجموعه‌ی مستقل)، می‌توانیم عدد رمزی را دقیقاً محاسبه کنیم.

تفاوت اساسی این رویکرد با مسائل رمزی کلاسیک در این است که در اینجا همه‌ی گراف‌های موجود در رده را بررسی می‌کنیم، و به دنبال یافتن کوچک‌ترین n ای هستیم که هر گراف در آن رده با n رأس، یا شامل یک خوشه p رأسی یا یک مجموعه‌ی مستقل q رأسی باشد. به‌عبارت دیگر، به جای این که پرسیم «آیا رنگ‌آمیزی خاصی وجود دارد که از یک گراف خاص اجتناب کند؟»، می‌پرسیم «آیا ساختار یک رده از گراف‌ها می‌تواند وجود یک خوشه یا مجموعه‌ی مستقل بزرگ را تضمین کند؟»

لوزین در این مقاله سه رده‌ی اصلی از گراف‌ها را بررسی می‌کند:

۱. گراف‌های ۳-رنگ‌پذیر (رده‌ی A),

۲. گراف‌های قابل افراز به دو مجموعه‌ی مستقل و یک خوشه (رده‌ی B),

۳. چندین رده‌ی تعریف‌شده با ممنوعیت زیرگراف‌های القایی خاص (رده‌های $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ و C).

در هر مورد، او با استفاده از ساختار درونی رده، عدد رمزی را به‌صورت یک تابع از p و q به‌دست می‌آورد. نتایج نشان می‌دهند که با اعمال محدودیت‌های ساختاری، اعداد رمزی می‌توانند به‌طور قابل‌توجهی از اعداد رمزی کلاسیک کوچک‌تر شوند و در برخی موارد به‌جای رشد نمایی، به‌صورت خطی یا درجه‌دوم رشد کنند. در ادامه، به ترتیب به بررسی هر یک از قضایای اصلی مقاله می‌پردازیم.

۱.۲ کلاس A

کلاس A شامل تمام گراف‌های ۳-رنگ‌پذیر است، یعنی گراف‌هایی که مجموعه‌ی رؤس آن‌ها قابل افراز به سه مجموعه‌ی مستقل باشد.

قضیه ۱ [۵] به ازای اعداد صحیح $p \geq 3$ و $q \geq 3$ ، عدد رمزی $R_A(p, q)$ به صورت زیر است:

$$R_A(p, q) = \begin{cases} 6, & p = q = 3, \\ 9, & p = 3, q = 4, \\ 3q - 2, & \text{در غیر این صورت.} \end{cases}$$

اثبات

۱. حالت‌های استثنایی

حالت $p = q = 3$:

می‌دانیم $R(3, 3) = 6$ ، بنابراین $R_A(3, 3) \leq 6$. از طرف دیگر، دور C_5 یک گراف ۳-رنگ‌پذیر است (کافی است دو رنگ را به تناوب به رأس‌ها نسبت دهیم)، پس $C_5 \in A$. این دور شامل هیچ خوشه K_3 نیست (مثلاً ندارد) و اندازه‌ی بزرگ‌ترین مجموعه‌ی مستقل آن ۲ است. در نتیجه یک گراف ۳-رنگ‌پذیر با ۵ رأس می‌تواند هم از K_3 و هم از $\overline{K}_3$ عاری باشد. بنابراین $R_A(3, 3) > 5$. در نتیجه نشان دادیم که، $R_A(3, 3) = 6$.

حالت $p = 3, q = 4$:

می‌دانیم که $R(3, 4) = 9$ [۳] نتیجه می‌دهد $R_A(3, 4) \leq 9$. برای اثبات $R_A(3, 4) > 8$ گرافی ۳-رنگ‌پذیر با ۸ رأس می‌سازیم که مثلث و مجموعه‌ی مستقل ۴ رأسی نداشته باشد. دور C_8 را در نظر بگیرید و یال‌های بین هر رأس و رأس مقابل آن را اضافه کنید (اگر رأس‌ها به ترتیب $v_1, \dots, v_7, v_8$ باشند، یال‌های $v_i v_{i+4}$ برای $i = 0, 1, 2, 3$). گراف حاصل ۳-رنگ‌پذیر است، مثلث ندارد و عدد استقلال آن ۳ می‌باشد. لذا $R_A(3, 4) > 8$ و در نتیجه $R_A(3, 4) = 9$.

۲. کران بالا: $R_A(p, q) \leq 3q - 2$ برای هر p, q (به‌غیر از موارد ذکر شده)

فرض کنید G یک گراف دلخواه ۳-رنگ‌پذیر با $|V(G)| \geq 3q - 2$ باشد. مجموعه‌ی رئوس آن را به سه مجموعه‌ی مستقل I_1, I_2, I_3 افراز می‌کنیم. اگر G فاقد هر مجموعه‌ی مستقل q رأسی باشد، آن‌گاه هر کلاس رنگی حداکثر $q - 1$ رأس خواهد داشت. در این صورت تعداد کل رئوس حداکثر $3(q - 1) = 3q - 3$ می‌شود که با فرض $|V(G)| \geq 3q - 2$ در تناقض است. بنابراین G حتماً یک مجموعه‌ی مستقل q رأسی دارد. از آن‌جا که G دلخواه بود، $R_A(p, q) \leq 3q - 2$ برای تمام $p \geq 3$ ثابت می‌شود.

۳. کران پایین: ساختارهای عاری از K_p و $\overline{K}_q$

باید نشان دهیم که برای پارامترهای غیراستثنایی، یک گراف ۳-رنگ پذیر با $3q - 3$ رأس وجود دارد که نه K_p داشته باشد و نه مجموعه‌ی مستقل q رأسی. دو زیرحالت را بررسی می‌کنیم.

زیرحالت $p \geq 4$:

گراف کامل ۳-بخشی $K_{q-1, q-1, q-1}$ دارای $3q - 3$ رأس است. عدد خوشه‌ای این گراف ۳ است (هر خوشه حداکثر از هر بخش یک رأس می‌گیرد)، پس به‌ازای $p \geq 4$ خوشه K_p ندارد. همچنین بزرگ‌ترین مجموعه‌ی مستقل آن دقیقاً $q - 1$ رأس دارد (یک بخش کامل). بنابراین این گراف از هر دو K_p و $\overline{K}_q$ عاری است، که نشان می‌دهد $R_A(p, q) > 3q - 3$. در نتیجه برای $p \geq 4$ حکم $R_A(p, q) = 3q - 2$ برقرار است.

زیرحالت $p = 3$ و $q \geq 5$:

حالت‌های $q = 3, 4$ را قبلاً بررسی کرده‌ایم. اکنون $q \geq 5$ را در نظر می‌گیریم. باید گرافی ۳-رنگ پذیر با $3q - 3$ رأس، بدون مثلث و با عدد استقلال $q - 1$ بسازیم. ساختار برای q فرد و زوج تفاوت دارد.

q فرد: فرض کنید $q = 2k + 1$ که در آن $k \geq 2$. برای ساخت گراف مورد نظر، دو دور مجزا به نام‌های C_1 و C_2 هر یک به‌طول $2k$ در نظر می‌گیریم. از آنجا که طول هر دور مضربی از ۳ است، هر دور را می‌توان با سه رنگ رنگ‌آمیزی کرد به‌گونه‌ای که هر کلاس رنگی دقیقاً k رأس داشته باشد. حال یال‌های زیر را بین دو دور اضافه می‌کنیم:

- هر رأس از رنگ ۱ در C_1 را به هر رأس از رنگ ۲ در C_2 وصل می‌کنیم،
- هر رأس از رنگ ۲ در C_1 را به هر رأس از رنگ ۳ در C_2 وصل می‌کنیم،
- هر رأس از رنگ ۳ در C_1 را به هر رأس از رنگ ۱ در C_2 وصل می‌کنیم.

گراف حاصل ۳-رنگ‌پذیر است (زیرا رنگ‌آمیزی اولیه همچنان معتبر است). برای اثبات مثلث‌آزاد بودن گراف، دو حالت را بررسی می‌کنیم:

- مثلث کاملاً درون یک دور: هر یک از دورهای C_1 و C_2 خود به‌طول $2k \geq 6$ هستند و هر دوری با طول حداقل ۴ مثلث ندارد. پس هیچ مثلثی کاملاً درون یک دور وجود ندارد.

- دو رأس در یک دور و یک رأس در دور دیگر: فرض کنید دو رأس $u, v \in C_1$ مجاور باشند. چون تنها یال‌های درون C_1 بین رأس‌های همسایه روی دور برقرارند، u و v باید رنگ‌های متوالی داشته باشند، مثلاً رنگ‌های i و $i + 1$. برای این که رأس $w \in C_2$ به هر دوی u و v متصل باشد، طبق قواعد یال‌های بین‌دوره‌ای، w باید هم‌زمان رنگ $i + 1$ داشته باشد (برای اتصال به u که رنگ i دارد و رنگ

$i+2$ داشته باشد برای اتصال به v که رنگ $i+1$ دارد). اما این غیرممکن است چون $i+1 \neq i+2 \pmod{3}$. به طور مشابه، اگر دو رأس در C_2 و یک رأس در C_1 باشند، همین استدلال با جابجایی نقش دورها برقرار است.

بنابراین گراف هیچ مثلی ندارد.

حال نشان می‌دهیم که عدد استقلال این گراف برابر $2k = q - 1$ است. فرض کنید A یک مجموعه‌ی مستقل دلخواه باشد:

- اگر A حداکثر k رأس از هر دور داشته باشد، آن گاه $|A| \leq 2k = q - 1$.
- اگر A بیش از k رأس از یکی از دورها داشته باشد، به دلیل وجود تطابق کامل بین هر دو کلاس رنگی در آن دور، A باید از هر سه رنگ دور حداقل یک رأس داشته باشد. در این صورت، A نمی‌تواند هیچ رأسی از دور دیگر داشته باشد چون هر رأس دور دیگر به حداقل یکی از این سه رنگ متصل است. بنابراین $|A| \leq \lfloor 3k/2 \rfloor \leq 2k = q - 1$.

پس بزرگ‌ترین مجموعه‌ی مستقل دقیقاً $q - 1$ رأس دارد. همچنین تعداد رئوس گراف برابر $2 \times 3k = 6k = 3(2k + 1) - 3 = 3q - 3$ است.

زوج q : فرض کنید $q = 2k$ که در آن $k \geq 3$. دو دور C^1 با طول $3k/2$ و C^2 با طول $3k/2 - 3$ در نظر می‌گیریم. هر دو طول مضربی از ۳ هستند، بنابراین C^1 دارای کلاس‌های رنگی به اندازه‌ی k و C^2 دارای کلاس‌های رنگی به اندازه‌ی $k - 1$ است. سپس همان سه مرحله‌ی اتصال (مانند حالت فرد) را بین دو دور اعمال می‌کنیم. گراف حاصل ۳-رنگ‌پذیر و مثلث‌آزاد است. یک مجموعه‌ی مستقل بیشینه یا از هر دو دور مجموعاً $q - 1 = 2k - 1 = (k) + (k - 1)$ رأس دارد، یا اگر بیش از k رأس در C^1 بگیرد، از C^2 جدا می‌شود و حداکثر $2k - 1 \leq \lfloor 3k/2 \rfloor$ رأس خواهد داشت. در هر دو حالت (فرد و زوج)، گراف ساخته شده:

- متعلق به رده‌ی A است (چون ۳-رنگ‌پذیر است)،
- مثلث (خوشه ۳ رأسی) ندارد،
- مجموعه‌ی مستقل q رأسی نیز ندارد.

بنابراین $R_A(3, q) > 3q - 3$ ، و با در نظر گرفتن کران بالا، برای تمام $q \geq 5$ نتیجه می‌شود $R_A(3, q) = 3q - 2$. با جمع‌بندی تمام بخش‌ها، اثبات قضیه‌ی ۱ کامل می‌شود. $\square$

۲.۲ کلاس B

گراف G به کلاس B تعلق دارد اگر بتوان مجموعه‌ی رئوس آن را به دو مجموعه‌ی مستقل و یک خوشه افراز کرد. به بیان دیگر، $V(G) = A \cup B \cup C$ که در آن A و B مجموعه‌های مستقل و C یک خوشه است.

قضیه ۲ [۵] برای اعداد صحیح $p, q \geq 3$,

$$R_B(p, q) = \begin{cases} 6, & p = q = 3, \\ p + 2q - 2, & \text{در غیر این صورت.} \end{cases}$$

اثبات

اثبات را در دو بخش ارائه می‌دهیم: حالت خاص $p = q = 3$ و سپس حالت عمومی.

۱. حالت $p = q = 3$

می‌دانیم $R(3, 3) = 6$ و از آنجا که کلاس B زیرمجموعه‌ای از همه‌ی گراف‌هاست، $R_B(3, 3) \leq R(3, 3) = 6$. حال گراف C_5 را در نظر بگیرید. این گراف ۳-رنگ‌پذیر است و می‌توان رنگ‌آمیزی آن را چنان انتخاب کرد که دو کلاس رنگی مجموعه‌های مستقل و کلاس سوم یک خوشه تک‌رأسی باشد. بنابراین $C_5 \in B$.

C_5 نه خوشه سه‌رأسی دارد و نه مجموعه‌ی مستقل سه‌رأسی. پس $R_B(3, 3) > 5$ و با توجه به کران بالا $R_B(3, 3) = 6$ نتیجه می‌شود.

۲. حالت عمومی (حداقل یکی از p یا q بزرگ‌تر از ۳)

الف) کران بالا نشان می‌دهیم $R_B(p, q) \leq p + 2q - 2$. فرض کنید $G \in B$ گرافی با $p + 2q - 2$ رأس باشد. طبق تعریف B ، رئوس G به دو مجموعه‌ی مستقل A و B و یک خوشه C افراز می‌شوند. برهان خلف: فرض کنید G نه خوشه‌ای به اندازه‌ی p و نه مجموعه‌ی مستقلی به اندازه‌ی q داشته باشد. در این صورت

$$|A| \leq q - 1, \quad |B| \leq q - 1, \quad |C| \leq p - 1.$$

بنابراین تعداد کل رئوس حداکثر $p + 2q - 3$ خواهد بود، که با فرض $p + 2q - 2$ رأس در تناقض است. پس G حتماً شامل یک خوشه p رأسی یا یک مجموعه‌ی مستقل q رأسی می‌باشد. چون G دل‌خواه بود، $R_B(p, q) \leq p + 2q - 2$ ثابت می‌شود.

(ب) کران پایین (ساختارها) اکنون برای هر زوج (p, q) غیر از $p = q = 3$ گرافی در کلاس B با $p + 3 - 2q$ رأس می‌سازیم که نه خوشه p رأسی و نه مجموعه‌ی مستقل q رأسی داشته باشد. این نشان می‌دهد $R_B(p, q) > p + 3 - 2q$ و در نتیجه $R_B(p, q) = p + 3 - 2q$. ساختار بر اساس مقایسه‌ی p و q به چند زیرحالت تقسیم می‌شود.

حالت $p = q$ (و $p \geq 4$): سه مجموعه‌ی A ، B و C هر یک با اندازه‌ی $p - 1$ می‌گیریم. B و A مستقل و C خوشه کامل است. تمام یال‌های بین A و B را رسم می‌کنیم (دو خوشه). یک تطابق کامل بین A و C و یک تطابق کامل بین B و C قرار می‌دهیم. در این گراف:

- هر مجموعه‌ی مستقل کاملاً در یکی از A ، B یا C جای می‌گیرد، پس اندازه‌اش از $p - 1 = q - 1$ فراتر نمی‌رود پس مجموعه‌ی مستقل q رأسی نداریم.
 - هر خوشه حداکثر یک رأس از A و یک رأس از B می‌گیرد و بقیه از C . به دلیل ساختار تطابق‌ها، هم‌سایگی مشترک یک رأس از A و یک رأس از B در C محدود است و خوشه از $p - 1$ بزرگ‌تر نمی‌شود. بنابراین خوشه p رأسی نیز وجود ندارد.
- پس این گراف با $p + 3 - 2q$ رأس گواه کران پایین است.

حالت $p > q$: A و B هر یک با اندازه‌ی $q - 1$ و C با اندازه‌ی $p - 1$ می‌سازیم. بین A و B دو خوشه کامل داریم. خوشه C را به $q - 1$ زیرمجموعه‌ی ناتهی $C_1, \dots, C_{q-1}$ افراز می‌کنیم به گونه‌ای که $|C_i| \leq p - 3$ (برای $p \geq 5$ ممکن است؛ حالت $p = 4, q = 3$ جداگانه می‌آید). برای هر i ، a_i را به همه‌ی رئوس C_i و b_i را به همه‌ی رئوس C_i وصل می‌کنیم. از آن‌جا که A و B هر دو مجموعه‌های مسلط هستند، هیچ مجموعه‌ی مستقل q رأسی وجود ندارد. یک خوشه بیشینه U را در نظر بگیرید:

- اگر $U \cap A = \emptyset$ و $U \cap B = \emptyset$ ، آن‌گاه $U \subseteq C$ و $|U| \leq p - 1$.
 - اگر U شامل یک رأس از A (و نه B) باشد، هم‌سایه‌های آن در C محدود به یک C_i با اندازه‌ی $p - 3 \leq$ است، پس $p - 2 < p - 3 + 1 = |U|$.
 - اگر U شامل یک رأس از A و یک رأس از B باشد، هم‌سایگی مشترک آن‌ها در C حداکثر $p - 3$ رأس دارد، بنابراین $p - 1 = p - 3 + 2 \leq |U|$.
- پس خوشه p رأسی نداریم.

حالت خاص $p = 4, q = 3$: $A = \{a_1, a_2\}$ ، $B = \{b_1, b_2\}$ ، $C = \{c_1, c_2, c_3\}$. تمام یال‌های A و B برقرارند. اضافه می‌کنیم: a_1 به c_1, c_2 ؛ a_2 به c_3 ؛ b_1 به c_1 ؛ b_2 به c_2, c_3 . این گراف ۷ رأسی هیچ خوشه ۴ رأسی و هیچ مجموعه‌ی مستقل ۳ رأسی ندارد.

حالت $q > p$: مجموعه‌های مستقل A و B با اندازه‌ی $q - 1$ و خوشه C با اندازه‌ی $p - 1$ می‌سازیم. تمام یال‌های بین A و B را رسم می‌کنیم. برای هر $i = 1, \dots, p - 1$ رأس c_i را به a_i و b_i وصل می‌کنیم. A و B مسلط هستند، بنابراین مجموعه‌ی مستقل q رأسی وجود ندارد. هر رأس A و B دقیقاً یک هم‌سایه در C دارد، لذا خوشه از $p - 1$ بزرگ‌تر نیست، مگر آن‌که $p = 3$ باشد. اگر $p = 3$ ، ساختار را اصلاح می‌کنیم: یال‌های $a_1 b_1$ و $a_2 b_2$ را حذف می‌کنیم. در این صورت:

- مثلث وجود ندارد.
 - اگر مجموعه‌ی مستقل W شامل رأسی از $\{a_3, \dots, a_{q-1}\}$ باشد، نمی‌تواند رأسی از B داشته باشد در نتیجه $|W| \leq q - 1$.
 - به‌طور مشابه اگر شامل رأسی از $\{b_3, \dots, b_{q-1}\}$ باشد.
 - در غیر این صورت $W \subseteq \{a_1, a_2, b_1, b_2\} \cup C$ و $|W| \leq 3 \leq q - 1$ (چون $q > 3$).
- پس مجموعه‌ی مستقل q رأسی نداریم و خوشه ۳ رأسی هم موجود نیست. گراف حاصل $p + 2q - 3$ رأس دارد و کران پایین را نتیجه می‌دهد.
- با جمع‌بندی تمام زیرحالت‌ها، برای تمام $(p, q) \neq (3, 3)$ نشان دادیم $R_B(p, q) > p + 2q - 3$ و با کران بالا $R_B(p, q) = p + 2q - 2$ ثابت می‌شود. این اثبات قضیه‌ی ۲ را کامل می‌کند. $\square$

۳.۲ کلاس X

- گراف G به کلاس X تعلق دارد اگر G فاقد هر دو گراف پنجه^۵ و مکمل پنجه^۶ باشد.
- پنجه: یک مثلث به‌همراه یک برگ (رأسی که دقیقاً به یکی از رئوس مثلث متصل است).
 - مکمل پنجه: یک مسیر P_3 به‌همراه یک رأس تنها (رأسی که به هیچ‌یک از رئوس P_3 متصل نیست).

قضیه ۳ [۵]

برای اعداد صحیح $p, q \geq 3$,

$$R_X(p, q) = \begin{cases} 6, & p = q = 3, \\ (p-1)(q-1) + 1, & \text{در غیر این صورت.} \end{cases}$$

^۵Paw

^۶Copaw

اثبات

اثبات را در سه گام پیش می‌بریم: ابتدا نشان می‌دهیم که تمام گراف‌های چندبخشی کامل در کلاس X قرار دارند و در نتیجه کران پایین از عدد رمزی این گراف‌ها به دست می‌آید. سپس حالت خاص $p = q = 3$ را بررسی می‌کنیم. در نهایت کران بالا را با یک استدلال ساختاری اثبات می‌کنیم.

۱. گراف‌های چندبخشی کامل در کلاس X هستند.

یک گراف چندبخشی کامل گرافی است که رئوس آن می‌توانند به چند مجموعه‌ی مستقل (بخش) افراز شوند و بین هر دو رأس از دو بخش متفاوت یال وجود داشته باشد. چرا چنین گرافی نمی‌تواند پنجه داشته باشد؟ یک پنجه از یک مثلث و یک برگ تشکیل شده است. در یک گراف چندبخشی کامل:

- **مثلث ممکن است وجود داشته باشد:** کافی است از سه بخش متفاوت هر بار یک رأس برداریم. این سه رأس دو به دو به هم متصل‌اند و یک مثلث می‌سازند.

- **اما برگ غیرممکن است:** یک برگ رأسی است که دقیقاً به یکی از رئوس مثلث وصل باشد و به دو رأس دیگر وصل نباشد. اما در گراف چندبخشی کامل، هر رأس یا با یک رأس دیگر کاملاً بی‌ارتباط است (اگر هم‌بخش باشند) یا کاملاً به آن متصل است (اگر از دو بخش متفاوت باشند). بنابراین نمی‌توان رأسی یافت که تنها به یکی از رئوس مثلث وصل و از دو تای دیگر جدا باشد.

چرا مکمل پنجه هم نمی‌تواند وجود داشته باشد؟ یک مکمل پنجه شامل یک P_3 (سه رأس که دو به دو لزوماً مثلث نیستند اما یک مسیر می‌سازند) و یک رأس کاملاً تنها (بدون هیچ یالی به P_3) است. اما در یک گراف چندبخشی کامل:

- **رأس تنها غیرممکن است:** تنها راهی که یک رأس می‌تواند به هیچ‌یک از رئوس یک P_3 وصل نباشد این است که با همه‌ی آن‌ها هم‌بخش باشد. اما P_3 شامل رئوسی از حداقل دو بخش متفاوت است (اگر همه در یک بخش بودند که هیچ یالی بینشان نبود و مسیر تشکیل نمی‌شد). یک رأس نمی‌تواند هم‌زمان با رئوس دو بخش متفاوت هم‌بخش باشد.

بنابراین گراف‌های چندبخشی کامل نه پنجه دارند و نه مکمل پنجه، و در نتیجه به کلاس X تعلق دارند. حال می‌دانیم که عدد رمزی گراف‌های چندبخشی کامل برابر است با $(q-1)(p-1) + 1$. به عبارت دیگر، بزرگ‌ترین گراف چندبخشی کاملی که نه خوشه p رأسی دارد و نه مجموعه‌ی مستقل q رأسی، گراف

کامل $(q-1)$ - بخشی است که هر بخش آن $p-1$ رأس دارد. این گراف $(p-1)(q-1)$ رأس دارد. از آنجا که این گراف‌ها زیرمجموعه‌ای از کلاس X هستند، نتیجه می‌گیریم:

$$R_X(p, q) \geq (p-1)(q-1) + 1.$$

۲. حالت خاص $p = q = 3$

حال بررسی می‌کنیم که چه گراف‌هایی در کلاس X می‌توانند C_5 (دور ۵ رأسی) را به‌عنوان زیرگراف داشته باشند. ادعا می‌کنیم:

اگر یک گراف در کلاس X شامل C_5 باشد، آن‌گاه خود آن گراف دقیقاً C_5 است.

چرا؟ فرض کنید $G \in X$ شامل یک C_5 باشد و حداقل یک رأس اضافی هم داشته باشد. این رأس اضافی می‌تواند به رئوس C_5 وصل باشد یا نباشد. در هر دو حالت، با بررسی همه‌ی حالات ممکن برای اتصال یک رأس به یک C_5 ، می‌توان دید که حتماً یک پنجه یا یک مکمل پنجه پدید می‌آید. (این یک بررسی متناهی و سرراست است: C_5 فقط ۵ رأس دارد و هم‌سایگی‌های رأس جدید نسبت به این ۵ رأس تمام حالات ممکن را پوشش می‌دهد). بنابراین، برای آن‌که G در کلاس X بماند، نمی‌تواند هیچ رأس اضافی‌ای فراتر از خود C_5 داشته باشد.

از این مشاهده چند نتیجه می‌گیریم:

- C_5 خودش یک گراف در X است. این گراف ۵ رأس دارد و نه خوشه ۳ رأسی دارد و نه مجموعه‌ی مستقل ۳ رأسی. بنابراین $R_X(3, 3) > 5$.

- همچنین می‌دانیم $R(3, 3) = 6$ ، پس $R_X(3, 3) \leq R(3, 3) = 6$.

در نتیجه $R_X(3, 3) = 6$.

۳. ساختار کلی گراف‌های X و کران بالا

آخرین نکته‌ای که باید به آن توجه کنیم این است که C_5 تنها گراف غیرکامل در کلاس X است که کامل نیست. به‌طور دقیق‌تر:

- هر دور فرد با طول حداقل ۷ شامل یک مکمل پنجه است.

- مکمل هر دور فرد با طول حداقل ۷ شامل یک پنجه است.

بنابراین هیچ دور فرد بزرگ‌تر از ۵ و هیچ مکمل دور فرد بزرگ‌تر از ۵ نمی‌تواند در X باشد. طبق قضیه‌ی گراف‌های کامل قوی^۷ هر گرافی که کامل نباشد حتماً یک دور فرد یا مکمل یک دور فرد به‌عنوان زیرگراف

⁷Strong Perfect Graph Theorem

القای دارد. بنابراین، تنها گراف غیرکامل موجود در کلاس X گراف C_5 است. تمام گراف‌های دیگر در X ، کامل هستند.

اکنون برای اثبات کران بالا: فرض کنید $G \in X$ یک گراف با $(p-1)(q-1) + 1$ رأس باشد و p, q طوری باشند که $(p, q) \neq (3, 3)$. در این صورت G یا C_5 است یا یک گراف کامل.

• اگر $G = C_5$ ، آن‌گاه از آن‌جا که $(p, q) \neq (3, 3)$ ، یا $p \geq 4$ یا $q \geq 4$. در هر دو حال، C_5 که ۵ رأس دارد (و $(p-1)(q-1) + 1 < 5$ برای تمام $(p, q) \neq (3, 3)$ ، شرط تعداد رئوس نقض می‌شود. پس این حالت پیش نمی‌آید.

• اگر G یک گراف کامل باشد، آن‌گاه G یک گراف چندبخشی کامل است (هر گراف کامل یک گراف چندبخشی کامل است، با بخش‌هایی که همان کلاس‌های رنگی یک رنگ‌آمیزی بهینه هستند). کران بالای عدد رمزی گراف‌های چندبخشی کامل $(p-1)(q-1) + 1$ است. بنابراین $R_X(p, q) \leq (p-1)(q-1) + 1$.

با کنار هم قرار دادن کران بالا و پایین، برای تمام $(p, q) \neq (3, 3)$ داریم:

$$R_X(p, q) = (p-1)(q-1) + 1.$$

این اثبات قضیه‌ی ۳ را کامل می‌کند. □

۴.۲ کلاس $\mathcal{X}$

گراف G به کلاس $\mathcal{X}$ تعلق دارد اگر G فاقد هر دو گراف پنجه و $2K_2$ باشد.

• پنجه: یک مثلث به همراه یک برگ (رأسی که دقیقاً به یکی از رئوس مثلث متصل است).

• $2K_2$: دو یال مجزا که هیچ رأس مشترکی ندارند.

قضیه ۴ [۵] برای اعداد صحیح $p \geq 3$ و $q \geq 3$ ،

$$R_{\mathcal{X}}(p, q) = \begin{cases} (p-1)(q-1) + 1, & p \geq 4, q \geq 3, \\ \lfloor \frac{5}{4}(q-1) \rfloor + 1, & p = 3, q \geq 3. \end{cases}$$

اثبات

۱. ساختار گراف‌های ناکامل در $\mathcal{X}$

ابتدا توجه می‌کنیم که در یک گراف فاقد $2K_2$ ، هیچ دور فردی با طول حداقل ۷ نمی‌تواند وجود داشته باشد، زیرا یک C_7 شامل $2K_2$ به‌عنوان زیرگراف القایی است. همچنین در یک گراف فاقد پنجه، مکمل هیچ دور فردی با طول حداقل ۷ نمی‌تواند وجود داشته باشد، زیرا $\overline{C_7}$ شامل یک پنجه است. بنابراین، بر اساس قضیه‌ی گراف‌های کامل قوی، تنها گراف‌های ناکامل در $\mathcal{X}$ آن‌هایی هستند که شامل یک C_5 هستند. حال ساختار این گراف‌ها را مشخص می‌کنیم. برای درک بهتر این ساختار، بررسی می‌کنیم که چرا یک رأس خارج از C_5 نمی‌تواند الگوی همسایگی دیگری داشته باشد. فرض کنید $u \notin S$ یک رأس دلخواه باشد و $N(u) \cap S$ را در نظر بگیرید:

- **همسایه:** اگر u هیچ همسایه‌ای در S نداشته باشد، مشکلی ایجاد نمی‌کند، اما به‌دلیل نداشتن $2K_2$ ، اگر دو رأس از این نوع بین خودشان یال داشته باشند، آن یال به‌همراه هر یال از C_5 یک $2K_2$ می‌سازد. پس چنین رأس‌هایی باید کاملاً تنها باشند.

- **۱ همسایه:** فرض کنید u فقط به v متصل است. یال uv و یال v_2v_3 (که در C_5 وجود دارد) دو یال کاملاً مجزا هستند و هیچ یال عرضی بین آن‌ها وجود ندارد (چون u فقط به v وصل است و v به v_2 یا v_3 وصل نیست). بنابراین این حالت یک $2K_2$ ایجاد می‌کند و ممنوع است.

- **۲ همسایه مجاور:** فرض کنید u به v و v_1 متصل است. رأس‌های u ، v و v_1 یک مثلث می‌سازند، و v_2 که به v_1 متصل است (اما به u متصل نیست) یک برگ محسوب می‌شود. این دقیقاً یک پنجه است. پس این حالت ممنوع است.

- **۲ همسایه غیرمجاور:** تنها حالت باقی‌مانده. فرض کنید u به دو رأس غیرمجاور مانند v و v_2 (یا v و v_3) متصل است. در این حالت، نه مثلی برای ایجاد پنجه وجود دارد (چون دو رأس غیرمجاورند) و نه دو یال مجزایی که فاقد یال عرضی باشند. (برای مثال، اگر u به v و v_3 متصل باشد، یال‌های v_1v_2 و v_2v_3 توسط یال v_2v_4 به هم متصل می‌شوند). پس این حالت مجاز است.

- **۳ همسایه یا بیشتر:** اگر u به سه رأس از S متصل باشد، به‌دلیل ساختار C_5 ، حداقل دو تا از آن سه رأس مجاورند و با u یک مثلث می‌سازند. حال رأس چهارم یا پنجم دور که به یکی از رؤوس این مثلث متصل است، نقش برگ را ایفا می‌کند و در نتیجه یک پنجه ایجاد می‌شود. پس این حالت نیز ممنوع است.

در نتیجه، تنها حالتی که نه پنجه ایجاد می‌کند و نه $2K_2$ ، حالتی است که u دقیقاً به دو رأس غیرمجاور روی C_5 متصل باشد، یعنی $N(u) \cap S = \{v_i, v_{i+2}\}$ (اندیس‌ها پیمانه ۵). فرض کنید $S = \{v, v_1, v_2, v_3, v_4\}$ یک C_5 را در $\mathcal{X} \in G$ القا کند. هر رأس $u \notin S$ برای این که نه پنجه و نه $2K_2$ ایجاد کند، باید دقیقاً یکی از دو حالت زیر را داشته باشد:

- u هیچ همسایه‌ای در S ندارد. در این صورت، به دلیل فاقد $2K_2$ بودن، u باید یک رأس تنها باشد.
 - u دقیقاً دو همسایه در S دارد که فاصله‌ی آن‌ها روی دور برابر ۲ است، یعنی $N(u) \cap S = \{v_i, v_{i+2}\}$ (اندیس‌ها پیمانه‌ی ۵ محاسبه می‌شوند).
- حال اگر دو رأس u و w خارج از S داشته باشیم که $N(u) \cap S = \{v_i, v_{i+2}\}$ و $N(w) \cap S = \{v_j, v_{j+2}\}$ آن‌گاه:

- اگر $i = j$ یا $|i - j| > 1$ ، آن‌گاه u به w متصل نیست (در غیر این صورت پنجه ایجاد می‌شود).
 - اگر $|i - j| = 1$ ، آن‌گاه u به w متصل است (در غیر این صورت $2K_2$ ایجاد می‌شود).
- همچنین، به دلیل فاقد $2K_2$ بودن، هر رأس $u \notin S$ که هیچ همسایه‌ای در S ندارد، یک رأس تنها است. خلاصه می‌کنیم که هر گراف ناکامل در $\mathcal{X}$ دقیقاً یک C_5 توسعه یافته است، یعنی گرافی که از C_5 با جایگزینی هر رأس با یک مجموعه‌ی مستقل (با اندازه‌ی دلخواه) و اضافه کردن یال‌ها بر اساس الگوی فوق به دست می‌آید، به علاوه‌ی تعدادی رأس تنها.

۲. محاسبه‌ی عدد رمزی برای بخش کامل

فرض کنید $\mathcal{X}$ مجموعه‌ی گراف‌های کامل در $\mathcal{X}$ باشد. از آنجا که $\mathcal{X}$ شامل تمام گراف‌های چندبخشی کامل است، با استدلالی مشابه قضیه‌ی ۳ داریم:

$$R_{\mathcal{X}}(p, q) = (p - 1)(q - 1) + 1.$$

۳. محاسبه‌ی عدد رمزی برای بخش ناکامل

فرض کنید $\mathcal{X}_1$ مجموعه‌ی گراف‌های ناکامل در $\mathcal{X}$ باشد، یعنی گراف‌هایی که هر کدام یک C_5 توسعه یافته به علاوه‌ی تعدادی رأس تنها هستند. توجه کنید که این گراف‌ها هیچ مثلثی ندارند (چون C_5 مثلث ندارد و توسعه آن نیز مثلث ایجاد نمی‌کند). بنابراین برای $p \geq 4$ ، این بخش برای کران پایین مفید نیست، اما برای $p = 3$ (یعنی وقتی به دنبال جلوگیری از مثلث هستیم) اهمیت پیدا می‌کند.

برای یافتن بزرگ‌ترین گراف در $\mathcal{X}_1$ که فاقد مجموعه‌ی مستقل q رأسی باشد، باید C_5 را به گونه‌ای توسعه دهیم که عدد استقلال حداکثر $q - 1$ باشد.

حالت q فرد. فرض کنید $q = 2k + 1$ که در آن $k \geq 1$. هر یک از پنج رأس C_5 را با یک مجموعه‌ی مستقل به اندازه‌ی k جایگزین می‌کنیم. تعداد کل رؤس برابر $\frac{5}{2}(q - 1) = 5k$ خواهد بود. بزرگ‌ترین مجموعه‌ی مستقل در این گراف برابر $2k = q - 1$ است (چون می‌توان از دو رأس مجاور روی C_5 مجموعه‌های مستقل متناظر را انتخاب کرد، اما انتخاب از سه رأس غیرمجاور ممکن نیست). عدد خوشه این گراف نیز ۲ است (چون مثلث ندارد).

حالت q زوج. فرض کنید $q = 2k$ که در آن $k \geq 2$. دو رأس مجاور روی C_5 را با مجموعه‌های مستقل به اندازه‌ی k و سه رأس باقی‌مانده را با مجموعه‌های مستقل به اندازه‌ی $k - 1$ جایگزین می‌کنیم. تعداد کل رؤس برابر $2k + 3(k - 1) = 5k - 3$ خواهد بود. با توجه به اینکه $\lfloor \frac{5}{2}(2k - 1) \rfloor = 5k - 3$ ، $\lfloor \frac{5}{2}(q - 1) \rfloor$ این مقدار برابر $\lfloor \frac{5}{2}(q - 1) \rfloor$ است. بزرگ‌ترین مجموعه‌ی مستقل در این گراف برابر $q - 1 = 2k - 1$ است (با انتخاب دو مجموعه‌ی بزرگ مجاور). عدد خوشه نیز ۲ است.

در هر دو حالت، با اضافه کردن یک رأس به این ساختارها، یک مجموعه‌ی مستقل به اندازه‌ی q به دست می‌آید. بنابراین:

$$R_{\mathcal{X}_1}(p, q) = \left\lfloor \frac{5}{2}(q - 1) \right\rfloor + 1.$$

۴. مقایسه و نتیجه‌گیری نهایی

اکنون دو مقدار $R_{\mathcal{X}}(p, q) = (p - 1)(q - 1) + 1$ و $R_{\mathcal{X}_1}(p, q) = \lfloor \frac{5}{2}(q - 1) \rfloor + 1$ را مقایسه می‌کنیم:

• برای $p = 3$:

$$R_{\mathcal{X}_1}(p, q) = \left\lfloor \frac{5}{2}(q - 1) \right\rfloor + 1 > (2)(q - 1) + 1 = R_{\mathcal{X}}(p, q),$$

زیرا برای $q \geq 3$ ، $\frac{5}{2}(q - 1) > 2(q - 1)$. بنابراین عدد رمزی کل کلاس برابر با مقدار بزرگ‌تر یعنی $R_{\mathcal{X}_1}$ است.

• برای $p \geq 4$:

$$R_{\mathcal{X}}(p, q) = (p - 1)(q - 1) + 1 > \left\lfloor \frac{5}{2}(q - 1) \right\rfloor + 1,$$

زیرا $(p - 1)(q - 1) \geq 3(q - 1) > \frac{5}{2}(q - 1)$. بنابراین عدد رمزی کل کلاس برابر با $R_{\mathcal{X}}$ است.

□

با ترکیب نتایج فوق، قضیه‌ی ۴ به‌طور کامل اثبات می‌شود.

۵.۲ کلاس $\mathcal{L}$

گراف G به کلاس $\mathcal{L}$ تعلق دارد اگر G فاقد هر دو گراف پنجه و چنگال باشد.

• **پنجه:** یک مثلث به همراه یک برگ.

• **چنگال:** گراف $K_{1,3}$ ، یعنی یک رأس مرکزی متصل به سه رأس که هیچ یالی بین آنها وجود ندارد.

قضیه ۵ [۵] برای اعداد صحیح $p \geq 3$ و $q \geq 3$ ،

$$R_{\mathcal{L}}(p, q) = \begin{cases} (p-1)(q-1) + 1, & p \geq 4, q \geq 3, \\ \lfloor \frac{p}{2} \rfloor (q-1) + 1, & p = 3, q \geq 3. \end{cases}$$

برای درک ساختار گراف‌های این کلاس، به قضیه‌ی زیر نیاز داریم که توسط اولاریو^۸ اثبات شده است.
قضیه‌ی اولاریو: هر گراف همبند در $\mathcal{L}$ یا مثلث ندارد است، یا یک گراف چندبخشی کامل است که اندازه‌ی هر بخش آن حداکثر ۲ است.

زیرا اگر گراف مثلث داشته باشد، به دلیل نداشتن پنجه، هیچ رأس خارج از مثلث نمی‌تواند دقیقاً به یک یا دو رأس مثلث متصل باشد (چون در این صورت یک پنجه ایجاد می‌شود). بنابراین هر رأس خارج از مثلث یا به همه‌ی رؤوس مثلث متصل است یا به هیچ‌یک. این ساختار به دست آمدن یک گراف چندبخشی کامل را نتیجه می‌دهد. همچنین فاقد پنجه بودن ایجاب می‌کند که هر بخش حداکثر ۲ رأس داشته باشد. اگر گراف مثلث نداشته باشد، فاقد پنجه بودن به این معناست که درجه‌ی هر رأس حداکثر ۲ است و در نتیجه هر مؤلفه‌ی همبند یک مسیر یا یک دور است.

اثبات

۱. حالت $p \geq 4$

ابتدا کران پایین را نشان می‌دهیم. کلاس $\mathcal{L}$ شامل تمام گراف‌های فاقد P_4 (یعنی اجتماع مجزای خوشه‌ها) است، بنابراین:

$$R_{\mathcal{L}}(p, q) \geq (p-1)(q-1) + 1.$$

برای کران بالا، فرض کنید $G \in \mathcal{L}$ یک گراف بدون $(K_p, \overline{K}_q)$ با بیشینه‌ی تعداد رأس باشد. اگر G یک اجتماع مجزای خوشه باشد، آن‌گاه حداکثر $(p-1)(q-1)$ رأس دارد.

⁸Olarriu

حال فرض کنید G دارای یک مؤلفه‌ی ناکامل مانند H باشد. بر اساس قضیه‌ی اولاریو، دو حالت ممکن است:

۱. H یک گراف چندبخشی کامل با بخش‌های حداکثر ۲ رأسی است: اگر H فاقد خوشه p رأسی باشد، آن‌گاه $|V(H)| \leq 2(p-1)$. برای اجتناب از مجموعه‌ی مستقل q رأسی، باید حداقل $\alpha(H)$ مؤلفه‌ی خوشه‌ای را با H جایگزین کنیم. هر مؤلفه‌ی خوشه‌ای $(p-1)$ رأس دارد، و $|V(H)| \leq 2(p-1)$ ، پس جایگزینی دو مؤلفه با H تعداد رؤوس را افزایش نمی‌دهد.

۲. H یک مسیر یا دور است: اگر $\alpha(H) = k$ ، آن‌گاه $|V(H)| \leq 2k + 1$ (برای مسیرها و دورها). برای جایگزینی k مؤلفه‌ی خوشه‌ای، به $k(p-1)$ رأس نیاز داریم. برای $p \geq 4$ و $k \geq 2$ ، داریم $k(p-1) \geq 3k > 2k + 1$ ، پس جایگزینی مؤلفه‌ها با H تعداد رؤوس را کاهش می‌دهد.

بنابراین، بزرگ‌ترین گراف بدون $(K_p, \overline{K}_q)$ در $\mathcal{L}$ ، اجتماع $q-1$ خوشه به‌اندازه‌ی $p-1$ است، که $(p-1)(q-1)$ رأس دارد. در نتیجه:

$$R_{\mathcal{L}}(p, q) \leq (p-1)(q-1) + 1.$$

با ترکیب کران بالا و پایین، برای $p \geq 4$ داریم:

$$R_{\mathcal{L}}(p, q) = (p-1)(q-1) + 1.$$

۲. حالت $p = 3$

در این حالت، به دنبال اجتناب از مثلث هستیم، پس فقط گراف‌های فاقد مثلث در $\mathcal{L}$ مهم هستند. این گراف‌ها مؤلفه‌هایی به‌صورت مسیر یا دور دارند (به‌جز K_3 که مثلث دارد). عدد رمزی برای این کلاس توسط بل‌مونت و همکاران [۴] و متیوز و سامنر [۷] محاسبه شده است:

$$R_{\mathcal{L}}(3, q) = \left\lfloor \frac{5}{4}(q-1) \right\rfloor + 1.$$

برای کامل‌بودن اثبات، ایده‌ی این محاسبه را شرح می‌دهیم. بزرگ‌ترین گراف در این کلاس که فاقد مجموعه‌ی مستقل q رأسی است، از اجتماع مسیرها و دورها ساخته می‌شود. با استفاده از ساختاری مشابه آنچه در قضیه‌ی ۴ دیدیم (توسیع C_5)، به تعداد $\lfloor \frac{5}{4}(q-1) \rfloor$ رأس می‌رسیم. بنابراین برای $p = 3$:

$$R_{\mathcal{L}}(3, q) = \left\lfloor \frac{5}{4}(q-1) \right\rfloor + 1.$$

با ترکیب دو حالت، قضیه‌ی ۵ به‌طور کامل اثبات می‌شود. $\square$

۶.۲ کلاس C

گراف H به کلاس C تعلق دارد اگر H فاقد هر دو گراف چنگال^۹ و الماس^{۱۰} باشد.

• چنگال: گراف $K_{1,3}$.

• الماس: گراف $K_4 - e$ ، یعنی دو مثلث که یک یال مشترک دارند.

قضیه ۶ [۵] برای اعداد صحیح $3 \leq q < p$,

$$R_C(p, q) = (p-1)(q-1) + 1.$$

کلاس C ارتباط عمیقی با گراف‌های خطی دارد.

لم ۱ [۵] فرض کنید $H = L(G)$ گراف خطی یک گراف G باشد. آن‌گاه H در C است اگر و تنها اگر هر مؤلفه‌ی همبند G یا یک مثلث باشد یا کلاً مثلث نداشته باشد.

اثبات: گراف‌های خطی همواره چنگال ندارند. پس تنها باید عدم وجود الماس را بررسی کنیم. اگر G دارای یک مثلث abc باشد و G خود مثلث نباشد، باید رأس x خارج از مثلث وجود داشته باشد که به یکی از رئوس مثلث، مثلاً a ، متصل است. در این صورت یال‌های ab, ac, bc و ax در $L(G)$ یک الماس ایجاد می‌کنند. پس اگر G مثلث داشته باشد و همبند باشد، باید دقیقاً خود مثلث باشد. عکس این مطلب واضح است.

لم ۲ [۵] برای گراف G با گراف خطی $H = L(G)$ ، داریم:

$$\omega(H) = \Delta(G), \quad \alpha(H) = \mu(G),$$

به جز حالت $G = K_3$ که در آن $\omega(H) = 3$ ولی $\Delta(G) = 2$.

اثبات: تساوی $\alpha(H) = \mu(G)$ مستقیماً از تعریف گراف خطی نتیجه می‌شود: مجموعه‌ای از یال‌های G که دو به دو مجاور نباشند، دقیقاً یک تطابق در G است. برای $\omega(H) = \Delta(G)$ ، توجه کنید که همه‌ی یال‌های مجاور یک رأس در G ، یک خوشه در H تشکیل می‌دهند، پس $\omega(H) \geq \Delta(G)$. برای عکس، اگر H دارای یک خوشه با حداقل ۴ رأس باشد، همه‌ی یال‌های متناظر در G باید یک رأس مشترک داشته باشند. پس $\omega(H) \leq \Delta(G)$. حالت $G = K_3$ استثناست زیرا $\Delta(G) = 2$ ولی $\omega(H) = 3$.

لم ۳ [۵] فرض کنید G گرافی باشد که هر مؤلفه‌ی آن یا مثلث است یا فاقد مثلث. اگر $d = \Delta(G)$ ، $m = \mu(G)$ و $d \geq 3$ ، آن‌گاه:

$$|E(G)| \leq d \cdot m.$$

⁹Claw

¹⁰Diamond

اثبات لم ۳ را با استقرا بر تعداد مؤلفه‌های مثلثی انجام می‌دهیم.

گام استقرا: اگر G دارای یک مؤلفه‌ی مثلثی K_3 باشد، $G' = G - K_3$ را در نظر بگیرید. از آنجا که $d \geq 3$ ، G' تهی نیست. واضح است که $\Delta(G') = d$ و $\mu(G') = m - 1$. بنابراین با فرض استقرا:

$$|E(G)| = |E(G')| + 3 \leq d(m - 1) + 3 \leq dm,$$

چون $d \geq 3$.

پایه‌ی استقرا: حال فرض کنید G مثلث نداشته باشد. فرض کنید M یک تطابق بیشینه با m یال باشد و C مجموعه‌ی رئوسی باشد که توسط یال‌های M پوشیده نشده‌اند. واضح است که C یک مجموعه‌ی مستقل است (در غیر این صورت می‌توانستیم M را بزرگ‌تر کنیم).

یال‌های M را به صورت $a_1b_1, a_2b_2, \dots, a_mb_m$ نام‌گذاری می‌کنیم، به گونه‌ای که a_j هیچ همسایه‌ای در C نداشته باشد (این امکان‌پذیر است زیرا در غیر این صورت می‌توانستیم مسیر افزاینده پیدا کنیم). همچنین $A = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ و $B = \{b_1, b_2, \dots, b_m\}$.

اگر G هیچ یالی بین دو رأس در A نداشته باشد، آن‌گاه هر یال G به یک رأس در B برخورد می‌کند، و از آنجا که هر رأس درجه‌اش حداکثر d است، تعداد کل یال‌ها حداکثر dm است.

حال فرض کنید G دارای یک یال $a_i a_j$ باشد که دو رأس در A را به هم متصل می‌کند. بدون کاستن از کلیت، فرض کنید b_i حداکثر یک همسایه در C دارد (در غیر این صورت می‌توانستیم مسیر افزاینده بسازیم). اگر b_i به b_j متصل باشد، یال‌های $a_i a_j$ و $b_i b_j$ را با یال‌های $a_j b_i$ و $a_i b_j$ جایگزین می‌کنیم (که به دلیل عدم وجود مثلث در G وجود ندارند). این جایگزینی تعداد یال‌ها و درجه‌ی رئوس را تغییر نمی‌دهد.

اگر b_i به b_j متصل نباشد، آن‌گاه درجه‌ی b_i حداکثر d است (چون b_i حداکثر یک همسایه در C دارد و به دلیل مثلث نداشتن، حداکثر یک همسایه در هر یال تطابق). بنابراین با جایگزینی یال $a_i a_j$ با یال $b_i a_j$ ، $\Delta(G)$ افزایش نمی‌یابد و تعداد یال‌ها حفظ می‌شود.

با اعمال این تبدیل به هر یالی که دو رأس در A را به هم متصل می‌کند، G را به گراف G' تبدیل می‌کنیم که همان تعداد یال دارد، هر یال آن به یک رأس در B برخورد می‌کند، و هر رأس در B درجه‌اش حداکثر d است. بنابراین G' حداکثر dm یال دارد و در نتیجه G نیز حداکثر dm یال دارد. این اثبات لم ۳ را کامل می‌کند.

اثبات قضیه‌ی ۶

ابتدا کران پایین را نشان می‌دهیم. کلاس $\mathcal{C}$ شامل تمام گراف‌های بدون P_3 است، بنابراین:

$$R_{\mathcal{C}}(p, q) \geq (p - 1)(q - 1) + 1.$$

حال کران بالا را اثبات می‌کنیم. یک گراف $H \in \mathcal{C}$ با $\omega(H) = p - 1$ و $\alpha(H) = q - 1$ را در نظر بگیرد و فرض کنید G گرافی باشد که $H = L(G)$.

از لم ۱ می‌دانیم که هر مؤلفه‌ی G یا مثلث است یا فاقد مثلث.

حالت ۱: $\Delta(G) \geq 3$. از لم ۲ داریم $\omega(H) = \Delta(G) = p - 1$ و $\alpha(H) = \mu(G) = q - 1$. از آنجا که $p > q$ ، نتیجه می‌شود $p - 1 > q - 1$ ، یعنی $\Delta(G) > \mu(G)$. بنابراین با استفاده از لم ۳:

$$|V(H)| = |E(G)| \leq (p - 1)(q - 1).$$

حالت ۲: $\Delta(G) \leq 2$. در این صورت هر مؤلفه‌ی G یک مسیر یا یک دور است. بنابراین هر مؤلفه‌ی H نیز یک مسیر یا یک دور است، و در نتیجه $\omega(H) \leq 3$. از آنجا که $p > q \geq 3$ ، داریم $\omega(H) = p - 1 = 3$. پس $p = 4$ و $q = 3$. در این حالت $\mu(G) = \alpha(H) = q - 1 = 2$. از آنجا که $\omega(H) = 3$ ، G دارای یک مؤلفه‌ی مثلثی است، و چون $\mu(G) = 2$ ، علاوه بر مؤلفه‌ی مثلثی، دقیقاً یک مؤلفه‌ی دیگر با بیش از یک رأس وجود دارد که حداکثر ۳ رأس دارد. بنابراین H برابر با یکی از گراف‌های $K_3 + K_1$ ، $K_3 + K_2$ یا $K_3 + K_3$ است. در هر سه حالت، H حداکثر $(p - 1)(q - 1) = 6$ رأس دارد.

در هر دو حالت نشان دادیم که اگر $\omega(H) = p - 1$ و $\alpha(H) = q - 1$ ، آن‌گاه تعداد رئوس H حداکثر $(p - 1)(q - 1) + 1$ است. به عبارت دیگر، اگر H حداقل $(p - 1)(q - 1) + 1$ رأس داشته باشد، آن‌گاه یا $\omega(H) \geq q$ یا $\alpha(H) \geq q$. بنابراین:

$$R_{\mathcal{C}}(p, q) \leq (p - 1)(q - 1) + 1.$$

با ترکیب کران بالا و پایین، برای $p > q \geq 3$ داریم:

$$R_{\mathcal{C}}(p, q) = (p - 1)(q - 1) + 1.$$

□

این اثبات قضیه‌ی ۶ را کامل می‌کند.

۷.۲ جمع‌بندی

در این فصل، محاسبه اعداد رمزی را برای شش کلاس مختلف از گراف‌ها بیان کردیم. جدول ۱ خلاصه‌ای از تمام نتایج به‌دست‌آمده را نشان می‌دهد.

نکات مهم و مشاهدات

- در رده‌ی فاقد پنجه و مکمل پنجه و همچنین رده‌ی فاقد پنجه و چنگال، حالت $p = 3$ عدد رمزی متفاوتی دارد زیرا گراف‌های ناکامل در این کلاس‌ها مثلث ندارند و بنابراین برای جلوگیری از K_3 مؤثرتر هستند.

جدول ۱: خلاصه‌ی اعداد رمزی برای رده‌های مختلف گراف‌ها

عدد رمزی $R_C(p, q)$	رده‌ی گراف
$\begin{cases} 6 & p = q = 3 \\ 9 & p = 3, q = 4 \\ 3q - 2 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$	$\mathcal{A}$
$\begin{cases} 6 & p = q = 3 \\ p + 2q - 2 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$	$\mathcal{B}$
$\begin{cases} 6 & p = q = 3 \\ (p-1)(q-1) + 1 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$	$\mathcal{X}$ (بدون پنجه و مکمل پنجه)
$\begin{cases} (p-1)(q-1) + 1 & p \geq 4, q \geq 3 \\ \lfloor \frac{5}{4}(q-1) \rfloor + 1 & p = 3, q \geq 3 \end{cases}$	$\mathcal{X}$ (بدون پنجه و $2K_2$)
$\begin{cases} (p-1)(q-1) + 1 & p \geq 4, q \geq 3 \\ \lfloor \frac{5}{4}(q-1) \rfloor + 1 & p = 3, q \geq 3 \end{cases}$	$\mathcal{Y}$
$p > q \geq 3$ برای $(p-1)(q-1) + 1$	$\mathcal{C}$

- رده‌ی فاقد چنگال و الماس یک مثال جالب از یک کلاس رمزی خوب^{۱۱} است: اگرچه این کلاس زیررده‌ای از گراف‌های کامل نیست، اما همچنان عدد رمزی $(p-1)(q-1) + 1$ را برای تعداد بی‌نهایتی از مقادیر p و q (برای $p > q$) به‌دست می‌دهد.
- رده‌ی فاقد چنگال و پنجه و رده‌ی فاقد پنجه و $2K_2$ رمزی کامل^{۱۲} هستند، زیرا برای همه‌ی مقادیر به‌جز حالت $p = 3$ عدد رمزی $(p-1)(q-1) + 1$ را دارند.

^{۱۱}Ramsey good

^{۱۲}Ramsey perfect

فصل ۳

اعداد رمزی کوچک برای کتاب‌ها، چرخ‌ها و تعمیم‌ها

در این فصل به بررسی مقاله‌ی «اعداد رمزی کوچک برای کتاب‌ها، چرخ‌ها و تعمیم‌ها» [۴] از برنارد لیدیکی و همکاران می‌پردازیم. در فصل قبل، مجموعه‌ی گراف‌های مورد بررسی را محدود کردیم و نشان دادیم که چگونه محدود کردن این مجموعه به یک رده‌ی خاص، محاسبه‌ی دقیق عدد رمزی را ممکن می‌سازد، اما شکل هدفی که به دنبالش بودیم (خوشه یا مجموعه‌ی مستقل) همچنان همان شکل کلاسیک باقی ماند. در این فصل، مجموعه‌ی گراف‌های مورد بررسی را محدود نمی‌کنیم، اما شکل هدف را تغییر می‌دهیم؛ به جای یک خوشه، به دنبال یک کتاب یا یک چرخ می‌گردیم.

به ازای دو گراف G و H (که در این فصل، هر دو یا از خانواده‌ی کتاب‌ها خواهند بود، یا هر دو از خانواده‌ی چرخ‌ها)، عدد رمزی $R(G, H)$ کوچک‌ترین عدد صحیح n است به طوری که در هر رنگ‌آمیزی با دو رنگ (مثل قرمز و آبی) یال‌های گراف کامل K_n ، یا یک زیرگراف قرمز هم‌ریخت با G وجود دارد، یا یک زیرگراف آبی هم‌ریخت با H .

در ادامه‌ی این فصل به بررسی روش‌های محاسباتی‌ای می‌پردازیم که در یافتن اعداد رمزی برای برخی رده‌های خاص از گراف‌ها، از جمله گراف‌های کتاب و گراف‌های چرخ، مؤثر بوده‌اند.

۱.۳ تعاریف و مفاهیم مقدماتی

پیش از ورود به نتایج، دو خانواده‌ی مهم از گراف‌ها را تعریف می‌کنیم:

تعریف ۱۱ (کتاب) کتاب B_k یک گراف با $k + 2$ رأس است که شامل:

- یک یال uv به نام ستون فقرات^{۱۳}،
 - k رأس به نام صفحات^{۱۴} که هر کدام دقیقاً به u و v متصل هستند (و هیچ یالی بین صفحات وجود ندارد).
- به عبارت دیگر، B_k گرافی است که از اجتماع یک K_2 (ستون فقرات) و k رأس که همسایه‌ی مشترک هر دو رأس ستون فقرات هستند، تشکیل شده است.

تعریف ۱۲ (چرخ) چرخ W_k یک گراف با k رأس است که شامل:

¹³Spine

¹⁴Pages

• یک دور به طول $k - 1$ ،

• یک رأس مرکزی که به همه ی رئوس دور متصل است.

به عبارت دیگر، W_k از یک دور C_{k-1} با اضافه کردن یک رأس همسایه با همه ی رئوس دور به دست می آید.

توجه کنید که B_1 دقیقاً یک مثلث است (یک K_3)، و B_2 یک K_4 با یک یال حذف شده است (الماس). همچنین W_3 دقیقاً یک K_3 است (چون دور C_2 معنی ندارد)، و W_4 یک K_4 است (چون دور C_3 با اضافه کردن رأس مرکزی، یک K_4 می دهد).

۲.۳ نتایج اصلی

مقاله ی [۴] شامل دو دسته ی اصلی از نتایج است:

۱. اعداد رمزی برای کتاب ها و چرخ ها (جدول ۲)،

۲. اعداد رمزی تعمیم یافته^{۱۵} که در آن به دنبال یک K_s با حداکثر t رنگ در یک رنگ آمیزی r -رنگ هستیم.

جدول ۲ خلاصه ای از نتایج به دست آمده را نشان می دهد. ستاره ها نشان دهنده ی کران های دقیق (تساوی)

هستند.

¹⁵Generalized Ramsey Numbers

جدول ۲: کران‌های جدید برای اعداد رمزی کتاب‌ها و چرخ‌ها، و اعداد رمزی تعمیم‌یافته

عدد رمزی	کران پایین (جدید)	کران بالا (جدید)	کران پایین (قدیم)	کران بالا (قدیم)
$R(W_\delta, W_\gamma)$	۱۵*	۱۵*		۱۶
$R(W_\delta, W_\alpha)$	۱۸*	۱۸*	۱۷	
$R(B_\gamma, B_\lambda)$	۲۱*	۲۱*	۱۹	۲۲
$R(B_\gamma, B_\alpha)$	۲۲		۲۱	۲۴
$R(B_\gamma, B_{\lambda.})$	۲۵		۲۳	۲۶
$R(B_\gamma, B_\gamma)$	۲۰*	۲۰*		
$R(B_\epsilon, B_\gamma)$	۲۲	۲۳		
$R(B_\delta, B_\epsilon)$	۲۳*			۲۳
$R(B_\epsilon, B_\gamma)$	۲۷*			۲۷
$R(B_\epsilon, B_\lambda)$	۲۹*			۲۹
$R(B_\gamma, B_\lambda)$	۳۱*			۳۱
$R(B_\lambda, B_\lambda)$	۳۳*			۳۳
$GR(3, K_\epsilon, 2)$	۱۰*	۱۰*		
$GR(3, K_\delta, 2)$	۲۰	۲۳		
$GR(3, K_\epsilon, 2)$	۳۲	۵۴		
$GR(4, K_\epsilon, 2)$	۱۵	۱۷		
$GR(4, K_\epsilon, 3)$	۱۰*	۱۰*		

پس از مشاهده‌ی نتایج جدول، یک لم کلیدی را بیان می‌کنیم که بسیاری از کران‌های جدول را توضیح می‌دهد.

لم ۱ [۴] برای تمام $4 \leq n \leq 21$ ، کران‌های زیر برقرار هستند

$$4n - 3 \leq R(B_{n-2}, B_n), \quad (1)$$

$$R(B_{n-1}, B_n) = 4n - 1, \quad (2)$$

$$4n + 1 \leq R(B_n, B_n) \leq 4n + 2 \quad (3)$$

اثبات لم:

اثبات این لم به دو بخش تقسیم می‌شود:

کران‌های بالا: کران‌های بالا در روابط (۲) و (۳) توسط روسو و شیهان^{۱۶} [۱۰] با استفاده از روش‌های تحلیلی اثبات شده است. کران‌های پایین با استفاده از گراف‌های چندچرخشی^{۱۷} به دست آمده‌اند که در بخش‌های بعد شرح داده شده است.

۳.۳ روش‌های مورد استفاده

۱.۳.۳ روش جستجوی تابو

برای اثبات یک کران پایین، کافی است رنگ‌آمیزی‌ای از یال‌های K_{n-1} پیدا شود که هیچ زیرگراف ممنوعه‌ای در آن وجود نداشته باشد. از آنجا که تعداد رنگ‌آمیزی‌های ممکن بسیار زیاد است، بررسی همه‌ی آن‌ها عملاً امکان‌پذیر نیست. به همین دلیل، نویسندگان از روش **جستجوی تابو**^{۱۸} استفاده کرده‌اند که یک روش جستجوی محلی برای یافتن رنگ‌آمیزی‌های مناسب است. روند کلی این روش به صورت زیر است:

۱. ابتدا یک رنگ‌آمیزی تصادفی از یال‌های K_{n-1} انتخاب می‌شود.
۲. سپس تعداد زیرگراف‌های ممنوعه در این رنگ‌آمیزی محاسبه می‌شود. این مقدار را امتیاز^{۱۹} رنگ‌آمیزی می‌نامند.
۳. در هر مرحله، رنگ یکی از یال‌ها به گونه‌ای تغییر داده می‌شود که امتیاز تا حد امکان کاهش یابد.
۴. برای جلوگیری از بازگشت به رنگ‌آمیزی‌های بررسی‌شده، از یک مجموعه‌ی تابو استفاده می‌شود که این رنگ‌آمیزی‌ها را ذخیره می‌کند.

عامل مهم در کارایی این روش، محاسبه‌ی سریع امتیاز هر رنگ‌آمیزی است. برای گراف‌های کتاب، تعداد کتاب‌های B_k را می‌توان بدون شمارش مستقیم همه‌ی آن‌ها محاسبه کرد. اگر uv یک یال از گراف باشد، تعداد کتاب‌های B_k که uv ستون فقرات آن‌ها را تشکیل می‌دهد، برابر است با

$$\binom{|N(u) \cap N(v)|}{k}.$$

¹⁶Rousseau and Sheehan

¹⁷Polycirculant graphs

¹⁸Tabu Search

¹⁹Score

بنابراین، تعداد کل کتاب‌های B_k در گراف از رابطه‌ی

$$\#B_k \text{ در } G = \sum_{uv \in E(G)} \binom{|N(u) \cap N(v)|}{k}$$

به دست می‌آید.

استفاده از این رابطه باعث می‌شود امتیاز هر رنگ‌آمیزی با سرعت بسیار بیشتری محاسبه شود و در نتیجه اجرای الگوریتم نیز کارآمدتر باشد.

۲.۳.۳ گراف‌های چندچرخشی

یک گراف k – چندچرخشی^{۲۰} است اگر دارای یک خودریختی غیربدیهی باشد که اندازه‌ی همه‌ی مدارهای آن برابر n/k باشد. به عبارت ساده‌تر، گراف دارای ساختار تناوبی است که به ما امکان می‌دهد تمام گراف‌های با این ساختار را به صورت جامع تولید کنیم. پیش از ادامه، اصطلاح «گراف رمزی» را دقیق‌تر تعریف می‌کنیم.

تعریف ۱۳ به ازای دو گراف G و H ، یک گراف رمزی (G, H) بر روی n رأس، گرافی است که نه خود شامل زیرگرافی هم‌ریخت با G باشد، و نه مکمل آن شامل زیرگرافی هم‌ریخت با H .

وجود چنین گرافی، کران پایین $R(G, H) \geq n + 1$ را اثبات می‌کند.

بسیاری از گراف‌های اکستریمال (بیشینه) برای مسائل رمزی، ساختار چندچرخشی دارند. به عنوان مثال، تنها گراف رمزی (B_2, B_8) بر روی ۲۰ رأس، دارای ۲۴۰ خودریختی است و ۴ – چندچرخشی می‌باشد. با استفاده از تولید جامع گراف‌های چندچرخشی، نویسندگان توانسته‌اند کران‌های پایین جدیدی برای کتاب‌ها بیابند. به عنوان مثال، آن‌ها نشان داده‌اند که دقیقاً هفت گراف ۲ – چندچرخشی رمزی (B_2, B_9) بر روی ۲۰ رأس وجود دارد (و یک گراف ۳ – چندچرخشی رمزی (B_2, B_{10}) بر روی ۲۴ رأس).

کاربرد در اثبات لم: از گراف‌های ۲ – چندچرخشی برای اثبات کران‌های پایین لم ۱ استفاده شده است. به ازای هر n در بازه‌ی $21 \leq n \leq 4$ ، با استفاده از الگوریتم جامع [۴]، گراف‌های ۲ – چندچرخشی با تعداد رئوس مشخص را تولید کرده و بررسی کرده‌اند که آیا از کتاب‌های ممنوعه عاری هستند یا خیر. نتایج این جستجو به شرح زیر است:

- یک گراف $4n - 4$ رأسی یافت شده است که فاقد B_{n-2} در خود و فاقد B_n در مکمل است. این نشان می‌دهد که $R(B_{n-2}, B_n) \geq 4n - 3$.

²⁰k-polycirculant

²¹Ramsey-(G,H)-graph

- یک گراف $4n - 2$ رأسی یافت شده است که فاقد B_{n-1} در خود و فاقد B_n در مکمل است. با ترکیب با کران بالای [۱۰]، تساوی $R(B_{n-1}, B_n) = 4n - 1$ اثبات می‌شود.

- یک گراف $4n$ رأسی یافت شده است که فاقد B_n در خود و مکمل است. با ترکیب با کران بالای [۱۰]، کران‌های دوطرفه $4n + 1 \leq R(B_n, B_n) \leq 4n + 2$ اثبات می‌شود.

در تمام این ساختارها، بلوک سیرکولانت اول (زیرگراف القایی توسط اولین مدار خودریختی) مکمل بلوک دوم است. همه‌ی این گراف‌ها با برنامه‌ی SageMath [۱۱] تأیید شده‌اند و کد مربوطه در آدرس عمومی نویسندگان در دسترس است.

توجه کنید که لم فقط برای $4 \leq n \leq 21$ بیان شده است، زیرا برای n ‌های بزرگ‌تر، تعداد گراف‌های چندچرخشی به شدت افزایش می‌یابد و تولید جامع آن‌ها عملاً غیرممکن می‌شود.

۳.۳.۳ روش جبر پرچم

روش جبر پرچم^{۲۲} نخستین بار توسط الکساندر رازباروف [۹] در سال ۲۰۰۷ معرفی شد و امروزه یکی از مهم‌ترین ابزارهای ترکیبیات اکستریمال به شمار می‌رود. این روش به‌ویژه در مسائلی که هدف آن‌ها تعیین کران‌های بهینه برای کمیت‌های مختلف گرافی است، مانند مسائل توران و برخی مسائل نظریهٔ رمزی، کاربرد فراوانی دارد. ایدهٔ اصلی این روش آن است که به جای بررسی مستقیم یک گراف بزرگ، فراوانی وقوع زیرگراف‌های کوچک در آن مطالعه شود. برای هر گراف کوچک F ، چگالی القایی آن در گراف G به صورت احتمال ظاهر شدن F به عنوان زیرگراف القایی مجموعه‌ای از رأس‌های انتخاب‌شده به طور تصادفی تعریف می‌شود. اگرچه این چگالی‌ها تنها اطلاعات محلی گراف را توصیف می‌کنند، اما مجموعهٔ آن‌ها اطلاعات ارزشمندی دربارهٔ ساختار کلی گراف در اختیار قرار می‌دهد.

برای به دست آوردن روابط قوی‌تر میان این چگالی‌ها، رازباروف مفهوم پرچم^{۲۳} را معرفی کرد. پرچم، گرافی است که تعدادی از رأس‌های آن برچسب‌گذاری شده‌اند. این برچسب‌ها هنگام نمونه‌گیری حفظ می‌شوند و امکان بررسی وابستگی میان زیرگراف‌های مختلف را فراهم می‌کنند. به کمک این اطلاعات اضافی، می‌توان روابط جبری متعددی میان چگالی‌های زیرگراف‌ها استخراج کرد، به همین دلیل این روش «جبرهای پرچم» نام گرفته است.

بسیاری از نامساوی‌های مورد نیاز در این روش را می‌توان به صورت مجموعی از عبارات مربعی نوشت که همواره نامنفی هستند. یافتن ضرایب مناسب این نامساوی‌ها به حل یک مسئلهٔ برنامه‌ریزی نیمه‌معین^{۲۴} تبدیل می‌شود. از آنجا که جبرهای پرچم ذاتاً برای مطالعهٔ رفتار مجانبی گراف‌های بزرگ طراحی شده‌اند، این

²²Flag Algebra

²³Flag

²⁴Semidefinite Programming (SDP)

روش به طور مستقیم برای مسائل متناهی نظریه رمزی قابل استفاده نیست. به همین دلیل، نویسندگان با استفاده از تکنیک **بادکردن**^{۲۵}، گراف‌های بزرگ‌تری از مسئله اصلی می‌سازند تا بتوان چارچوب جبرهای پرچم را بر آن‌ها اعمال کرد و در نهایت کران‌های به‌دست‌آمده را به مسئله متناهی اولیه منتقل نمود.

۴.۳.۳ تولید از پایین به بالا

این روش^{۲۶} برای مقادیر بسیار کوچک که امکان جستجوی جامع وجود دارد، به کار می‌رود. ایده این است که از یک گراف کوچک (مثلاً یک رأس) شروع کنیم و در هر مرحله یک رأس جدید به همه‌ی روش‌های ممکن اضافه کنیم، به شرطی که زیرگراف ممنوعه ایجاد نشود. این روش با استفاده از برنامه‌ی geng [۲] از بسته‌ی nauty پیاده‌سازی شده است.

با این روش، نویسندگان توانستند مقادیر $R(W_5, W_7)$ و $R(W_5, W_9)$ را به ترتیب در ۹۰ ثانیه و ۳۶ ساعت پردازنده^{۲۷} بیابند. محاسبه‌ی $R(B_7, B_8)$ بسیار سنگین‌تر بود و به حدود ۲ سال زمان پردازنده نیاز داشت.

۴.۳ اعداد رمزی تعمیم‌یافته

تعریف ۱۴ (عدد رمزی تعمیم‌یافته) $GR(r, K_s, t)$ کوچک‌ترین عدد n است به طوری که هر رنگ‌آمیزی n یال‌های K_n با r رنگ، شامل یک K_s باشد که حداکثر از t رنگ استفاده کرده باشد.

توجه کنید که حالت $t = 1$ دقیقاً همان عدد رمزی کلاسیک r -رنگ است:

$$GR(r, K_s, 1) = R(\underbrace{K_s, \dots, K_s}_r).$$

نتایج جدید در این زمینه عبارتند از:

$$GR(3, K_4, 2) = 10, \quad GR(4, K_4, 3) = 10.$$

برای درک $GR(3, K_4, 2) = 10$ ، توجه کنید که:

- این عدد به دنبال کوچک‌ترین n است که هر رنگ‌آمیزی ۳ رنگه از K_n ، شامل یک K_4 با حداکثر ۲ رنگ باشد.

²⁵Blow-up

²⁶Bottom-up Generation

²⁷CPU

- کران پایین (≥ 10) با یک رنگ آمیزی ۹ رأسی اثبات می شود که در آن هر K_4 دقیقاً از ۳ رنگ استفاده کرده است. این رنگ آمیزی ساختار جالبی دارد: رنگ اول یک گراف پلی^{۲۸} بر روی ۹ رأس است و دو رنگ دیگر هر کدام ۳ مثلث مجزا هستند.

- کران بالا (≤ 10) با تولید از پایین به بالا اثبات می شود.

برای $GR(4, K_4, 3) = 10$ ، تنها گراف بیشینه بر روی ۹ رأس، گرافی است که هر رنگ آن دقیقاً $3K_2$ (سه مثلث مجزا) است. جالب است که اگر هر دو رنگ را با هم ترکیب کنیم، به همان گرافی می رسیم که برای $GR(3, K_4, 2)$ توضیح داده شد.

۵.۳ مقایسه با روش های دیگر

در این مقاله از چندین روش متفاوت استفاده کرده اند که هر کدام نقاط قوت و ضعف خود را دارند:

- **جستجوی تابو:** انعطاف پذیرترین روش است و برای یافتن کران های پایین در مسائل جدید به خوبی عمل می کند. با این حال، ماهیت تصادفی آن به این معناست که موفقیت تضمین شده نیست.
- **گراف های چندچرخشی:** روش جامعی است که می تواند تمام گراف های با ساختار تناوبی را تولید کند. اما اگر گراف اکسترمال چندچرخشی نباشد، این روش آن را پیدا نمی کند.
- **روش جبر پرچم:** روشی سیستماتیک برای یافتن کران های بالا است که گواهی ریاضی قابل بررسی تولید می کند. اما پیاده سازی آن پیچیده است و برای هر مسئله نیاز به تنظیمات خاصی دارد.
- **تولید از پایین به بالا:** تنها روشی است که می تواند یک کران بالا را به صورت کاملاً قطعی اثبات کند (با شمردن همه ی حالت ها). اما به سرعت برای مقادیر بزرگتر از کارایی می افتد.

۶.۳ جمع بندی

در این فصل، مقاله ی [۴] را بررسی کردیم که با استفاده از ترکیبی از روش های محاسباتی، کران های جدیدی برای اعداد رمزی کتاب ها و چرخ ها به دست آورده است.

این مقاله نمونه ی از رویکرد مبتنی بر محاسبات به مسائل رمزی است که در سال های اخیر با افزایش قدرت محاسباتی و توسعه ی الگوریتم های جدید، رو به گسترش است. در حالی که روش های نظری مانند آنچه در فصل قبل [۵] دیدیم، برای رده های وسیعی از گراف ها پاسخ های کامل ارائه می دهند، روش های محاسباتی برای یافتن مقادیر دقیق اعداد رمزی برای گراف های خاص، به ویژه در مقیاس های کوچک، بسیار مؤثرند.

²⁸Paley

- [1] J. A. Bondy and U. S. R. Murty, *Graph Theory*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 244, Springer London, 2008.
- [2] J. Goedgebeur and S. Van Overberghe, “New bounds for Ramsey numbers $R(K_k - e, K_l - e)$,” *Discrete Applied Mathematics*, vol. 307, pp. 212–221, 2022.
- [3] R. E. Greenwood and A. M. Gleason, “Combinatorial relations and chromatic graphs,” *Canadian Journal of Mathematics*, vol. 7, pp. 1–7, 1955.
- [4] B. Lidický, G. McKinley, F. Pfender, and S. Van Overberghe, “Small Ramsey numbers for books, wheels, and generalizations,” *The Electronic Journal of Combinatorics*, vol. 32, no. 4, article P4.64, 2025.
- [5] V. Lozin, “Ramsey Numbers and Graph Parameters,” *Graphs and Combinatorics*, vol. 40, article 29, 2024.
- [6] B. D. McKay and A. Piperno, “Practical graph isomorphism, II,” *Journal of Symbolic Computation*, vol. 60, pp. 94–112, 2014.
- [7] S. Olariu, “Paw-free graphs,” *Information Processing Letters*, vol. 28, no. 1, pp. 53–54, 1988.
- [8] F. P. Ramsey, “On a Problem of Formal Logic,” *Proceedings of the London Mathematical Society*, vol. s2-30, no. 1, pp. 264–286, 1930.
- [9] A. A. Razborov, “Flag Algebras,” *Journal of Symbolic Logic*, vol. 72, no. 4, pp. 1239–1282, 2007.
- [10] C. C. Rousseau and J. Sheehan, “On Ramsey numbers for books,” *Journal of Graph Theory*, vol. 2, no. 1, pp. 77–87, 1978.
- [11] The Sage Developers, *SageMath, the Sage Mathematics Software System (Version 10.3)*, 2024.