دانشکده علوم ریاضی
گروه ریاضی محض

پروژه کارشناسی ریاضی گرایش هندسه جبری محاسباتی

عنوان

مقدمه‌ای بر جبر دیفرانسیلی محاسباتی

پژوهشگر

سیدمهریار علوی

استاد راهنما

دکتر امیر هاشمی

قدردانی

به جهان خرم ازآنم که جهان خرم ازاوست　　　عاشقم بر همه عالم که همه عالم از اوست

غم و شادی بر عارف چه تفاوت دارد　　　ساقیا باده بده شادی آن کاین غم از اوست

منت خدای را عزوجل که طاعتش موجب قربت است و به شکر اندرش مزید نعمت. هر نفسی که فرو می‌رود ممد حیات است و چون برمی آید، مفرح ذات. پس در هر نفسی دو نعمت موجود است و بر هر نعمتی شکری واجب.

با همه وجود و از غایت اخلاص و تواضع، این پایان‌نامه را مهربانترین همراهان زندگیم تقدیم می‌نمایم. پدر، مادر و برادر عزیزم که حضورشان همواره گرمابخش وجود من بوده است.

بر خود لازم می‌دانم رسم ادب و اخلاق را به جای آورده، فروتنانه از زحمات بی‌دریغ، ارزشمند و آموزنده جناب آقای دکتر هاشمی، تشکر و قدردانی نمایم. سعه صدر و سخاوتمندی ایشان در انتقال دانش و تجربیات، ستودنی است و نقشی بی‌بدیل در پیشبرد این پایان‌نامه داشته است. یقیناً غنای علمی این پایان‌نامه را، مرهون کلاس‌های درسی ایشان و جلسات هفتگی پایان‌نامه هستم.

در پایان و به رسم فروتنی، مراتب سپاس و قدردانی خویش را از اساتید محترم دانشگاه صنعتی اصفهان و به ویژه دانشکده علوم ریاضی، اعلام می‌دارم. عزیزانی که کلاس درسشان، مسیر آموختن را بر من هموار کرد و این پایان‌نامه، پیشکشی است ناقابل در راستای ارج نهادن به زحمات ارزنده این عزیزان.

سیدمهریار علوی

چکیده

جبر دیفرانسیلی از جمله شاخه‌های نوظهور در علم ریاضیات است که به مطالعه معادلات دیفرانسیل از دیدگاه جبری می‌پردازد. اگرچه این شاخه از ریاضیات به صورت کاملاً محض و براساس مفاهیم مجرد در ریاضیات، به ویژه پایه‌های جبر کلاسیک، بنا نهاده شده است؛ به وضوح کاربردهای چشمگیری در سایر علوم و مشخصاً علوم مهندسی خواهد داشت. هدف نهایی این شاخه از ریاضیات، مطالعه و بررسی دستگاه معادلات دیفرانسیل است و تضمین کننده برقراری یک پل ارتباطی قوی با سایر شاخه‌های ریاضیات و علوم پایه از جمله فیزیک است.

واژگان کلیدی حلقه دیفرانسیلی، میدان دیفرانسیلی، ایده‌ال دیفرانسیلی،جبر ریت، پایه گربنر، شبه تقسیم

فهرست مطالب

پیشگفتار

این پایان نامه در ۶ فصل به تشریح جبر دیفرانسیلی پرداخته است. در این مسیر، با ارائه قضایا و تعاریف، ابتدای راه خود را می‌پیماییم. این مفاهیم عمدتاً برگرفته از جبر، هندسه، جبر خطی و علوم کامپیوتر هستند. ارائه این مفاهیم، به مثابه ابزارهایی است که می‌تواند ما را در پیشبرد اهداف کاربردی یاری برساند و به عنوان حسن ختام در این پایان نامه مطرح شده است.

فصل نخست به یادآوری است برای آنان که پیشتر آموخته‌اند و آشنایی کوتاهی است برای آنان که بتوانند به سایر فصل‌های پایان‌نامه ورود پیدا کنند. در واقع در این فصل، مقدماتی از مفاهیم جبر، هندسه جبری و جبرخطی مطرح شده است و مطالب آن به عنوان مطالب ضروری در ادامه دنبال خواهد شد.

نقطه آغاز این شاخه از ریاضیات، آنجایی است که اتصال بین جبر و دیفرانسیل شکل می‌گیرد و مفاهیمی همچون، حلقه دیفرانسیلی، ایده‌آل دیفرانسیلی و میدان دیفرانسیلی تعریف می‌شوند. فصل دوم به بررسی این تعاریف و ارتباط بین آنها در قالب قضایا می‌پردازد و در نهایت پاسخگوی این سؤال است که قضایای موجود در جبر کلاسیک، بر چه اساسی در جبر دیفرانسیلی به ارث می‌رسد.

فصل سوم را با معرفی حلقه چندجمله‌ای‌های دیفرانسیلی و چندگونای دیفرانسیلی شروع می‌کنیم. تعلق به ایده‌آل، از طریق معرفی مجموعه مشخصه دیفرانسیلی و جایگزین کردن مجموعه‌ای متناهی با مجموعه‌ای نامتناهی از دستگاه چندجمله‌ای‌های دیفرانسیلی، از جمله مواردی است که در این فصل به آن خواهیم پرداخت. قسمت برجسته این فصل، آنجایی است که با نگاهی الگوریتمیک، به حل برخی مثال‌ها از دنیای فیزیک خواهیم پرداخت تا رنگ و بوی کاربرد موضوع نیز، استشمام شود.

در فصل چهارم، ایده‌آل دیفرانسیلی و چندگونای دیفرانسیلی در کانون توجهات خواهد بود. این رهیافت ما را به تعریف یک فضای توپولوژیک رهنمون خواهد ساخت. سپس پرداختن به قضایای صفرساز هیلبرت در فرم دیفرانسیلی در دستور کار قرار خواهد گرفت به گونه‌ای که پلی بین جبر و هندسه و دیفرانسیل برقرار می‌کند. در

نهایت تجزیه چندگونای دیفرانسیلی مطالعه و بررسی خواهیم کرد.

فصل پنجم به بسط میدان‌های دیفرانسیلی خواهد پرداخت و با رهیافتی برگرفته از جبر خطی، پایه دیفرانسیلی را به عنوانی ابزاری مهم در این زمینه معرفی خواهیم کرد. با به کار بردن این مفهوم در چندگوناهای دیفرانسیلی خواهیم دید که این پایه‌ها ابزار مفید و مهم کاربردی خواهند بود، چراکه چندگونای دیفرانسیلی همان دستگاه معادلات دیفرانسیلی است.

در فصل ششم تدریجاً از وزن تئوری پایان‌نامه کاسته و بر وزن کاربردی آن افزوده شده است. در این فصل، با بسط برخی مفاهیم مقدماتی جبر دیفرانسیلی، اثر آنها را بر روی توابع مقدماتی از جمله توابع مثلثاتی و لگاریتمی بررسی خواهیم کرد. سپس مفهوم جبری بودن یک عنصر روی یک میدان را با استفاده از مفاهیم جبر دیفرانسیلی مقدماتی تعمیم خواهیم داد و پس از آن با معرفی قضیه لیوویل و ارائه چند مثال، به بررسی کاربردهای متنوع آن خواهیم پرداخت.

فصل ۱

مقدمات جبری مورد نیاز

در این فصل، بر آن هستیم تا برخی از مفاهیم مورد نیاز در فصل‌های آتی را به صورت خلاصه و با یک معرفی مختصر بیان کنیم. برخی از این مفاهیم ممکن است برای دسته‌ای از دانشجویان ساده باشد به طوری که نیازی به مطالعه آن نداشته باشند. در این شرایط می‌توان از چنین قسمت‌هایی گذر کرد ولی در صورتی که دانشجو با برخی از این مفاهیم آشنا نیست، پیشنهاد می‌شود که این فصل را مطالعه کند. ضمن اینکه برخی از مطالب، تنها جنبه یادآوری دارد. مهمترین منابعی که در این فصل به کار گرفته شده، [۱۱، ۱۰، ۹، ۵، ۲، ۱] است.

۱.۱ مقدمه

در این فصل ابتدا به مرور برخی مفاهیم جبر کلاسیک می‌پردازیم. از جمله این مفاهیم، معرفی حلقه و به دنبال آن معرفی چند حلقه خاص است که مهمترین آنها حلقه‌های چند جمله‌ای‌های تک متغیره و چندمتغیره خواهد بود. ایده‌آل و میدان از جمله مفاهیم دیگری است که در این فصل معرفی خواهند شد. توجه به این نکته ضروری است که جهت گیری همه این تعاریف ، در راستای آموزه‌های جبر دیفرانسیلی خواهد بود، به گونه‌ای که خواننده را برای ورود به فصل‌های بعد آماده سازد. مفهوم مهم بعدی که برگرفته از هندسه جبری است و اهمیت بسیار زیادی در توسعه جبر دیفرانسیلی و قضایای اساسی مرتبط با آن دارد، چندگونا است. ترتیب چندجمله‌ای، چندجمله‌ای کمینه روی توسیع میدان جبری از دیگر مفاهیم معرفی شده در این فصل هستند. سپس الگوریتم تقسیم به عنوان یکی از پایه‌های اساسی در این مبحث، معرفی و شبه تقسیم به عنوان یک فرآیند الگوریتمیک معرفی می‌شود.

ایده‌آل اشباع شده، و جانشانی یک حلقه در حلقه دیگر، از دیگر مفاهیم پایه‌ای جبری است که به مانند یک ابزار در ادامه این پایان‌نامه استفاده خواهد شد. در نهایت قضایای صفرساز هیلبرت [1] ، به عنوان یکی از قضایای بنیادین در این شاخه معرفی خواهد شد.

۲.۱ آشنایی با برخی ساختارهای جبری و هندسی

آشنایی با برخی مفاهیم جبری و هندسی، جهت ورود به مباحث بعدی، امری اجتناب ناپذیر است. حلقه، ایده‌آل، میدان و چندگونا عمده مفاهیمی هستند که معرفی خواهند شد و به دنبال آن، مفاهیم مورد نیازی که از این تعاریف سرچشمه می‌گیرند؛ بیان خواهند شد. آشنایی با حلقه، سرآغاز این رشته خواهد بود.

۱.۲.۱ حلقه

حلقه مفهومی آشنا در جبر کلاسیک است و بیش از هر مفهوم دیگری در این مبحث مورد استفاده قرار می‌گیرد. در واقع معرفی چنین مفهومی یک مقدمه است برای آنکه با مفاهیم جدیدتری آشنا شویم که مهمترین آنها حلقه تقسیم، حلقه خارج قسمت، حلقه چندجمله‌ای‌های تک متغیره و حلقه چندجمله‌ای‌های چند متغیره هستند. اما پیش از این ابتدا مروری بر مفهوم حلقه داشته باشیم.

تعریف ۱.۲.۱ (حلقه). حلقه را می‌توان به صورت مجموعه‌ای ناتهی در نظر گرفت که به دو عمل جمع $+$ و ضرب $*$ تجهیز شده باشد. در این صورت، نماد $(R, +, *)$ را یک حلقه گوییم هرگاه سه شرط زیر را برآورده سازد:

۱. $(R, +)$ یک گروه آبلی [2] باشد، یعنی به‌ازای هر $a, b \in R$ رابطه $a + b = b + a$ برقرار باشد.

۲. $(R, *)$ یک نیم‌گروه باشد، یعنی دوخاصیت بسته بودن و شرکت‌پذیری را داشته باشد. منظور از بسته بودن آن است که به‌ازای هر $a, b \in R$ داشته باشیم $a * b \in R$ و مفهوم شرکت‌پذیری بدان معناست که به‌ازای هر $a, b, c \in R$ تساوی $a * (b * c) = (a * b) * c$ برقرار باشد.

[1] Hilbert Nullstellensatz
[2] Abelian Group

۳. ضرب و جمع حلقه نباید نسبت به هم مستقل باشند و لازم است تا بین آن‌ها ارتباطی برقرار باشد. این ارتباط را تحت عنوان خاصیت پخشی و به صورت زیر معرفی می‌کنیم:

$$(1)\ \ \forall a,b,c \in R \quad a*(b+c) = a*b + a*c,$$

$$(2)\ \ \forall a,b,c \in R \quad (b+c)*a = b*a + c*a.$$

تذکر ۱.۲.۱. به منظور سهولت در نوشتار، حلقه $(R,+,*)$ را با نماد R نمایش می‌دهیم.

حلقه جابجایی مدنظر در این تعریف، آن است که $(R,*)$ تشکیل یک نیم‌گروه آبلی بدهد، بدان مفهوم که کافی است خاصیت بسته بودن و شرکت پذیری برقرار باشد و نیازی به سایر ویژگی‌های گروه، مثل وجود عنصر خنثی و عنصر وارون نیست. مثال آشنا در این زمینه، حلقه اعداد صحیح با جمع و ضرب متداول است که به صورت $(\mathbb{Z},+,*)$ نمایش داده می‌شود. ویژگی آبلی بودن نیم‌گروه $(R,*)$ بدان معناست که به‌ازای هر $a,b \in R$ همواره عبارت $a*b = b*a$ برقرار باشد. در این صورت، چنین حلقه‌ای را یک حلقه جابجایی می‌نامیم. در ادامه خواهیم دید که این حلقه‌ها وزن بسیار زیادی در حوزه جبر دیفرانسیلی خواهند داشت.
همچنین در صورتی که عنصری مانند c در حلقه وجود داشته باشد به طوری که به‌ازای هر $a \in R$ عبارت $a*c = c*a = a$ برقرار باشد، عنصر c را یکِ حلقه، می‌نامیم و با نماد ۱ نمایش می‌دهیم. چنین حلقه‌ای را حلقه یکدار می‌نامیم.

نمادگذاری ۱.۲.۱. به منظور سهولت در نوشتار، از این به بعد، نماد $a*b$ را با ab نمایش می‌دهیم.

توجه به این نکته لازم و ضروری است که ۱ تنها یک نماد است و به معنای عدد یک نیست. ممکن است در حلقه‌ای یکِ حلقه، همان عدد ۱ باشد. حلقه اعداد صحیح از این نوع است ولی در حلقه ماتریس‌ها با جمع و ضرب شناخته شده، یکِ حلقه، ماتریس همانی است. اعداد صحیح مجهز به عملیات جمع و ضرب متداول، نمونه‌ای از یک حلقه جابجایی و یکدار است.

تذکر ۲.۲.۱. در تمام مباحث مطرح شده در این پایان‌نامه، تمرکز خود را بر روی حلقه‌های جابجایی و یکدار معطوف می‌کنیم و به صورت پیش فرض، حلقه مورد مطالعه، حلقه جابجایی یکدار با عنصر یکِ ۱ است؛ مگر آنکه خلاف آن ذکر شود.

حال که با مفهوم حلقه آشنا شدیم، به مطالعه و بررسی حلقه‌هایی می‌پردازیم که اساس و پایه همه آموزه‌های آتی در این پایان‌نامه خواهد بود. این حلقه‌ها، حلقه چندجمله‌ای‌های تک متغیره و حلقه چندجمله‌ای‌های چند متغیره هستند که نخستین درس در آموزه‌های هندسه جبری و جبر دیفرانسیلی هستند.

تعریف ۲.۲.۱ (حلقه چندجمله‌ای‌های تک متغیره). فرض کنیم R یک حلقه باشد. در این صورت حلقه $R[x]$ حلقه چندجمله‌ای‌های تک متغیره با ضرایب از R می‌نامیم و به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$R[x] = \{a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n \mid n \in \mathbb{N}, a_i \in R\}.$$

به سادگی نشان داده می‌شود که در صورتی که $R[x]$ را با جمع و ضرب حلقه R تجهیز نماییم، تمام ویژگی‌های حلقه برقرار است. هر عنصر دلخواه $f(x) \in R[x]$ را یک «چندجمله‌ای تک متغیره» و یا به زبان ساده، یک «چندجمله‌ای» می‌نامیم. اکنون این چندجمله‌ای را با دقت بیشتری مورد مطالعه و بررسی قرار می‌دهیم. یک چند جمله‌ای به شکل $f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_i x^i = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ را با شرط $a_n \neq 0$ در نظر بگیرید. در این صورت $a_0 \in R$ را جمله ثابت، $a_n \in R$ را جمله پیشرو و n را درجه چندجمله‌ای f می‌نامیم و به صورت $\deg(f) = n$ نمایش می‌دهیم. طبق تعریف درجه و از آنجایی که $a_0 \in K$ می‌توان گفت که درجه عناصر K همواره برابر با صفر است.

قرارداد ۱.۲.۱. درجه صفر را برابر با -1 یا $-\infty$ در نظر می‌گیریم.

تذکر ۳.۲.۱. در تعریف $f(x)$ متغیر x یک متغیر صوری است و تأثیری در جمع و ضرب و جابجایی دو چندجمله‌ای ندارد. در واقع این متغیر، می‌تواند با عناصر حلقه R جابجا شود.

تعریف ۳.۲.۱ (حلقه چندجمله‌ای‌های چند متغیره). فرض کنیم R یک حلقه است. در این صورت با قراردادن $S = R[x]$ حلقه جدیدی به نام S خواهیم داشت. با تعریف حلقه $S[y]$ حلقه‌ای با دو متغیر خواهیم داشت که آن را حلقه چندجمله‌ای با دو متغیر می‌نامیم و با $R[x, y]$ نمایش می‌دهیم و هریک از جملات آن به فرم $f(x) = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} r_{ij} x^i x^j$ است. با تکرار این فرآیند به صورت استقرایی، حلقه مذکور به n متغیر گسترش پیدا خواهد کرد و در این صورت «حلقه چندجمله‌ای‌های چند متغیره» را خواهیم داشت که به صورت $R[x_1, \ldots, x_n]$ نمایش داده می‌شود.

۲.۲.۱ ایده‌آل

مفهوم ایده آل برای اولین بار توسط ریاضیدان آلمانی ریچارد ددکیند [۳] در سال ۱۸۷۱ تعریف و توسعه داده شد. ایده‌آل، در جبر کلاسیک، زیرمجموعه‌ای ناتهی از یک حلقه جبری است که دارای ویژگی‌های مشخص باشد. شناخته شده‌ترین ایده‌آل‌هایی که می‌شناسیم، مجموعه مضارب یک عدد، در حلقه اعداد صحیح است. در این صورت $I \subseteq R$ را یک ایده‌آل از حلقه R می‌نامیم و با نماد $I \triangleleft R$ نمایش می‌دهیم هرگاه:

(1) $0 \in I,$

(2) $\forall f, g \in I \Rightarrow f + g \in I,$

(3) $\forall r \in R, \forall f \in I \Rightarrow rf \in I.$

تذکر ۴.۲.۱. در برخی از منابع، شرط اول را تحت عنوان ناتهی بودن I ذکر می‌کنند.

تعریف ۴.۲.۱. فرض کنیم H یک زیرمجموعه ناتهی از R باشد. ایده‌آل تولید شده توسط H را به صورت اشتراک همه ایده‌آل‌های R که شامل H باشند، تعریف می‌کنیم و با نماد $\langle H\rangle$ نمایش می‌دهیم. می‌توان اثبات کرد که $\langle H\rangle$ کوچکترین ایده‌آل R است که H را شامل می‌شود و نمایش آن به صورت زیر است:

$$\langle H\rangle = \{\sum_{i=۱}^{k} r_i h_i \mid k \in \mathbb{N}, r_۱, \ldots, r_k \in R, h_۱, \ldots, h_k \in H\}.$$

تعریف ۵.۲.۱. (جمع و ضرب ایده‌آل‌ها). می‌توان ایده‌آل‌های یک حلقه را با یکدیگر جمع و یا در یکدیگر ضرب نمود. فرض کنیم R یک حلقه و I و J دو ایده‌آل از این حلقه باشند. حاصل جمع دو ایده‌آل به صورت $I + J = \langle I \cup J\rangle$ و حاصل ضربشان به صورت $I.J = \langle ab \mid a \in I, b \in J\rangle$ تعریف می‌شود.

با توجه به تعاریف فوق، ثابت می‌شود که $I + J = \{a + b \mid a \in I, b \in J\}$ و با توجه به تعریف ۴.۲.۱ ثابت می‌شود که $I.J = \{\sum_{k=۱}^{n} a_i b_i \mid n \in \mathbb{N}, a_i \in I, b_i \in J\}$.

ایده‌آل‌ها انواع گوناگونی دارند که بسته به کاربرد و سطح یک مبحث معرفی و به کار گرفته می‌شوند. در این درس، با توجه به نیاز جبر دیفرانسیلی، به تعداد معدودی از آن‌ها اشاره می‌نماییم.

[3] Richard Dedekind

تعریف ۶.۲.۱ (ایده‌آل سره). فرض کنیم R یک حلقه و I یک ایده‌آل از این حلقه باشند. در این صورت I را ایده‌آل سره گوییم، هرگاه $R \neq I$ یا $I \subsetneq R$ یا به طور معادل $1 \notin I$. در ادامه ایده‌آل سره را با $I \subsetneq R$ نمایش می‌دهیم. در واقع هر سه شرط معادل یکدیگرند و وقوع یکی از آنها برای سره بودن یک ایده‌آل کافی است.

تعریف ۷.۲.۱ (ایده‌آل خارج قسمتی). فرض کنیم R یک حلقه باشد. اگر I و J دو ایده‌آل از این حلقه باشند، خارج قسمت I بر J را به صورت $I : J = \{f \in R \mid fJ \subset I\}$ تعریف می‌کنیم.

اکنون قصد آن داریم تا با مفهوم جدیدی آشنا شویم. می‌خواهیم ببینیم که اشباع یک ایده‌آل چیست؟ فرض کنیم R یک حلقه دلخواه و $I, J \lhd R$ دو ایده‌آل از این حلقه باشد. اگر $f \in J$، در این صورت، حاصل تقسیم I بر f را به صورت $I : f = \{g \in R \mid gf \in I\}$ از این تعریف کاملاً مشخص است که $I \subseteq I : f$. از طرفی به سادگی ثابت می‌شود که یک ایده‌آل نیز هست. یعنی هر سه شرط مذکور در تعریف ایده‌آل را دارد. به طور مشابه $I : f^2$ را به صورت $I : f^2 = \{g \in R \mid gf^2 \in I\}$ تعریف می‌کنیم. با تکرار متوالی این فرآیند، یک زنجیر صعودی به شکل $I \subseteq I : f \subseteq I : f^2 \subseteq \cdots$ از ایده‌آل‌های مذکور را خواهیم داشت. با توجه به فرم زنجیر صعودی این ایده‌آل‌ها، می‌توان ایده‌آل اشباع را به صورت $I : f^\infty = \bigcup_{i=0}^{\infty} I : f^i$ نیز تعریف کرد.

تعریف ۸.۲.۱ (ایده‌آل اشباع شده). ایده‌آلی است که با اشباع ایده‌آل خود برابر باشد. به عبارت دیگر، ایده‌آل I را اشباع گوییم هرگاه $I = I : f^\infty$.

تعریف ۹.۲.۱ (ایده‌آل اول). ایده‌آل I از حلقه R را اول گوییم هرگاه سره باشد و به‌ازای هر $a, b \in R$ اگر $ab \in I$ آنگاه $a \in I$ یا $b \in I$.

تعریف ۱۰.۲.۱ (ایده‌آل اولیه). ایده‌آل I از حلقه R را اولیه گوییم هرگاه سره باشد و به‌ازای هر $a, b \in R$ اگر $ab \in I$ آنگاه $a \in I$ یا عدد طبیعی $s > 0$ چنان موجود باشد که $b^s \in I$.

تعریف ۱۱.۲.۱ (ایده‌آل ماکزیمال). ایده‌آل I از حلقه R را ماکزیمال گوییم، هرگاه سره باشد و برای هر ایده‌آل سره مانند J از R، اگر $I \subseteq J$ آنگاه $I = J$. به بیان ساده، ایده‌آلی ماکزیمال است که زیرمجموعه هیچ ایده‌آل سره دیگری نباشد.

تعریف ۱۲.۲.۱. رادیکال یک ایده‌آل سره مانند $I \subset R$ به صورت $\sqrt{I} = \{f \in R \mid \exists n \in \mathbb{N}, f^n \in I\}$ تعریف می‌شود.

تعریف ۱۳.۲.۱ (ایده‌آل رادیکال). ایده‌آلی است که طبق تعریف ۱۲.۲.۱ با رادیکال خود برابر باشد، یعنی داشته باشیم $I = \sqrt{I}$.

تعریف ۱۴.۲.۱ (چندجمله‌ای همگن). چندجمله‌ای $f = \sum_{(i_1,\dots,i_n)\in\Lambda} a_{i_1,\dots,i_n} x_1^{i_1} \dots x_n^{i_n}$ که $\Lambda \subset \mathbb{N}^n$ متناهی و $a_{i_1,\dots,i_n} \in K$ را یک چندجمله‌ای همگن گوییم، هرگاه برای هر $(i_1,\dots,i_n)$ در Λ داشته باشیم $i_1 + \dots + i_n = \deg(f)$.

تعریف ۱۵.۲.۱ (ایده‌آل همگن). ایده‌آل $I \subset R = K[x_1,\dots,x_n]$ را همگن گوییم هرگاه I یک مجموعه مولد از چندجمله‌ای‌های همگن داشته باشد.

مثال ۱.۲.۱. چندجمله‌ای $f = x^3 + xyz$ همگن است درحالی که $g = 2x^4 + x^2y^3$ همگن نیست. همچنین ایده‌آل $I = \langle x^2 - y, y\rangle$ یک ایده‌آل همگن است، زیرا می‌توان نوشت $I = \langle x^2, y\rangle$. از طرفی $f = x^2$ و $g = y$ چندجمله‌ای‌های همگن هستند.

تذکر ۵.۲.۱. همه تک‌جمله‌ای‌ها به انتفای مقدم، همگن هستند. درنتیجه ایده‌آل تک جمله‌ای نیز، همگن است.

توجه به این نکته لازم و ضروری است که بین حلقه‌ها و ایده‌آل‌ها در جبر کلاسیک، ارتباطی وجود دارد به طوری که از طریق برخی قضایا به هم مربوط می‌شوند. برای مثال اینکه قضیه‌ای وجود دارد که به ما می‌گوید «هرحلقه یکدار R دارای ایده‌آل ماکزیمال است» یا اینکه «هر ایده‌آل ماکزیمال، یک ایده‌آل اول است». آنچه که در ادامه و به طور مشخص، در فصل دوم بررسی خواهد شد، این است که آیا این قضایا و قضایای مشابه، در جبر دیفرانسیلی نیز برقرار است یا خیر؟

فرض کنیم R یک حلقه و I یک ایده‌آل از این حلقه باشند. یک رابطه هم ارزی روی R به عنوان یک مجموعه به گونه‌ای تعریف می‌کنیم که $a - b \in I$. این رابطه هم‌ارزی را با نماد $a \sim b$ نمایش می‌دهیم.

نمادگذاری ۲.۲.۱. همدسته هر عنصر دلخواه $a \in R$ را به صورت $a + I = \{a + b \mid b \in I\}$ تعریف کرده، با نماد $[a]$ یا $\bar{a}$ نمایش می‌دهیم.

مجموعه همه همدسته‌های R را مجموعه خارج قسمتی R به پیمانه I می‌نامیم و با نماد R/I نمایش می‌دهیم. بنابراین می‌توان نوشت $R/I = \{a + I \mid a \in R\}$. حال که با این مقدمات آشنا شدیم، می‌توانیم به تعریف یک مفهوم مهم بپردازیم.

تعریف ۱۶.۲.۱ (حلقه خارج قسمتی). مجموعه R/I را در نظر می‌گیریم به طوری که به جمع و ضرب زیر، مجهز شده باشد.

$$(1)\ \ (a+I)+(b+I)=(a+b)+I,$$

$$(2)\ \ (a+I).(b+I)=(ab)+I.$$

با این تعاریف، R/I دارای ساختار یک حلقه جابجایی است. عناصر همانی جمع و ضرب در این حلقه، به ترتیب $I + ۰$ و $I + ۱$ است. در این صورت R/I را حلقه خارج قسمتی R به پیمانه I می‌نامیم.

نمادگذاری ۳.۲.۱. در ادامه، عنصر همانی جمع و ضرب حلقه خارج قسمتی را با ۰ و ۱ نمایش داده می‌دهیم.

تا این قسمت از این بخش، مفاهیم جذابی را پیرامون ایده‌آل‌ها آموختیم. اما نکته مهم و آنچه که در آینده این پایان‌نامه با جبر دیفرانسیلی مرتبط خواهد شد، ما را بر آن خواهد داشت تا یک تعریف و یک قضیه دیگر از این مبحث را دنبال کنیم.

تعریف ۱۷.۲.۱ (تجزیه اولیه). فرض کنیم I یک ایده‌آل حلقه R باشد. یک اشتراک از ایده‌آل‌های اولیه را که برابر با I باشد، یک تجزیه اولیه برای I می‌نامیم.

لازم به ذکر است که تجزیه اولیه $I=\bigcap_{i=1}^{k} Q_i$ را مینیمال می‌نامیم، هرگاه برای هر $1 \leq i,j \leq k$ داشته باشیم $\sqrt{Q_i} \neq \sqrt{Q_j}$ و $I=\bigcap_{j\neq i} Q_j \not\subseteq Q_i$.

قضیه ۱.۲.۱ (قضیه لاسکر-نوتر). هر ایده‌آل I از حلقه R یک تجزیه اولیه مینیمال دارد.

خواننده علاقه‌مند می‌تواند برای دنبال کردن اثبات این قضیه، به منبع [۳] مراجعه نماید.

۳.۲.۱ میدان

معرفی مفهوم میدان در این بخش، از آن جهت است که در ادامه به عنوان ابزاری سودمند در جهت معرفی الگوریتم تقسیم، از آن بهره‌مند شویم. اما پیش از آن نیاز به معرفی چند مفهوم مقدماتی داریم که ابتدا به آن‌ها می‌پردازیم.

تعریف ۱۸.۲.۱ (مقسوم علیه صفر). حلقه R را در نظر بگیرید. عنصر $a \in R$ را مقسوم علیه صفر می‌نامیم هرگاه عنصر $0 \neq b \in R$ موجود باشد، به طوری که $ab=0$. مجموعه مقسوم‌علیه‌های صفر R را با $Z(R)$ نمایش می‌دهیم. واضح است که همواره $0 \in Z(R)$.

تعریف ۱.۲.۱۹ (دامنه صحیح). یک دامنه صحیح حلقه‌ای است که همواره $Z(R) = \{0\}$.

به بیان ساده دامنه صحیح عبارتست از حلقه جابجایی ناصفری که ضرب هر دو عنصر ناصفر در آن، عنصری مخالف صفر شود. به عبارت دیگر، اگر در یک دامنه صحیح، حاصلضرب دو عنصر صفر باشد، قطعاً حداقل، یکی از آن دو عنصر صفر است.

لم ۱.۲.۱. اگر R یک دامنه صحیح باشد، $R[x]$ نیز دامنه صحیح است.

اثبات. به برهان خلف فرض می‌کنیم $R[x]$ دامنه صحیح نباشد. پس چندجمله‌ای‌های مخالف صفر همچون $f = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$ و $g = b_0 + b_1x + \cdots + b_mx^m$ چنان وجود دارند که $f.g = 0$. با توجه به اینکه ضرب دو چند جمله‌ای صفر شده است، داریم $a_0b_0 + (a_1b_0 + a_0b_1)x + \cdots + a_nb_mx^{n+m} = 0$. این تساوی بدان معناست که ضریب x_i ها به‌ازای هر $0 \le i \le m+n$ باید برابر صفر باشد. یکی از این ضرایبِ برابر با صفر، a_0b_0 ،است. اما چون طبق فرض خلف f و g مخالف صفر هستند، پس $a_0 \neq 0$ و $b_0 \neq 0$ که خلاف فرض است، چون R یک دامنه است و ضرب دو عنصر مخالف صفر، مخالف صفر است. پس فرض خلف باطل و حکم ثابت می‌شود. □

تعریف ۱.۲.۲۰ (میدان). یک میدان، دامنه صحیحی است که هر عنصر ناصفر آن وارون داشته باشد. به عبارت دیگر یک میدان مجموعه‌ای مانند K است که به دو عمل جمع $+$ و ضرب $*$ مجهز شده باشد و دارای شرایط زیر باشد.

۱. $(K, +)$ یک گروه آبلی باشد.

۲. $(K \setminus \{0\}, *)$ نیز، تشکیل یک گروه آبلی بدهد.

۳. همانند حلقه ارتباط لازم بین جمع و ضرب حلقه با استفاده از خاصیت پخشی به صورت زیر است:

$$\forall a, b, c \in K \quad a(b + c) = ab + ac$$

فرض کنیم R یک حلقه باشد. می‌خواهیم ببینیم که آیا می‌توانیم از این حلقه، یک میدان بسازیم؟ پاسخ مثبت است. برای این کار، کافی است عناصر میدان را طوری بسازیم که به جز صفر همگی وارون پذیر باشند. ساده ترین راهی که به ذهن متبادر می‌شود آن است که از عناصر R کسر بسازیم، به طوری که مخرج هیچگاه صفر نشود. این ایده سرآغاز تعریف دسته جدیدی از میدان‌هاست که میدان کسرها نامیده می‌شود.

تعریف ۲۱.۲.۱ (میدان کسرها). مجموعه کسرهای تولید شده توسط R که با نماد $\mathrm{Frac}(R)$ نمایش می‌دهیم و به صورت $\mathrm{Frac}(R) = \{\frac{a}{b} \mid a, b \in R, b \neq 0\}$ تعریف می‌کنیم. به سادگی نشان داده می‌شود، این مجموعه همراه با جمع و ضرب زیر، تشکیل یک میدان می‌دهد.

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a.d + b.c}{b.d} \qquad \frac{a}{b}.\frac{c}{d} = \frac{a.c}{b.d}$$

در این روابط، علامت جمع و ضرب سمت چپ در هر یک از معادلات فوق، مربوط به میدان خارج قسمتی $\mathrm{Frac}(R)$ است در حالی که علامت جمع و ضرب سمت راست این معادلات، مربوط به حلقه R است. این دو ماهیت متفاوتی نسبت به یکدیگر دارند و نباید یکسان در نظر گرفته شود.

تذکر ۶.۲.۱. در تعریف میدان کسرها باید به این نکته توجه داشته باشیم که اگر R یک دامنه باشد، ساختاری را تعریف می‌کنیم که کوچکترین میدان شامل R را معرفی می‌کند. کسر با تقسیم متفاوت است. ماهیت کسر، برگرفته از یک رابطه هم ارزی در فضای R^2 است به گونه‌ای که اگر دو عنصر دلخواه $(a, b), (c, d) \in R^2$ با یکدیگر در رابطه باشند به طوری که $b, d \neq 0$ آنگاه $ad = bc$. در این صورت، کلاس هم‌ارزی (a, b) به صورت $[(a, b)]$ و گاهی برای سهولت به صورت $[(a, b)] = \frac{a}{b}$ نمایش می‌دهیم. حال اگر R یک دامنه باشد، به سادگی می‌توان نشان داد که مجموعه $\mathrm{Frac}(R)$ یک میدان خواهد بود. یعنی هر عنصر غیر صفر آن دارای وارون است. چنین میدانی را میدان کسرهای R می‌نامیم.

این در حالی است که همانطور که به بخش بعدی به تفصیل خواهیم دید، فرآیند تقسیم که الگوریتم تقسیم نامیده می‌شود؛ نیازمند یک دامنه صحیح خاص است که دامنه اقلیدسی نامیده می‌شود و شرط وجود آن، احراز یک تابع با ویژگی‌های خاصی است که تابع ارزیاب اقلیدسی نامیده می‌شود.

جهت تفهیم این موضوع، دقت کنیم که در سطح حلقه اعداد صحیح، مفهوم کسر و تقسیم، مفاهیم مشابهی هستند و ریشه آن به نوع تابع ارزیاب اقلیدسی مربوط می‌شود. برای روشن شدن موضوع باید دقت کنیم که بیان عبارتی به صورت $\frac{x+1}{x-1}$ عنصری از میدان کسرهای $\mathbb{R}(x)$ را معرفی می‌نماید و به معنای تقسیم نیست. مثال شناخته شده میدان کسرها، ساخت اعداد گویا از روی اعداد صحیح است که به صورت $\mathbb{Q} = \{\frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\}$ تعریف می‌شود.

نمادگذاری ۴.۲.۱. میدان کسرهای تولید شده توسط یک حلقه چندجمله‌ای $R = K[x_1, \ldots, x_n]$ را با نماد

$K(x_1, \dots, x_n)$ نمایش می‌دهیم. طبیعتاً چنین میدانی به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$K(x_1, \dots, x_n) = \{\frac{f}{g} \mid f, g \in K[x_1, \dots, x_n], g \neq 0\}$$

در پایان این بخش، به معرفی یکی از مفاهیم اساسی و بسیار کلیدی در قضایای این مبحث خواهیم پرداخت.

تعریف ۲۲.۲.۱ (میدان بسته جبری). میدان K یک میدان بسته جبری نامیده می‌شود هرگاه هر چندجمله‌ای غیرثابت در $K[x]$ حداقل یک ریشه در K داشته باشد.

مثال ۲.۲.۱. طبق قضیه اساسی جبر، $\mathbb{C}$ یک میدان بسته جبری است و حال آنکه $\mathbb{R}$ بسته جبری نیست، چرا که $f = x^2 + 1 \in \mathbb{R}[x]$، در حالی که معادله $x^2 + 1 = 0$ روی $\mathbb{R}$ ریشه ندارد.

۴.۲.۱ حلقه‌های نوتری

حلقه‌های نوتری نوع خاص و با اهمیتی از حلقه‌ها هستند که به افتخار خانم امی نوتر[۴] ریاضی‌دان آلمانی، نامگذاری شده است. اهمیت این حلقه‌ها در پیدایش قضایایی است که از ویژگی خاص این حلقه‌ها به دست آمده است و در ادامه به آن خواهیم پرداخت.

تعریف ۲۳.۲.۱ (حلقه نوتری). حلقه R را نوتری گوییم هرگاه هر زنجیر صعودی $I_1 \subset I_2 \subset \cdots$ از ایده‌آل‌های آن، ایستا باشد، یعنی عدد طبیعی s چنان موجود باشد که $I_1 \subset I_2 \subset \cdots I_s = I_{s+1} = \cdots$.

یکی از بدیهی‌ترین نتایج این تعریف، پیرامون میدان است؛ چرا که تنها ایده‌آل‌های آن، $\langle 0 \rangle$ و خود میدان است. پس تشکیل یک زنجیر صعودی ایستا می‌دهد و در نتیجه، هر میدان، یک حلقه نوتری است.

اکنون به چند ویژگی مهم این حلقه‌ها می‌پردازیم که بسیار کاربردی و حائز اهمیت هستند. هدف از ارائه این قضایا، آشنایی با مهمترین ویژگی‌های این نوع حلقه‌هاست.

لم ۲.۲.۱. هر دامنه ایده‌آل اصلی، نوتری است.

اثبات. فرض کنیم R یک دامنه ایده‌آل اصلی و $I_1 \subset I_2 \subset \cdots$ یک زنجیر صعودی از ایده‌آل‌های R باشد. قرار می‌دهیم $I = \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i$. از آنجایی که I_i ها به صورت زنجیر هستند، با یک بررسی ساده خواهیم دید که I

[4] Emmy Noether

نیز یک ایده‌آل در R است. پس عنصری مانند $a \in I$ موجود است؛ به طوری که $I = \langle a \rangle$. چون I اجتماعی از ایده‌آل‌های یک زنجیر صعودی است، پس می‌توان نتیجه گرفت که عدد صحیح و مثبت i وجود دارد؛ به طوری که $I = \langle a \rangle \subset I_i = I_{i+1} = \cdots$ و در نتیجه R یک حلقه نوتری است. $\square$

گزاره ۱.۲.۱. یک حلقه نوتری است اگر و تنها اگر، هر ایده‌آل آن، توسط تعداد متناهی عنصر تولید شود.

اثبات. $(\Leftarrow)$ فرض کنیم R یک حلقه نوتری و $I \subset R$ یک ایده‌آل آن باشد. چون $I \neq \emptyset$، پس $a_1 \in I$ را در نظر می‌گیریم. اگر $I = \langle a_1 \rangle$، آنگاه حکم اثبات می‌شود. در غیر این صورت، $a_2 = I \backslash \langle a_1 \rangle$ وجود دارد. حال اگر $I = \langle a_1, a_2 \rangle$، باز هم حکم ثابت می‌شود. اکنون اثبات را با ایده برهان خلف، ادامه می‌دهیم. اگر این روند متوقف نشود، زنجیر صعودی $\cdots \subsetneq \langle a_1, a_2 \rangle \subsetneq \langle a_1 \rangle$ ایستا نیست که در تناقض با فرض مسئله، یعنی نوتری بودن است. پس فرض خلف (نامتناهی مولد لبودن ایده‌آل) باطل و حکم اثبات می‌شود.

$(\Rightarrow)$ اکنون فرض را بر آن می‌گذاریم که هر ایده‌آل از حلقه R توسط تعداد متناهی عضو، تولید می‌شود. می‌خواهیم ثابت کنیم این حلقه نوتری است. فرض کنیم $I_1 \subset I_2 \subset \cdots$ یک زنجیر صعودی از ایده‌آل‌های R باشد و $I = \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i$. از آنجایی که I_i ها به صورت زنجیر هستند، با یک بررسی ساده خواهیم دید که I نیز یک ایده‌آل در R است. از طرفی، طبق فرض، I توسط تعدادی متناهی عضو مانند $a_1, \ldots, a_k$ تولید می‌شود. با توجه به تعریف I اندیس j موجود است که $a_1, \ldots, a_k \in I_j$ و در نتیجه $I = I_j$. پس $I_j = I_{j+1} = \cdots$. و این به معنای نوتری بودن حلقه R و رسیدن به حکم مسئله است. $\square$

قضیه ۲.۲.۱ (قضیه پایه‌ای هیلبرت). اگر R یک حلقه نوتری باشد، آنگاه $R[x]$ نیز نوتری است.

خواننده علاقه‌مند می‌تواند برای دنبال کردن اثبات این قضیه، به منبع [۵] مراجعه نماید.

تذکر ۷.۲.۱. در قسمت ۳.۱ با شکل دیگری از این قضیه آشنا می‌شویم که مربوط به متناهی مولد بودن ایده‌آل این نوع از حلقه‌هاست.

آنچه که در فصل‌های پیش رو دنبال خواهیم کرد، این است که آیا در جبر دیفرانسیلی هم می‌توان حلقه نوتری تعریف کرد؟ و اینکه آیا در جبر دیفرانسیلی نیز، قضایای فوق برقرار است. پاسخ این سؤال را در پایان فصل ۳ خواهیم یافت.

۵.۲.۱ چندگونا

بر خلاف آنچه که تا کنون در این فصل آموخته‌ایم و مفاهیم مورد نظر، مفاهیم جبری بوده است، این بار با چندگونا آشنا می‌شویم که یک مفهوم هندسی است. پیش از آشنایی با مفهوم چندگونا به تعریف فضای آفین [5] می‌پردازیم.

تعریف ۲۴.۲.۱ (فضای آفین). فرض کنیم K یک میدان باشد و $n \in \mathbb{N}$. فضای آفین n بعدی روی K به صورت $K^n = \{(a_1, \ldots, a_n) \mid a_1, \ldots, a_n \in K\}$ تعریف می‌شود.

برای مثالی از فضای آفین، میدان اعداد حقیقی یعنی حالت $K = \mathbb{R}$ را در نظر می‌گیریم. در این صورت فضای آشنای $\mathbb{R}^n$ را به دست می‌آوریم که در حساب دیفرانسیل، جبرخطی، آنالیز ریاضی، توپولوژی و بسیاری از شاخه‌های ریاضی به چشم می‌خورد. در حالت کلی $K^1 = K$ را خط آفین و K^2 را صفحه آفین می‌نامیم که از حاصلضرب دکارتی خطوط آفین به دست می‌آید. در ادامه خواهیم دید که چگونه چندجمله‌ای‌ها به فضای آفین تبدیل می‌شوند. ایده کلیدی آن است که یک چند جمله‌ای مانند $f \in K[x_1, \ldots, x_n]$ یک تابع است که $f : K^n \to K$. توانایی در نظر گرفتن یک چندجمله‌ای به عنوان یک تابع، همان چیزی است که پیوند بین جبر و هندسه را محقق ساخته، پایه‌های هندسه جبری را بنا می‌نهد.

تعریف ۲۵.۲.۱ (چندگونای آفین). چندگونای آفین عبارتست از جواب‌های یک دستگاه معادلات چندجمله‌ای. پس چندگونای نظیر دستگاه

$$\begin{cases} f_1(a_1, \ldots, a_n) = 0 \\ \quad\vdots \\ f_k(a_1, \ldots, a_n) = 0 \end{cases}$$

را با نماد $V(f_1, \ldots, f_k)$ نمایش می‌دهیم.

تذکر ۸.۲.۱. لزوم بر تأکید چندجمله‌ای بودن معادلات از آن سبب است که بدانیم f_i نمی‌توانند توابعی از دسته توابع مثلثاتی، توابع لگاریتمی و امثال آن باشند.

این دستگاه معادلات می‌تواند خطی یا غیرخطی باشد و در صورتی که دستگاه معادلات ما یک دستگاه معادلات دیفرانسیلی باشد، یک چندگونای دیفرانسیلی خواهیم داشت. حاصل چندگونا همواره تعدادی نقطه است. همانطور که از آموخته‌های قبلی می‌دانیم، ممکن است یک دستگاه جواب نداشته باشد که در این صورت $V(f_1, \ldots, f_k) = \emptyset$ و در حالت دیگر مجموعه متناهی یا نامتناهی از نقاط را به دست می‌دهد و ممکن است

[5] Affine Space

حاصل آن یک شکل هندسی معین باشد. در هر حال، اگر چندگونا را به شکل یک تابع نگاه کنیم ورودی آن، چندجمله‌ای‌ها و خروجی آن مجموعه‌ای از نقاط است که ممکن است متناهی یا نامتناهی باشد.

حال فرض کنیم که $f_1, \ldots, f_k$ مولدهای یک ایده‌آل باشند. در این صورت و طبق تعریف ۴.۲.۱ ایده‌آل I را می‌توان به صورت $I = \langle f_1, \ldots, f_k \rangle$ نوشت. با بیان این مقدمه، به سراغ تعریف زیر می‌رویم.

تعریف ۲۶.۲.۱. (چندگونای یک ایده‌آل) عبارت است از مجموعه‌ای از همه نقاطی که به‌ازای آنها، تک تک مولدهای ایده‌آل برابر با صفر خواهد شد. با در نظر گرفتن مولدهای مذکور، بیان ریاضی این تعریف این گونه خواهد بود که: $\mathbb{V}(I) = \mathbb{V}(f_1, \ldots, f_k) = \{(a_1, \ldots, a_n) \mid \forall 1 \leq i \leq k \quad f_i(a_1, \ldots, a_n) = 0\}$.

برای تفسیر این عبارت، لازم است بدانیم که برای به دست آوردن چندگونای یک ایده‌آل، کافی است چندگونای مولد آن را به دست آوریم. این تعریف به لحاظ شهودی کاملاً قابل درک و واضح است؛ چرا که وقتی تک تک f_iها صفر باشد، با توجه به تعریف ۴.۲.۱ تمام چندجمله‌ای‌های متعلق به ایده‌آل نیز صفر خواهد شد. این موضوع ما را به رهیافت‌های مهمی رهنمون خواهد کرد که از جمله، اهمیت بالای آن در هندسه جبری است.

۳.۱ قضایای هیلبرت

در این بخش، ابتدا به معرفی قضایای صفرساز هیلبرت خواهیم پرداخت که در دو صورت ضعیف و قوی مطرح می‌شود. پس از آن به معرفی دو قضیه مهم دیگر خواهیم پرداخت. لم دیکسون و قضیه پایه‌ای هیلبرت، قضایایی هستند که مبتنی بر متناهی مولد بودن ایده‌آلها در یک حلقه جبری هستند.

قضایای صفرساز هیلبرت، قضایایی هستند که رابطه‌ای بنیادین بین هندسه و جبر برقرار می کند. این امر، برگرفته از ارتباط ایده‌آل و چندگونا است و به ارتباط میان ایده‌های هندسی و جبر اشاره دارد. این قضیه در دو شکل قوی و ضعیف بیان شده است. قضیه ضعیف صفرسازهای هیلبرت مربوط به زمانی است که چندگونای یک ایده‌آل تهی باشد و قضیه قوی صفرسازهای هیلبرت، بیانگر مسیر حرکتی دو طرفه از جبر به سمت هندسه و بازگشت دوباره به سمت جبر است. اکنون به معرفی صورت قضایای صفرساز هیلبرت، خواهیم پرداخت:

قضیه ۱.۳.۱ (قضیه ضعیف صفرساز هیلبرت). فرض کنیم K یک میدان بسته جبری، $R = K[x_1, \ldots, x_n]$ حلقه چندجمله‌ای‌های چند متغیره و I یک ایده‌آل از این حلقه باشد. اگر $\mathbb{V}(I) = \emptyset$، آنگاه $I = R$.

نکته قابل تأمل در صورت این قضیه، آن است که بسته جبری بودن میدان، حائز اهمیت است. مطالعه مثال زیر، این موضوع را بر ما آشکار خواهد ساخت.

مثال ۱.۳.۱. فرض کنیم $K = \mathbb{R}$ و $R = \mathbb{R}[x]$. با در نظرگرفتن $I = \langle x^۲ + ۱\rangle$ در خواهیم یافت که شرط بسته جبری بودن میدان K در قضیه فوق، ضروری است.

قضیه ۲.۳.۱ (قضیه قوی صفرساز هیلبرت). فرض کنیم K یک میدان بسته جبری، $R = K[x_۱, \ldots, x_n]$ حلقه چندجمله‌ای‌های چند متغیره و I یک ایده‌آل از این حلقه باشد. در این صورت $\sqrt{I} = \mathbb{I}(\mathbb{V}(I))$.

اهیمت بیان موضوع در این فصل از کتاب، از آن سو است که در ادامه با تعمیم خاصی از آن آشنا می‌شویم و تحت عنوان قضایای صفرساز دیفرانسیلی شناخته می‌شود. اما اکنون به معرفی قضایایی خواهیم پرداخت که برای ما مشخص می‌کند که ایده‌آل‌های حلقه چند جمله‌ای‌های چندمتغیره، متناهی مولد است یا خیر؟ لم دیکسون و قضیه پایه‌ای هیلبرت پاسخگوی این پرسش است و در قسمت بعد به آن خواهیم پرداخت. پیش از این که به سراغ این لم و قضیه برویم، لازم است تا تعریف و نمادگذاری زیر را در نظر داشته باشیم:

تعریف ۱.۳.۱ (تک جمله‌ای). یک تک‌جمله‌ای بر جسب $x_۱, \ldots, x_n$ عبارتی به صورت $x_۱^{\alpha_۱} \ldots x_n^{\alpha_n}$ است که $\alpha_۱, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{N}$. درجه این تک‌جمله‌ای را به صورت $|\alpha| = \alpha_۱ + \ldots + \alpha_n$ تعریف می‌کنیم.

نمادگذاری ۱.۳.۱. با توجه به تعریف بالا می‌توانیم تک‌جمله‌ای $x_۱^{\alpha_۱} \ldots x_n^{\alpha_n}$ را با نماد $\mathrm{x}^{\boldsymbol{\alpha}}$ نمایش می‌دهیم که در آن $\mathrm{x} = (x_۱, \ldots, x_n)$ و $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_۱, \ldots, \alpha_n)$.

لم ۱.۳.۱ (لم دیکسون). فرض کنیم $A \subset \mathbb{N}^n$ و $I = \langle \mathrm{x}^{\boldsymbol{\alpha}} | \alpha \in A\rangle$ یک ایده‌آل تک‌جمله‌ای در R باشد. در این صورت I را می‌توان به صورت $I = \langle \mathrm{x}^{\alpha_۱}, \ldots, \mathrm{x}^{\alpha_k}\rangle$ نوشت، به طوری که $\alpha_۱, \ldots, \alpha_k \in A$. به عبارت دیگر لم دیکسون، بیان می‌کند که هر ایده‌آل تک‌جمله‌ای متناهی مولد است.

پیش از این در بخش ۴.۲.۱ با قضیه پایه‌ای هیلبرت، آشنا شدیم. اکنون برآن هستیم تا صورت دیگری از این قضیه را مطالعه کنیم. خواهیم دید که این صورت از قضیه پایه‌ای هیلبرت، به نوعی، تعمیم لم دیکسون است.

قضیه ۳.۳.۱. (قضیه پایه‌ای هیلبرت). فرض کنیم I یک ایده‌آل از حلقه چندجمله‌ای‌های چند متغیره باشد. در این صورت I متناهی مولد است.

در صورتی که علاقه‌مند به یادگیری اثبات قضیه و لم فوق هستید به مرجع [۵] مراجعه نمایید.

تذکر ۱.۳.۱. در حالی که لم دیکسون، متناهی مولد بودن را به ایده‌آل تک‌جمله‌ای نسبت می‌دهد، قضیه پایه‌ای هیلبرت، هر ایده‌آل دلخواه در حلقه چندجمله‌ای‌ها را متناهی مولد می‌داند.

۴.۱ ترتیب تک‌جمله‌ای

یک حلقه چند جمله‌ای تک متغیره را در نظر بگیرید. انجام الگوریتم تقسیم همواره به گونه‌ای انجام می‌شود که جملات با درجه بیشتر بر جملات با درجه کمتر تقسیم می‌شوند. برای مثال، چند جمله‌ای $x^۲ + ۱$ را می‌توان به صورت زیر، بر چندجمله‌ای $x + ۱$ تقسیم کرد:

$$x^۲ + ۱ = (x - ۱)(x + ۱) + ۲$$

$x^۲ + ۱$ را مقسوم، $x + ۱$ را مقسوم علیه، $x - ۱$ را خارج قسمت و ۲ را باقیمانده می‌نامیم. در این تقسیم، توجه به چند نکته لازم و ضروری است. نخست آنکه تقسیم در حلقه چندجمله‌ای تک متغیره انجام می‌شود. دیگر آنکه درجه مقسوم از درجه مقسوم علیه بیشتر است. در صورتی که برعکس این اتفاق بیفتد خارج قسمت صفر و باقیمانده با مقسوم یکسان است و یک فرآیند بدیهی است. پس تقسیم در صورتی انجام پذیر است که درجه مقسوم، بیشتر از درجه مقسوم علیه باشد که بیانگر نوعی ترتیب است. به عبارت دیگر، می‌توان چندجمله‌ای‌های تک متغیره را بر حسب درجه آنها مرتب کرد به گونه‌ای که جملات با درجه بیشتر در ترتیب بالاتری قرار می‌گیرند، یعنی می‌توان نوشت: $x^۲ + ۱ \succ x + ۱$.

تعریف ۱.۴.۱ (ترتیب تک‌جمله‌ای). یک ترتیب تک‌جمله‌ای روی $R = K[x_۱, \dots, x_n]$ یک ترتیب کلی $\preceq$ روی $\mathbb{N}^n$ است به طوری که

۱. برای هر $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{N}^n$ که $\alpha \preceq \beta$ آنگاه $\alpha + \gamma \preceq \beta + \gamma$. (سازگاری)

۲. هر زیرمجموعه ناتهی $\mathbb{N}^n$ دارای عضو ابتدا نسبت به $\preceq$ باشد. (خوش‌ترتیبی)

سه نوع از مهمترین ترتیب‌های تک جمله‌ای که بسیار پرکاربرد هم هستند، عبارتند از: ترتیب الفبایی، ترتیب الفبایی مدرج و ترتیب الفبایی معکوس مدرج؛ که در این قسمت به معرفی آن‌ها خواهیم پرداخت:

تعریف ۲.۴.۱ (ترتیب الفبایی). فرض کنیم $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$. گوییم $\alpha \prec_{lex} \beta$ هرگاه سمت چپ‌ترین مؤلفه ناصفر $\beta - \alpha$ مثبت باشد.

مثال ۱.۴.۱. اگر $\alpha = (۲, ۱, ۵)$ و $\beta = (۲, ۴, ۷)$، آن‌گاه $\beta - \alpha = (۰, ۳, ۲)$. بنابراین $\beta \succeq_{lex} \alpha$ و این بدان معناست که در حلقه $K[x, y, z]$ داریم $x^۲y^۴z^۷ \succeq_{lex} x^۲yz^۵$

تعریف ۳.۴.۱ (ترتیب الفبایی مدرج). فرض کنیم $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$. گوییم $\alpha \prec_{dlex} \beta$ هرگاه

$$|\alpha| = \sum_{k=۱}^{n} \alpha_k < \sum_{k=۱}^{n} \beta_k = |\beta|$$

یا اگر $|\beta| = |\alpha|$، آن‌گاه $\alpha \prec_{lex} \beta$.

مثال ۲.۴.۱. با توجه به تعریف $\alpha = (۲, ۱, ۵, ۸)$ و $\beta = (۲, ۴, ۷, ۶)$، آن‌گاه $\alpha \prec_{dlex} \beta$. پس درحلقه $K[x, y, z, w]$ داریم $x^۲y^۴z^۷w^۶ \succeq_{dlex} x^۲yz^۵w^۸$.

تعریف ۴.۴.۱ (ترتیب الفبایی معکوس مدرج). فرض کنیم $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$. گوییم $\alpha \prec_{drl} \beta$ هرگاه $|\alpha| < |\beta|$ یا $|\beta| = |\alpha|$ و سمت راست‌ترین مؤلفه ناصفر $\beta - \alpha$ منفی باشد.

مثال ۳.۴.۱. اگر $\alpha = (۲, ۱, ۵)$ و $\beta = (۱, ۲, ۵)$، آن‌گاه $\beta - \alpha = (۱, -۱, ۰)$. پس $\alpha \prec_{drl} \beta$. بنابراین درحلقه $K[x, y, z]$ می‌توان نوشت $x^۲yz^۵ \prec_{drl} xy^۲z^۵$.

۵.۱ الگوریتم تقسیم

آشناترین الگوریتم تقسیم آن است که از سال‌های نخست تحصیل با آن آشنا شده‌ایم. با ورود به ریاضیات عالی و پیشرفته شدن مباحث، درمی‌یابیم که فرآیند تقسیم، یک فرآیند الگوریتمی است و بررسی آن بر اساس قضیه الگوریتم تقسیم صورت می‌پذیرد.

قضیه ۱.۵.۱ (الگوریتم تقسیم). قضیه الگوریتم تقسیم در حلقه اعداد صحیح: فرض کنیم m و n دو عدد صحیح باشند به طوری که $n \neq ۰$. در این صورت، اعداد صحیح یکتای r و q وجود دارند به طوری که $m = nq + r$ و $۰ \leq r < |n|$. در این صورت q را خارج قسمت و r را باقیمانده تقسیم m بر n می‌نامیم. همچنین m و n به ترتیب مقسوم و مقسوم علیه نامیده می‌شوند.

اما سؤال کلیدی اینجاست که الگوریتم تقسیم در چه صورتی قابل انجام است؟ آیا تحت هر شرایطی و با هر مجموعه و جمع و ضربی، می‌توان به الگوریتم تقسیم رسید؟ پاسخ این است که خیر. الگوریتم تقسیم درحلقه‌های خاصی انجام می‌شود که در ادامه به آن می‌پردازیم. الگوریتم تقسیم تنها در دامنه اقلیدسی [6] انجام پذیر است که تعریف به صورت زیر است:

تعریف ۱.۵.۱ (دامنه اقلیدسی). فرض کنیم R یک دامنه صحیح باشد. در این صورت R را دامنه اقلیدسی گوییم هرگاه تابعی مانند $f : R \setminus \{0\} \to \mathbb{N} \cup \{0\}$ موجود باشد به طوری که دو شرط زیر را برآورده سازد:

$$(1)\ \ \forall\, a, b \in R \setminus \{0\}; \quad f(a) \leq f(ab)$$

$$(2)\ \ \forall\, a, b \in R, b \neq 0 \exists\ \ q, r \in R; \quad a = bq + r, r = 0\ \ or\ \ f(r) \leq f(b)$$

تابع f را تابع ارزیاب اقلیدس می‌نامیم. از این تعریف درمی‌یابیم که در صورتی که بتوان تابع ارزیاب مناسب با شرایط اشاره شده را بیابیم، تقسیم در چنین دامنه‌ای قابل انجام است. به راحتی ثابت می‌شود که تابع ارزیاب برای حلقه اعداد صحیح برابر با $f(n) = |n|$، برای تمامی میدان‌ها برابر با $f(a) = 1$ است. همچنین در صورتی که K یک میدان باشد، در این صورت با در نظر گرفتن تابع ارزیاب $f(h(x)) = \deg(h(x))$ می‌توان $K[x]$ را یک دامنه اقلیدسی در نظر گرفت.

پس حلقه اعداد صحیح $\mathbb{Z}$، تمامی میدان‌های شناخته شده اعم از میدان اعداد مختلط $\mathbb{C}$، میدان اعداد حقیقی $\mathbb{R}$، میدان اعداد گویا $\mathbb{Q}$، حلقه چندجمله‌ای‌ها همگی دامنه اقلیدسی هستند و انجام الگوریتم تقسیم در آنها امکان‌پذیر است.

حال نکته اینجاست که این قضیه به این سطح محدود نمی‌شود و می‌توان آن را به حلقه چندجمله‌ای‌های تک متغیره و حلقه چندجمله‌ای‌های چند متغیره نیز تعمیم داد. با توجه به تفاوت‌های حلقه اعداد صحیح با این نوع حلقه‌ها شاهد تفاوت‌های اساسی در بیان الگوریتم تقسیم در این حلقه‌ها خواهیم بود. نکته اساسی در یکتایی باقیمانده است؛ به طوری که از دست رفتن یکتایی باقیمانده در الگوریتم تقسیم در حلقه چندجمله‌ای‌های چند متغیره، اثرات عمیقی بر سطح مطالعه در این زمینه خواهد گذاشت.

قضیه ۲.۵.۱. الگوریتم تقسیم حلقه چندجمله‌ای‌های تک متغیره: فرض کنیم K یک میدان و $f, g \in K[x]$ دو چندجمله‌ای باشند و $g \neq 0$. در این صورت چندجمله‌ای‌های یکتای $q, r \in K[x]$ وجود دارند به طوری که $f = qg + r$ و $r = 0$ یا $\deg(r) < \deg(g)$.

[6] Euclidean Domain

اما الگوریتم تقسیم در حلقه چندجمله‌ای‌های چند متغیره تفاوت بسیار مهمی دارد که ریشه بسیاری از مطالعات در شاخه هندسه جبری را سبب می‌شود. این تفاوت مهم آن است که باقیمانده در این حلقه، لزوماً یکتا نیست. این تفاوت دریچه‌های دنیای وسیعی از ریاضیات را به روی دانشمندان این رشته گشوده است.

قضیه ۱.۵.۳. فرض کنیم K یک میدان و $R = K[x_1, \ldots, x_n]$ حلقه چندجمله‌ای‌های چند متغیره و $<$ یک ترتیب روی R باشد. فرض کنیم $f, f_1, \ldots, f_k \in R$. در این صورت چندجمله‌ای‌های $r, q_1, \ldots, q_k$ موجود هستند به طوری که $f = q_1 f_1 + \cdots + q_k f_k + r$ به طوری که $r = 0$ یا هیچ جمله‌ای از r توسط $LT(f_1), \ldots, LT(f_k)$ عاد نمی‌شود.

تذکر ۱.۵.۱. یکی از کاربردهای مهم الگوریتم تقسیم، بررسی تعلق به ایده‌آل است. این موضوع در حلقه‌های با باقیمانده یکتا به صورت دوطرفه قابل استنتاج است ولی در حلقه‌هایی که باقیمانده در آنها یکتا نیست، پیچیدگی خاصی دارد و ابزاری نیاز است تا بتوان نسبت به برطرف کردن این پیچیدگی‌ها اقدام کرد. در بررسی تعلق به ایده‌آل در حلقه‌های با باقیمانده یکتا، می‌توان گفت هرگاه باقیمانده برابر با صفر باشد، مقسوم متعلق به ایده‌آل است و برعکس، بدان معنا که اگر در فرآیند تقسیم، مقسوم متعلق به ایده‌آل باشد، باقیمانده تقسیم آن بر مولد ایده‌آل برابر صفر خواهد بود. البته ارزش این قضیه برای بررسی تعلق به ایده‌آل است و برای محاسبه باقیمانده ارزشی ندارد.

۱.۶ الگوریتم شبه تقسیم

دانستیم که تعریف الگوریتم تقسیم، تنها در دامنه اقلیدسی امکان پذیر است. در این قسمت تصمیم داریم تا تعمیمی از این الگوریتم را ارائه دهیم، به طوری که در هر دامنه‌ای امکان تعریف آن وجود داشته باشد. این الگوریتم را الگوریتم شبه تقسیم می‌نامیم و در ادامه این بخش یک نمونه کاربردی از آن را در دامنه $Z[x]$ بررسی می‌کنیم. این بخش را ضمن ارائه چند مثال ادامه می‌دهیم. ابتدا از حلقه اعداد صحیح پیش می‌بریم. فرض کنیم بخواهیم عدد ۳۲۷۵ را به دو روش به طور همزمان به ۱۵ و ۱۰ تقسیم نماییم. تفاوت این دو روش در ترتیب تقسیم است. نکته جالب توجه آنجاست که این تفاوت به ظهور باقیمانده‌های متفاوت منجر خواهد شد. روش اول اینگونه است که این تقسیم ابتدا بر ۱۵، سپس بر ۱۰ و در نهایت، مجدداً تقسیم بر ۱۵ صورت می‌گیرد. در این حالت باقیمانده حاصل برابر با صفر است.

۱. $۳۲۷۵ = ۲۰۰ * ۱۵ + ۲۷۵$

۲. $۲۷۵ = ۲۰ * ۱۰ + ۷۵$

۳. $۷۵ = ۵ * ۱۵ + ۰$

در روش دوم، تقسیم را اینگونه دنبال می‌کنیم:

۱. $۳۲۷۵ = ۳۰۰ * ۱۰ + ۲۷۵$

۲. $۲۷۵ = ۱۰ * ۱۵ + ۱۲۵$

۳. $۱۲۵ = ۱۰ * ۱۰ + ۲۵$

۴. $۲۵ = ۲ * ۱۰ + ۵$

اکنون دو باقیمانده داریم. یکی صفر و دیگری مخالف صفر. برای آنکه بتوانیم به یک باقیمانده یکتا دست پیدا کنیم نیاز به رهیافتی ویژه داریم. رهیافتی که بتواند حداقل برای ما مشخص کند که آیا باقیمانده صفر وجود دارد یا خیر. اهمیت باقیمانده صفر در آن است که می‌توان تعلق به ایده‌آل را تایید نمود. در مباحث پیش رو، دو رویکرد متفاوت و قابل تأمل را خواهیم دید. یکی مجموعه مشخصه و دیگری پایه گربنر. اکنون به سراغ مبحث اصلی در این بخش می‌رویم و می‌خواهیم ببینیم که تقسیم در یک دامنه صحیح به چه صورتی امکان‌پذیر است. این مطلب را به همراه یک مثل بررسی خواهیم کرد.

مثال ۱.۶.۱. حلقه $\mathbb{Z}[x]$ را در نظر بگیرید. می‌خواهیم $M = ۶x^۴ + ۴x^۲ + ۳x$ را بر $N = ۴x^۲ + ۱$ تقسیم کنیم. روند این تقسیم به صورت زیر است که ابتدا ضریب بالاترین توان N را در M ضرب می‌کنیم و سپس فرآیند تقسیم را مرحله به مرحله به صورت زیر دنبال می‌کنیم:

(1) $4M = 24x^4 + 16x^2 + 12x$

(2) $4M = 6x^2N + (10x^2 + 12x)$

(3) $M' = 10x^2 + 12x$

(4) $4M' = 40x^2 + 48x$

(5) $4M' = 10N + (48x - 10)$

$$(6)\quad M'' = 48x - 10$$

اکنون به بررسی جزییات این فرآیند پرداخته، کمیت‌های آن‌را معرفی می‌نماییم. این فرآیند شبه تقسیم نام دارد. باقیمانده نهایی M'' شبه باقیمانده و ضریب چندجمله‌ای پیشرو از مقسوم علیه N را بنیان می‌نامیم و با I_N نمایش می‌دهیم. در این صورت چنین تقسیمی، فرم کلی به صورت $I^e M = QN + R$ خواهد داشت. در این رابطه e یک عدد طبیعی است و شبه توان نامیده می‌شود. همچنین Q و R به ترتیب شبه خارج قسمت و شبه باقیمانده نامیده می‌شوند. همچنین به‌ازای هر شبه توان مشخص، شبه خارج قسمت و شبه باقیمانده یکتا هستند.

اکنون که با مشاهده مثالی از شبه تقسیم، به ضرورت آن پی بردیم، به بیان قضیه شبه تقسیم خواهیم پرداخت.

قضیه ۱.۶.۱ (الگوریتم شبه تقسیم). فرض کنیم S یک حلقه جابجایی و f و g متعلق به $S[x]$ دو چندجمله‌ای غیر صفر، با درجه l و m به طوری که $m \geq l$، $f = c_l x^l + \cdots + c_0$، $g = d_m x^m + \cdots + d_0$ و $c_l, d_m \neq 0$ برقرار باشد. قرار می‌دهیم $\delta = \max\{m - l + 1, 0\}$. در این صورت، $q, r \in S[x]$ وجود دارد به طوری که $c_l^\delta g(x) = q(x)f(x) + r(x)$ که در آن $\deg(r) < \deg(f)$. علاوه بر آن اگر c_l یک مقسوم علیه صفر در S نباشد، q و r یکتا هستند.

اثبات. اثبات این قضیه را با استقرا روی m دنبال می‌کنیم. ابتدا حالت پایه یعنی $m < l$ را بررسی می‌کنیم و سپس به بررسی حالت $m \geq l$ می‌پردازیم.

وقتی $m < l$ باشد، $\delta = 0$ و در نتیجه خواهیم داشت $c_l^\delta g(x) = 0.f(x) + g(x)$. در این حالت $q(x) = 0$ و $r(x) = g(x)$.

اما در حالت $m \geq l$ می‌دانیم که برای هر چندجمله‌ای g با درجه کوچکتر از m حکم برقرار است. پس حکم را برای چندجمله‌ای با درجه m اثبات می‌کنیم. برای دستیابی به این مهم، قرار می‌دهیم $\hat{g} := c_l g - d_m x^{m-l}.f$. حال با استفاده از فرض استقرا می‌توان گفت $\hat{q}$ و $\hat{r}$ متعلق به $S[x]$ وجود دارد به طوری که $c_l^{\delta_1}\hat{g} = \hat{q}f + \hat{r}$ و $\deg(\hat{r}) < \deg(f)$ و $\delta_1 = \max\{m - 1 - l + 1, 0\}$. در این صورت با جایگذاری $\hat{g}$ با $c_l g - d_m x^{m-l}.f$ خواهیم داشت $c_l^{\delta_1 + 1} g = (\hat{q} + c_l^{\delta_1} d_m x^{m-l})f + \hat{r}$. از آنجایی که $\deg(\hat{r}) < \deg(f)$ و از طرف دیگر $\delta_1 + 1 = \max\{m - 1 - l + 1, 0\} = \max\{m - l, 0\}$ به مطلوب خود، دست یافته‌ایم.

برای اثبات یکتایی، فرض کنیم $c_l^\delta g(x) = q_1(x)f(x) + r_1(x)$ و $c_l^\delta g(x) = q_2(x)f(x) + r_2(x)$ به طوری که $q_1 \neq q_2$. با تفاضل دو رابطه از یکدیگر خواهیم داشت $(q_1 - q_2)f = r_2 - r_1$. از طرف دیگر، چون $\deg(r_1) < \deg(f)$ و $\deg(r_2) < \deg(f)$ پس $\deg(r_2 - r_1) < \deg(f)$. از تلفیق دو رابطه اخیر،

خواهیم داشت $\deg((q_1-q_2)f) < \deg(f)$. اما از آنجایی که c_l یک مقسوم علیه صفر است و $q_1-q_2 \neq 0$ خواهیم داشت $\deg((q_1-q_2)f) \geq \deg(f)$ که در تناقض با $\deg((q_1-q_2)f) < \deg(f)$ است که پیش از این به دست آورده‌ایم. $\square$

نمادگذاری ۱.۶.۱. همانطور که پیشتر نیز اشاره شد، q و r به ترتیب شبه خارج قسمت و شبه باقیمانده نامیده می‌شوند و با نماد $\mathrm{Pquo}(g,f)$ و $\mathrm{Prem}(g,f)$ نمایش داده می‌شوند. در صورتی که تقسیم مورد نظر، در حلقه چندجمله‌ای چندمتغیره صورت پذیرد، نمایش این دو مفهوم، به صورت $\mathrm{Pquo}(g,f,x_i)$ و $\mathrm{Prem}(g,f,x_i)$ است که x_i بیانگر متغیری است که فرآیند تقسیم، نسبت به آن انجام می‌شود. حال فرض کنیم دنباله‌ای همچون $r_n = g, r_{n-1} = \mathrm{Prem}(r_n, f_n, x_n), \ldots, r_0 = \mathrm{Prem}(r_1, f_1, x_1)$ به طوری که حاصل از تقسیمات متوالی g بر $\{f_1,\ldots,f_n\}$ باشد. در این صورت r_0 را شبه باقیمانده تقسیم g بر $\{f_1,\ldots,f_n\}$ می‌نامیم و با $\mathrm{Prem}(g,\{f_1,\ldots,f_n\})$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۱.۶.۱ (فرم مثلثی چندجمله‌ای‌ها). چندجمله‌ای‌های زیر را در نظر می‌گیریم:

$$f_1(u_1,\ldots,u_d,x_1), f_2(u_1,\ldots,u_d,x_1,x_2), \ldots, f_n(u_1,\ldots,u_d,x_1,\ldots,x_n)$$

چنین چینشی از چندجمله‌ای‌های $R = K[x_1,\ldots,x_n,u_1,\ldots,u_d]$ را فرم مثلثی چندجمله‌ای‌ها می‌نامیم.

قضیه ۲.۶.۱ (شبه تقسیم متوالی). فرض کنیم $g, f_1,\ldots,f_n \in K[x_1,\ldots,x_n,u_1,\ldots,u_d]$. در این صورت اعداد $\delta_1,\ldots,\delta_n \geq 0$ وجود دارند به طوری که $c_1^{\delta_1}\ldots c_n^{\delta_n} g = q_1 f_1 + \cdots + q_n f_n + r_0$ که $q_i \in R$ و $c_i = \mathrm{LC}(f_i, x_i) \in K[u_1,\ldots,u_d,x_1,\ldots,x_{i-1}]$ و $\deg_{x_i}(r_0) < \deg_{x_i}(f_i)$ برای هر $1 \leq i \leq n$.

۷.۱ مجموعه مشخصه

مجموعه مشخصه را می‌توان یکی از مفاهیم برجسته و پرکاربرد در جبر معرفی کرد. این مفهوم یک تفاوت بسیار مهم و اساسی، با سایر مفاهیم دارد. عمده مفاهیمی که در این پایان‌نامه مطرح می‌شود ابتدا در جبر یا جبر خطی و یا سایر شاخه‌های کلاسیک ریاضی بنا نهاده شده و سپس در جبر دیفرانسیلی تعمیم می‌یابد. در مورد مجموعه

مشخصه، چنین اتفاقی رخ نداده است. این مجموعه در سال ۱۹۴۰ توسط جوزف ریت و در حوزه جبر دیفرانسیلی پایه گذاری شد و در سال ۱۹۷۰ توسط یک دانشمند چینی به نام وو وِن تسون [۷] به صورت جبری تعریف شد. یکی از کاربردهای مهم و اساسی این مجموعه، در بررسی تعلق به ایده‌آل است که با حجم محاسبات کمتر، نسبت به سایر روش‌ها امکان پذیر است. در ادامه این بخش، فرض می‌کنیم $R = K[x_1, \ldots, x_n]$ و K یک میدان است که با ترتیب $x_n > x_{n-1} > \cdots > x_1$ در نظر گرفته شده است.

فرض کنیم $f \in R$. برای هر $1 \leq j \leq n$ درجه f نسبت به x_j را با نماد $\deg_{x_j}(f)$ نمایش می‌دهیم. گوییم متغیر x_j به طور مؤثر در f ظاهر می‌شود، هرگاه $\deg_{x_j}(f) \neq 0$. به عبارت دیگر ضریب تک جمله‌ای x_j مخالف صفر باشد. با علم به این موضوع، به سراغ چند تعریف می‌رویم.

تعریف ۱.۷.۱ (کلاس چندجمله‌ای‌ها). فرض کنیم $f \in K$. در این صورت کلاس f صفر تعریف می‌کنیم و می‌نویسیم $\text{class}(f) = 0$. در غیر این صورت، اگر x_j بزرگترین متغیر مؤثر ظاهر شده در f باشد، در این صورت $\text{class}(f) = j$.

تعریف ۲.۷.۱ (درجه کلاس چندجمله‌ای‌ها). همانند کلاس یک چندجمله‌ای، دو مورد را در نظر می‌گیریم. اگر $f \in K$ درجه کلاس f صفر تعریف می‌کنیم و می‌نویسیم $\text{cdeg}(f) = 0$. در غیر این صورت، درجه کلاس f برابر است با درجه بالاترین متغیر مؤثر ظاهر شده در f. در این صورت $\text{cdeg}(f) = \deg_{x_j}(f)$.

با توجه به دو تعریف فوق، به هر چندجمله‌ای یک زوج مرتب نسبت می‌دهیم و آن را تابع تایپ می‌نامیم که به صورت زیر است:

$$\begin{cases} Type : R \longrightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N} \\ f \mapsto (\text{class}(f), \text{cdeg}(f)) \end{cases}$$

با استفاده از این تابع، می‌توانیم یک ترتیب روی چندجمله‌ای‌ها تعریف کنیم که در ادامه به آن می‌پردازیم

تعریف ۳.۷.۱ (ترتیب چندجمله‌ای). فرض کنیم f_1 و f_2 دو چندجمله‌ای در R باشند. می‌گوییم f_1 رتبه کمتری نسبت به f_2 دارد و با $f_1 < f_2$ نمایش می‌دهیم هرگاه یکی از شرایط زیر برقرار باشد:

۱. کلاس f_1 از کلاس f_2 کوچکتر باشد. به عبارت دیگر $\text{cdeg}(f_1) < \text{cdeg}(f_2)$.

[7] Wu wen Tsün

۲. در صورت تساوی دو کلاس، درجه f_1 از درجه f_2 کوچکتر باشد.

تذکر ۱.۷.۱. تعریف فوق، معادل آن است که چندجمله‌ای‌ها بر اساس ترتیب الفبایی روی تابع تایپ، مرتب می‌شوند. به عبارت دیگر، می‌توان نوشت: $f_1 < f_2 \Leftrightarrow Type(f_1) <_{lex} Type(f_2)$

تذکر ۲.۷.۱. ممکن است دو چندجمله‌ای f_1 و f_2 با این ترتیب، قابل مقایسه نباشند. به عنوان مثال، $f_1 = x_4$ و $f_1 = x_2x_4$ را در نظر می‌گیریم. واضح است که $Type(f_1) = Type(f_2)$. در این حالت، این دو چندجمله‌ای رتبه یکسان دارند و می‌نویسیم $f_1 \sim f_2$.

نمادگذاری ۱.۷.۱. اکنون چندجمله‌ای f را در نظر می‌گیریم، به طوری که $\text{class}(f) = j$ و $\text{cdeg}(f) = d$.
در این صورت، طبق تعریف حلقه چندجمله‌ای و کلاس یک چندجمله‌ای داریم $f \in K[x_1, \ldots, x_{j-1}][x_j]$.
از آنجایی که $\text{cdeg}(f) = d$ می‌توان f را به صورت زیر نوشت:

$$f = I_d(x_1, \ldots, x_{j-1})x_j^d + I_{d-1}(x_1, \ldots, x_{j-1})x_j^{d-1} + \cdots + I_0(x_1, \ldots, x_{j-1}).$$

تعریف ۴.۷.۱ (بنیان). فرض کنیم f را به صورت آنچه که در نمادگذاری ۱.۷.۱ بیان شد، بنویسیم. در این صورت، $I_d(x_1, \ldots, x_{j-1})$ را بنیان f می‌نامیم و با نماد $In(f)$ نمایش می‌دهیم.

نتیجه ۱.۷.۱. فرض کنیم f و g دو چندجمله‌ای در R باشند به طوری که $\text{class}(f) = j$ و $\text{cdeg}(f) = d$.
در این صورت با استفاده از الگوریتم شبه تقسیم، می‌توان نوشت $(In(f))^\delta g = qf + r$. در این رابطه داریم $\delta = \max\{\deg(q) - d + 1, 0\}$ و $\deg_{x_j}(r) < d$.

تعریف ۵.۷.۱. چندجمله‌ای f را نسبت به مجموعه $\{f_1, \ldots, f_r\}$ تحویل‌ناپذیر گوییم هرگاه، باقیمانده شبه تقسیم، به صورت $\text{Prem}(f, \{f_1, \ldots, f_r\}) = f$ باشد.

تعریف ۶.۷.۱ (مجموعه صعودی). دنباله $f_1, \ldots, f_r$ یک مجموعه صعودی نامیده می‌شود هرگاه

۱. اگر $r = 1$ در این صورت $f_r \neq 0$

۲. اگر $r > 1$ و $0 < \text{class}(f_1) < \text{class}(f_2) < \cdots < \text{class}(f_r) \leq n$ در این صورت، هر f_j نسبت به مجموعه $\{f_1, \ldots, f_{j-1}\}$ تحویل‌ناپذیر باشد.

مهمترین مبانی مجموعه مشخصه را آموخته‌ایم. کافیست تا رتبه‌بندی روی مجموعه‌های صعودی را تعریف کنیم و براساس رتبه‌بندی تعریف شده، بتوانیم مجموعه مشخصه را تعریف کنیم. با توجه به تعریف مجموعه صعودی، حداکثر به تعداد ابعاد فضا یعنی n عضو دارد. مشابه تابع $Type$ که روی چندجمله‌ای‌ها تعریف کردیم، برای مجموعه‌های صعودی نیز، تعریف می‌کنیم. این تابع را به صورت زیر در نظر می‌گیریم.

$$\begin{cases} Type : Family\ of\ ascending\ sets \longrightarrow (\mathbb{N} \cup \infty)^{n+1} \\ F \mapsto (Type(f)(0), \ldots, Type(f)(n)) \end{cases}$$

که در رابطه فوق تابع $Type(f)(i)$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$Type(f)(i) = \begin{cases} \text{cdeg}(f)\ if\ \exists\ f \in F, \text{class}(f) = i \\ \infty \quad otherwise. \end{cases}$$

اکنون می‌خواهیم همانند چندجمله‌ای‌ها یک ترتیب روی مجموعه‌های صعودی تعریف کنیم. فرض می‌کنیم $F = \{f_1, \ldots, f_r\}$ و $G = \{g_1, \ldots, g_t\}$ دو مجموعه صعودی باشند. در این صورت می‌گوییم F مرتبه کمتری نسبت به G دارد و به صورت $F < G$ نمایش می‌دهیم هرگاه یکی از دو شرط زیر برقرار باشد:

۱. عدد طبیعی مانند i موجود باشد، به طوری که به‌ازای هر j کوچکتر از i داشته باشیم $f_j \sim g_j$ و $f_i < g_j$.

۲. با فرض $t < r$ و به‌ازای هر i کوچکتر از t داشته باشیم $f_i \sim g_i$.

تذکر ۱.۷.۳. تعریف فوق، معادل آن است که چندجمله‌ای‌ها بر اساس ترتیب الفبایی روی تابع تایپ، مرتب می‌شوند. به عبارت دیگر، می‌توان نوشت: $F < G \Leftrightarrow Type(F) <_{lex} Type(G)$.

تذکر ۱.۷.۴. ممکن است دو مجموعه صعودی مانند F و G موجود باشند به طوری که با این ترتیب، قابل مقایسه نباشند. در این حالت $r = t$ و به‌ازای هر $1 \leq i \leq t$ داریم $f_i \sim g_i$. در این صورت، این ویژگی را با نماد $Type(F) \sim Type(G)$ نمایش می‌دهیم.

مثال ۱.۷.۱. فرض کنیم $F = \{x_2, x_1x_3\}$ ، $G = \{x_2, x_1x_3, x_4\}$ و $H = \{x_2, x_2x_3\}$. در این صورت و با توجه به تعریف تابع $Type$ داریم $Type(F) = (\infty, \infty, 1, 1, \infty)$ ، $Type(G) = (\infty, \infty, 1, 1, 1)$ و $Type(H) = (\infty, \infty, 1, 1, \infty)$. پس می‌توان نوشت $Type(F) >_{lex} Type(G)$. از طرف دیگر $Type(F) \sim Type(H)$.

تعریف ۱.۷.۷ (مجموعه مشخصه). فرض کنیم $I \lhd R = K[x_1, \ldots, x_n]$ یک ایده‌آل باشد. خانواده‌ای از مجموعه‌های صعودی را به صورت $\mathcal{S}_I = \{F = \{f_1, \ldots, f_r\} | F \subset I \ and\ F\ is\ an\ Acsending\ Set\}$ تعریف می‌کنیم. عنصر مینیمال $\mathcal{S}_I$ نسبت به ترتیب الفبایی را مجموعه مشخصه I می‌نامیم.

با مجموعه مشخصه آشنا شدیم. حسن ختام این بخش، یک قضیه مهم و کاربردی است که تعلق به ایده‌آل را مطرح می‌کند و بیان می‌کند که مجموعه مشخصه چگونه به این پرسش پاسخ می‌دهد.

قضیه ۱.۷.۱. فرض کنیم I یک ایده‌آل در حلقه چندجمله‌ای $R = K[x_1, \ldots, x_n]$ و $G \subset I$ یک مجموعه صعودی I باشد. در این صورت G یک مجموعه مشخصه برای I است، اگر و تنها اگر به‌ازای هر $f \in I$ داشته باشیم $\mathrm{Prem}(f, G) = 0$.

اثبات. $(\Leftarrow)$ فرض کنیم $f \in I$. نشان می‌دهیم که $\mathrm{Prem}(f, G) = 0$. فرض کنیم $g = \mathrm{Prem}(f, G) \neq 0$ و $G = \{g_1, \ldots, g_t\}$. دو حالت را در نظر می‌گیریم.

۱. $g \in K$ و از طرفی $g_1 \notin K$. پس $\{g\} <_{lex} \{g_1, \ldots, g_t\}$. رابطه اخیر، یک تناقض است زیرا $\{g_1, \ldots, g_t\}$ یک مجموعه مشخصه است و این موضوع با مینیمال بودن مجموعه مشخصه در تناقض است.

۲. اما در حالت دوم، فرض می‌کنیم $g \notin K$. در این صورت عدد طبیعی مانند i موجود است، به طوری که $\mathrm{class}(g_i) < \mathrm{class}(g) < \mathrm{class}(g_{i+1})$. حال بر اساس تعریف مجموعه صعودی، برای هر j داریم: $\mathrm{class}(g_i) \neq \mathrm{class}(g)$. در این حالت داریم $\{g_1, \ldots, g_i, g, g_{i+1}, \ldots, g_t\} <_{lex} \{g_1, \ldots, g_t\}$ که به دلیل مشابه با حالت اول، یک تناقض است و به اثبات مطلوب خود، دست می‌یابیم.

$(\Rightarrow)$ می‌خواهیم نشان دهیم که G یک مجموعه مشخصه است. کافی است نشان دهیم که در بین همه مجموعه‌های صعودی، G یک مجموعه مینیمال است. به برهان خلف، فرض می‌کنیم G مینیمال نباشد. در این صورت، مجموعه صعودی متناهی مانند F از I وجود دارد به طوری که $F < G$. اکنون این دو مجموعه را به صورت $F = \{f_1, \ldots, f_r\}$ و $G = \{g_1, \ldots, g_t\}$ در نظر می‌گیریم. چون $F < G$ دو حالت ممکن است اتفاق بیفتد:

۱. عدد طبیعی i موجود باشد، به طوری که به‌ازای هر j کوچکتر از i داشته باشیم $f_j \sim g_j$ و $f_i < g_j$. با استفاده از فرض، داریم $\mathrm{Prem}(f_i, G) = 0$. بنابراین $1 \leq s \leq t$ موجود است به طوری که

$\mathrm{class}(f_i) = \mathrm{class}(g_s)$ و $\mathrm{cdeg}(f_i) \geq \mathrm{cdeg}(g_s)$. از طرفی به‌ازای هر $1 \leq j \leq i$ داریم $f_j \sim g_j$. پس $\mathrm{class}(f_i) = \mathrm{class}(g_j)$. چون F صعودی است $\mathrm{class}(f_j) \leq \mathrm{class}(f_i)$. بنابراین به‌ازای هر $1 \leq j \leq i$ خواهیم داشت $\mathrm{class}(g_j) \leq \mathrm{class}(f_i)$. پس $i \geq s$. اما می‌دانیم $f_i < g_i$. پس $\mathrm{class}(f_i) \leq \mathrm{class}(g_i)$ یا $\mathrm{class}(f_i) = \mathrm{class}(g_i)$ و $\mathrm{cdeg}(f_i) \leq \mathrm{cdeg}(g_i)$. از طرفی چون G صعودی است، به‌ازای هر $j > i$ داریم $\mathrm{class}(g_j) > \mathrm{class}(g_i)$. پس به‌ازای هر $1 \leq j \leq t$ داریم $\mathrm{class}(f_i) \neq \mathrm{class}(g_j)$ یا اگر $\mathrm{class}(f_i) = \mathrm{class}(g_j)$ آنگاه $\mathrm{cdeg}(f_i) \leq \mathrm{cdeg}(g_j)$ که نتیجه آن $\mathrm{Prem}(f_i, G) \neq 0$ و این تناقض با فرض مسئله است.

۲. با فرض $r < t$ و به‌ازای هر i کوچکتر از t داشته باشیم $f_i \sim g_i$. چون $r < t$ پس $f_{t+1} \in F$. از طرفی، به‌ازای هر $1 \leq i \leq t$ داریم $f_i \sim g_i$. پس $\mathrm{class}(f_i) = \mathrm{class}(g_j)$ از طرفی چون F صعودی است، داریم $\mathrm{class}(f_1) < \mathrm{class}(f_1) < \cdots < \mathrm{class}(f_t) < \mathrm{class}(f_{t+1})$ و با توجه به رابطه $f_i \sim g_i$ درمی‌یابیم که $\mathrm{class}(g_1) < \mathrm{class}(g_1) < \cdots < \mathrm{class}(g_t) < \mathrm{class}(f_{t+1})$. به عنوان مثال، اگر $\mathrm{class}(f_{t+1}) = l$، جمله شامل x^l در تقسیم $\{g_1, \ldots, g_t\}$ از بین نمی‌رود. بنابراین $\mathrm{Prem}(f_{t+1}, G) \neq 0$ و این تناقض با فرض مسئله است. پس به اثبات حکم قضیه، دست یافته‌ایم.

□

۸.۱ اثبات خودکار قضایای هندسی

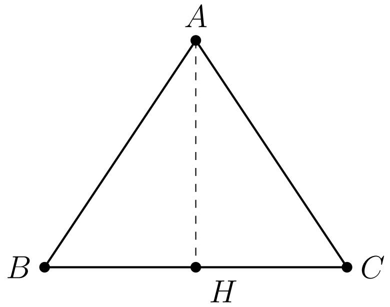
اثبات خودکار قضایای هندسی، یکی از شاخه‌های جالب در ریاضیات و هوش مصنوعی است که از روش‌های مختلفی برای اثبات قضایا بدون دخالت انسان استفاده می‌کند. این روش‌ها عمدتاً شامل روش‌های جبری، مبتنی بر هندسه و روش‌های مبتنی بر منطق هستند. با توجه به موضوع پایان‌نامه و محتوای آن، تمرکز ما در این بخش، بر روی دسته اول، یعنی روش‌های جبری، مبتنی بر هندسه است. در این روش، ملاحظات هندسی به معادلات جبری تبدیل می‌شوند و از روش‌هایی مانند حذف متغیرها و حل معادلات چندجمله‌ای استفاده می‌شود. در روش مبتنی بر هندسه، از استدلال‌های مستقیم هندسی مانند تشابه، تبدیلات و خواص اشکال هندسی برای اثبات استفاده می‌شود. اساس این روش، برمبنای تقسیم بنا نهاده شده، به طوری که پس از نوشتن فرض و حکم

به صورت معادلات جبری و با تقسیم حکم بر فرض، به مطلوب خود دست خواهیم یافت. در مثال زیر خواهیم دید که عبارت «اثبات خودکار» به چه منظور به کار می‌رود.

مثال ۱.۸.۱. می‌دانیم که در هر مثلث متساوی‌الساقین، ارتفاع عمود بر پای ساق، میانه است. اما نکته مهم آن است که هدف طرح این مثال، بیشتر از آنکه خود قضیه باشد؛ این است که بدانیم رویکرد اثبات خودکار در این قضیه با رویکرد اثبات متداول موجود در سطح ریاضیات مقدماتی چه تفاوتی دارد.

نکته مهم در اثبات این قضیه آن است که در فرآیند این اثبات، نیاز به نوعی خلاقیت یافتن دو مثلث و اثبات همنهشتی آن دو مثلث، اجتناب‌ناپذیر است ولی همانطور که در ادامه خواهیم دید، در اثبات خودکار، نیاز به خلاقیت خاصی نیست و صرفاً با تبدیل اطلاعات و فرضیات حکم به یک دستگاه از معادلات و حل آن دستگاه، به کمک ابزارهای جبری و هندسه جبری، به مطلوب خود، دست خواهیم یافت.

مطابق شکل ۱.۱ فرض کنیم $\triangle ABC$ یک مثلث متساوی الساقین باشد که در آن $AB = AC$. ارتفاع AH از رأس A به قاعده BC عمود است.



شکل ۱.۱: مثلث متساوی الساقین به رأس A.

می‌خواهیم نشان دهیم که ارتفاع AH در مثلث $\triangle ABC$ میانه نیز هست، یعنی $BH = HC$.

نقاط را در صفحه مختصات طوری در نظر می‌گیریم که $B(0,0)$ و $C(c,0)$ روی محور x و $A(x_1, x_2)$ در بالای محور x قرار دارند. نقطه تقاطع ارتفاع AH با ضلع BC برابر است با $H(x_1, 0)$. حال طبق فرض مسئله و از آنجایی که $\triangle ABC$ یک مثلث متساوی‌الساقین است، داریم $x_1^2 + x_2^2 = (c - x_1)^2 + x_2^2$ و به طور معادل $c^2 - 2cx_1$. این چندجمله‌ای فرض ماست و به صورت $HYP = \{c^2 - 2cx_1\}$ می‌نویسیم. از طرفی، حکم مسئله آن است که AH میانه است، یعنی $BH = cH$. پس $x_1 = c - x_1$ و معادل آن است که $2x_1 - c = 0$ این چندجمله‌ای حکم ماست و به صورت $Conc = \{2x_1 - c\}$ در نظر می‌گیریم. پس با تقسیم حکم بر فرض، خواهیم داشت که مطلوب ما معادله $2x_1 - c = 0$ است. به منظور بامعنا بودن مسئله لازم است تا $c \neq 0$

لحاظ شود. در این صورت مسئله را در یک حالت غیرتبهگن در نظر می‌گیریم و در می‌یابیم که $x_1 = \frac{c}{2}$ که به معنای دستیابی به حکم است.

۹.۱ جبر خطی

جبر خطی یکی از قدیمی‌ترین و ریشه‌دارترین شاخه‌های علم ریاضی است که به نوعی در شاخه‌های متعدد ریاضی اثرگذار است. انگیزه ورود به این بخش آن است که برای فصل ۵ پایان‌نامه آماده باشیم. فضای برداری مفهومی است حاصل از تعمیم بردارها در فضای اقلیدسی به گونه‌ای که جبر خطی و ماتریس را به عنوان ابزاری قدرتمند جهت افزایش گستره این مفهوم به کار می‌گیرد. در این بخش ضمن معرفی این مفهوم با برخی از تعاریف وابسته آن آشنا می‌شویم تا بتوانیم در ادامه مباحث پیش رو از آن بهره جوییم.

تعریف ۱.۹.۱ (فضای برداری). مجموعه ناتهی V روی میدان K را به همراه اعمال دوتایی جمع و ضرب تعریف شده به صورت $+ : V \times V \to V$ و $. : K \times V \to V$. یک فضای برداری می‌نامیم هرگاه چند ویژگی برقرار باشد: V نسبت به جمع و ضرب، بسته باشد. V نسبت به جمع، گروه آبلی باشد. به‌ازای هر $a \in K$ و $v_1, v_2 \in V$ داریم $a(v_1 + v_2) = av_1 + av_2$. به‌ازای هر $a, b \in K$ و $v \in V$ داریم $(a+b)v = av + bv$. به‌ازای هر $a, b \in K$ و $v \in V$ داریم $(ab)v = a(bv)$. اگر ۱ عنصر همانی ضربی K باشد، آنگاه $1v = v$. در این صورت عناصر K را اسکالر و عناصر V را بردار می‌نامیم.

تعریف ۲.۹.۱ (فضای تولید شده). فرض کنیم X زیرمجموعه‌ای ناتهی از V باشد. در این صورت، X را مجموعه مولد و مجموعه همه ترکیب‌های خطی عناصر X را فضای تولید شده X می‌نامیم. نمایش این فضا با نماد $span(X)$ و تعریف آن به صورت $span(X) = \{\sum_{k=1}^{n} a_k x_k | k \in \mathbb{N}, x_k \in X, a_k \in K\}$ است.

مثال ۱.۹.۱. فرض کنیم K یک میدان باشد. در این صورت $\{1, x, x^2, \dots, x^n\}$ یک مجموعه مولد برای فضای برداری $K_n[x] = \{a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n \mid a_i \in K, \ \forall 1 \leq i \leq n\}$ متشکل از همه چندجمله‌ای‌ها با درجه حداکثر n با ضرایب در K است. همچنین مجموعه $\{1, x, x^2, \dots\}$ یک مجموعه مولد برای فضای برداری $K[x] = \{a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n \mid a_i \in K, \ \forall 1 \leq i \leq n, n \in \mathbb{N}\}$ متشکل از همه چندجمله‌ای‌ها با ضرایب در K است.

اکنون که با فضای برداری آشنا شده‌ایم، می‌توانیم یک ساختار جبری جدید را دانسته‌های خود بیفزاییم. این ساختار، مدول نام دارد. مدول روی یک حلقه تعریف می‌شود و ساختاری مشابه با فضای برداری دارد؛ با این تفاوت که اسکالرها به جای یک میدان، از یک حلقه، به دست می‌آیند.

تعریف ۱.۹.۳ (مدول). فرض کنیم R یک حلقه جابجایی و یکدار باشد. مجموعه M همراه با دو عمل جمع و ضرب

$$+ : R \times M \to M \qquad . : R \times M \to M$$

را یک R مدول می‌نامیم هر گاه برای هر $a, b \in R$ و $f, g \in M$، شرایط زیر برقرار باشند:

۱. M نسبت به عمل جمع، یک گروه جابجایی باشد.

۲. $a(f+g) = af + ag$

۳. $(a+b)f = af + bf$

۴. $(ab)f = a(bf)$

۵. اگر f عنصر همانی ضربی R باشد، آنگاه $1f = f$

مدول‌ها عناصر بااهمیتی در هندسه جبری هستند، که یکی از کاربردهای آن‌ها، مطالعه هندسی چندگوناست. برای آشنایی بیشتر با مدول، مثال‌زیر را در نظر می‌گیریم.

مثال ۱.۹.۲. اگر K یک میدان باشد، همه K فضاهای برداری، تشکیل یک مدول می‌دهد. مدول‌ها روی میدان‌ها کاملاً قابل تعریف هستند، اما در این حالت مفهوم مدول با مفهوم فضای برداری معادل می‌شود.

مثال ۱.۹.۳. یک $\mathbb{Z}$ مدول همان گروه آبلی است. مجموعه اعداد صحیح نیز با توجه به تعریف مدول درمی‌یابیم که، یک $\mathbb{Z}$ مدول است. گروه‌های آبلی مثل $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ نیز Z مدول هستند.

تذکر ۱.۹.۱. در جبر، مدول‌ها بیشتر برای حلقه‌ها تعریف می‌شوند، چراکه در میدان‌ها، مفهوم فضای برداری، همه نیازها را پوشش می‌دهد. بنابراین مطالعه مدول‌ها عمدتاً برای حلقه‌های غیر میدانی مفید است.

تعریف ۴.۹.۱ (بعد کرول). فرض کنیم R یک حلقه باشد. زنجیر $P_0 \subsetneq P_1 \subsetneq \cdots \subsetneq P_m \subsetneq R$ از ایده‌آل‌های اول R را از طول m می‌نامیم. بعد کرول[8] R را سوپریمم طول تمام زنجیرهای ایده‌آل‌های اول در R تعریف می‌کنیم و با $\dim(R)$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۵.۹.۱. بعد ایده‌آل I را با $\dim(I)$ نمایش می‌دهیم و به صورت بعد کرول حلقه R/I تعریف می‌کنیم که با سوپریمم طول تمام زنجیرهای ایده‌آل‌های اول در R که شامل I هستند، برابر است.

مثال ۴.۹.۱. در حلقه $R = K[x, y, z]$ داریم $\langle x \rangle \subsetneq \langle x, y \rangle \subsetneq \langle x, y, z \rangle \subset R$. در این صورت و طبق تعریف $\dim(\langle x \rangle) = \dim(R/\langle x \rangle) = 2$.

۱۰.۱ پایه گربنر

ایده‌آل I را در نظر بگیرید. دانستیم که هر ایده‌آل یک مجموعه مولد متناهی دارد. پایه گربنر، یک مجموعه مولد خاص است که آن را از سایر مجموعه مولدهای یک ایده‌آل متمایز می‌کند. برای آنکه مفهوم پایه گربنر را بدانیم، لازم است تا با برخی از مفاهیم مقدماتی آشنا شویم.

تعریف ۱.۱۰.۱ (ایده‌آل جمله پیشرو). این ایده‌آل به صورت $\mathrm{LT}(I) = \langle \mathrm{LT}(f) \mid f \in I \rangle$ تعریف می‌شود.

به عبارت دیگر، ایده‌آل جمله پیشرو ایده‌آل I ایده‌آلی است که مولدهای آن، جملات پیشرو تک تک عناصر I هستند.

لم ۱.۱۰.۱. فرض کنیم I ایده‌آلی در R باشد. در این صورت $\mathrm{LT}(I)$ یک ایده‌آل تک‌جمله‌ای است و دیگر آنکه چندجمله‌ای‌های $g_1, \ldots, g_t$ وجود دارند به طوری که $\mathrm{LT}(I) = \langle \mathrm{LT}(g_1), \ldots, \mathrm{LT}(g_t) \rangle$

اثبات. طبق تعریف، $\mathrm{LT}(I)$ یک ایده‌آل تک‌جمله‌ای است و کاملاً واضح است. از طرفی طبق لم دیکسون، هر ایده‌آل تک‌جمله‌ای، یک مجموعه مولد متناهی دارد و در نتیجه حکم برقرار است. □

حال که با این مفاهیم مقدماتی آشنا شدیم، به تعریف پایه گربنر می‌پردازیم.

[8] Krull Dimension

تعریف ۲.۱۰.۱ (پایه گربنر). زیرمجموعه متناهی $G = \{g_1, \dots, g_t\}$ از ایده‌آل I را در نظر می‌گیریم. مجموعه G را یک پایه گربنر برای I نسبت به ترتیب $>$ می‌نامیم هرگاه $\mathrm{LT}(I) = \langle \mathrm{LT}(g_1), \dots, \mathrm{LT}(g_t)\rangle$.

نتیجه ۱.۱۰.۱. با توجه به آنچه که از پایه گربنر در این بخش آموختیم همواره داریم:

۱. همواره برای هر ایده‌آل I یک پایه گربنر نسبت به یک ترتیب مشخص، وجود دارد.

۲. اگر $G = \{g_1, \dots, g_t\}$ یک پایه گربنر، برای ایده‌آل I باشد، در این صورت $I = \langle G\rangle = \langle g_1, \dots, g_t\rangle$.

۱۱.۱ برخی کاربردهای پایه گربنر

اکنون که پایه گربنر را شناختیم، به بررسی برخی از کاربردهای مهم آن می‌پردازیم. پایه گربنر، ابزاری قدرتمند است که در شاخه‌هایی همچون آنالیز ریاضی، گراف، نظریه اعداد، حل دستگاه معادلات غیرخطی کاربرد دارد. در این بخش نظریه حذف، تعلق به ایده‌آل رادیکال و اشباع سازی ایده‌آل، معرفی شده است.

۱.۱۱.۱ نظریه حذف

نظریه حذف، یکی از مفاهیم پرکاربرد در ریاضیات است. نظریه حذف، رویکردی الگوریتمیک است که دریچه‌های علوم کامپیوتر را به روی این شاخه از ریاضیات باز می‌کنید. در این بخش سعی بر آن شده است تا یک دیدگاه کلی نسبت به این موضوع پیدا کنیم و در ادامه راه، از رویکرد مطرح شده در این نظریه، بهره‌های عمیق و گسترده‌ای ببریم. از آنجایی که جبر خطی یکی از شاخه‌های قدیمی و پرکاربرد ریاضیات است و معمولاً در بین علاقه‌مندان ریاضی، پرمخاطب است، این رهیافت را پیرامون جبر خطی دنبال خواهیم کرد. برای این منظور، روش حذفی گاوس- جردن در حل دستگاه معادلات خطی را در نظر که هدف نهایی آن تبدیل یک ماتریس به فرم سطری پلکانی کاهش یافته است. در واقع، آنچه که در حل یک دستگاه به روش حذفی گاوس- جردن رخ می‌دهد، این است که ابتدا با جمع و تفریق مضربی از هر معادله با معادله دیگر، اقدام به حذف متغیرهای معادلات می‌کنیم به طوری که آخرین معادله با یک مجهول باقی بماند. تا اینجا مرحله اول این رهیافت (نظریه حذف) صورت گرفته است. مرحله دوم این رهیافت، توسیع نام دارد که طی آن با به دست آمدن جواب هر یک مجهولات، به معادله

قبل برمی‌گردیم و با استفاده از جواب مرحله قبل، یکی پس از دیگری نسبت به یافتن جوابهای دستگاه اولیه مورد نظر اقدام می‌نماییم.

حال که با طرح کلی این نظریه آشنا شدیم، لازم است تا بدانیم که هندسه جبری، چگونه این موضوع را دنبال می‌کند. در واقع هندسه جبری پاسخگویی این موضوع را بر عهده می‌گیرد که وقتی حذف و توسیع صورت می‌گیرد، پایه گربنر، ایده‌آل و چندگونا بر چه اساسی تغییر خواهند کرد.

هندسه جبری، نظریه حذف، به بررسی ایده‌آل می‌پردازد و به دنبال یافتن پاسخ این سوال است که کاهش ابعاد مسئله، چگونه ایده‌آل را تحت تأثیر قرار خواهد داد. در واقع، پاسخ این سوال را زمانی یافته‌ایم که بتوانیم یک مجموعه مولد، برای ایده‌آل با ابعاد کاهش یافته بیابیم. ضمن آنکه لازم است بدانیم که کاهش ابعاد، ناشی از حذف اطلاعات مسئله است و همانطور که گفته شد، در مرحله اول این رویکرد، صورت می‌پذیرد. خواهیم دید که آنچه که به عنوان مجموعه مولد، برای چنین ایده‌آلی یافت می‌شود، نه تنها یک مجموعه مولد، بلکه یک پایه گربنر است، یعنی فراتر از آن چیزی که به دنبال آن بودیم. اکنون که با شِمای کلی نظریه حذف و رویکرد آن آشنا شدیم به جزییات ساختاری آن، در هندسه جبری خواهیم پرداخت.

اما اکنون بر آن هستیم تا آنچه را که بیان کردیم، تا حدودی در قالب ریاضیات ببینیم. مهمترین سؤالی که در این مبحث مطرح می‌شود، این است که کاهش ابعاد مسئله ایده‌آل را چگونه تغییر خواهد داد و یک مجموعه مولد، برای آن به چه شکلی خواهد بود؟ برای این کار، ابتدا به تعریف l امین ایده‌آل حذفی می‌پردازیم.

تعریف ۱.۱۱.۱ (ایده‌آل حذفی). فرض کنیم I یک ایده‌آل از حلقه $R = K[x_1, \ldots, x_n]$ و $0 \leq l < n$. در این صورت l- امین ایده‌آل حذفی I را به صورت $I_l = I \cap K[x_{l+1}, \ldots, x_n]$ تعریف می‌کنیم.

و اکنون پرسش، آن است که چگونه می‌توان، یک مجموعه مولد برای این ایده‌آل به دست آورد. قضیه زیر که به «قضیه حذفی» معروف است، یک پایه گربنر، برای چنین ایده‌آلی معرفی می‌کند. اهمیت این قضیه در آن است که حکم آن، یک پایه گربنر است و بر اساس آنچه که در بخش ۱۰.۱ دیدیم، ارزشی بیش از یک مجموعه مولد دارد و از همین رو قضیه‌ای بسیار ارزشمند است.

قضیه ۱.۱۱.۱ (قضیه حذفی). فرض کنیم $I \subset R = K[x_1, \ldots, x_n]$ یک ایده‌آل و G یک پایه گربنر برای I نسبت به ترتیب تک‌جمله‌ای $x_n \succ_{lex} \cdots \succ_{lex} x_1$ باشد. در این صورت، برای هر $0 \leq l < n$ مجموعه $G_l = G \cap K[x_{l+1}, \ldots, x_n]$ یک پایه گربنر، برای I_l است.

اثبات. عدد طبیعی $0 \leq l < n$ را طوری در نظر می‌گیریم که ثابت و مشخص باشد. از آنجایی که $G \subset I$

خواهیم داشت $G_l \subset I_l$. پس ویژگی اول پایه گربنر را به دست آوردیم. از اینکه $G_l \subset I_l$ نتیجه دیگری می‌گیریم، به این صورت که $\langle \mathrm{LT}(G_l)\rangle \subset \mathrm{LT}(I_l)$. پس برای اثبات این قضیه کافی است ثابت کنیم که $\mathrm{LT}(I_l)$ زیرمجموعه $\langle \mathrm{LT}(G_l)\rangle$ است یا به طور معادل برای هر $f \in I_l$، چندجمله‌ای $g \in G_l$ وجود دارد که $\mathrm{LT}(g) \mid \mathrm{LT}(f)$. توجه به این نکته لازم و ضروری است که $f \in I$ و G یک پایه گربنر، برای ایده‌آل I است. حال طبق تعریف پایه گربنر، عنصری مانند $g \in G$ وجود دارد که $\mathrm{LT}(g) \mid \mathrm{LT}(f)$. از طرفی چون $f \in K[x_{l+1}, \ldots, x_n]$، پس $\mathrm{LT}(g) \in K[x_{l+1}, \ldots, x_n]$. اکنون با در نظر گرفتن اینکه ترتیب تک‌جمله‌ای موجود در صورت قضیه، ترتیب الفبایی است؛ هر تک‌جمله‌ای شامل یکی از متغیرهای $x_1, \ldots, x_l$، بزرگتر از همه تک‌جمله‌ای‌های $K[x_{l+1}, \ldots, x_n]$ است. چون $\mathrm{LT}(g) \in K[x_{l+1}, \ldots, x_n]$، خواهیم داشت $g \in K[x_{l+1}, \ldots, x_n]$ و درنتیجه $g \in G_l$ و حکم اثبات می‌شود. □

۲.۱۱.۱ تعلق به رادیکال یک ایده‌آل

هدف از ارائه این بخش، آن است که چند مورد را مورد بررسی قرار دهیم. در ادامه مباحث، در فصل‌های پیش رو خواهیم دید که رادیکال یک ایده‌آل اهمیت خاصی خواهد داشت. از طرف دیگر، هدفمان، آشنایی با ارائه یک تکنیک زیبا و جذاب، به نام تکنیک رابینویچ [9] است. اکنون و با ارائه این مقدمه کوتاه به بیان گزاره زیر می‌پردازیم:

گزاره ۱.۱۱.۱. فرض کنیم $I = \langle f_1, \ldots, f_k\rangle$ یک ایده‌آل در حلقه چند جمله‌ای‌های $R = K[x_1, \ldots, x_n]$ و y یک متغیر جدید است به گونه‌ای که $\tilde{I} = \langle f_1, \ldots, f_k, 1 - yf\rangle$ ایده‌آلی از حلقه $\tilde{R} := K[x_1, \ldots, x_n, y]$ باشد. همچنین فرض کنیم $f \in R$. در این صورت $f \in \sqrt{I}$ اگر و تنها اگر $1 \in \tilde{I}$.

اثبات. $(\Leftarrow)$ فرض کنیم $f \in \sqrt{I}$. بنابراین $n \in \mathbb{N}$ وجود دارد به طوری که $f^n \in I$. همچنین می‌توانیم ۱ را به صورت زیر بنویسیم:

$$1 = y^n f^n + (1 - y^n f^n) = \underbrace{\overbrace{y^n}^{\in R}\overbrace{f^n}^{\in I}}_{\in I \subseteq \tilde{I}} + \underbrace{\overbrace{(1 - yf)}^{\in \tilde{I}}\overbrace{(1 + yf + \cdots + (yf)^n - 1)}^{\in \tilde{R}}}_{\in \tilde{I}}$$

که نتیجه آن، تعلق ۱ به $\tilde{I}$ است، یعنی $1 \in \tilde{I}$ و یک طرف حکم به اثبات می‌رسد.

[9] Rabinowitsch Technique

$(\Rightarrow)$ برعکس، فرض کنیم $1 \in \tilde{I}$. در این صورت طبق الگوریتم تقسیم $h, h_1, \ldots, h_k \in \tilde{R}$ موجود هستند به طوری که $1 = h_1 f_1 + \cdots + h_k f_k + h(1 - yf)$ حال در طرفین این تساوی با قرار دادن $y = \frac{1}{f}$، می‌توان نوشت $1 = \frac{h_1'}{f^{s_1}} f_1 + \cdots + \frac{h_k'}{f^{s_k}} f_k$. در این رابطه برای هر $1 \leq i \leq k$ داریم $h_i' \in R$ و s_i بیشترین توان y در h_i است. اگر عدد s را به صورت $\max\{s_1, \ldots, s_k\}$ تعریف کنیم، به سادگی مشاهده می‌شود که $f^s \in I$ و در نتیجه $f \in \sqrt{I}$ و به این ترتیب، طرف دوم قضیه نیز اثبات شده است.

□

۳.۱۱.۱ اشباع سازی ایده‌آل

در بخش ۲.۲.۱ با مفهوم اشباع یک ایده‌آل آشنا شدیم. آنچه که در معرفی یک ایده‌آل و شناخت آن به ما کمک می‌کند، یافتن حداقل یک مجموعه مولد برای آن است. در صورتی که شرایط، به شکل بهتری رقم بخورد، حتی می‌توانیم یک پایه گربنر برای ایده‌آل مدنظر بیابیم. حال بر آن هستیم که یک ایده‌آل اشباع شده را شناسایی کنیم. گزاره زیر شرایط خوبی را رقم می‌زند و یک پایه گربنر برای ایده‌آل اشباع شده، در اختیار ما می‌گذراد. روش به کاررفته در اثبات این قضیه، به نوعی تعمیمی از تکنیک رابینوویچ است که در بحث تعلق به رادیکال یک ایده‌آل با آن آشنا شدیم.

گزاره ۲.۱۱.۱. فرض کنیم $I \subseteq R = K[x_1, \ldots, x_n]$ ایده‌آلی در حلقه R باشد. ایده‌آل $J = I + \langle yf - 1 \rangle$ را در نظر می‌گیریم به گونه‌ای که y یک متغیر جدید و G یک پایه گربنر برای J باشد. در این صورت با در نظر گرفتن ترتیب $y \prec_{lex} x_1 \prec_{lex} \cdots \prec_{lex} x_n$، مجموعه $G \cap R$ یک پایه گربنر برای $I : f^\infty$ خواهد بود.

اثبات. فرض کنیم $I = \langle f_1, \ldots, f_k \rangle$. طبق تعریف پایه گربنر، کافی است دو مورد را نشان دهیم. یکی آنکه $G \cap R \subset I : f^\infty$ و دیگر آنکه برای هر $h \in I : f^\infty$، عنصری مانند $g \in G \cap R$ موجود است به طوری که $\mathrm{LT}(g) \mid \mathrm{LT}(h)$.

نخست به اثبات ویژگی اول می‌پردازیم. این کار را با عنصرگیری انجام می‌دهیم. فرض کنیم $g \in G \cap R$. پس $g \in G$ و $g \in R$. چون $g \in G$ و G یک پایه گربنر برای J است، پس $g \in J$. این تعلق به ایده‌آل حاکی از آن است که در حلقه $K[x_1, \ldots, x_n, y]$ عناصر $p_1, \ldots, p_k, p$ وجود دارند به طوری که می‌توان نوشت $g = \sum_{i=1}^k p_i f_i + p(yf - 1)$. با قرار دادن $f = \frac{1}{y}$ در رابطه اخیر، خواهیم داشت $g = \frac{\sum_{i=1}^k q_i f_i}{f^s}$، که s بزرگترین توان y ظاهر شده در $p_1, \ldots, p_k$ است و $q_i = p_i \mid_{y=\frac{1}{f}}$. پس $g f^s \in I$ و در نهایت $g \in I : f^\infty$.

برای اثبات ویژگی دوم، فرض می‌کنیم که $h \in I : f^\infty$. ثابت می‌کنیم که $g \in G \cap R$ وجود دارد، به طوری که $\mathrm{LT}(g) \mid \mathrm{LT}(h)$. از آنجایی که $h \in I : f^\infty$ پس $s \in \mathbb{N}$ موجود است، به طوری که $hf^s \in I$. از طرفی $yf - ۱ \in J$ نتیجه می‌دهد که $yf \equiv ۱ \pmod J$ و بنابراین $(yf)^s \equiv ۱ \pmod J$. با ضرب طرفین این رابطه در h داریم $y^s hf^s \equiv h \pmod J$. چون $hf^s \in I$ و $I \subset J$، پس $h \in J$ و بنابراین $g \in G$ موجود است به طوری که $\mathrm{LT}(g) \mid \mathrm{LT}(h)$. از طرفی $h \in R$ و در نتیجه $\mathrm{LT}(h) \in R$. بنابراین $\mathrm{LT}(g) \in R$ و با توجه به ترتیب تک‌جمله‌ای مورد نظر، خواهیم داشت $g \in R$. پس واضح است که $g \in G \cap R$ و به اثبات مطلوب خود دست یافته‌ایم. $\square$

اکنون که به انتهای این فصل رسیده‌ایم، لازم است بدانیم آنچه که بیان شد، به مانند جعبه ابزاری است که می‌تواند در تعاریف، اثبات قضایا و حل مثال‌های آتی یاری رسان باشد. این مطالب عمدتاً به زبان ساده و عامیانه و به دور از فرمول‌بندی‌های سنگین ریاضی مطرح شده است تا خواننده بتواند با رویکرد فکری پایان‌نامه به خوبی آشنا شود. در فصل بعد به مبحث جبر دیفرانسیلی ورود پیدا می‌کنیم و رفته رفته بر عمق مطالب می‌افزاییم.

فصل ۲

مفاهیم اساسی در جبر دیفرانسیلی

در این فصل، ابتدا با پیشینه‌ای مختصر از جبر دیفرانسیلی آشنا می‌شویم و به آشنایی با انگیزه‌های ظهور این شاخه از ریاضیات می‌پردازیم و در ادامه چشم‌انداز آن را مورد بررسی قرار می‌دهیم. سپس برخی مفاهیم پایه‌ای جبر دیفرانسیلی را معرفی می‌نماییم. از جمله این مفاهیم، حلقه دیفرانسیلی و انواع آن، میدان دیفرانسیلی و ایده‌آل دیفرانسیلی هستند. مهمترین منابع به کار رفته در این فصل [۱۱، ۱۰، ۹، ۵، ۱] است.

۱.۲ مقدمه

در این فصل ابتدا به معرفی پیشینه و مطالعه رهیافتهای پیشگامان این عرصه می‌پردازیم. پس از آن، معرفی مفاهیم مرتبط در جبر دیفرانسیلی را در دستور کار قرار می‌دهیم. سپس با تعریف حلقه دیفرانسیلی آشنا می‌شویم. این ساختار، ابتدا به عنوان تعمیمی از مفهوم حلقه از جبر کلاسیک، بیان می‌شود، به طوری که چاشنی مشتق را به همراه خود دارد. میدان دیفرانسیلی، مفهوم دیگری است که پس از حلقه دیفرانسیلی به آن می‌پردازیم. در ادامه به سراغ مفهوم ایده‌آل دیفرانسیلی می‌رویم و انواع آن، از جمله ایده‌آل دیفرانسیلی رادیکال، ایده‌آل دیفرانسیلی اول و ایده‌آل دیفرانسیلی ماکزیمال را خواهیم آموخت. جبر ریت [1] به عنوان یکی از مفاهیم بنیادی در این شاخه به حساب می‌آید که به افتخارجوزف ریت بنیانگذار آن، نام نهاده شده است. همانند آموخته‌های پیشین، ایده‌آل دیفرانسیلی اول، ایده‌آل دیفرانسیلی رادیکال و ایده‌آل دیفرانسیلی ماکزیمال را تعریف خواهیم کرد و خواهیم دید که

[1] Ritt Algebra

تا چه اندازه و در چه صورتی، قضایای جبر کلاسیک را به ارث خواهند برد. پس از آشنایی با این مفاهیم مقدماتی، برآن هستیم تا قضایای مهم و بنیادی مرتبط با این ساختارها را بررسی و تحلیل نموده، ضمن ارائه مثال‌های مرتبط با این مفاهیم، به روشن شدن مطالب بپردازیم.

۲.۲ پیشینه جبر دیفرانسیلی

جبر دیفرانسیلی در سال ۱۹۳۲ توسط «جوزف ریت» معرفی شد. این شاخه از این ریاضیات با انتشار کتابی با عنوان «معادلات دیفرانسیل» پا به عرصه ظهور نهاد و تا کنون به عنوان مرجعی کلیدی در این بخش به کار می‌رود [۱۲]. ریت در این کتاب، نظریه خود را در مورد چند جمله‌ای‌های دیفرانسیلی، حلقه‌های دیفرانسیلی و ایده‌آل‌های دیفرانسیلی ارائه می‌کند. او نظریه خود را با تاکید بر ساختارها و الگوریتم‌های صریح ارائه می‌کند و در ادامه به تعریف و بررسی منیفلد دیفرانسیل جبری می‌پردازد که به نوعی آغازگر مطالعه هندسه معادلات دیفرانسیل است. کار بزرگی که ریت و همکارانش در دهه ۱۹۳۰ انجام دادند، ارائه نظریه کلاسیک معادلات دیفرانسیل غیرخطی بود. کتاب یاد شده، نتایج ۲۰ سال کار روی این مسئله را ارائه می‌دهد. این کتاب به سرعت تبدیل به یک مرجع کلاسیک شد و تا کنون، به عنوان یکی از کامل‌ترین و ارزشمندترین گزارش‌های جبر دیفرانسیلی و کاربردهای آن استفاده می‌شود. یکی از برجسته‌ترین دانشجویان ریت، الیس کلچین [۲] بود. در سال ۱۹۵۷ یعنی حدود ۶ سال پس از انتشار کتاب یادشده، ایروینگ کاپلانسکی [۳]،یکی دیگر از فعالان عرصه جبر دیفرانسیلی، ضمن ورود به این عرصه، فعالیت‌های ریت و کلچین را از ابتدا توصیف کرد. یکی از کارهای مهم کلچین، انتشار کتاب «جبر دیفرانسیلی و گروه‌های جبری» بود [۸]. در این اثر، کلچین همچنین با الهام گرفتن از تئوری گالوا به گسترش میدان‌های دیفرانسیلی نگاه می‌کند. او در ادامه به تعریف نظیر دیفرانسیلی از توپولوژی زاریسکی فضای آفین می‌پردازد و هندسه جبری دیفرانسیل را توصیف می‌نماید. اخیراً، ساختارهای ریت و کلچین در جبر رایانه‌ای مدرن کاربردهایی پیدا کرده‌اند که از جمله آنها می‌توان در استدلال و اثبات خودکار درپای آن‌ها را جستجو کرد [۴]. برآیند همه آنچه که گفته شد نشان از اهمیت و چشم‌انداز وسیع این گرایش از ریاضیات را نشان می‌دهد.

[2] Ellis Kolchin
[3] Irving Kaplansky

۳.۲ حلقه‌های دیفرانسیلی

از جبر کلاسیک با مفهوم حلقه آشنا هستیم. همانطور که در فصل قبل نیز اشاره شد، همه حلقه‌های مفروض در این پایان‌نامه، حلقه‌های جابجایی و یکدار هستند و ۱ به عنوان عنصر یکِ حلقه در نظر گرفته می‌شود. با توجه به عنوان مبحث، مایل هستیم تا علاوه بر مطالعه و بررسی ساختارهای جبری، در محدوده دیفرانسیل و مشتق نیز قدم برداریم و مطالب را از دو منظر، به طور موازی پیش ببریم.

در اینجا و پیش از ادامه بحث، مطالعه مثال زیر، باعث دستیابی به افقی روشن، از تفاوت اثر جبر و دیفرانسیل بر دستگاه‌های معادلات خواهد شد. در مثال پیش رو ساده‌ترین اثر این دو شاخه از ریاضیات را بر ما نمایان خواهد کرد. علیرغم سادگی این مثال، خواهیم دید که دیدگاه خوبی برای درک ادامه مباحث به ویژه فصل سوم، ایجاد خواهد کرد. در واقع در این مثال تصمیم داریم تا تفاوت ظاهری سه نوع دستگاه معادلات را با یکدیگر مقایسه کنیم. یک دستگاه معادلات جبری، یک دستگاه معادلات دیفرانسیلی و یک دستگاه معادلات دیفرانسیل جبری در این مثال با یکدیگر مقایسه شده‌اند.

مثال ۱.۳.۲. در زیر یک نمونه دستگاه معادلات جبری را در مشاهده می‌کنیم:

$$\begin{cases} ۲x + y + z = ۲ \\ -x + ۲y - ۹z = ۳ \\ ۵x - ۳y + ۷z = -۶. \end{cases}$$

و مثال زیر نمونه یک دستگاه معادلات دیفرانسیلی است:

$$\begin{cases} x' = ۲\sin x - ۳y + ۳z \\ \tan y' = ۵x + ۷\log y + z \\ z' = ۴x + ۵y - ۶\exp z. \end{cases}$$

همچنین یک دستگاه معادلات دیفرانسیل جبری به صورت زیر است:

$$\begin{cases} x' - ۲xy'^{۳} + y^{۲}z' + ۵ = ۰ \\ x^{۲}y' + ۳x^{۵}z' + z^{۲}x' - ۷ = ۰ \\ yz' + ۸z^{۳}y' + x^{۲}x' - ۶ = ۰. \end{cases}$$

نتیجه ۱.۳.۲. از آنجایی که معادلات چندجمله‌ای (همان دستگاه معادلات جبری در مثال فوق) معادلات دیفرانسیلی جبری با مرتبه (منظور از مرتبه، بالاترین درجه مشتق است) صفر است، پس می‌توان جبر دیفرانسیلی را به عنوان تعمیمی از هندسه جبری کلاسیک در نظر گرفت.

۱.۳.۲ مشتق ساختار جبری

با این مقدمه و بررسی مثال فوق، آمادگی آن را داریم تا با مفهوم مشتق روی ساختارهای جبری آشنا شویم. ابتدا از حلقه‌ها شروع می‌کنیم. پس به عنوان نخستین مبحث، مشتق را روی حلقه R تعریف می‌کنیم.

تعریف ۱.۳.۲ (مشتق). مشتق روی حلقه R عبارتست از نگاشتی به صورت $\delta : R \longrightarrow R$ به طوری که ویژگی‌های زیر را داشته باشد:

$$(1)\ \ \forall\, a, b \in R; \quad \delta(a+b) = \delta(a) + \delta(b)$$

$$(2)\ \ \forall\, a, b \in R; \quad \delta(ab) = a\delta(b) + b\delta(a)$$

در این صورت، $\delta(a)$ را مشتق a در حلقه R می‌نامیم.

در تعریف فوق، مشتق، تنها یک نگاشت است و ماهیتی متفاوت از آنچه که در آنالیز ریاضی آموخته‌ایم؛ دارد. آنچه که وجه اثرگذار این نگاشت را سبب می‌شود؛ وجود این دو ویژگی است که به شکل شگفت انگیزی تمامی مسیر آینده این بخش از ریاضیات را روشن خواهد کرد. به دیگر بیان، خواهیم دید که تمام قضایا و تعاریف مطرح شده در این زمینه از ریاضیات، از این دو ویژگی سرچشمه خواهد گرفت. در واقع ویژگی اول، اثر جمع حلقه روی این نگاشت و ویژگی دوم، اثر ضرب حلقه بر آن است. با دقت در ویژگی دوم، خواهید دید که نوعی ارتباط بین ضرب و جمع حلقه برقرار شده است. چنین ارتباطی در یک حلقه، امری شناخته شده است و پیش از این، مشابه آن را در خاصیت پخشی ضرب روی جمع، در تعریف حلقه‌ها آموخته‌ایم.

همچنین هر دو ویژگی از ویژگی‌های بارز مشتق است و سالهاست که آنها را از مفاهیم ریاضی مقدماتی می‌شناسیم. ویژگی اول همان است که مشتق مجموع را با مجموع مشتقات برابر می‌داند و ویژگی دوم همان مفهوم آشنایی است که آن را به عنوان «قاعده لایبنیتز» می‌شناسیم. ناگفته پیداست که تعریف مشتق روی یک حلقه، ما را

به فصل جدیدی از ریاضیات رهنمون می‌سازد. به عنوان مثال، یکی از حلقه‌های شناخته شده در جبر کلاسیک، حلقه ماتریس‌هاست و با این تعریف، قادر خواهیم بود که مشتق ماتریس‌ها را تعریف کنیم.

توجه به این نکته نیز جالب توجه است که در مقایسه این تعریف از مشتق، با آموخته‌های قبلی، آن است که بر خلاف آنچه که از آنالیز ریاضی مقدماتی می‌دانیم و پیوستگی شرط لازم وجود مشتق است؛ در این مبحث، می‌توان از حلقه‌ای مانند $\mathbb{Z}$ مشتق گرفت. این امر، حاکی از ماهیت متفاوت تعریف مشتق، در این دو شاخه از ریاضیات است. با استفاده از استقرا می‌توان رابطه ۱ در تعریف ۱.۳.۲ را تعمیم داد. لم زیر، به بیان این موضوع پرداخته است.

لم ۱.۳.۲. ثابت کنید که برای هر $a_1, \dots, a_n \in R$ داریم $\delta(a_1 + \cdots + a_n) = \delta(a_1) + \cdots + \delta(a_n)$.

اثبات. با توجه به اینکه با اعداد طبیعی سر و کار داریم، استفاده از استقرا ریاضی را مد نظر قرار می‌دهیم. به وضوح حکم برای $n = 1$ درست است. فرض کنیم برای $n = m$ نیز درست باشد. در این صورت، کافی است نشان دهیم که برای $m + 1$ درست است، یعنی $\delta(a_1 + \cdots + a_{m+1}) = \delta(a_1) + \cdots + \delta(a_m) + \delta(a_{m+1})$. طبق ویژگی اول تعریف مشتق داریم $\delta(a_1 + \cdots + a_m + a_{m+1}) = \delta(a_1 + \cdots + a_m) + \delta(a_{m+1})$ و طبق فرض استقرا $\delta(a_1 + \cdots + a_{m+1}) = \delta(a_1) + \cdots + \delta(a_m) + \delta(a_{m+1})$. در این صورت به اثبات مطلوب خود دست یافته‌ایم. □

قرارداد ۱.۳.۲. با علم به مفاهیم مقدماتی مشتق و تکرار متوالی آن، می‌توان مشتقات مراتب بالاتر را به صورت $\delta^2(a) = \delta(\delta(a))$ و $\delta^3(a) = \delta(\delta^2(a))$ و $\cdots$ نوشت. همچنین به عنوان قرارداد می‌پذیریم که $\delta^0(a) = a$.

تذکر ۱.۳.۲. با توجه به آنچه که پیشتر، از جبر حلقه‌ها آموخته‌ایم و مواردی که تا کنون مطرح شده است؛ نکات زیر قابل استنتاج است.

(1) $\forall\, a \in R; \quad \delta(a^n) = na^{n-1}\delta(a).$

(2) $\delta(0) = \delta(0 + 0) = \delta(0) + \delta(0) \to \delta(0) = 0.$

(3) $\delta(1) = \delta(1.\,1) = \ 1.\delta(1) + \delta(1)\ .\ 1 \to \delta(1) = \delta(1) + \delta(1) \to \delta(1) = 0.$

در ادامه مباحث، اهمیت و نقش این نتایج و کاربردهای آن را خواهیم دید. با تلفیق رابطه اخیر و لم ۱.۳.۲ درمی‌یابیم که مشتق هر عدد صحیح، در هر حلقه‌ای برابر با صفر است. این موضوع در لم ۴.۳.۲ به تفصیل بررسی شده است.

لم ۲.۳.۲. فرض کنیم $a \in R$ وارون‌پذیر باشد و $aa^{-1} = 1$. در این صورت $\delta(a^{-1}) = -\frac{\delta(a)}{a^2}$.

اثبات. می‌دانیم $a^{-1}\delta(a) + a\delta(a^{-1}) = \delta(a.a^{-1}) = \delta(1) = 0$ و در نتیجه $a\delta(a^{-1}) = -a^{-1}\delta(a)$. پس داریم $a^{-1}a\delta(a^{-1}) = -a^{-1}a^{-1}\delta(a)$ و در نهایت $\delta(a^{-1}) = -a^{-1}a^{-1}\delta(a) = -\frac{\delta(a)}{a^2}$. □

در این صورت مشاهده می‌کنیم که رابطه مذکور، همان رابطه آشنای مشتق وارون در حساب دیفرانسیل مقدماتی است. توجه به این نکته ضروری است که برقراری آخرین تساوی، منوط به پذیرش این قرارداد است که a^{-1} را با نماد $\frac{1}{a}$ نمایش دهیم. لازم به ذکر است که اهمیت این موضوع، زمانی بیش از پیش آشکار می‌شود که حلقه‌هایی مانند ماتریس‌ها یا $\mathbb{Z}_n$ در دست بررسی و مطالعه باشند.

اکنون آمادگی آن را داریم که با استفاده از قاعده لایبنیتز و استقرا ریاضی، رابطه‌ای برای مشتق n ام حاصلضرب یعنی $\delta^n(ab)$ برحسب n (مرتبه مشتق) و $\delta(a)$ و $\delta(b)$ به دست آوریم.

قضیه ۱.۳.۲. مشتق n- ام حاصل ضرب، روی حلقه R برای هر عدد طبیعی n به صورت زیر است:

$$\delta^n(ab) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \delta^{n-k}(a)\delta^k(b).$$

اثبات. همانند لم قبل و از آنجایی که n یک عدد طبیعی است، استفاده از استقرا ریاضی امری اجتناب ناپذیر به نظر می‌رسد. ابتدا فرض صفر را بررسی می‌کنیم. در این حالت، مقدار n را برابر با ۱ در نظر می‌گیریم و به سادگی و با جایگذاری در رابطه فوق، درستی آن نمایان می‌شود؛ چرا که همان رابطه لایبنیتز به دست می‌آید. فرض کنیم این ادعا برای $n = m$ درست است، یعنی رابطه

$$\delta^m(ab) = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} \delta^{m-k}(a)\delta^k(b)$$

برقرار است. پس، حکم استقرا آن است که رابطه بالا را برای $n = m + 1$ اثبات کنیم، یعنی باید ثابت کنیم که

$$\delta^{m+1}(ab) = \sum_{k=0}^{m+1} \binom{m+1}{k} \delta^{m-k+1}(a)\delta^k(b).$$

برای محاسبه $\delta^{m+1}(ab)$ کافیست از $\delta^m(ab)$ مشتق بگیریم، یعنی داریم:

$\delta^{m+1}(ab) = \delta(\delta^m(ab)) = \delta(\sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k}\delta^{m-k}(a)\delta^k(b)).$

چون $\binom{m}{k}$ یک عدد طبیعی است، طبق رابطه ۳ در تذکر ۱.۳.۲ مشتق آن برابر صفر است. از طرفی چون مشتق مجموع برابر است با مجموع مشتقات، این گونه می‌نویسیم:

$\delta^{m+1}(ab) = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k}\delta(\delta^{m-k}(a)\delta^k(b)) =$

$\sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k}\delta^{m-k+1}(a)\delta^k(b) + \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k}\delta^{m-k}(a)\delta^{k+1}(b) =$

$\delta^{m+1}(a)b + \sum_{k=1}^{m} \binom{m}{k}\delta^{m-k+1}(a)\delta^k(b) + \sum_{k=0}^{m-1} \binom{m}{k}\delta^{m-k}(a)\delta^{k+1}(b) + a\delta^{m+1}(b) =$

$\delta^{m+1}(a)b + a\delta^{m+1}(b) + \sum_{k=1}^{m} \binom{m}{k}\delta^{m-k+1}(a)\delta^k(b) + \sum_{k=0}^{m-1} \binom{m}{k}\delta^{m-k}(a)\delta^{k+1}(b) =$

$\delta^{m+1}(a)b + a\delta^{m+1}(b) + \sum_{k=1}^{m} \binom{m}{k}\delta^{m-k+1}(a)\delta^k(b) + \sum_{k=1}^{m} \binom{m}{k-1}\delta^{m-k+1}(a)\delta^k(b) =$

$\delta^{m+1}(a)b + a\delta^{m+1}(b) + \sum_{k=1}^{m}(\binom{m}{k} + \binom{m}{k-1})\delta^{m-k+1}(a)\delta^k(b) =$

$\delta^{m+1}(a)b + a\delta^{m+1}(b) + \sum_{k=1}^{m} \binom{m+1}{k}\delta^{m-k+1}(a)\delta^k(b) =$

$$\sum_{k=0}^{m+1} \binom{m+1}{k}\delta^{m-k+1}(a)\delta^k(b).$$

این همان حکم استقرا و تأیید آن است که به مطلوب خود دست یافته‌ایم. □

تذکر ۲.۳.۲. صورت قضیه ۱.۳.۲ از تشابه با جمع دوجمله‌ای خیام حاصل می‌شود که به صورت زیر است:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k}b^k.$$

۲.۳.۲ حلقه دیفرانسیلی

با مفهوم مشتق، به عنوان یک نگاشت روی یک ساختار جبری آشنا شدیم. حال تعریف زیر، ما را به نخستین نقطه اتصال جبر و دیفرانسیل می‌رساند:

تعریف ۲.۳.۲ (حلقه دیفرانسیلی). فرض کنیم R یک حلقه جابجایی و یکدار باشد. Δ را مجموعه‌ای به صورت $\Delta = \{\delta_1, \ldots, \delta_m\}$ در نظر می‌گیریم به طوری که δ_i ها به طور متقابل و دو به دو جابجایی باشند. به عبارت دیگر به ازای هر $a \in R$ و $1 \leq i, j \leq m$ داشته باشیم $\delta_i(\delta_j(a)) = \delta_j(\delta_i(a))$. اکنون حالات زیر را در نظر می‌گیریم و بر اساس آن دو نوع حلقه دیفرانسیلی را تعریف می‌کنیم:

۱. یک حلقه دیفرانسیلی را معمولی می‌نامیم هرگاه $Card(\Delta) = ۱$. به عبارت دیگر $\Delta = \{\delta\}$. در این صورت حلقه دیفرانسیلی مد نظر را با (R, δ) نمایش می‌دهیم.

۲. یک حلقه دیفرانسیلی را جزئی می‌نامیم هرگاه $Card(\Delta) > ۱$ و با (R, Δ) نمایش می‌دهیم.

تعریف ۲.۳.۳ (ثابت حلقه). فرض کنیم (R, δ) یک حلقه دیفرانسیلی باشد. در این صورت $c \in R$ را ثابت حلقه گوییم هرگاه $\delta(c) = ۰$.

تذکر ۲.۳.۳. با توجه به این موضوع و استفاده از قاعده لایبنیتز، برای ثابت $c \in R$ و عنصر دلخواه $a \in R$ می‌توان نوشت $\delta(ca) = c\delta(a)$.

اکنون که با موجودی به نام مشتق روی حلقه، آشنا شدیم، خوب است که به سراغ یک لم ساده و در عین حال کاربردی برویم. در این لم قصد داریم تا به اثبات رابطه اول تذکر ۲.۳.۱ بپردازیم.

لم ۲.۳.۳. فرض کنیم (R, δ) یک حلقه دیفرانسیلی باشد. در این صورت به ازای هر $r \in R$ و $m \in \mathbb{N}$ خواهیم داشت: $\delta(r^m) = mr^{m-۱}\delta(r)$.

اثبات. با توجه به این که با توان طبیعی، سر و کار داریم، استفاده از استقرا ریاضی پیش از هر چیز دیگری به ذهن متبادر می‌شود. فرض صفر استقرا با قرار دادن $m = ۱$ در دو طرف حکم، به وضوح برقرار است. حال طبق فرض استقرا برای $m = k$ درست است. پس رابطه: $\delta(r^k) = kr^{k-۱}\delta(r)$ برقرار است. برای آنکه بتوانیم حکم استقرا را برای $m = k + ۱$ به اثبات برسانیم، کافی است اینگونه عمل کنیم که $\delta(r^{k+۱}) = \delta(r^k r)$. با به کارگیری قاعده لایبنیتز خواهیم داشت $\delta(r^{k+۱}) = \delta(r^k)r + r^k\delta(r)$. با جایگذاری $\delta(r^k)$ از فرض استقرا خواهیم داشت $\delta(r^{k+۱}) = kr^{k-۱}\delta(r)r + r^k\delta(r)$. در نهایت با حصول رابطه $\delta(r^{k+۱}) = (k + ۱)r^k\delta(r)$ لم را به اثبات رسانده‌ایم. □

لم ۲.۳.۴. فرض کنیم R یکی از حلقه‌های $\mathbb{Z}$ یا $\mathbb{Z}_n$ باشد. در این صورت تنها تابع مشتق روی حلقه‌های مذکور، تابع صفر است.

اثبات. ابتدا در مورد $\mathbb{Z}$ اثبات می‌کنیم. طبق مورد ۲ تذکر ۲.۳.۱ همواره $\delta(۰) = ۰$. همچنین طبق مورد ۳ همان تذکر همواره $\delta(۱) = ۰$. حال چون هر عدد صحیح مثبت m را می‌توان به صورت $m = \underbrace{۱ + \ldots + ۱}_{m}$ نوشت، پس طبق تذکر ۲.۳.۳ برای کلیه اعداد صحیح مثبت m داریم $\delta(m) = ۰$ حال به سراغ اعداد منفی می‌رویم.

ابتدا باید $\delta(-۱)$ را محاسبه کنیم. برای این کار اینگونه عمل می‌کنیم: $\delta(-۱+۱) = \delta(۰) = ۰$. حال طبق ویژگی اول مشتق، $\delta(-۱+۱) = \delta(۱) + \delta(-۱)$. از آنجایی که $\delta(۱) = ۰$ پس $\delta(-۱) = ۰$. با توجه به این نتیجه و با استدلالی مشابه آنچه که در مورد اعداد صحیح مثبت به کار بردیم، تابع مشتق، برای اعداد صحیح منفی نیز صفر خواهد بود و حکم ثابت می‌شود.

فرآیند اثبات این لم، بیانگر آن است که مشتق در این شاخه از ریاضیات، مفهومی کاملاً متفاوت با آنالیز دارد. آنچه که در تعریف مشتق در آنالیز ضرورت دارد، وجود یک همسایگی یا یک گوی باز است؛ به طوری که، تابع در آن همسایگی یا گوی باز در اطراف آن نقطه، تعریف شده باشد و در نتیجه مشتق‌گیری از تک نقطه امری فاقد معناست؛ حال آنکه در اثبات لم فوق، از اعداد صحیح و به صورت تک تک مشتق گرفته شده است. این امر به دلیل ماهیت متفاوت مشتق در جبر دیفرانسیلی است، چرا که به صورت یک نگاشتی است که روی عناصر یک حلقه جبری تعریف می‌شود.

اکنون به سراغ حلقه $\mathbb{Z}_n$ می‌رویم. ابتدا حلقه $\mathbb{Z}_۲$ را در نظر می‌گیریم. در این صورت $\mathbb{Z}_۲ = \{۰, ۱\}$ و طبق تذکر ۲.۳.۱ داریم $\delta(۰) = \delta(۱) = ۰$. حال عنصر $k \in \mathbb{Z}_n$ و $n \geq ۳$ را به گونه ای در نظر می‌گیریم که $۲ \leq k \leq n-۱$. از آنجایی که رابطه $\delta(k) = \delta(\underbrace{۱+\cdots+۱}_{k}) = \underbrace{\delta(۱)+\cdots+\delta(۱)}_{k} = ۰$ برقرار است، پس حکم قضیه را اثبات نموده‌ایم. $\square$

حال که با برخی از مفاهیم مقدماتی جبر دیفرانسیلی آشنا شدیم آمادگی آن را داریم تا با ارائه چند مثال، به درک بهتری از مفهوم مشتق روی ساختارهای جبری، دست پیدا کنیم. در تمامی این مثال‌ها، حلقه مورد نظر، حلقه‌ای جابجایی و یکدار است و در ادامه نیز همین روند وجود خواهد داشت؛ مگر اینکه خلاف آن ذکر شود.

مثال ۲.۳.۲. فرض کنیم R یک حلقه جابجایی و یکدار باشد. تعریف می‌کنیم:

$$\delta : R \longrightarrow R$$
$$\forall\, a \in R;\quad \delta(a) = ۰$$

در این صورت (R, δ) یک حلقه دیفرانسیلی است چون به وضوح هر دو شرط عنوان شده در تعریف مشتق را دارد. ابتدا شرط اول را بررسی می‌کنیم: واضح است که به ازای هر $a, b \in R$ داریم $a + b \in R$. پس $\delta(a+b) = \delta(a) + \delta(b) = ۰ + ۰ = ۰$. به دست آمدن این رابطه به معنای برقراری ویژگی اول تعریف مشتق است. اکنون که از درستی ویژگی اول، اطمینان حاصل کرده‌ایم، به سراغ بررسی ویژگی دوم تعریف مشتق می‌رویم.

در بررسی ویژگی دوم نیز به طریق مشابه با ویژگی اول عمل می‌کنیم. در این صورت، به ازای هر $a, b \in R$ داریم $ab \in R$. پس $0 = \delta(ab) = \delta(a) \,.\, b + \; b.\delta(a) = 0.\, b + a.\, 0 = 0 + 0 = 0$. پس ویژگی دوم تعریف مشتق (قاعده لایبنیتز) نیز برقرار است. در واقع این مثال به ما می‌آموزد که برای هر حلقه جابجایی و یکدار R به ازای هر $a \in R$ عبارت $\delta(a) = 0$ یک مشتق روی حلقه خواهد بود.

مثال ۲.۳.۳. حلقه $R = \mathbb{Q}[x]$ را در نظر بگیرید به طوری که مشتق $\delta(x) = 1$ روی آن تعریف شده است. می‌خواهیم نشان دهیم که (R, δ) یک حلقه دیفرانسیلی است.

برای این کار، ابتدا برخی از مقدمات را با استفاده از لم‌ها، تعاریف و مثالهای قبلی در نظر می‌گیریم و سپس به بررسی دو شرط تابع مشتق می‌پردازیم. فرض کنیم $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{Q}$. در این صورت طبق لم ۲.۳.۴ داریم: $\delta(a_0) = \delta(a_1) = \cdots = \delta(a_n) = 0$. از طرفی طبق تذکر ۲.۳.۱ $\delta(x^n) = nx^{n-1}\delta(x)$. پس اثر تابع مشتق روی عنصر دلخواهی مانند $h \in \mathbb{Q}[x]$ به صورت زیر است:

$$\delta(h) = \delta(c_0 + c_1 x + \cdots + c_k x^k) = \delta(c_0) + \delta(c_1 x) + \cdots + \delta(c_k x^k) =$$
$$c_1\delta(x) + \cdots + c_k\delta(x^k) = c_1 + \cdots + kc_k x^{k-1}$$

همانگونه که از آخرین تساوی پیداست، حاصل $\delta(h)$ ظاهری شبیه به مشتق آنالیزی h دارد که پیش از این، به عنوان نخستین آموخته‌های مشتق به یاد می‌آوریم. پس نشان دادن اینکه $\delta(x) = 1$ دو ویژگی نگاشت مشتق را دارد، کار دشواری نیست. پس $\delta(x) = 1$ یک نگاشت مشتق، روی حلقه $R = \mathbb{Q}[x]$ و در نتیجه $(\mathbb{Q}[x], 1)$ یک حلقه دیفرانسیلی است.

مثال ۲.۳.۴. در آنالیز مختلط، تابع هولومورف تابعی مانند $f : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}$ است به طوری که در اطراف هر نقطه از دامنه آن، یک همسایگی وجود دارد که تابع در آن همسایگی مشتق‌پذیر است. وجود مشتق مختلط در یک همسایگی یک شرط بسیار قوی است، آنچنان که دلالت بر مشتق‌پذیری به تعداد دفعات نامتناهی دارد. یک تابع هولومورف، به صورت موضعی با سری تیلور خود برابر است و این برابری ناشی از وجود مشتق مرتبه نامتاهی است. منظور از موضعی این است که برابری چنین تابعی با سری تیلور خود، در نقطه اتفاق می‌افتد و تضمینی برای تساوی در یک همسایگی از نقطه مورد نظر، وجود ندارد.

با توجه به آنچه که مطرح شد، توابع هولومورف را توابع تحلیلی می‌نامیم. آنچه که در این تفاوت بیان آشکار است، به کارگیری واژه «تحلیلی» تنهاً در آنالیز حقیقی به کار می‌رود و استفاده از واژه «هولومورف» اشاره به

مختلط بودن تابع دارد. به زبان ساده تابع هولومورف همان تابعی است که در تمام دامنه خود مشتق‌پذیر است. تابع هولومورفی که دامنه آن تمام $\mathbb{C}^n$ باشد، تابع تام نامیده می‌شود. پس از آشنایی با این رده از توابع، اکنون با رده جدیدی از توابع آشنا می‌شویم که در تعداد متناهی از دامنه تعریفشان مشتق‌پذیر نیستند. در آنالیز مختلط، یک تابع مرومورفیک روی یک زیرمجموعه باز D از صفحه مختلط، یک تابع است که روی تمام D به جز نقاط تکین خود هولومورفیک است، که این نقاط قطب‌های تابع هستند. حال فرض کنیم F میدانی از توابع مرومورفیک از n متغیر مختلط باشد که روی $\mathbb{C}^n$ تعریف شده است. با توجه به تعریف این دسته از توابع به راحتی می‌توان نشان داد که $(F, \{\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}\})$ یک میدان دیفرانسیلی است.

تذکر ۲.۳.۴. گاهی اوقات برای اثبات، بهتر است که عبارت δ را به شکل عملگری بنویسیم. منظور از فرم عملگری آن است که بتوان δ را به گونه نوشت که روی یک عنصر از حلقه مورد نظر، اثر کند و یک خروجی متناسب بدهد. در صورتی که این خروجی، یک خروجی مطلوب باشد، می‌توان گفت که δ یک مشتق روی حلقه مدنظر است. کاربردی از این موضوع را در اثبات لم پیش رو خواهیم دید.

لم ۲.۳.۵. فرض کنیم (S, δ) یک حلقه دیفرانسیلی معمولی باشد و $R = S[x]$ حلقه الحاقی چندجمله‌ای‌های تک متغیره با ضرایب از S باشد. در این صورت برای هر $f \in R$ و در نظر گرفتن $\delta(x) = f$ یک حلقه دیفرانسیلی به شکل (R, δ) خواهیم داشت.

اثبات. واضح است که این لم، تعمیمی از مثال ۲.۳.۳ است. با توجه به صورت لم و تعریف $\delta(x)$ فرم عملگری آن به صورت $\delta = f\frac{d}{dx}$ خواهد بود. در این صورت به سادگی و مشابه آنچه که در مثال ۲.۳.۳ مشاهده کردیم، هر دو ویژگی مشتق قابل اثبات است چرا که δ به فرمی از مشتق است که در آنالیز آموخته‌ایم. □

تذکر ۲.۳.۵. لم بالا تنهاً در مورد حلقه‌های دیفرانسیلی معمولی درست است و در مورد حلقه‌های دیفرانسیلی جزئی، لزوماً برقرار نیست. برای این منظور به ارائه یک مثال نقض می‌پردازیم.

مثال ۲.۳.۵. حلقه الحاقی $R = \mathbb{Q}[x]$ را در نظر بگیرید. فرض کنیم $\delta_1(x) = 1$ و $\delta_2(x) = x$ دو نگاشت تعریف شده روی این حلقه باشند. از آنجایی که $\delta_1(\delta_2(x)) = 1 \neq 0 = \delta_2(\delta_1(x))$ پس طبق تعریف ۲.۳.۲ $(R, \{\delta_1, \delta_2\})$ نمی‌تواند یک حلقه دیفرانسیلی باشد.

تذکر ۲.۳.۶. در این درس، بر روی حلقه‌های دیفرانسیلی معمولی متمرکز خواهیم شد و تنهاً این نوع حلقه‌ها را بررسی خواهیم کرد، مگر آنکه خلاف آن ذکر شود.

نمادگذاری ۱.۳.۲. مجموعه‌ای از اثرات متوالی مشتق در یک ساختار جبری را با نماد Θ نمایش می‌دهیم و به صورت $\Theta = \{\delta^i \mid i \in \mathbb{N}\}$ تعریف می‌کنیم. بر این اساس، با در نظر گرفتن حلقه‌ای مانند S خواهیم داشت: $\Theta(S) = \{\delta^i(s) \mid i \in \mathbb{N}, s \in S\}$. به عبارتی می‌توان گفت که Θ فرم عملگری دارد، یعنی در انتظار یک ورودی است به گونه‌ای که با اثر بر روی آن، یک خروجی در اختیار ما بگذارد.

تعریف ۴.۳.۲ (زیرحلقه دیفرانسیلی). فرض کنیم (R, δ) یک حلقه دیفرانسیلی باشد و $R_\circ \subseteq R$ یک زیرحلقه از R باشد. نکته مهم در بحث زیرحلقه بودن، آن است که علاوه بر زیرمجموعه بودن، حتماً لازم است تا عنصر یکِ حلقه با عنصر یکِ زیرحلقه برابر باشد. اگر $\delta(R_\circ) \subseteq R_\circ$ در این صورت $(R_\circ, \delta \mid_{R_\circ})$ یک زیرحلقه دیفرانسیلی (R, δ) خواهد بود و به اختصار می‌گوییم $R_\circ$ زیرحلقه دیفرانسیلی R می‌باشد. نکته مهم در این تعریف، شرط $\delta(R_\circ) \subseteq R_\circ$ است که ذات بسته بودن ساختار جبری را در خود حفظ کرده است.

تعریف ۵.۳.۲ (زبرحلقه دیفرانسیلی). با توجه به تعریف فوق، R را زبرحلقه $R_\circ$ می‌نامیم.

تعریف ۶.۳.۲ (مجموعه مولد). اگر $S \subseteq R$ کوچکترین زیرحلقه دیفرانسیلی R وجود دارد که شامل عناصر $R_\circ$ و S است و با $R_\circ\{S\}$ نمایش می‌دهیم و S را مجموعه مولد حلقه دیفرانسیلی $R_\circ\{S\}$ روی $R_\circ$ می‌نامیم.

نمادگذاری ۲.۳.۲. طبق نمادگذاری‌هایی که تا کنون آموخته‌ایم، $R_\circ\{S\}$ را می‌توان به شکل یک حلقه الحاقی به صورت $R_\circ[\delta^i(s) \mid i \in \mathbb{N}, s \in S]$ نوشت.

پیش از این در تعریف ۳.۳.۲ با ثوابت حلقه آشنا شدیم و دانستیم که در حلقه دیفرانسیلی (R, δ) ثوابت حلقه عبارتند از $C_R = \{r \in R \mid \delta(R) = \circ\}$.

تعریف ۷.۳.۲ (حلقه ثوابت). فرض کنیم (R, δ) یک حلقه دیفرانسیلی و C_R مجموعه ثوابت آن باشد. ثابت می‌شود که (C_R, δ) یک حلقه دیفرانسیلی است و به عنوان حلقه ثوابت شناخته می‌شود.

لم ۶.۳.۲. مجموعه ثوابت حلقه، همراه مشتق تعریف شده روی حلقه، تشکیل یک حلقه دیفرانسیلی می‌دهد.

اثبات. می‌دانیم که مجموعه ثوابت حلقه یکدار و جابجایی R به صورت $C_R = \{r \in R | \delta(r) = \circ\}$ تعریف می‌شود. حال بپردازیم به اینکه چرا (C_R, δ) یک حلقه دیفرانسیلی است. مسلم آن است که باید به بررسی دو ویژگی مشتق در این مجموعه بپردازیم. برای بررسی شرط اول، اینگونه عمل می‌کنیم که طبق تعریف، به ازای هر $r_۱, r_۲ \in C_R$ خواهیم داشت: $\delta(r_۱) = \delta(r_۲) = \circ$. پس خواهیم داشت که به‌ازای هر $r_۱ + r_۲ \in C_R$ عبارت

$\delta(r_1 + r_2) = 0$ برقرار است که تضمین کننده صحت ویژگی اول مشتق روی یک حلقه است. از طرف دیگر با در نظر گرفتن قاعده لایبنیتز، خواهیم داشت: $\delta(r_1 r_2) = 0$ و این به معنای اثبات لم می‌باشد. □

۴.۲ توسیع حلقه دیفرانسیلی

اکنون مجموعه R را در نظر بگیرید که همراه با جمع و ضرب معین تعریف شده، تشکیل یک حلقه می‌دهد. از جبر کلاسیک می‌دانیم که در صورتی که مجموعه $\mathrm{Frac}(R) = \{\frac{a}{b} \mid a, b \in R, b \neq 0\}$ را به جمع و ضرب زیر مجهز نماییم، حاصل یک میدان خواهد بود؛ بدان مفهوم که هر عنصر غیر صفر آن وارون پذیر است.

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a.d + b.c}{b.d} \qquad \frac{a}{b}.\frac{c}{d} = \frac{a.c}{b.d}$$

توجه به دو نکته لازم و ضروری است. نخست آنکه در بررسی نماد $\frac{a}{b}$ در مجموعه $\mathrm{Frac}(R)$ مد نظر داشتن مورد ۴ تذکر ۱.۳.۲ ضروری است و دوم آنکه در این روابط، علامت جمع و ضرب سمت چپ در هر یک از معادلات فوق، مربوط به میدان خارج قسمتی $\mathrm{Frac}(R)$ است در حالی که علامت جمع و ضرب سمت راست این معادلات، مربوط به حلقه R است. این دو ماهیت متفاوتی نسبت به یکدیگر دارند و نباید یکسان در نظر گرفته شود.

تذکر ۱.۴.۲. همانطور که در فصل اول نیز اشاره شد، نماد $\frac{a}{b}$ لزوماً به معنای تقسیم a بر b نیست. ماهیت میدان خارج قسمتی، برگرفته از کلاس‌های هم‌ارزی است، درحالی که ماهیت تقسیم، از دامنه اقلیدسی است.

لم ۱.۴.۲. فرض کنیم R یک دامنه صحیح و δ یک مشتق روی R باشد. در این صورت میدان خارج قسمتی $\mathrm{Frac}(R) = \{\frac{a}{b} \mid a, b \in R, b \neq 0\}$ کوچکترین توسیع میدان یکتا روی R خواهد بود.

اثبات. عنصر $\frac{a}{b} \in \mathrm{Frac}(R)$ را در نظر می‌گیریم. اکنون ادعا می‌کنیم که اگر ضابطه مشتق $\delta(\frac{a}{b})$ به صورت $\delta(\frac{a}{b}) = \frac{\delta(a)b - a\delta(b)}{b^2}$ باشد؛ در این صورت وجود نگاشتی مانند $\delta : \mathrm{Frac}(R) \longrightarrow \mathrm{Frac}(R)$ با چنین ضابطه‌ای، یک مشتق روی میدان $\mathrm{Frac}(R)$ خواهد بود. برای رسیدن به این هدف، باید ۳ مورد را اثبات کنیم: نخست آنکه خوش تعریفی این نگاشت را به عنوان یک تابع و سپس مشتق بودن آن را بررسی کنیم. در نهایت نیز به اثبات یکتایی این توسیع خواهیم پرداخت.

ابتدا خوش تعریفی را اثبات می‌کنیم. کافیست فرض کنیم که $\frac{a}{b}$ و $\frac{c}{d}$ دو عنصر $\mathrm{Frac}(R)$ هستند به طوری که $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ و با استفاده از ویژگی مشتق نتیجه بگیریم که $\delta(\frac{a}{b}) = \delta(\frac{c}{d})$. برای دستیابی به چنین هدفی، این‌گونه عمل می‌کنیم که $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ را در نظر می‌گیریم و در نتیجه $ad = bc$. پس داریم $\delta(ad) = \delta(bc)$. و در نتیجه $\delta(a)d + a\delta(d) = \delta(b)c + b\delta(c)$ و این معادل است با $\delta(a)d - \delta(b)c = b\delta(c) - a\delta(d)$. پس داریم $\delta(a) = \frac{1}{d}(\delta(b)c + b\delta(c) - a\delta(d))$. با جایگذاری این رابطه در رابطه $\delta(\frac{a}{b}) = \frac{\delta(a)b - a\delta(b)}{b^2}$ خواهیم داشت:

$$\delta(\tfrac{a}{b}) = \tfrac{1}{b^2}(\delta(a)b - a\delta(b)) = \tfrac{1}{b^2}(\tfrac{b}{d}(c\delta(b) + b\delta(c) - a\delta(d)) - a\delta(b)) =$$
$$\tfrac{1}{b^2 d}(bc\delta(b) + b^2\delta(c) - ab\delta(d) - ad\delta(b)) = \tfrac{1}{b^2 d}(b^2\delta(c) - ab\delta(d)) =$$
$$\tfrac{1}{bd}(b\delta(c) - a\delta(d)) = \tfrac{\delta(c)}{d} - \tfrac{a}{bd}\delta(d) = \tfrac{\delta(c)}{d} - \tfrac{c}{d^2}\delta(d) = \tfrac{1}{d^2}(\delta(c)d - c\delta(d)) = \delta(\tfrac{c}{d})$$

پس δ یک تابع است. حال نشان می‌دهیم که چنین ضابطه‌ای دارای ویژگی‌های مشتق است، یعنی باید ۲ ویژگی این تابع را به طور مجزا بررسی کنیم. ابتدا صحت ویژگی اول را بررسی می‌کنیم:

$$\delta(\tfrac{a}{b} + \tfrac{c}{d}) = \delta(\tfrac{ad+bc}{bd}) = \tfrac{1}{b^2 d^2}(bd\delta(ad + bc) - (ad + bc)\delta(bd)) =$$
$$\tfrac{1}{b^2 d^2}(abd\delta(d) + bd^2\delta(a) + b^2 d\delta(c) + bcd\delta(b) - abd\delta(d) - ad^2\delta(b) - b^2 c\delta(d) - bcd\delta(b)) =$$
$$-\tfrac{a}{b^2}\delta(b) + \tfrac{1}{b}\delta(a) + \tfrac{1}{d}\delta(c) - \tfrac{c}{d^2}\delta(d) = \tfrac{\delta(a)b - a\delta(b)}{b^2} + \tfrac{\delta(c)d - c\delta(d)}{d^2} = \delta(\tfrac{a}{b}) + \delta(\tfrac{c}{d}).$$

اکنون به بررسی صحت ویژگی دوم می‌پردازیم.

$$\delta(\tfrac{a}{b}.\tfrac{c}{d}) = \delta(\tfrac{a.c}{b.d}) = \tfrac{1}{b^2 d^2}(bd\delta(ac) - ac\delta(bd)) = \tfrac{1}{b^2 d^2}(bd(a\delta(c) + c\delta(a)) - ac(b\delta(d) +$$
$$b\delta(b))) = \tfrac{a}{bd}\delta(c) + \tfrac{c}{bd}\delta(a) - \tfrac{ac}{bd^2}\delta(d) - \tfrac{ac}{b^2 d}\delta(b) = \tfrac{c}{bd}(\delta(a) - \tfrac{a}{b}\delta(b)) + \tfrac{a}{bd}(\delta(c) - \tfrac{c}{d}\delta(d)) =$$
$$\tfrac{c}{bd}(\tfrac{1}{b}(\delta(a)b - a\delta(b))) + \tfrac{a}{bd}(\tfrac{1}{d}(\delta(c)d - c\delta(d))) = \tfrac{c}{d}\delta(\tfrac{a}{b}) + \tfrac{a}{b}\delta(\tfrac{c}{d}).$$

حال به اثبات یکتایی می‌پردازیم. کافی است ثابت کنیم که به ازای هر $\frac{a}{b}$ که متعلق به $\mathrm{Frac}(R)$ است؛ حاصل $\frac{1}{b^2}(\delta(a)b - a\delta(b))$ تنها مقدار $\delta(\frac{a}{b})$ است. پس می‌توان نوشت:

$$\forall \tfrac{a}{b} \in R, \delta(a) = \delta(\tfrac{a}{b}.b) = \delta(\tfrac{a}{b})b + \tfrac{a}{b}\delta(b).$$

که از این رابطه نتیجه می‌شود که $\delta(\frac{a}{b}) = \frac{1}{b^2}(\delta(a)b - a\delta(b))$.

به طور خلاصه مشتق را روی میدان خارج قسمتی از یک حلقه معین به دست آوردیم به گونه‌ای که تابعی خوش تعریف است و علاوه بر دارا بودن ویژگی‌های مشتق، یکتا نیز هست. پس اثبات تمام است. $\square$

مثال ۲.۴.۱. در مثال ۲.۳.۴ آموختیم که تنها تابع مشتق روی حلقه اعداد صحیح، تابع صفر است. با توجه به این موضوع، مسئله در مورد $\mathbb{Q}$ نیز کاملاً روشن است. کافیست لم ۲.۴.۱ را در مورد اعداد صحیح به کار بریم. در این صورت، خواهیم دید که روی مجموعه اعداد گویا نیز، صفر تنها تابع مشتق خواهد بود.

۲.۵　میدان دیفرانسیلی

اکنون کمی فراتر می‌رویم و همانند جبر کلاسیک، که پس از آشنایی با مفهوم حلقه، به معرفی مفاهیمی چون دامنه و میدان می‌پرداختیم؛ در این شاخه از ریاضیات نیز، همان رهیافت را ادامه می‌دهیم و پس از بیان مختصری از مقدمات جبری مورد نیاز، به معرفی دامنه دیفرانسیلی و میدان دیفرانسیلی خواهیم پرداخت.

تعریف ۲.۵.۱ (مشخصه میدان). فرض کنیم عدد صحیح و مثبتی مانند n وجود داشته باشد به طوری که برای هر عنصر دلخواه a از میدان F داشته باشیم $n.a = ۰$، در این صورت کوچکترین n موجود با این خاصیت را مشخصه میدان F می‌نامند و با نماد $Char(F)$ نمایش می‌دهیم.

تذکر ۲.۵.۱. از تعریف فوق، پیداست که مشخصه هر میدان، عنصر وارون ناپذیر آن میدان است.

تعریف ۲.۵.۲ (چندجمله‌ای مینیمال). فرض کنیم K یک میدان و $L \supseteq K$ یک توسیع میدان از K باشد. $\alpha \in L$ را روی K جبری می‌نامیم هرگاه یک چندجمله‌ای مانند $f \in K[x_۱, \ldots, x_n]$ موجود باشد به طوری که $f(\alpha) = ۰$. حال اگر این f تکین باشد؛ یعنی ضریب چندجمله‌ای پیشرو در آن برابر ۱ باشد، f را چندجمله‌ای مینیمال می‌نامیم.

مثال ۲.۵.۱. به منظور سادگی مطلب، مثال خود را به یک بعد محدود می‌کنیم. فرض کنیم $K = \mathbb{Q}$ میدان اعداد گویا، $L = \mathbb{R}$ میدان اعداد حقیقی و در واقع توسیعی از میدان اعداد گویا و $\alpha = \sqrt{۳}$ باشد. در این صورت $f = x^۲ - ۳ \in \mathbb{Q}[x]$ یک چندجمله‌ای مینیمال برای $\sqrt{۳}$ خواهد بود. در واقع ساز و کار به کار رفته در این مثال، اینگونه است که $f = (x - \sqrt{۳})(x + \sqrt{۳})$ محاسبه شده است. ناگفته پیداست که در این صورت، f چندجمله‌ای مینیمال برای $-\sqrt{۳}$ نیز خواهد بود.

اکنون از رهیافت حل مثال قبل کمک می‌گیریم تا مسئله‌ای مشابه ولی با پیچیدگی بیشتر را حل کنیم.

مثال ۲.۵.۲. اکنون فرض کنیم $K = \mathbb{Q}$ میدان اعداد گویا، $L = \mathbb{R}$ میدان اعداد حقیقی و در واقع توسیعی از میدان اعداد گویا و $\alpha = \sqrt{۲} + \sqrt{۳}$ باشد. می‌خواهیم چندجمله‌ای مینیمال α را بیابیم. از آنجایی که چندجمله‌ای مینیمال باید متعلق به $\mathbb{Q}[x]$ باشد، طبق زیر این چندجمله‌ای را به دست می‌آوریم:

$$f = (x - \sqrt{۲} - \sqrt{۳})(x + \sqrt{۲} + \sqrt{۳})(x - \sqrt{۲} + \sqrt{۳})(x + \sqrt{۲} - \sqrt{۳})$$

در این صورت $f = x^{۴} - ۱۰x^{۲} + ۱ \in \mathbb{Q}[x]$ یک چندجمله‌ای مینیمال برای $\sqrt{۲} + \sqrt{۳}$ خواهد بود. همانند مثال قبل، بدیهی است که f چندجمله‌ای مینیمال برای نقاط $\sqrt{۲} - \sqrt{۳} \in \mathbb{R}$ و $-\sqrt{۲} - \sqrt{۳}$ و $-\sqrt{۲} + \sqrt{۳}$ نیز خواهد بود. پس تمامی این نقاط، روی $\mathbb{Q}$ جبری هستند.

اکنون که با برخی از مقدمات جبری مربوط به این مبحث آشنا شدیم، وقت آن رسیده تا به سراغ تعاریف، مثال‌ها، نمادگذاری‌ها و لم‌های مرتبط با این موضوع، بپردازیم.

تعریف ۳.۵.۲ (دامنه دیفرانسیلی). فرض کنیم D یک دامنه صحیح باشد. مشابه تعریف ۲.۳.۲ (D, Δ) یک دامنه دیفرانسیلی نامیده می‌شود. همانند حلقه دیفرانسیلی و بسته به کاردینال مجموعه Δ دو نوع معمولی و جزئی خواهد داشت.

تعریف ۴.۵.۲ (میدان دیفرانسیلی). اگر K یک میدان باشد، مشابه تعریف ۲.۳.۲ (K, Δ) یک میدان دیفرانسیلی نامیده می‌شود و مشابه حلقه و دامنه دیفرانسیلی، دو نوع معمولی و جزئی خواهد داشت.

در دو مثال بعدی، قصد داریم تا به معرفی یک مفهوم کاربردی در جبر دیفرانسیلی بپردازیم. مفهومی که پیش از این در جبر کلاسیک آموخته‌ایم و اکنون به اهمیت آن مبحث، در جبر دیفرانسیلی بپردازیم.

مثال ۳.۵.۲. حلقه دیفرانسیلی (R, δ) را در نظر بگیرید به طوری که $R = \mathbb{Q}[x]$ و $\delta(x) = ۱$ باشد. از آنجایی که چنین مشتقی در فرم عملگری خود به صورت $\delta = \frac{d}{dx}$ است، درمی‌یابیم که در این صورت $C_R = \mathbb{Q}$.

مثال ۴.۵.۲. حلقه دیفرانسیلی (R, δ) را در نظر بگیرید به طوری که $R = \mathbb{Z}_p(x^p)$ و $\delta(x) = ۱$ باشد. از آنجایی که فرم عملگری تابع مشتق مذکور به صورت $\delta = \frac{d}{dx}$ است، مشتق عنصر دلخواهی از این حلقه را در نظر می‌گیریم. فرض کنیم $f = a_۰ + a_۱x^p + a_۲x^{۲p} + \cdots + a_nx^{np} \in \mathbb{Z}_p(x^p)$. با در نظر گرفتن کلاس‌های هم‌ارزی $\mathbb{Z}_p = \{\bar{۰}, \bar{۱}, \dots, \overline{p-۱}\}$ و مشتق گیری آنالیزی از f خواهیم داشت $C_R = R$.

تذکر ۲.۵.۲. در واقع تفاوت حلقه‌های دیفرانسیلی مطرح شده در مثال‌های فوق، در مشخصه آن‌هاست و باعث شده تا در یکی از آنها ثوابت حلقه، خود میدان و در دیگری، ثوابت حلقه، ثوابت میدان بشود.

تذکر ۳.۵.۲. همانگونه که زیرحلقه دیفرانسیلی و زبرحلقه دیفرانسیلی را شناختیم؛ به معرفی زیرمیدان دیفرانسیلی و توسیع میدان دیفرانسیلی خواهیم پرداخت. در صورتی که L و K میدان‌های دیفرانسیلی باشند، $K \subseteq L$ را زیرمیدان دیفرانسیلی L و L را توسیع میدان دیفرانسیلی K می‌نامیم.

اکنون L را به عنوان توسیع میدان دیفرانسیلی K و $S \subseteq L$ در نظر می‌گیریم. عبارت‌های $K[S]$ و $K\{S\}$ و $K(S)$ و $K\langle S\rangle$ را به ترتیب کوچکترین حلقه، کوچکترین حلقه دیفرانسیلی، کوچکترین میدان و کوچکترین میدان دیفرانسیلی شامل K و S می‌نامیم. با قراردادن $\Theta(S) = \{\delta^i(s) \mid i \in \mathbb{N}, s \in S\}$ و بر اساس تعاریف فوق، خواهیم داشت: $K\{S\} = K[\Theta(S)]$ و $K\langle S\rangle = K(\Theta(S))$.

به منظور ساده نویسی و سهولت در به خاطر سپردن موارد یاد شده در نمادگذاری فوق، تمامی حالات مختلف به صورت فشرده در جدول زیر نمایش داده شده است.

	جبری	دیفرانسیلی
حلقه	$K[S]$	$K\{S\} = K[\Theta(S)]$
میدان	$K(S)$	$K\langle S\rangle = K(\Theta(S))$

جدول ۱.۲: جدول مقایسه حلقه و میدان جبری با حلقه و میدان دیفرانسیلی

تعریف ۵.۵.۲ (متناهی مولد). میدان (جبری یا دیفرانسیلی) L را متناهی مولد گوییم هرگاه زیرمجموعه متناهی $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\} \subseteq L$ وجود داشته باشد به طوری که $L = K\langle a_1, a_2, \ldots, a_n\rangle$.

لم ۱.۵.۲. فرض کنیم $(\mathcal{F}, \delta)$ یک میدان دیفرانسیلی با مشخصه صفر باشد و $C_{\mathcal{F}} = \mathcal{F}$. همچنین فرض کنیم $L \supseteq \mathcal{F}$ یک توسیع میدان دیفرانسیلی و L روی $\mathcal{F}$ جبری باشد. در این صورت $C_L = L$.

اثبات. برای اثبات حکم در این لم، لازم است تا نشان دهیم که مشتق هر عنصر دلخواه از L برابر با صفر است. برای این منظور عنصر دلخواه $a \in L$ را در نظر می‌گیریم. فرض کنیم $p(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$ عنصری از $\mathcal{F}$ باشد، یعنی $p(x) \in \mathcal{F}$. همچنین $p(x)$ را یک چندجمله‌ای مینیمال از a در نظر می‌گیریم. اکنون

از آنجایی که طبق فرض $C_{\mathcal{F}} = \mathcal{F}$ پس $\delta(p(a)) = 0$. حال با بسط $\delta(p(a))$ طبق قاعده لایبنیتز و استفاده از سایر فرضیات لم، خواهیم دید که $\delta(a) = 0$ و در نتیجه حکم اثبات خواهد شد. اکنون از بسط $\delta(p(a))$ داریم: $0 = \delta(p(a)) = \frac{\partial p}{\partial x}(a).\delta(a) + \sum_{i=0}^{n} \delta(a_i)a^i = \frac{\partial p}{\partial x}(a).\delta(a)$. از آنجایی که $Char(\mathcal{F}) = 0$ و $\delta(p(a)) \neq 0$ پس $\delta(a) = 0$ و به اثبات مطلوب خود رسیده‌ایم. $\square$

نتیجه ۲.۵.۱. فرض کنیم $\mathbb{Q} \subseteq \mathcal{F} \subseteq L$ و $a \in L$. اگر a روی $C_{\mathcal{F}}$ جبری و $(\mathcal{F}, \delta)$ یک میدان دیفرانسیلی باشد، آنگاه $\delta(a) = 0$.

۲.۶ ایده‌آل‌های دیفرانسیلی

با حلقه دیفرانسیلی و میدان دیفرانسیلی آشنا شدیم. اکنون اگر بخواهیم با رهیافتی شبیه به آنچه که در جبر کلاسیک آشنا شده‌ایم پیش برویم؛ باید به سراغ ایده‌آل دیفرانسیلی برویم و به دنبال آن، ایده‌آل دیفرانسیلی رادیکال، ایده‌آل دیفرانسیلی ماکزیمال و سپس ایده‌آل دیفرانسیلی اول را مطالعه و بررسی نماییم. هدف نهایی در این بخش، آن است که ببینیم آیا قضایای شناخته شده در جبر کلاسیک، در جبر دیفرانسیلی نیز برقرار است یا خیر. با این رویکرد، به سراغ تعریف ایده‌آل دیفرانسیلی می‌رویم.

تعریف ۲.۶.۱ (ایده‌آل دیفرانسیلی). فرض کنیم (R, δ) یک حلقه دیفرانسیلی باشد. ایده‌آل $I \lhd R$ را یک ایده‌آل دیفرانسیلی می‌نامیم هرگاه $\delta(I) = \{\delta(a) \mid \forall\, a \in I\} \subseteq I$.

این بدان معناست که نگاشت مشتق تعریف شده در R به زیرمجموعه‌ای از آن (I) تحدید می‌شود. نکته مهم آن است که شرط $\delta(I) \subseteq I$ بیانگر این حقیقت است که در این حالت نیز با اعمال نگاشت مشتق روی I ذات بسته بودن یک ساختار جبری، در یک ایده‌آل دیفرانسیلی حفظ می‌شود.

مثال ۲.۶.۱. همانگونه که پیشتر و از جبر کلاسیک، آموخته‌ایم؛ هر حلقه، دو ایده‌آل بدیهی دارد که عبارتند از $I = \langle 0 \rangle = \{0\}$ و $I = R$. به راحتی نشان داده می‌شود که ایده‌آل‌های دیفرانسیلی نیز شرایط مشابهی دارند. نکته قابل تأمل در این زمینه، تفاوت در نمادگذاری ایده‌آل جبری و ایده‌آل دیفرانسیلی است. ایده‌آل دیفرانسیلی صفر، با نماد $I = (0)$ نمایش داده می‌شود تا خواننده بتواند در ادامه مباحث، تفاوت این دو را از یکدیگر تشخیص دهد. پس با توجه به آنچه که گفته شد، $I = (0) = \{0\}$ و $I = R$ را ایده‌آل‌های دیفرانسیلی بدیهی برای حلقه (R, Δ) هستند.

گزاره ۲.۶.۱. فرض کنیم $I = \langle f_1, \ldots, f_s \rangle \subseteq (R, \delta)$ یک ایده‌آل در (R, δ) باشد به گونه‌ای که با $f_1, \ldots, f_s$ تولید می‌شود. در این صورت $I = \langle f_1, \ldots, f_s \rangle$ یک ایده‌آل دیفرانسیلی است اگر و تنها اگر به ازای هر i که $1 \leq i \leq s$، آنگاه $\delta(f_i) \in I$.

اثبات. $(\Leftarrow)$ با توجه به تعریف ایده‌آل دیفرانسیلی واضح است. از آنجایی که I یک ایده‌آل دیفرانسیلی است، پس به ازای هر i که $1 \leq i \leq s$ داریم $f_i \in I$ و از آنجایی که طبق تعریف $\delta(I) \subseteq I$، پس همواره به ازای هر i که $1 \leq i \leq s$، آنگاه $\delta(f_i) \in I$.

$(\Rightarrow)$ طبق تعریف تعلق به ایده‌آل، می‌دانیم که به ازای هر $f \in I$ عناصر $g_1, \ldots, g_s \in R$ وجود دارند به طوری که $f = g_1 f_1 + \cdots + g_s f_s$. حال با استفاده از قاعده لایبنیتز، مشتق f را به صورت زیر محاسبه می‌کنیم:

$$\delta(f) = \sum_{i=1}^{s} \underbrace{\overbrace{\delta(g_i)}^{\in R} \overbrace{f_i}^{\in I}}_{\in I} + \sum_{i=1}^{s} \underbrace{\overbrace{\delta(f_i)}^{\in I} \overbrace{g_i}^{\in R}}_{\in I}$$

با توجه به تعریف نگاشت مشتق در حلقه R، خواهیم داشت: $\delta(g_i) \in R$. از طرفی طبق فرض $\delta(f_i) \in I$. پس $\delta(f) \in I$. چون f یک عنصر دلخواه از ایده‌آل I است؛ پس می‌توان نوشت: $\delta(I) \subseteq I$. پس I یک ایده‌آل دیفرانسیلی است و در نتیجه حکم ثابت می‌شود. $\square$

نمادگذاری ۲.۶.۱. فرض کنیم (R, Δ) یک حلقه دیفرانسیلی باشد. زیرحلقه دیفرانسیلی $S \subseteq R$ را در نظر می‌گیریم. در این صورت $[S]$ کوچکترین ایده‌آل دیفرانسیلی از حلقه R است که با S تولید می‌شود. از آنچه گفته شد درمی‌یابیم که $[S] = \langle \Theta(S) \rangle = \langle \delta^i s : i \in \mathbb{N}, s \in S \rangle$

لم ۲.۶.۱. حلقه دیفرانسیلی $(\mathbb{Q}[x], \delta)$ را با $\delta(x) = 1$ در نظر بگیرید. در این صورت، $[0]$ و $\mathbb{Q}[x]$ تنها ایده‌آل‌های دیفرانسیلی در $\mathbb{Q}[x]$ هستند.

اثبات. ایده‌آل $[0]$ یک ایده‌آل دیفرانسیلی بدیهی است و نیازی به اثبات ندارد، چرا که هر سه ویژگی یک ایده‌آل را دارد و از طرفی طبق تعریف، یک ایده‌آل دیفرانسیلی نیز هست. حال می‌خواهیم به بررسی این موضوع بپردازیم که دیگر ایده‌آل دیفرانسیلی و درواقع تنها ایده‌آل دیفرانسیلی دیگر برای این حلقه دیفرانسیلی، خود $\mathbb{Q}[x]$ است. برای این کار فرض می‌کنیم که I ایده‌آلی با شرط $[0] \neq I \lhd \mathbb{Q}[x]$ باشد. از آنجایی که $\mathbb{Q}[x]$ یک دامنه ایده‌آل اصلی است؛ در این صورت مولدی مخالف صفر مانند f متعلق به $\mathbb{Q}[x]$ وجود دارد به طوری که $I = \langle f \rangle$. از

آنجایی که I یک ایده‌آل دیفرانسیلی است، پس $\delta(f) = \frac{\partial f}{\partial x} \in (f)$. حال اگر $f \notin \mathbb{Q}$ در نتیجه $f \nmid \frac{\partial f}{\partial x}$. پس $f \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ و در نتیجه $I = \mathbb{Q}[x]$ به دست می‌آید و لم به اثبات می‌رسد.

□

تعریف ۲.۶.۲. $I \lhd (R, \delta)$ را ایده‌آل دیفرانسیلی رادیکال (اول) می‌نامیم هر گاه شرایط زیر را داشته باشد.

۱. I یک ایده‌آل دیفرانسیلی باشد؛ بدان مفهوم که طبق تعریف، رابطه $\delta(I) \subseteq I$ برقرار باشد.

۲. I به عنوان یک ایده‌آل جبری، یک ایده‌آل رادیکال (اول) باشد.

نمادگذاری ۲.۶.۲. پیش از این در جبر کلاسیک و هندسه جبری، ایده‌آل رادیکال را آموخته‌ایم و دانستیم که به صورت $\sqrt{I} = \{f \in R \mid \exists n \in \mathbb{N}; f^n \in I\}$ تعریف می‌شود. اکنون $S \subseteq (R, \Delta)$ را در نظر می‌گیریم. فرض کنیم $\{S\}$ کوچکترین ایده‌آل دیفرانسیلی رادیکال است که شامل S می‌شود. می‌گوییم $\{S\}$ یک ایده‌آل دیفرانسیلی رادیکال تولید شده با S است. واضح است که در پایان‌نامه پیش رو $\{S\}$ کوچکترین ایده‌آل دیفرانسیلی رادیکال است و این نمادگذاری برای مجموعه نیست؛ مگر آنکه بر مجموعه بودن آن تأکید شود.

حال به ساخت ایده‌آل دیفرانسیلی رادیکال بازمی‌گردیم. به طور شهودی، به نظر می‌رسد که با ساخت ایده‌آل دیفرانسیلی $[S]$ و سپس با گرفتن رادیکال جبری به صورت $\sqrt{[S]}$ بتوانیم $\{S\}$ را به دست آوریم. مثال نقض زیر، حاکی از آن است که چنین رویکردی، لزوماً درست نیست.

مثال ۲.۶.۲. حلقه دیفرانسیلی (R, δ) را با $R = \mathbb{Z}_2[x, y]$ و $\delta(x) = y$ و $\delta(y) = 0$ در نظر می‌گیریم. در این صورت $I = [x^2]$ کوچکترین ایده‌آل دیفرانسیلی تولید شده توسط x^2 است. حال به محاسبه این ایده‌آل می‌پردازیم. طبق قاعده لایبنیتز و از آنجایی که حلقه مذکور، یک حلقه جابجایی است $\delta(x^2) = 2xy$. از آنجایی که $\delta(y) = 0$ پس $\delta^2(x^2) = \delta^3(x^2) = \cdots = 0$ و طبق نمادگذاری ۱.۶.۲ ایده‌آل مذکور را می‌توان به صورت $I = (x^2)$ نوشت. بنابراین $\sqrt{I} = (x)$ در حالی که $\sqrt{I}$ ایده‌آل دیفرانسیلی نیست، چرا که $x \in \sqrt{I}$ و $\delta(x) = y \notin \sqrt{I}$. پس $\sqrt{[x^2]} \neq \{x^2\}$.

مثال ۳.۶.۲. حلقه دیفرانسیلی (R, δ) را با $R = \mathbb{C}[x, y]$ و $\delta(x) = y$ و $\delta(y) = 0$ در نظر می‌گیریم. قرار می‌دهیم $I = \langle xy \rangle$. در نتیجه $[\sqrt{I}] = [xy] = \langle xy, y^2 \rangle$. اکنون با تعریف J به صورت $J := [\sqrt{I}]$ درمی‌یابیم که این ایده‌آل رادیکال نیست چون $y^2 \in J$ در حالی که $y \notin J$.

تذکر ۲.۶.۱. یک ایده‌آل دیفرانسیلی ماکزیمال را در نظر می‌گیریم. ایده‌آل دیفرانسیلی ماکزیمال، عبارت است از عنصر ماکزیمال در میان مجموعه همه ایده‌آل‌های دیفرانسیلی سره. با ارائه مثال زیر نشان می‌دهیم که بر خلاف جبر کلاسیک، چنین ایده‌آلی لزوماً یک ایده‌آل دیفرانسیلی اول نیست.

مثال ۲.۶.۴. فرض کنیم $R = \mathbb{Z}_2[x]$ و $\delta(x) = 1$ مشتق تعریف شده روی این حلقه دیفرانسیلی باشد. ایده‌آل J را به صورت $J = [x^2] = \langle x^2 \rangle$ در نظر می‌گیریم. به وضوح، این ایده‌آل، اول نیست، زیرا $\delta(x^2) = 2x \in J$ ولی $2 \notin J$ و $x \notin J$. از طرفی J یک ایده‌آل ماکزیمال است. برای نشان دادن این موضوع، همه ایده‌آل‌هایی مانند I از حلقه $(\mathbb{Z}_2[x], \delta(x) = 1)$ را در نظر می‌گیریم که $J \subsetneqq I \subseteq R$. در این صورت به‌ازای هر $b \in \mathbb{Z}_2$ عنصری مانند $x + b \in I$. پس $\delta(x+b) \in I$. طبق تعریف $\delta(x) = 1$ داریم $1 \in I$ بنابراین $I = R$ و در نتیجه J یک ایده‌آل ماکزیمال است.

تعریف ۲.۶.۳ (جبر ریت). فرض کنیم (R, δ) یک حلقه دیفرانسیلی باشد. در این صورت R را جبر ریت گوییم هرگاه $\mathbb{Q} \subseteq R$.

تذکر ۲.۶.۲. این امر معادل آن است که مشخصه حلقه R برابر با صفر باشد، چرا که اگر حلقه دیفرانسیلی مد نظر، شامل $\mathbb{Q}$ باشد، صفر تنها عنصر وارون ناپذیر این حلقه خواهد بود. از این پس تمامی حلقه‌ها و میدان‌های مورد بحث در این پایان‌نامه، چنین خاصیتی را خواهند داشت.

قضیه ۲.۶.۱. فرض کنیم (R, δ) یک حلقه دیفرانسیلی و $\mathbb{Q} \subseteq R$. همچنین فرض کنیم $I \subseteq (R, \delta)$ یک ایده‌آل دیفرانسیلی باشد. آنگاه $\sqrt{I}$ یک ایده‌آل دیفرانسیلی رادیکال است.

اثبات. کافی است نشان دهیم که $\sqrt{I}$ یک ایده‌آل دیفرانسیلی است. این امر زمانی محقق می‌شود که نشان دهیم برای هر $a \in \sqrt{I}$ خواهیم داشت $\delta(a) \in \sqrt{I}$. اینکه $a \in \sqrt{I}$ بدان معناست که عددی طبیعی مانند n وجود دارد به طوری که $a^n \in I$. ادعا می‌کنیم که برای هر $1 \leq k \leq n$ خواهیم داشت: $a^{n-k}(\delta(a))^{2k-1} \in I$.

برای رسیدن به این هدف، از استقرا ریاضی استفاده می‌کنیم. رهیافت اثبات، آن است که تعلق $\delta(a)$ به $\sqrt{I}$ منجر به تساوی n و k خواهد شد، یعنی با قراردادن $n = k$ در رابطه $a^{n-k}(\delta(a))^{2k-1} \in I$ خواهیم داشت: $(\delta(a))^{2n-1} \in I$. از آنجایی که $(2n-1) \in \mathbb{N}$، پس عبارت $(\delta(a))^{2n-1} \in I$ منجر به $\delta(a) \in \sqrt{I}$ خواهد شد. حال به سراغ استقرا روی k می‌رویم. فرض کنیم $k = 1$. از آنجایی که $a \in \sqrt{I}$ پس $a^n \in I$ و در نتیجه $\delta(a^n) = na^{n-1}\delta(a) \in I$.

چون $\mathbb{Q} \subseteq R$ پس $a^{n-1}\delta(a) \in I$. حال فرض کنیم که $1 \leq k < n$ (فرض استقرا). در این صورت $a^{n-k}(\delta(a))^{2k-1} \in I$ پس طبق تعریف، باید داشته باشیم: $\delta(a^{n-k}(\delta(a))^{2k-1}) \in I$. با پیاده سازی قاعده لاینیتز خواهیم داشت: $(n-k)a^{n-(k+1)}\delta(a)^{2k} + a^{n-k}(2k-1)(\delta(a))^{2k-2}\delta^{2}(a) \in I$. از آنجایی که $\delta(a) \in I$، پس با ضرب $\delta(a)$ در عبارت فوق، خواهیم داشت $a^{n-(k+1)}\delta(a)^{2k+1} \in I$ و اثبات تمام است. □

تذکر ۲.۶.۳. قضیه فوق بسیار حائز اهمیت است، چرا که دسته‌ای از حلقه‌ها را معرفی می‌کند که محاسبه ایده‌آل دیفرانسیلی رادیکال در آن‌ها بسیار ساده و به طور شهودی قابل انجام خواهد بود. از آنجایی که در مباحث پیش رو، ایده‌آل‌های دیفرانسیلی رادیکال کاربرد بسیار دارند، اهمیت این قضیه، بیش از پیش بر ما نمایان خواهد شد.

در بخش بعدی به بررسی تجزیه ایده‌آل‌های رادیکال خواهیم پرداخت و اهمیت قضایایی که تاکنون آموخته‌ایم، جلوه‌گر خواهد شد. در ادامه خواهیم دید که صفر بودن مشخصه میدان، اهمیت ویژه و قابل ذکری در این شاخه از ریاضیات خواهد داشت.

۲.۷ تجزیه ایده‌آل‌های دیفرانسیلی رادیکال

در هندسه جبری محاسباتی، تجزیه ایده‌آل‌های رادیکال را مطالعه کرده‌ایم. رادیکال یک ایده‌آل مانند I ایده‌آلی است بدین صورت که عنصری مانند x در آن وجود دارد؛ اگر و تنها اگر یک توان طبیعی از x در I باشد. در جبر دیفرانسیلی نیز، تعریف مشابهی برقرار است. اکنون بر آن هستیم تا به بررسی مهمترین و پایه‌ای ترین قضایا، پیرامون ایده‌آل‌های دیفرانسیلی و مشخصاً ایده‌آل دیفرانسیلی رادیکال بپردازیم و مقایسه‌ای بین ایده‌آل‌ها در جبر کلاسیک و جبر دیفرانسیلی داشته باشیم. در تمامی این قضایا فرض بر این است که (R,δ) یک حلقه دیفرانسیلی و I یک ایده‌آل دیفرانسیلی رادیکال از چنین حلقه‌ای باشد.

لم ۲.۷.۱. فرض کنیم (R,δ) یک حلقه دیفرانسیلی و I یک ایده‌آل دیفرانسیلی رادیکال از چنین حلقه‌ای باشد. اگر $ab \in I$ آنگاه $a\delta(b) \in I$ و $b\delta(a) \in I$.

اثبات. فرض کنیم $ab \in I$. در این صورت، طبق تعریف ایده‌آل دیفرانسیلی $\delta(ab) \in I$ و براساس قاعده لایبنیتز $\delta(a)b + a\delta(b) \in I$. اکنون طرفین رابطه لایبنیتز را در $a\delta(b)$ ضرب می‌کنیم. نتیجه حاصل چنین رابطه‌ای

خواهد شد $a\delta(b)\delta(ab) = (a\delta(b))^2 + ab\delta(a)\delta(b)$. اکنون تعلق هر یک از این جملات به ایده‌آل را بررسی می‌کنیم:

$$\underbrace{\overbrace{a\delta(b)}^{\in R}\,\overbrace{\delta(ab)}^{\in I}}_{\in I} = (a\delta(b))^2 + \underbrace{\overbrace{ab}^{\in I}\,\overbrace{\delta(a)\delta(b)}^{\in R}}_{\in I}$$

نتیجه این تعلق آن است که $(a\delta(b))^2 \in I$. از آنجایی که I یک ایده‌آل دیفرانسیلی رادیکال است، نتیجه می‌گیریم که $a\delta(b) \in I$. به طریق مشابه خواهیم داشت $b\delta(a) \in I$. □

نتیجه ۱.۷.۲. فرض کنیم $\delta(a)b \in I$. در این صورت بر اساس لم فوق و با ادامه این روند به صورت استقرایی به‌ازای هر $i \in \mathbb{N}$ خواهیم داشت $(\delta(a))^i b \in I$. با ادامه این روند برای هر $i, j \in \mathbb{N}$ خواهیم داشت $(\delta(a))^i(\delta(b))^j \in I$. پس نتیجه کلی آن است که هرگاه ab عنصری از ایده‌آل دیفرانسیلی رادیکال I باشند، به‌ازای هر $i, j \in \mathbb{N}$ عنصر $(\delta(a))^i(\delta(b))^j$ نیز عنصری از I خواهد بود.

لم ۲.۷.۲. فرض کنیم (R, δ) یک حلقه دیفرانسیلی، I یک ایده‌آل دیفرانسیلی رادیکال و $S \subseteq R$ تنهاً یک زیرمجموعه باشد (بدون در نظر گرفتن ضرب و جمع حلقه). در این صورت خارج قسمت I بر S که به صورت $I : S = \{a \in R \mid aS \subseteq I\}$ تعریف می‌شود؛ یک ایده‌آل دیفرانسیلی رادیکال است.

اثبات. روند اثبات را در سه مرحله پیش می‌بریم بدین صورت که ابتدا نشان می‌دهیم که چنین تعریفی یک ایده‌آل است. سپس دیفرانسیلی بودن این ایده‌آل را اثبات می‌کنیم و در نهایت به بررسی رادیکال بودن آن می‌پردازیم.

برای بررسی ایده‌آل بودن، سه شرط را مطابق زیر بررسی می‌کنیم: طبق تعریف ایده‌آل خارج قسمت، و از آنجایی که همواره $0 \in I$ پس $0s \in I$ و در نتیجه $0 \in I : S$ نیز برقرار است. پس شرط اول برقرار است.

برای بررسی دو شرط دیگر، اینگونه عمل می‌کنیم. فرض کنیم a و b دو عنصر دلخواه در $I : S$ و r عنصری از R باشد. طبق تعریف ایده‌آل خارج قسمتی $aS \subseteq I$ و $bS \subseteq I$ از آنجایی که I یک ایده‌آل است، خواهیم داشت $(a+b)S \subseteq I$ و در نتیجه $(a+b) \in I : S$. پس شرط دوم نیز، برقرار است.

برای بررسی شرط سوم $a \in I : S$. را در نظر می‌گیریم. پس $aS \subseteq I$ برقرار است و چون I یک ایده‌آل است، پس $raS \subseteq I$ و در نتیجه $ra \in I : S$. پس ویژگی سوم نیز برقرار است.

پس تا اینجا ثابت کردیم که $I : S$ یک ایده‌آل است. اکنون ثابت می‌کنیم که یک ایده‌آل دیفرانسیلی است. طبق تعریف ایده‌آل خارج قسمتی به ازای هر $a \in I : S$ داریم: $aS \subseteq I$ حال طبق لم ۱.۷.۲ خواهیم داشت $\delta(a)S \subseteq I$ و در نتیجه $\delta(a) \in I : S$. بنابراین $I : S$ یک ایده‌آل دیفرانسیلی است.

در نهایت به اثبات رادیکال بودن این ایده‌آل می‌پردازیم: برای این کار، فرض می‌کنیم عنصری مانند a از حلقه R وجود دارد به طوری که به‌ازای عدد طبیعی دلخواه n داشته باشیم $a^n \in I : S$. در صورتی که بتوانیم ثابت کنیم که $a \in I : S$ اثبات خود را کامل کرده‌ایم. فرض کنیم $a^n \in I : S$. در این صورت طبق تعریف ایده‌آل خارج قسمتی خواهیم داشت $a^n S \subseteq I$. پس به‌ازای هر $s \in S$ خواهیم داشت $a^n s \in I$ و در نتیجه $a^n s^n \in I$. از آنجایی که I یک ایده‌آل رادیکال است، پس $as \in I$ و در نتیجه $a \in I : S$ و به این ترتیب اثبات خود را کامل نموده‌ایم. □

لم ۳.۷.۲. فرض کنیم $S \subseteq R$ یک زیرمجموعه باشد و $a \in R$. در این صورت $a\{S\} \subseteq \{aS\}$.

اثبات. ایده‌آل $J = \{aS\} : a$ را در نظر می‌گیریم. با استفاده از لم قبل، J یک ایده‌آل دیفرانسیلی رادیکال است. از آنجا که $S \subseteq J$ پس $\{S\} \subseteq J$ و بنابراین $a\{S\} \subseteq \{aS\}$. □

لم ۴.۷.۲. دو زیرمجموعه دلخواه $S, T \subseteq R$ را در نظر بگیرید. در این صورت $\{S\}\{T\} \subseteq \{ST\}$ و علاوه بر آن $\{S\} \cap \{T\} = \{ST\}$.

اثبات. با استفاده از لم ۳.۷.۲ داریم که به‌ازای هر $a \in S$ داریم: $a\{T\} \subseteq \{aT\} \subseteq \{ST\}$. همچنین با استفاده از لم ۲.۷.۲ می‌دانیم که $\{ST\} : \{T\}$ یک ایده‌آل دیفرانسیلی رادیکال است که S را شامل می‌شود. بنابراین $\{S\}\{T\} \subseteq \{ST\}$.

اکنون می‌پردازیم به اثبات آنچه که در حکم قضیه عنوان شده است. کافی است نشان دهیم که هر یک از طرفین، زیرمجموعه یکدیگر هستند. می‌دانیم که $\{ST\} \subseteq \{S\}, \{T\}$. پس $\{ST\} \subseteq \{S\} \cap \{T\}$. از طرف دیگر به‌ازای هر $a \in \{S\} \cap \{T\}$، داریم $a \in \{S\}$ و $a \in \{T\}$. پس $a^2 \in \{S\}\{T\}$. از تلفیق این رابطه با $\{S\}\{T\} \subseteq \{ST\}$ خواهیم داشت $a^2 \in \{ST\}$ و چون $\{ST\}$ یک ایده‌آل رادیکال است، پس $a \in \{ST\}$ و در نتیجه $\{S\} \cap \{T\} \subseteq ST$ و به این ترتیب حکم را اثبات نموده‌ایم. □

لم ۵.۷.۲. فرض کنیم $T \subseteq R$ یک زیر مجموعه باشد که تحت عمل ضرب حلقه بسته باشد و فرض کنیم که P در بین ایده‌آل‌های دیفرانسیلی رادیکال، ماکزیمال باشد، به طوری که با T اشتراک نداشته باشد. در این صورت P یک ایده‌آل دیفرانسیلی اول است.

اثبات. به برهان خلف فرض می‌کنیم P اول نباشد. بر این اساس، فرض می‌کنیم $a, b \in R$ چنان موجود باشند که $ab \in P$ ولی $a \notin P$ و $b \notin P$. بنابراین $P \subsetneqq \{P, a\}$ و $P \subsetneqq \{P, b\}$. بنابراین عناصری مانند

t_1 و t_2 وجود دارند به طوری که $t_1 \in \{P,a\} \cap T$ و $t_2 \in \{P,b\} \cap T$. پس $t_1t_2 \in T$. از طرفی $P = \{P,ab\} \subseteq \{P,a\}.\{P,b\} \in t_1t_2$. پس نتیجه گرفتیم که $t_1t_2 \in P \cap T$. این یک تناقض است، زیرا طبق فرض $P \cap T = \emptyset$. پس فرض خلف، باطل و حکم قضیه اثبات می‌شود. □

لم ۶.۷.۲. فرض کنیم $I \subsetneq R$ یک ایده‌آل دیفرانسیلی رادیکال باشد. در این صورت، I را می‌توان به صورت اشتراکی از ایده‌آل‌های دیفرانسیلی اولیه، نمایش داد.

اثبات. از آنجایی که $I \subsetneq R$ پس عنصری مانند x وجود دارد به طوری که $x \in R$ در حالی که $x \notin I$. چون I یک ایده‌آل است، پس هیچ توان طبیعی از x عنصر I نخواهد بود. پس می‌توان مجموعه $T \subseteq R$ را به صورت $T = \{x, x^2, x^3, \dots\}$ در نظر گرفت به طوری که شرایط لم قبل، بر آن حاکم باشد. حال برای هر $x \notin I$ یک ایده‌آل دیفرانسیلی اولیه مانند P_x طوری در نظر می‌گیریم که $P_x \supseteq I$ و $x \notin P_x$. اگر P ایده‌آل‌های دیفرانسیلی رادیکال حلقه R باشد، مجموعه U را به صورت $U = \{P \subseteq R \mid I \subseteq P, P \cap T = \emptyset\}$ در نظر می‌گیریم. این مجموعه ناتهی است چون $I \in U$. پس با استفاده از لم زرن، عنصر ماکزیمال P_x در U وجود دارد. از آنجا که $P_x \cap T = \emptyset$ و $x \notin P_x$ با استفاده از لم قبل، می‌توان ادعا کرد که $I = \bigcap_{x\notin I} P_x$. طبق فرضیات موجود $I \subseteq \bigcap_{x\notin I} P_x$ بدیهی است. برای اثبات طرف دیگر، از برهان خلف استفاده می‌کنیم. فرض کنیم $\bigcap_{x\notin I} P_x \not\subset I$. پس عنصری مانند $y \notin I$ وجود دارد به طوری که $y \in \bigcap_{x\notin I} P_x$. چون $y \notin I$ پس ایده‌آل دیفرانسیلی اول P_y وجود دارد به طوری که $I \subseteq P_y$ و این نتیجه می‌دهد که $y \notin \bigcap_{x\notin I} P_x$ که تناقض است. پس توانستیم یک ایده‌آل دیفرانسیلی رادیکال را به صورت اشتراک ایده‌آل‌های دیفرانسیلی اول بنویسیم و حکم را به اثبات برسانیم. □

تذکر ۱.۷.۲. لم فوق به نوعی همان قضیه لاسکر-نوتر در جبر کلاسیک است که جبر دیفرانسیلی آن را به ارث برده است. نکته قابل ذکر در این قضیه این است که بر خلاف جبر کلاسیک، تنهاً در مورد ایده‌آل‌های دیفرانسیلی رادیکال درست است.

تذکر ۲.۷.۲. تفاوت دیگر این لم با مورد مشابهش در جبر کلاسیک این است که اشتراک ایده‌آل‌های اول در جبر دیفرانسیلی لزوماً متناهی نیست.

نتیجه ۲.۷.۲. فرض کنیم $\mathbb{Q} \subseteq (R,\delta)$ و M در بین همه ایده‌آل‌های دیفرانسیلی سره، ماکزیمال باشد. در این صورت M یک ایده‌آل دیفرانسیلی اول است.

اثبات. فرض کنیم $\sqrt{M} = \sqrt{[M]} = \{M\}$. اگر $R = \sqrt{M}$ در این صورت $1 \in \sqrt{M}$ و در نتیجه $1 \in M$ که با سره بودن M در تناقض است. بنابراین $\sqrt{M} = M$ و M یک ایده‌آل دیفرانسیلی رادیکال است. پس طبق لم قبل $M \subseteq \bigcap_{\alpha \notin M} P_\alpha$ که P_α ها، ایده‌آل‌های دیفرانسیلی اولیه هستند. بنابراین برای هر $\alpha \notin M$ داریم $M = P_\alpha$ و در نتیجه M یک ایده‌آل دیفرانسیلی اول است. پس حکم خود را اثبات نموده‌ایم.

□

تذکر ۲.۷.۳. حلقه دیفرانسیلی (R, δ) را به گونه‌ای در نظر می‌گیریم که در آن $\mathbb{Q} \subseteq R$ باشد. در تعریف ۲.۶.۳ آموختیم که چنین ساختاری، جبر ریت نامیده می‌شود. در بخش‌های ۲.۶ و ۲.۷ آموختیم که:

۱. ایده‌آل دیفرانسیلی رادیکال $\{S\}$ برابر است با رادیکال یک ایده‌آل دیفرانسیلی $\sqrt{[S]}$. پس می‌توان نوشت: $\{S\} = \sqrt{[S]}$.

۲. همانند جبر کلاسیک، هر ایده‌آل دیفرانسیلی ماکزیمال، یک ایده‌آل دیفرانسیلی اول است.

۳. حتی در یک ساختار جبری ریت مانند R و با در نظر گرفتن ایده‌آل دیفرانسیلی ماکزیمال M خارج قسمت R/M لزوماً یک میدان نیست. این در حالی است که در جبر کلاسیک اگر M یک ایده‌آل ماکزیمال از حلقه R باشد، در این صورت R/M یک میدان خواهد بود.جهت تفهیم این مورد به ارائه یک مثال نقض می‌پردازیم.

مثال ۲.۷.۱. حلقه دیفرانسیلی $R = \mathbb{Q}[x]$ را با نگاشت مشتق $\delta(x) = 1$ در نظر بگیرید. از مثال قبلی دانستیم که $[0]$ یک ایده‌آل دیفرانسیلی در این حلقه است که به وضوح ماکزیمال نیز هست. از آنجایی که این حلقه تنها دو ایده‌آل دیفرانسیلی دارد که هر دو بدیهی هستند، پس $[0]$ تنها ایده‌آل دیفرانسیلی ماکزیمال این حلقه است. با توجه به اینکه $R/[0] = R$ است و $R = \mathbb{Q}[x]$ میدان دیفرانسیلی نیست، می‌توان این مثال را مثال نقضی در راستای تأیید مورد سوم عنوان کرد.

در این فصل، مقدمات جبر دیفرانسیلی را آموختیم و با مبانی آن آشنا شدیم. تعاریف اولیه در این فصل معرفی شدند و مقایسه آنها با جبر کلاسیک و هندسه جبری صورت گرفت. مهمترین موضوعات مطرح شده در این فصل، قضایای مرتبط با ایده‌ال‌های دیفرانسیلی رادیکال بود. همچنین آنجایی که آموختیم تحت چه شرایطی جبر دیفرانسیلی می‌تواند قضایای جبر کلاسیک را به ارث ببرد. این رهیافت در ادامه راه، روشنگر مسیر ما خواهد بود.

فصل ۳

حلقه‌های چندجمله‌ای و چندگوناهای دیفرانسیلی

در این فصل به دنبال یافتن تعمیمی از حلقه چندجمله‌ای‌ها در هندسه جبری هستیم. ابتدا حلقه چندجمله‌ای‌های دیفرانسیلی و چندگونای دیفرانسیلی را تعریف می‌کنیم. مجموعه مشخصه دیفرانسیلی، مفهوم بعدی است که تعریف می‌شود و پاسخگوی تعلق به ایده‌آل خواهد بود. قضیه پایه‌ای ریت-رادنباش[1] از دیگر آموزه‌های این فصل خواهد بود و رهیافتی مشابه به لم دیکسون و قضیه پایه‌ای هیلبرت در هندسه جبری کلاسیک دارد. مهمترین منابعی که در این فصل به کار گرفته شده است، منابع [۱۱، ۱۰، ۹، ۶، ۵، ۲، ۱] است.

۱.۳ مقدمه

حلقه چندجمله‌ای‌های دیفرانسیلی تعمیمی از حلقه چندجمله‌ای‌ها در هندسه جبری کلاسیک است؛ چرا که یک چند جمله دیفرانسیلی با مرتبه صفر، همان چندجمله‌ای‌های جبری هستند. اولین مطلب در این فصل، شناخت حلقه چندجمله‌ای‌های دیفرانسیلی است که با استفاده از بیان چند تعریف، لم و گزاره صورت خواهد گرفت. پس از آن، مجموعه‌های مشخصه دیفرانسیلی را معرفی می‌نماییم و با تعریف ترتیب مناسب و استفاده از برخی مفاهیم پایه‌ای به کار رفته در هندسه جبری، بررسی تعلق به ایده‌آل دیفرانسیلی را مطالعه می‌کنیم. مفاهیم همچون، اصل خوش‌ترتیبی، لم دیکسون و ترتیب الفبایی مدرج، از جمله مفاهیمی هستند که از هندسه جبری به ما کمک

[1] Ritt-Raudenbush Basis Theorem

می‌کنند تا پاسخ به سؤال تعلق به ایده‌آل دیفرانسیلی را بیابیم. قضیه پایه‌ای ریت–رادنباش از دیگر آموزه‌های این فصل خواهد بود و رهیافتی مشابه به لم دیکسون و قضیه پایه‌ای هیلبرت در هندسه جبری کلاسیک دارد و به ما می‌گوید که آیا می‌توانیم یک دستگاه معادلات جبر دیفرانسیلی نامتناهی را با دستگاهی متناهی جایگزین کنیم؛ به طوری که جوابها بدون تغییر باقی بمانند؟

۲.۳ همریختی حلقه‌های دیفرانسیلی

فرض کنیم در محدوده جبر ریت هستیم، به گونه‌ای که (K, δ) یک میدان دیفرانسیلی با مشخصه صفر باشد؛ یعنی $Char(K) = ۰$. در این فصل و در ادامه مباحث پیش رو قصد آن داریم تا مفاهیم ساختارهای جبری و نظریه جبری را برای معادلات دیفرانسیل معمولی گسترش دهیم. همانند همریختی حلقه‌ای، می‌توان همریختی حلقه‌های دیفرانسیلی را تعریف کرد. البته ناگفته پیداست که در تعریف همریختی حلقه‌ای، باید نقش نگاشت مشتق نیز، مشخص گردد. برای دستیابی به این هدف به تعریف چند مفهوم مهم و تاحدی مقدماتی می‌پردازیم تا در ادامه مباحث این بخش، از آنها استفاده نماییم.

تعریف ۱.۲.۳ (همریختی حلقه‌ای). حلقه‌های $(R, +, .)$ و $(S, \oplus, \odot)$ را در نظر می‌گیریم. در این صورت، تابع $f : R \to S$ را یک همریختی (هومومورفیسم) حلقه‌ای گوییم هرگاه، برای هر $x, y \in R$ داشته باشیم $f(x.y) = f(x) \odot f(y)$ و $f(x + y) = f(x) \oplus f(y)$.

تعریف ۲.۲.۳ (یکریختی حلقه‌ای). در تعریف فوق، چنانچه f تابعی یک‌به‌یک و پوشا باشد، آن را یکریختی (ایزومورفیسم) حلقه‌ای می‌نامیم. در این حالت می‌نویسیم $R \cong S$ و می‌گوییم R و S یکریخت هستند.

تعریف ۳.۲.۳ (جانشانی). گوییم حلقه R در حلقه S نشانده می‌شود هرگاه همریختی حلقه‌ای یک‌به‌یک از R به S موجود باشد. این مفهوم را با نماد $R \hookrightarrow S$ نمایش می‌دهیم. این بدان معناست که R با زیرحلقه‌ای از S یکریخت است و به همین جهت می‌توان خود R را زیرحلقه S درنظر گرفت.

مثال ۱.۲.۳. مثال اینکه اعداد صحیح در اعدادگویا نشانده می‌شود. یا مثلا هر $K[x]$ در $K(x)$ نشانده می‌شود.

قضیه ۱.۲.۳. هر حلقه جابجایی R در یک حلقه یکدار S نشانده می‌شود.

تعریف ۴.۲.۳ (توسیع میدان دیفرانسیلی). فرض کنیم (K, δ) یک میدان دیفرانسیلی و $L \supseteq K$ یک توسیع میدان از K باشد. (L, δ) را یک توسیع میدان دیفرانسیلی برای (K, δ) می‌نامیم هرگاه δ یک نگاشت مشتق روی L باشد.

تعریف ۵.۲.۳ (وابسته دیفرانسیلی). فرض کنیم (L, δ) یک توسیع از (K, δ) باشد. زیرمجموعه S از L را وابسته دیفرانسیلی روی K گوییم اگر مجموعه $(\delta^k(s))_{k\in\mathbb{N}, s\in S}$ وابسته جبری روی K باشد. در حالت مخالف، S را مستقل دیفرانسیلی روی K یا یک خانواده از متغیرهای دیفرانسیلی $y_1, \dots, y_n$ روی K می‌گوییم. در حالت $S = \{\alpha\}$ می‌گوییم α به صورت دیفرانسیلی روی K جبری است.

مثال ۲.۲.۳. با توجه به نمادگذاری بالا $(K, \delta) = (\mathbb{Q}(x), \frac{d}{dx})$ و $(L, \delta) = (\mathbb{C}(x, e^x), \frac{d}{dx})$ را تعریف می‌کنیم. در این صورت با علم به تعریف فوق، هر $c \in \mathbb{C}$ و $\alpha = e^x$ به صورت دیفرانسیلی روی K جبری هستند.

اکنون قصد آن داریم تا به تعریف یکی از مفاهیم با ارزش و پرکاربرد در جبر دیفرانسیلی بپردازیم. پیش از این و در ریاضیات سطوح مقدماتی با چندجمله‌ای‌های دیفرانسیلی، معادلات دیفرانسیلی، مرتبه و درجه این معادلات آشنا هستیم. اکنون این آشنایی را در قالب مفهومی معرفی می‌کنیم که همزمان از دیدگاه جبری و دیفرانسیلی به این موضوع می‌پردازد.

تعریف ۶.۲.۳ (حلقه چندجمله‌ای‌های دیفرانسیلی). حلقه‌ای است دیفرانسیلی با ضرایب، از میدان K و متغیرهای دیفرانسیلی $y_1, \dots, y_n$. چنین حلقه‌ای یک حلقه چندجمله‌ای از مشتقات این متغیرهاست و بنابراین به صورت $K = [\delta^k y_j \mid k \in \mathbb{N}, j = 1, \dots, n]$ تعریف می‌شود و با نماد $K\{y_1, \dots, y_n\}$ نمایش داده می‌شود.

عناصر این حلقه، چندجمله‌ای‌های دیفرانسیلی نامیده می‌شوند. در این صورت $K\{y_1, \dots, y_n\}$ یک حلقه دیفرانسیلی با عملگر مشتق δ است که نتیجه توسیع $\delta\,|_K$ است و $\delta(\delta^k y_j) = \delta^{k+1}(y_j)$.

مثال ۳.۲.۳. معادله $u_{xx} = v_x$ را در نظر بگیرید. با تعریف $u =: y_1$ و $v =: y_2$ این چندجمله‌ای دیفرانسیلی، به صورت $\delta^2 y_1 - \delta y_2 = 0$ در حلقه $K\{y_1, y_2\}$ نوشته می‌شود.

مثال ۴.۲.۳. معادله $(\frac{du}{dt})^2 = 4u\frac{d^2u}{dt^2}$ را در نظر بگیرید. با تعریف $u =: y_1$ این چندجمله‌ای دیفرانسیلی، به صورت $(\delta y_1)^2 - 4y_1\delta^2(y_1) = 0$ در حلقه $K\{y_1\}$ نوشته می‌شود.

تعریف ۷.۲.۳ (همریختی دیفرانسیلی). فرض کنیم (R_1, δ_1) و (R_2, δ_2) دو حلقه دیفرانسیلی باشند. یک همریختی دیفرانسیلی از (R_1, δ_1) به (R_2, δ_2) یک همریختی حلقه‌ای مانند $\varphi : R_1 \longrightarrow R_2$ است به طوری که $\varphi \circ \delta_1 = \delta_2 \circ \varphi$. اگر R_0 یک زیرحلقه دیفرانسیلی مشترک از R_1 و R_2 و $\varphi\mid_{R_0} = id_{R_0}$، در این صورت، φ یک همریختی دیفرانسیلی روی R_0 نامیده می‌شود.

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\delta_1"] & \varphi(a) \arrow[d, "\delta_2"] \\ \delta_1(a) \arrow[r, "\varphi"] & \varphi(\delta_1(a)) \end{tikzcd}$$

شکل ۱.۳: همریختی حلقه‌ای

در شکل ۱.۳ شماتیکی از یک همریختی حلقه‌ای را مشاهده می‌کنید. اکنون برای روشن شدن موضوع همریختی و بررسی بیشتر آن، به مطالعه دو مثال زیر خواهیم پرداخت.

مثال ۵.۲.۳. فرض کنیم $(K, \delta) \subseteq (L, \delta)$ دو میدان دیفرانسیلی باشند، به گونه‌ای که L توسیعی از K باشد، آنگاه نگاشت $\mathrm{id}_K : (K, \delta) \to (L, \delta)$ یک همریختی دیفرانسیلی است.

مثال ۶.۲.۳. عنصر $\vec{a} = (a_1, \ldots, a_n) \in L^n$ در نظر بگیرید. نگاشت $\varphi_{\vec{a}} : K\{y_1, \ldots, y_n\} \to L$ را که به صورت $f(y_1, \ldots, y_n) \mapsto f(a_1, \ldots, a_n)$ و $\delta^k(y_i) \mapsto \delta^k(a_i)$ تعریف می‌شود، یک همریختی دیفرانسیلی روی K است (که توسط مقدار $\varphi(y_i)$ به طور یکتا تعیین می‌شود). در اینجا، $f(a_1, \ldots, a_n)$ به معنای جایگزینی $\delta^k(y_i)$ با $\delta^k(a_i)$ در $f(y_1, \ldots, y_n)$ است.

گزاره ۱.۲.۳. فرض کنیم (R_1, δ) و (R_2, δ) دو حلقه دیفرانسیلی باشند و $\varphi : R_1 \to R_2$ یک همریختی دیفرانسیلی باشد. آنگاه $\ker(\varphi)$ یک ایده‌آل دیفرانسیلی است.

اثبات. طبق آموخته‌های جبر کلاسیک، $\ker(\varphi)$ یک ایده‌آل در R است، زیرا φ یک همریختی حلقه‌ای است. از طرفی برای هر $r \in \ker(\varphi)$ خواهیم داشت $\varphi(r) = 0$. بنابراین $\delta(\varphi(r)) = 0 = \varphi(\delta(r))$ و در نتیجه $\delta(r) \in \ker(\varphi)$. پس $\ker(\varphi)$ یک ایده‌آل دیفرانسیلی است. □

نتیجه ۱.۲.۳. فرض کنیم (R, δ) یک حلقه دیفرانسیلی و I یک ایده‌آل در R باشد. آنگاه I یک ایده‌آل دیفرانسیلی در R است اگر و تنها اگر $(R/I, \delta)$ یک حلقه دیفرانسیلی باشد.

اثبات. $(\Rightarrow)$ فرض کنیم $r + I \in R/I$. حال $\delta(r+I)$ را به صورت $\delta(r+I) = \delta(r) + I$ تعریف می‌کنیم. برای نشان دادن خوش تعریفی این رابطه، فرض کنیم $r_۱ + I = r_۲ + I$. در این حالت باید نشان دهیم که $\delta(r_۱) + I = \delta(r_۲) + I$. از آنجا که $r_۱ - r_۲ \in I$ و I یک ایده‌آل دیفرانسیلی است، داریم $\delta(r_۱ - r_۲) = \delta(r_۱) - \delta(r_۲) \in I$. بنابراین $\delta(r_۱) + I = \delta(r_۲) + I$.

در قدم بعدی لازم است نشان دهیم که $\delta(r+I) = \delta(r) + I$ روی R/I یک مشتق است. برای نشان دادن این موضوع، کافی است نشان دهیم که دو ویژگی مشتق برقرار است. فرض می‌کنیم $r_۱ + I$ و $r_۲ + I$ دو عنصر دلخواه از R/I باشد. در این صورت خواهیم داشت:

$$(1)\quad \delta(r_1 + I + r_2 + I) = \delta(r_1 + r_2 + I) = \delta(r_1) + \delta(r_2) + I = \delta(r_1 + I) + \delta(r_2 + I)$$

$$(2)\quad \delta((r_1 + I)(r_2 + I)) = \delta(r_1 r_2 + I) = \delta(r_1 r_2) + I = \delta(r_1) r_2 + r_1 \delta(r_2) + I = \delta(r_1 + I) \cdot (r_2 + I) + (r_1 + I) \cdot \delta(r_2 + I)$$

$(\Leftarrow)$ فرض کنیم $\varphi : R \to R/I$ به صورت $\varphi(r) = r + I$ برای هر $r \in R$ تعریف شده باشد. آنگاه برای هر $r \in R$ داریم $\varphi(\delta(r)) = \delta(r) + I = \delta(r+I) = \delta(\varphi(r))$. بنابراین φ یک همریختی دیفرانسیلی است. پس با استفاده از گزاره ۱.۲.۳ $I = \ker(\varphi)$ یک ایده‌آل دیفرانسیلی در R است. □

اکنون آماده هستیم تا با مفهوم جدیدی آشنا شویم. این مفهوم یکی از اساسی‌ترین مفاهیم این شاخه از ریاضیات است، چرا که نقطه اتصال با سایر علوم و سرآغازی برای نمایش کاربردهای وسیع آن است. این مفهوم، چندگونای دیفرانسیلی است که پس از چند تعریف و آماده شدن مقدمات مورد نیاز به معرفی آن خواهیم پرداخت.

۳.۳ چندگونای دیفرانسیلی

دانستیم که چندگونای دیفرانسیلی از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است. در این بخش، پس از آشنایی با چند مفهوم مقدماتی، به سراغ چندگونای دیفرانسیلی رفته، به معرفی آن می‌پردازیم.

تعریف ۱.۳.۳ (صفر دیفرانسیلی). فرض کنیم $\Sigma \subseteq K\{y_۱, \ldots, y_n\}$ و $\eta = (\eta_۱, \ldots, \eta_n)$ نقطه‌ای از $(L, \delta) \supseteq (K, \delta)$ باشد. نقطه η یک صفر دیفرانسیلی برای Σ نامیده می‌شود اگر برای هر $f \in \Sigma$ داشته باشیم $f(\eta) = ۰$. به عبارت دیگر $\Sigma \subseteq \ker(\varphi_\eta : K\{y_۱, \ldots, y_n\} \to L^n)$.

تعریف ۳.۳.۲ (میدان بسته دیفرانسیلی). فرض کنیم (K, δ) یک میدان دیفرانسیلی باشد. چنین میدانی یک میدان بسته دیفرانسیلی نامیده می‌شود هرگاه برای هر $F \subseteq K\{y_1, \ldots, y_n\}$ اگر یک میدان دیفرانسیلی مانند $(K, \delta) \supseteq (L, \delta)$ و $\eta \in L^n$ وجود داشته باشد، آنگاه $F(\eta) = 0$ آنگاه $\xi \in K^n$ وجود داشته باشد، به طوری که $F(\xi) = 0$.

تعریف ۳.۳.۳ (بستار دیفرانسیلی). فرض کنیم $(K, \delta) \supseteq (L, \delta)$ دو میدان دیفرانسیلی باشند. در این صورت (L, δ) یک بستار دیفرانسیلی (K, δ) نامیده می‌شود هرگاه (L, δ) بسته دیفرانسیلی باشد و دیگر آنکه برای هر میدان بسته دیفرانسیلی $(K, \delta) \supseteq (M, \delta)$ یک جانشانی دیفرانسیلی $\varphi : L \mapsto M$ وجود داشته باشد به طوری که $\varphi|_K = \mathrm{id}_K$.

تعریف ۳.۳.۴ (چندگونای دیفرانسیلی). فرض کنیم (E, δ) یک بستار دیفرانسیلی از (K, δ) باشد. مجموعه صفرهای دیفرانسیلی $\Sigma \subseteq K\{y_1, \ldots, y_n\}$ را یک چندگونای دیفرانسیلی روی K می‌نامند و با $\mathbb{V}_E(\Sigma)$ یا $\mathbb{V}(\Sigma)$ نمایش می‌دهیم.

برای یک زیرمجموعه $V \subseteq E^n$، مجموعه $\mathbb{I}(V) = \{f \in K\{y_1, \ldots, y_n\} \mid \forall \xi \in V, f(\xi) = 0\}$ را مجموعه تمام چندجمله‌ای‌های دیفرانسیلی در $K\{y_1, \ldots, y_n\}$ می‌نامند که در هر نقطه V صفر می‌شوند. واضح است که $\mathbb{I}(V)$ یک ایده‌آل دیفرانسیلی رادیکال است. پس برای هر عدد طبیعی m و هر $f^m \in \mathbb{I}(V)$ و هر $\xi \in V$ خواهیم داشت $f^m(\xi) = 0$. از آنجایی که K یک میدان است، داریم $f \in \mathbb{I}(V)$.

قرارداد ۳.۳.۱. در تعریف فوق از چندگونای دیفرانسیلی، به سراغ بستار میدان دیفرانسیلی رفتیم و چندگونا را روی بستار دیفرانسیلی تعریف کردیم. آنچه که در بسیاری از مراجع علمی پرکاربرد است تعریف چندگونای دیفرانسیلی روی میدان دیفرانسیلی است. درواقع تعریف چندگونا روی بستار میدان دیفرانسیلی، صرفاً به جهت مشاهده و آگاهی خواننده این پایان‌نامه بوده است و هدفی که در ادامه مباحث، دنبال می‌شود آن است که چندگونا را روی میدان دیفرانسیلی تعریف کنیم.

تعریف ۳.۳.۵ (نقطه عام). فرض کنیم $\eta = (\eta_1, \ldots, \eta_n)$ یک نقطه از یک توسیع میدان دیفرانسیلی (K, δ) باشد. در این صورت η یک نقطه عام از یک ایده‌آل دیفرانسیلی $I \subseteq K\{y_1, \ldots, y_n\}$ نامیده می‌شود هرگاه به‌ازای $f \in K\{y_1, \ldots, y_n\}$ داشته باشیم $f(\eta_1, \ldots, \eta_n) = 0$ اگر و تنها اگر $f \in I$.

در مثال زیر، ضمن بررسی یک نقطه عام، برای یک ایده‌آل مشخص، خواهیم دید که نقطه عام یکتا نیست.

مثال ۳.۳.۱. ایده‌آل $I = \langle x^2 + y^2 - 1 \rangle \subseteq \mathbb{Q}[x, y]$ را در نظر می‌گیریم. در این صورت و طبق تعریف، $\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)$ یک نقطه عام از این ایده‌آل است. همچنین $(\cos(\theta), \sin(\theta))$ یک نقطه عام دیگر برای این ایده‌آل است. بنابراین نقاط عام یکتا نیستند.

لم ۳.۳.۱. فرض کنیم $P \subseteq K\{y_1, \ldots, y_n\}$ یک ایده‌آل دیفرانسیلی باشد. در این صورت P یک نقطه عام دارد اگر و تنها اگر P اول باشد.

اثبات. $(\Rightarrow)$ فرض کنیم η یک نقطه عام از P باشد. آنگاه $P = \mathbb{I}(\eta)$ یک ایده‌آل دیفرانسیلی اول است. برای نشان دادن این موضوع، فرض می‌کنیم $fg \in \mathbb{I}(\eta)$. این بدان معناست که $f(\eta)g(\eta) = 0$. از آنجایی که ضرایب f و g از میدان با مشخصه صفر به وجود می‌آیند، پس حداقل یکی از آنها باید مساوی با صفر باشد و در نتیجه $\mathbb{I}(\eta)$ یک ایده‌آل دیفرانسیلی اول است.

$(\Leftarrow)$ فرض کنیم P یک ایده‌آل دیفرانسیلی اول باشد. آنگاه $K\{y_1, \ldots, y_n\}/P$ یک دامنه دیفرانسیلی است. قرار می‌دهیم $L = \text{Frac}(K\{y_1, \ldots, y_n\}/P)$ و $\overline{y}_i = y_i + P$. آنگاه $(\overline{y}_1, \ldots, \overline{y}_n) \in L^n$ یک نقطه عام از P است. $\square$

در این فصل، مشابه دیفرانسیلی قضیه پایه‌ای هیلبرت، برای حلقه چندجمله‌ای‌های دیفرانسیلی، یعنی قضیه پایه‌ای ریت-رادنباش را اثبات خواهیم کرد. پیش از آن، ابتدا روش مجموعه مشخصه را معرفی می‌کنیم که ابزار محاسباتی اصلی در جبر دیفرانسیلی است و همچنین می‌تواند برخی بینش‌های نظری را فراهم کند. ایده نهان مجموعه‌های مشخصه، همراستا با تفکر حاکم بر پایه گربنر است. با این مقدمه به سراغ مجموعه مشخصه دیفرانسیلی می‌رویم.

۳.۴ مجموعه مشخصه دیفرانسیلی

هدف این بخش بررسی تعلق به ایده‌آل دیفرانسیلی است. پیش از این و در مباحث هندسه جبری، این موضوع بررسی شده است و مطالب برای حلقه چندجمله‌ای‌های تک متغیره و چند متغیره به تفصیل بحث شده است. استراتژی این بررسی در مورد این دو نوع حلقه متفاوت است. در مورد حلقه چندجمله‌ای‌های تک متغیره، الگوریتم اقلیدس و در مورد حلقه چندجمله‌ای‌های چند متغیره، پایه گربنر، پاسخگو خواهد بود. آنچه که در

این رهیافت، تعلق به ایده‌آل را بررسی می‌کند، از دو منظر جبری و دیفرانسیلی است که با ذکر تعاریف و قضایا به تبیین موضوع می‌پردازد. برای روشن شدن مفاهیم نیز استفاده از مثال‌های مناسب به تفهیم موضوع کمک می‌کند.

۱. از آنجایی که $\mathbb{Q}[x]$ یک دامنه ایده‌آل اصلی است، هر ایده‌آلی به فرم $I = \langle f \rangle$ است که f عنصری از $\mathbb{Q}[x]$ است. با استفاده از الگوریتم تقسیم چندجمله‌ای‌های تک متغیره داریم $g = qf + r$. بنابراین g عنصری از ایده‌آل است اگر و تنها اگر $r = ۰$.

۲. در حلقه $\mathbb{Q}[x_۱, \ldots, x_n]$ با داشتن ایده‌آل $I = \langle f_۱, \ldots, f_s \rangle \subseteq \mathbb{Q}[x_۱, \ldots, x_n]$ از پایه گربنر و الگوریتم تقسیم چند متغیره برای آزمون $g \in I$ استفاده می‌کنیم.

۳. مسئله عضویت در ایده‌آل دیفرانسیلی چه می‌شود؟ مجموعه‌های مشخصه دیفرانسیلی، رهیافتی است که پاسخ به این سؤال را برعهده می‌گیرد.

فرض کنیم (K, δ) یک میدان دیفرانسیلی با مشخصه صفر باشد. در این صورت، حلقه چندجمله‌ای دیفرانسیلی $K\{Y\} \triangleq K\{y_۱, \ldots, y_n\}$ برحسب متغیرهای دیفرانسیلی $Y = \{y_۱, \ldots, y_n\}$ می‌تواند به عنوان یک حلقه چندجمله‌ای در متغیرهای جبری $\Theta(Y) \triangleq \{\delta^i(y_j) \mid i \in \mathbb{N}, j = ۱, \ldots, n\}$ دیده شود. به عبارت دیگر می‌توان نوشت $K\{Y\} = K[\Theta(Y)]$.

یک رتبه‌بندی دیفرانسیلی روی $\Theta(Y)$ یک ترتیب کلی روی $\Theta(Y)$ که شرایط زیر را تأمین می‌کند:

۱. برای هر $u \in \Theta(Y)$ داشته باشیم $u \prec \delta(u)$.

۲. برای هر $u, v \in \Theta(Y)$ به طوری که $u \prec v$ خواهیم داشت $\delta(u) \prec \delta(v)$.

مثال ۳.۴.۱. مجموعه $\Theta(y) = \{\delta^i(y) : i \in \mathbb{N}\}$ را در نظر می‌گیریم. این مجموعه دارای یک ترتیب یکتاست که به صورت $y \prec \delta(y) \prec \delta^۲(y) \prec \delta^۳(y) \prec \cdots$ نوشته می‌شود.

تعریف ۳.۴.۱. دو نوع رتبه‌بندی مهم روی $\Theta(Y)$ به صورت زیر تعریف می‌شوند:

[**رتبه‌بندی حذفی**] بدین صورت است که اگر $y_i > y_j$ آنگاه $\delta^k(y_i) \succ \delta^l(y_j)$ برای هر $k, l \in \mathbb{N}$.

[**رتبه‌بندی مرتب**] بدین صورت است که اگر $k > l$ آنگاه $\delta^k(y_i) \succ \delta^l(y_j)$ برای همه $i, j \in \mathbb{N}$.

لم ۳.۴.۱. هر رتبه‌بندی، یک رابطه خوش‌ترتیبی است.

به عبارت دیگر، این لم بیان می‌دارد که هر زیرمجموعه غیر تهی از $\Theta(Y)$ دارای کوچکترین عنصر است.

اثبات. فرض کنیم $U \subseteq \Theta(Y)$ و $U \neq \emptyset$. اگر برای هر $j \in \{1, \dots, n\}$ عنصری مانند $i \in \mathbb{N}$ وجود داشته باشد که $\delta^i(y_j) \in U$، در این صورت قرار می‌دهیم $k_j = \min\{i \mid \delta^i(y_j) \in U\}$ و u_j را به صورت $u_j = \delta^{k_j}(y_j)$ در نظر می‌گیریم. در این صورت، کوچک‌ترین عنصر U کوچک‌ترین عنصر در مجموعه متناهی $\{u_1, \dots, u_j\}$ است و به این ترتیب حکم خود را به اثبات رسانده‌ایم. □

قرارداد ۳.۴.۱. تا پایان این بخش، فرض می‌کنیم که $\mathcal{R}$ یک رنکینگ داده شده باشد و همواره $1 \prec \delta^i(y_j)$. همچنین برای $k > 3$ عبارت‌های $\delta(a), \delta^2(a), \delta^k(a)$ به صورت $a', a'', a^{(k)}$ نمایش داده می‌شوند. در واقع این همان نمادگذاری مشتق، در سطح ریاضیات عمومی است.

تعریف ۳.۴.۲. فرض کنیم $f \in K\{y_1, \dots, y_n\} \setminus K$. پیشرو f بزرگ‌ترین عنصر $\Theta(Y)$ نسبت به رتبه‌بندی $\mathcal{R}$ است که به طور موثر در f ظاهر می‌شود. آن را با u_f یا $\mathrm{ld}(f)$ نمایش می‌دهیم.

حال اگر f را به صورت چندجمله‌ای یک‌متغیره مانند $f = I_d u_f^d + I_{d-1} u_f^{d-1} + \cdots + I_1 u_f + I_0$ نسبت به u_f بنویسیم، ضرایب I_i از u_f مستقل هستند. در شرایطی مشابه با هندسه جبری، درجه را به صورت $d = \deg(f, u_f)$ تعریف می‌کنیم. ضریب پیشرو I_d به نام بنیان f تعریف و با نماد I_f نشان داده می‌شود.

زوج مرتب (u_f, d) به نام رتبه f شناخته می‌شود و با نماد $\mathrm{rank}(f)$ نمایش می‌دهیم.

مثال ۳.۴.۲. حلقه چندجمله‌ای‌های دیفرانسیلی معمولی $\mathbb{Q}\{y\}$ را در نظر می‌گیریم. می‌خواهیم پیشرو، بنیان و رتبه $f = (y')^2 - 4y$ را به دست آوریم. طبق تعریف خواهیم داشت $u_f = \mathrm{ld}(f) = y'$ و $I_f = 1$ و $\mathrm{rank}(f) = (y', 2)$.

با اعمال مشتق، روی f خواهیم داشت $\delta(f) = 2y'y'' - 4y'$ و در نتیجه کمیت‌های محاسبه شده در بالا به صورت $u_{\delta(f)} = y'' = \delta(u_f)$ و $I_{\delta(f)} = 2y'$ و $\mathrm{rank}(\delta(f)) = (y'', 1)$ خواهد بود.

اکنون که تا حدودی با این مفاهیم و نمایش آن در یک مثال آشنا شدیم، وقت آن رسیده تا با مطالعه لم زیر، گستره دید خود نسبت به این مفاهیم را وسعت بخشیم:

لم ۳.۴.۲. فرض کنیم $k \in \mathbb{N}$ و $\mathrm{ld}(f)$ پیشرو f باشد. در این صورت، رابطه $\mathrm{ld}(\delta^k(f)) = \delta^k(\mathrm{ld}(f))$ همواره برقرار است.

اثبات. از آنجایی که k یک عدد طبیعی است، استقرا ریاضی پیش از هر تکنیک دیگری به ذهن متبادر می‌شود. ابتدا به حالت $k = ۱$ می‌پردازیم. داریم $f = I_d u_f^d + I_{d-۱} u_f^{d-۱} + \cdots + I_۱ u_f + I_۰$ و در نتیجه مشتق آن به صورت $\delta(f) = \sum_{j=۰}^{d} \delta(I_j)(\mathbf{ld}(f))^j + \sum_{j=۱}^{d} j\delta(I_j)(\mathbf{ld}(f))^j$ است. با مقایسه f و $\delta(f)$ درمی‌یابیم که $\mathbf{ld}(\delta(f)) = \delta(\mathbf{ld}(f))$. این تساوی بدان معناست که حکم مورد نظر، برای $k = ۱$ درست است. حال فرض کنیم $\mathbf{ld}(\delta^k(f)) = \delta^k(\mathbf{ld}(f))$. نشان می‌دهیم برای $k + ۱$ نیز درست است. کافی است از $\delta^k(\mathbf{ld}(f))$ مشتق بگیریم. در این صورت داریم:

$$\delta^{k+۱}(\mathbf{ld}(f)) = \delta(\delta^k(\mathbf{ld}(f))) = \delta(\mathbf{ld}(\delta^k(f))) = \mathbf{ld}(\delta(\delta^k(f))) = \mathbf{ld}(\delta^{k+۱}(f)).$$

و این به معنای اثبات حکم است. □

تعریف ۳.۴.۳ (جداساز). مشتق نسبی $\partial f/\partial u_f$ به نام جداساز شناخته می‌شود و با S_f نمایش داده می‌شود.

با توجه به آنچه که تا کنون آموخته‌ایم، مقدار $\delta(f)$ را به صورت زیر به دست می‌آوریم. بدین منظور فرض می‌کنیم $f = \sum_{i=۰}^{d} I_i u_f^i$. در این صورت با مشتق‌گیری و اعمال قاعده لایبنیتز خواهیم داشت:

$$\delta(f) = \sum_{i=۱}^{d} I_i \delta(u_f^i) + \sum_{i=۰}^{d} \delta(I_i) u_f^i = (\sum_{i=۱}^{d} I_i \cdot i \cdot u_f^{i-۱}) \delta(u_f) + \sum_{i=۰}^{d} \delta(I_i) u_f^i = S_f \cdot \delta(u_f) + \sum_{i=۰}^{d} \delta(I_i) u_f^i.$$

توجه به این نکته لازم است که با توجه به صفر بودن مشخصه میدان، خواهیم داشت. $u_{\delta(f)} = \delta(u_f)$ و $I_{\delta(f)} = S_f$ و $\deg(\delta(f), u_{\delta(f)}) = ۱$. از طرفی برای هر عدد طبیعی k می‌توان گفت که مشتق مرتبه k ام برابر است با $S_f \delta^k(u_f)$ به اضافه جملاتی که شامل مشتق مرتبه کمتر از $\delta^k(u_f)$ است. بنابراین $u_{\delta^k(f)} = \delta^k(u_f)$ و $I_{\delta^k(f)} = S_f$ و در نتیجه $\deg(\delta^k(f), u_{\delta^k(f)}) = ۱$.

قرارداد ۲.۴.۳. برای هر $f \in K \setminus \{۰\}$ داریم $u_f = ۱$

پیش از آنکه به تعریف مفهوم بعدی بپردازیم، باید بدانیم که مفوم مشتق سره عنصری مانند $f \in K\{Y\}$ عبارتست از $\delta^i(f)$ که در آن $i > ۰$.

تعریف ۴.۴.۳. فرض کنیم $f, g \in K\{Y\}$. در این صورت f را کاهش‌یافته جزئی نسبت به g می‌نامیم، هرگاه هیچ یک از مشتقات سره u_g به طور مؤثر در f ظاهر نشود.

مثال ۳.۴.۳. فرض کنیم $f = y^{۲}$ و $g = y + ۱$. از آنجایی که $u_g = y$ و هیچیک از مشتقات y در f ظاهر نمی‌شود، پس f کاهش‌یافته جزئی، نسبت به g است.

مثال ۴.۴.۳. فرض کنیم $f = ۲y\delta(y)^{۲} + y$ و $g = y + ۱$. از آنجایی که $\delta(u_g) = \delta(y)$ در اولین جمله f ظاهر می‌شود، پس f کاهش‌یافته جزئی، نسبت به g نیست.

تعریف ۵.۴.۳. فرض کنیم $f, g \in K\{Y\}$. در این صورت f را کاهش‌یافته نسبت به g گوییم هرگاه دو شرط زیر برقرار باشد:

۱. چندجمله‌ای دیفرانسیلی f کاهش‌یافته جزئی نسبت به چندجمله‌ای دیفرانسیلی g باشد

۲. درجه f از درجه g کمتر باشد. به عبارت دیگر $\deg(g, u_g) > \deg(f, u_f)$.

مورد اول بدان معنای عدم امکان تقسیم به صورت دیفرانسیلی موجود و مورد دوم به معنای نفی امکان تقسیم به صورت جبری است.

تعریف ۶.۴.۳ (خودکاهش‌یافته). زیرمجموعه $\mathcal{A} \subseteq K\{y_۱, \dots, y_n\}$ را خودکاهش‌یافته گوییم هرگاه هر عنصر $\mathcal{A}$ نسبت به سایر عناصر $\mathcal{A}$ کاهش‌یافته باشد.

لم ۳.۴.۳. هر مجموعه خودکاهش‌یافته از $K\{y\}$ متناهی است.

اثبات. فرض کنیم $\mathcal{A}$ یک مجموعه خودکاهش‌یافته باشد. برای هر $۱ \leq i \leq l$ حداکثر یک چندجمله‌ای دیفرانسیلی $A \in \mathcal{A}$ وجود دارد به طوری که برای عدد طبیعی k داشته باشیم $\mathrm{ld}(A) = \delta^k(y_i)$ و برای دو چندجمله‌ای دیفرانسیلی $A_۱$ و $A_۲$ با $\mathrm{ld}(A_j) = \delta^{k_j}(y_i)$ و $۱ \leq j \leq ۲$ نمی‌توانند نسبت به یکدیگر کاهش پیدا کنند. بنابراین $|A| \leq n$. $\square$

تذکر ۱.۴.۳. در صورتی که بخواهیم لم فوق را در مورد حلقه دیفرانسیلی جزئی به کار ببریم، نیازمند لم دیکسون هستیم تا نشان دهیم هر مجموعه خودکاهنده، متناهی است.

تعریف ۷.۴.۳. فرض کنیم $f, g \in K\{y_۱, \dots, y_n\} \setminus K$. می‌گوییم f نسبت به g رتبه پایین‌تری دارد و با نماد $(f < g)$ نمایش می‌دهیم هرگاه $\mathrm{rank}(f) \prec_{\mathrm{lex}} \mathrm{rank}(g)$.

نمادگذاری ۱.۴.۳. از نماد $f \leq g$ زمانی استفاده می‌کنیم که $f < g$ یا f و g رتبه یکسانی داشته باشند.

اکنون مجموعه خودکاهش‌یافته $\mathcal{A}$ را به ترتیب افزایش رتبه می‌نویسیم، یعنی $\mathcal{A} = A_1, \ldots, A_p$ به طوری که $\text{rank}(A_1) \prec_{\text{lex}} \text{rank}(A_2) \prec_{\text{lex}} \cdots \prec_{\text{lex}} \text{rank}(A_p)$. حال فرض کنیم $\mathcal{A} = A_1, \ldots, A_p$ و $\mathcal{B} = B_1, \ldots, B_q$ دو مجموعه خودکاهش‌یافته باشند. در این صورت می‌گوییم $\mathcal{A} < \mathcal{B}$ هرگاه یکی از دو شرط زیر، برقرار باشد:

۱. عدد طبیعی مانند $k = \min\{p, q\}$ وجود داشته باشد، به طوری که به‌ازای هر $i < k$ داشته باشیم $\text{rank}(A_i) = \text{rank}(B_i)$ و $\text{rank}(A_k) \prec_{lex} \text{rank}(B_k)$.

۲. $p > q$ و به‌ازای هر $i \leq q$ داشته باشیم $\text{rank}(A_i) = \text{rank}(B_i)$.

اگر هیچ‌یک از موارد $\mathcal{A} < \mathcal{B}$ یا $\mathcal{A} > \mathcal{B}$ برقرار نباشد، می‌گوییم $\mathcal{A}$ و $\mathcal{B}$ رتبه یکسانی دارند. به عبارت دیگر $\mathcal{A}$ و $\mathcal{B}$ رتبه یکسان دارند اگر و تنها اگر $p = q$ و به‌ازای هر $i \leq p$ داشته باشیم. $\text{rank}(\mathcal{A}) = \text{rank}(\mathcal{B})$.

مثال ۵.۴.۳. حلقه چندجمله‌ای‌های $K\{y_1, y_2\}$ را با رتبه‌بندی مرتب $y_1 < y_2$ در نظر می‌گیریم. از طرفی فرض کنیم $A = \{A_1 = (y_2')^2+1, A_2 = y_1''+y_2\}$ و $B = \{B_1 = y_2'+2\}$ و $C = \{C_1 = (y_2')^2+2\}$ موجود باشند. از آنجا که $\text{rank}(A_1) \succ_{lex} \text{rank}(B_1)$ نتیجه می‌شود که $B < A$. همچنین از آنجا که $\text{rank}(A_1) = \text{rank}(C_1)$ و $|A| > |C|$ نتیجه می‌شود که $A < C$.

گزاره ۱.۴.۳. هر زیرمجموعه ناتهی از مجموعه‌های خودکاهش‌یافته در $K\{Y\}$ دارای مجموعه خودکاهش‌یافته‌ای با پایین‌ترین رتبه است.

اثبات. فرض کنیم U یک مجموعه ناتهی از مجموعه‌های خودکاهش‌یافته در حلقه $K\{Y\}$ باشد. با استفاده از استقرا، دنباله‌ای از زیرمجموعه‌های U را برای $i = 0$ به صورت $U_0 \triangleq U$ و برای هر $i > 0$ مجموعه U_i را به صورت $U_i = \{\mathcal{A} \in U_{i-1} \mid \text{card}(\mathcal{A}) \geq i \,, i-th\ Element\ of\ \mathcal{A}\ is\ of\ Lowest\ Rank\}$ تعریف می‌کنیم. در این صورت $U_0 \supseteq U_1 \supseteq \cdots$. از آنجایی که هر مجموعه خودکاهش‌یافته متناهی است، عدد طبیعی i وجود دارد، به طوری که $U_i \neq \emptyset$ و $U_{i+1} = \emptyset$. پس هر عنصر U_i یک مجموعه خودکاهش‌یافته در U از کمترین مرتبه است. $\square$

تعریف ۸.۴.۳ (مجموعه مشخصه دیفرانسیلی). فرض کنیم $I \subseteq K\{Y\}$ یک ایده‌آل دیفرانسیلی باشد. یک مجموعه خودکاهش‌یافته با پایین‌ترین رتبه در I قرار دارد که یک مجموعه مشخصه دیفرانسیلی نسبت به یک رتبه‌بندی داده شده، نامیده می‌شود.

قرارداد ۳.۴.۳. به طور قراردادی $\emptyset$ و $\{a\}$ که در آن $a \in K^* = K \setminus \{0\}$، مجموعه‌های خودکاهش‌یافته هستند. در این حالت داریم $\mathrm{rank}(a) = (1, 1)$.

۵.۳ شبه تقسیم دیفرانسیلی

در بخش ۷.۱ با مجموعه مشخصه آشنا شدیم. با رهیافتی مشابه، شبه تقسیم دیفرانسیلی را دنبال می‌کنیم؛ با این تفاوت که مطالب را از دو دیدگاه جبری و دیفرانسیلی پیگیری خواهیم کرد. ابتدا به ساکن با یک لم شروع می‌کنیم.

لم ۱.۵.۳. فرض کنیم $\mathcal{A} = A_1, \ldots, A_p$ یک مجموعه خودکاهش‌یافته در $K\{Y\}$ و F عنصری از این حلقه چندجمله‌ای دیفرانسیلی باشد. در این صورت، عدد طبیعی t_i و عنصری مانند $\tilde{F}$ در حلقه چندجمله‌ای دیفرانسیلی $K\{Y\}$ وجود دارد به طوری که

۱. $\tilde{F}$ کاهش‌یافته جزئی نسبت به $\mathcal{A}$ است،

۲. رتبه $\tilde{F}$ بیشتر از رتبه F نباشد،

۳. همواره داریم $\prod_{i=1}^{p} S_{A_i}^{t_i} F \equiv \tilde{F} \mod [A]$.

به بیان دقیق‌تر، اینگونه می‌گوییم که $\prod_{i=1}^{p} S_{A_i}^{t_i} F - \tilde{F}$ می‌تواند به صورت ترکیب از خطی مشتقات $\theta(A_i)$ با ضرایبی در $K\{Y\}$ بیان شود، به طوری که $\theta(u_{A_i}) \le u_F$.

اثبات. اگر F نسبت به A کاهش‌یافته جزئی باشد، آنگاه $\tilde{F} = F$ و $t_i = 0$ (برای $i \le p$). در غیر این صورت، F شامل یک مشتق سره $\delta^k(u_{A_i})$ از جمله پیشرو برخی از A_i است. فرض کنیم v_F چنین مشتقی با بیشترین رتبه باشد. اثبات لم بر اساس استقرا روی v_F انجام می‌شود. فرض کنیم برای هر $G \in K\{Y\}$ که شامل هیچیک از مشتقات سره از هیچ u_{A_i} با مرتبه $\ge v_F$ نیست، مقادیر $\widetilde{G}$ و اعداد طبیعی متناظر تعریف شده‌اند به‌طوری که خواص مطلوب را برآورده می‌کنند. در این صورت، یک عنصر یکتا $A \in \mathcal{A}$ موجود است به‌طوری که $v_F = \delta^k(u_A)$ برای یک $k > 0$. اگر $A = \sum_{i=0}^{d} I_i u_A^i$، آنگاه داریم: $\delta^k(A) = S_A \delta^k(u_A) + T$ که در آن $\mathrm{rank}(T) < v_F$.

با نمادگذاری $l = \deg(F, v_F)$ می‌توانیم F را به صورت $F = \sum_{i=۰}^{l} J_i v_F^i$ بنویسیم که در آن $J_۰, \dots, J_l$ شامل مشتقات سره هیچکدام از u_A^i با مرتبه بزرگتر از v_F نیست. لذا داریم:

$$S_A^l F = \sum_{i=۰}^{l} J_i S_A^{l-i} (S_A v_F)^i \equiv \sum_{i=۰}^{l} J_i S_A^{l-i} (-T)^i \pmod{(\delta^k(A))}.$$

آشکار است که $G = \sum_{i=۰}^{l} J_i S_A^{l-i}(-T)^i$ شامل مشتقات سره از هیچ u_{A_i} با مرتبه بزرگتر از v_F نیست. با استفاده از فرض استقرا درمی‌یابیم که $\widetilde{G}$ وجود دارد که نسبت به $\mathcal{A}$ کاهش‌یافته جزئی است و عدد طبیعی k_i وجود دارد به طوری که $\prod_{i=۱}^{p} S_{A_i}^{k_i} G \equiv \widetilde{G} \pmod{[\mathcal{A}]}$. حال کافی است قرار دهیم

$$\widetilde{F} = \widetilde{G}, \qquad t_i = \begin{cases} k_i, & A_i \neq A \\ k_i + l, & A_i = A. \end{cases}$$

در این صورت، به اثبات حکم دست یافته‌ایم. □

تعریف ۱.۵.۳ (باقیمانده جزئی). $\widetilde{F}$ حاصل شده در فرآیند اثبات قضیه فوق را، باقیمانده جزئی F نسبت به $\mathcal{A}$ می‌نامیم.

تذکر ۱.۵.۳. الگوریتم شبه تقسیم در جبر جابجایی را به خاطر می‌آوریم. فرض کنیم D یک دامنه صحیح باشد و v یک متغیر روی D باشد. فرض کنیم $F, A \in D[v]$ به ترتیب دارای درجات d_F, d_A باشند. در این صورت $A = I_{d_A} v^{d_A} + \cdots + I_۱ v + I_۰ \neq ۰$ را با $I_i \in D$ در نظر می‌گیریم. قرار می‌دهیم $e = \max\{d_F - d_A + ۱, ۰\}$. در این صورت، می‌توانیم $Q, R \in D[v]$ یکتا را بیابیم به طوری که داشته باشیم $I_{d_A}^e F = QA + R$ و $\deg(R) < \deg(A)$.

قضیه ۱.۵.۳. فرض کنیم $\mathcal{A} = A_۱, \dots, A_p$ یک مجموعه خودکاهش‌یافته در $K\{y_۱, \dots, y_n\}$ باشد. اگر F عنصری از این حلقه باشد، آنگاه یک چندجمله‌ای دیفرانسیلی $F_۰$ (باقیمانده دیفرانسیلی F) و اعداد طبیعی r_i و t_i وجود دارند به طوری که

۱. $F_۰$ کاهش‌یافته نسبت به $\mathcal{A}$ باشد،

۲. رتبه $F_۰$ بیشتر از رتبه F نباشد،

۳. همواره داریم $\prod_{i=1}^{p} S_{A_i}^{t_i} I_{A_i}^{r_i} F \equiv F_0 \mod [A]$.

اثبات. فرض کنیم $\tilde{F}$ باقی‌مانده جزئی F نسبت به $\mathcal{A}$ باشد و $\prod_{i=1}^{p} S_{A_i}^{t_i} F \equiv \tilde{F} \mod [A]$. فرض کنیم $r_p = \max\{0, \deg(F, u_{A_p}) - \deg(A_p, u_{A_p}) + 1\}$. در این صورت، عنصری مانند $F_{p-1} \in K\{Y\}$ وجود دارد به طوری که نسبت به $\mathcal{A}$ کاهش‌یافته جزئی و نسبت به A_p کاهش‌یافته باشد، به طوری که داریم $I_{A_p}^{r_p} \tilde{F} \equiv F_{p-1} \mod (A_p)$. اگر $p = 1$ اثبات کامل است. در غیر این صورت r_{p-1} و $F_{p-2} \in K\{Y\}$ را پیدا می‌کنیم که نسبت به A کاهش‌یافته جزئی و نسبت به A_{p-1} و A_p کاهش‌یافته باشد، به طوری که داشته باشیم $I_{A_{p-1}}^{r_{p-1}} I_{A_p}^{r_p} \tilde{F} \equiv F_{p-2} \mod (A_{p-1}, A_p)$ و رتبه‌اش بیشتر از $\tilde{F}$ نباشد. این فرآیند را ادامه می‌دهیم تا به F_0 برسیم که ویژگی‌های مورد نظر را داشته باشد. □

نمادگذاری ۳.۵.۱. در قضیه فوق، F_0 باقیمانده تقسیم F بر مجموعه مشخصه $\mathcal{A}$ است و با نماد $\delta\text{-rem}(F, \mathcal{A})$ یا $F \xrightarrow[\mathcal{A}]{} F_0$ نمایش داده می‌شود.

مثال ۳.۵.۱. میدان $K\{y_1, y_2\}$ را در نظر می‌گیریم و رتبه‌بندی مرتب را با $y_2 > y_1$ تثبیت می‌کنیم.

۱. فرض کنید $f = y_1$ و $\mathcal{A} = A_1 = y_2 y_1$. در اینجا داریم: $f \xrightarrow[\mathcal{A}]{} 0$ و $I_{A_1} f - 0 \in [\mathcal{A}]$.

۲. فرض کنیم $f = y'_1 + 1$ و $\mathcal{A} = A_1 = y_2 y_1^2$. همچنین، $u_{A_1} = y_1$ و $S_{A_1} = 2y_2 y_1$. آشکار است که f نسبت به $\mathcal{A}$ کاهش‌یافته جزئی نیست. پس داریم $\delta(A_1) = 2y_2 y_1 y'_1 + y'_2 y_1^2$ و به تبع آن باقیمانده جزئی f نسبت به $\mathcal{A}$ به صورت $2y_2 y_1 - y'_2 y_1^2 = \tilde{f}$ و $S_{A_1} f - A'_1 = \tilde{f}$ محاسبه می‌شود. بنابراین داریم $I_{A_1} f - I_f A_1 = y_2(2y_2 y_1 - y'_2 y_1^2) - (-y'_2) y_2 y_1^2 = 2y_2^2 y_1$ که نسبت به $\mathcal{A}$ کاهش‌یافته است. پس می‌توان نوشت $f \xrightarrow[\mathcal{A}]{} 2y_2^2 y_1$ و $I_{A_1} S_{A_1} f - 2y_2^2 y_1 = -y'_2 A_1 + I_{A_1} A'_1 \in [\mathcal{A}]$.

قضیه ۳.۵.۲. فرض کنیم $\mathcal{A}$ یک مجموعه خودکاهش‌یافته از یک ایده‌آل دیفرانسیلی سره $I \subseteq K\{y_1, \dots, y_n\}$ باشد. آنگاه شرایط زیر معادل هستند:

۱. $\mathcal{A}$ مجموعه مشخصه I است.

۲. برای هر $f \in I$ داریم $\delta\text{-rem}(f, \mathcal{A}) = 0$.

۳. I شامل هیچ چندجمله‌ای دیفرانسیلی ناصفری که نسبت به $\mathcal{A}$ کاهش‌یافته باشد، نیست.

اثبات. (۳) $\Leftrightarrow$ (۲): بدیهی است.

(۳) $\Rightarrow$ (۱): فرض کنیم $f \in I \setminus \{0\}$ نسبت به $\mathcal{A} = A_1, \ldots, A_p$ کاهش‌یافته باشد. فرض کنیم $k \in \mathbb{N}$ بیشینه باشد به طوری که $\mathrm{rank}(A_k) < \mathrm{rank}(f)$. در این صورت، مجموعه $A_1, \ldots, A_k, f$ یک مجموعه خودکاهش‌یافته از درجه کمتر از $\mathcal{A}$ است. (در حالتی که $\mathrm{rank}(f) < \mathrm{rank}(A_1)$، مقدار $k = 0$ در نظر گرفته می‌شود و مجموعه $\{f\}$ یک مجموعه خودکاهش‌یافته از درجه کمتر از $\mathcal{A}$ است.) بنابراین به تناقض می‌رسیم و درنتیجه (۳) معتبر است.

(۱) $\Rightarrow$ (۳): و (۳) معتبر باشد. فرض کنیم $\mathcal{A} = A_1, \ldots, A_p$ مجموعه مشخصه‌ی I نباشد. در این صورت، $\mathcal{B} = B_1, \ldots, B_q$، یک مجموعه خودکاهش‌یافته از I با رتبه‌ای پایین‌تر از $\mathcal{A}$ وجود دارد. طبق تعریف، یکی از دو حالت زیر برقرار است:

۱. $k \leq \min\{p, q\}$ وجود دارد به طوری که برای هر $i < k$ داریم $\mathrm{rank}(A_i) = \mathrm{rank}(B_i)$ و همچنین $A_k > B_k$.

۲. $q > p$ و برای هر $i \leq p$، $\mathrm{rank}(A_i) = \mathrm{rank}(B_i)$.

پس یکی از B_k یا B_{p+1} ناصفر و نسبت به $\mathcal{A}$ کاهش‌یافته است.

□

تذکر ۳.۵.۲. با توجه به قضیه بالا اگر $\mathcal{A} = A_1, \ldots, A_p$ یک مجموعه مشخصه، برای ایده‌آل دیفرانسیلی $I \subseteq K\{Y\}$ باشد، آنگاه برای هر $1 \leq i \leq p$ داریم $I_{A_i}, S_{A_i} \notin I$.

لم ۳.۵.۲. فرض کنیم A یک مجموعه مشخصه از یک ایده‌آل دیفرانسیلی سره $I \subseteq K\{Y\} = K\{y_1, \ldots, y_n\}$ باشد. مجموعه ضرب‌پذیر H_A^∞ توسط ضرایب اولیه و جداسازهای عناصر A تولید شده است. تعریف می‌کنیم: $\mathrm{sat}(A) := [A] : H_A^\infty = \{f \in K\{Y\} \mid \exists M \in H_A^\infty, Mf \in [A]\}$. در این صورت، خواهیم داشت $I \subseteq \mathrm{sat}(A)$. علاوه بر این، اگر I اول باشد، $I = \mathrm{sat}(A)$.

اثبات. طبق قضیه ۳.۵.۲ برای هر $f \in I$ خواهیم داشت $\delta\text{-rem}(f, A) = 0$. بنابراین برای $A \in \mathcal{A}$ اعداد طبیعی i_A, t_A وجود دارند به طوری که $\prod_{A \in \mathcal{A}} I_A^{i_A} S_A^{t_A} f \in [A]$، یعنی $f \in \mathrm{sat}(A)$. اگر I اول باشد، برای هر $f \in \mathrm{sat}(A)$ اعداد طبیعی i_A, t_A وجود دارند به طوری که $\prod_{A \in A} I_A^{i_A} S_A^{t_A} f \in [A] \subseteq I$. از آنجایی که $I_A, S_A \notin I$ نتیجه می‌شود $f \in I$. □

۶.۳ قضیه اساسی ریت-رادنباش

قضیه اساسی هیلبرت در هندسه جبری را به یاد آورید. این قضیه بیان می‌کند که «هر ایده‌آل از حلقه چندجمله‌ای‌های $R = K[y_1, \dots, y_n]$ متناهی مولد است. به بیان دیگر، هر زنجیر صعودی از ایده‌آل‌ها در حلقه چندجمله‌ای‌های $R = K[y_1, \dots, y_n]$ ایستاست که پیش از این در بخش ۴.۲.۱ با آن آشنا شده‌ایم. ممکن است امیدوار باشیم به آن که شرط زنجیر صعودی، برای ایده‌آل‌های دیفرانسیلی در حلقه چندجمله‌ای‌های دیفرانسیلی $K\{y_1, \dots, y_n\}$ نیز برقرار باشد. با این وجود، این مسئله درست نیست. در ادامه با ارائه یک مثال نقض، به بررسی این موضوع می‌پردازیم.

مثال ۳.۶.۱. در این مثال قصد داریم تا با ارائه یک مثال نقض، نشان دهیم که یک زنجیر صعودی از ایده‌آل‌ها در یک حلقه چندجمله‌ای‌های دیفرانسیلی، لزوماً ایستا نیست. اکنون حلقه چندجمله‌ای‌های دیفرانسیلی تک متغیره $K\{y\}$ را با شرط $\mathbb{Q} \subseteq (K, \delta)$ را در نظر می‌گیریم. نشان داده می‌شود که دنباله ایده‌آل‌های دیفرانسیلی $[y^2] \subseteq [y^2, (y')^2] \subseteq [y^2, (y')^2, (y'')^2] \subseteq \cdots$ در $K\{y\}$ ایستا نیست. برای روشن شدن بیشتر موضوع، لم زیر را دنبال می‌کنیم.

لم ۳.۶.۱. فرض کنیم $[y^2] \subsetneq [y^2, (y')^2] \subsetneq [y^2, (y')^2, (y'')^2] \subsetneq \cdots$ یک زنجیر صعودی از ایده‌آل‌های دیفرانسیلی باشد. این زنجیر، یک دنباله افزایشی نامتناهی از ایده‌آل‌های دیفرانسیلی است.

اثبات. قرار می‌دهیم $I_n = [y^2, (y')^2, \dots, (y^{(n)})^2]$ با $n \geq 0$ باشد. وزن هر $y^{(i)}y^{(j)}$ را به صورت $\mathrm{wt}(y^{(i)}y^{(j)}) = i + j$ تعریف می‌کنیم. زیرفضای V_n را به عنوان زیرفضای $K\{y\}$ که توسط تمام $y^{(i)}y^{(j)}$ درجه ۲ و وزن n تولید می‌شود، در نظر می‌گیریم. بنابراین داریم $V_0 = \mathrm{Span}_K(y^2)$، $V_1 = \mathrm{Span}_K(yy')$، $V_2 = \mathrm{Span}_K(yy'', (y')^2)$، $V_3 = \mathrm{Span}_K(yy^{(3)}, y'y'')$ و با ادامه این روند خواهیم داشت

$$V_{2n} = \mathrm{Span}_K(yy^{(2n)}, y'y^{(2n-1)}, \dots, (y^{(n)})^2),$$
$$V_{2n+1} = \mathrm{Span}_K(yy^{(2n+1)}, y'y^{(2n)}, \dots, y^{(n)}y^{(n+1)}).$$

واضح است که برای هر عدد طبیعی n داریم $\dim V_{2n} = \dim V_{2n+1} = n + 1$. ادعا می‌کنیم که

(1) $V_{2n+2} = \mathrm{Span}_K(\delta^2(V_{2n}), (y^{(n+1)})^2)$,

(2) $I_n \cap V_{2n+2} = \mathrm{Span}_K(\delta^2(V_{2n})) \subsetneq V_{2n+2}$.

برای نشان دادن ادعای اول، توجه داریم که

$$\begin{pmatrix} \delta^2(yy^{(2n)}) \\ \delta^2(y'y^{(2n-1)}) \\ \vdots \\ \delta^2((y^{(n)})^2) \\ (y^{(n+1)})^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} yy^{(2n+2)} \\ y'y^{(2n+1)} \\ \vdots \\ y^{(n)}y^{(n+2)} \\ (y^{(n+1)})^2 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} yy^{(2n+2)} \\ y'y^{(2n+1)} \\ \vdots \\ y^{(n)}y^{(n+2)} \\ (y^{(n+1)})^2 \end{pmatrix}$$

چون $\det(A) = 1$، نتیجه می‌شود که مجموعه $\{\delta^2(V_{2n}), (y^{(n+1)})^2\}$ پایه‌ای برای V_{2n+2} است که نشان می‌دهد (۱) صحیح است.

برای اثبات ادعای دوم چون $V_{2n} \subseteq I_n$، داریم: پس $\mathrm{Span}_K\{\delta^2(V_{2n})\} \subseteq I_n \cap V_{2n+2}$ و از طرفی

$$\begin{aligned} & I_n \cap V_{2n+2} \subseteq \mathrm{Span}_K\big(\delta^{2n+2-2k}(y^{(k)})^2 : k = 0, \dots, n\big) \\ & = \mathrm{Span}_K\big(\delta^2[\delta^{2n-2k}(y^{(k)})^2] : k = 0, \dots, n\big) \subseteq \mathrm{Span}_K(\delta^2(V_{2n})), \end{aligned}$$

بنابراین $I_n \cap V_{2n+2} = \mathrm{Span}_K(\delta^2(V_{2n})) \subsetneq V_{2n+2}$. از این رو به‌ازای هر عدد طبیعی n خواهیم داشت $V_{2n} \subseteq I_n$. و $V_{2n+2} \nsubseteq I_n$. در نتیجه به‌ازای هر عدد طبیعی n خواهیم داشت $I_n \subsetneq I_{n+1}$.

□

حلقه‌های نوتری در فصل اول را به یاد می‌آوریم. متناظر با حلقه‌های نوتری، نوعی از حلقه‌ها در جبر دیفرانسیلی تعریف می‌شوند که آن‌ها را به عنوان حلقه‌های ریت- نوتری می‌شناسیم و در ادامه بحث، سهم عمده و تأثیرگذاری خواهند داشت.

تعریف ۱.۶.۳ (حلقه ریت-نوتری). یک حلقه دیفرانسیلی را ریت- نوتری می‌نامیم هرگاه هر زنجیر صعودی از ایده‌آل‌های دیفرانسیلی رادیکال در آن، ایستا باشد.

لم ۲.۶.۳. فرض کنیم (R, δ) یک حلقه دیفرانسیلی باشد. در این صورت R ریت-نوتری است اگر و تنها اگر هر ایده‌آل دیفرانسیلی رادیکالی $I \lhd R$ به صورت متناهی به عنوان یک ایده‌آل دیفرانسیلی رادیکالی تولید شود. به عبارت دیگر $f_1, \dots, f_s \in I$ موجود باشند به طوری که $I = \{f_1, \dots, f_s\}$.

اثبات. $(\Rightarrow)$ فرض کنیم I یک ایده‌آل دیفرانسیلی رادیکال دلخواه از حلقه R باشد. به برهان خلف، I را به عنوان یک ایده‌آل دیفرانسیلی رادیکال، طوری درنظر می‌گیریم که متناهی تولید نباشد. در این صورت قادر هستیم تا یک دنباله اکیداً صعودی را از ایده‌آل‌های دیفرانسیلی رادیکال بسازیم. به‌عبارت دیگر، می‌توانیم یک زنجیر صعودی به صورت $\{a_1\} \subsetneq \{a_1, a_2\} \subsetneq \cdots \subsetneq \{a_1, a_2, \ldots, a_p\} \subsetneq \cdots$ درنظر بگیریم که تناقض با فرض است.

$(\Leftarrow)$ فرض کنید $I_1 \subseteq I_2 \subseteq \cdots$ یک دنباله از ایده‌آل‌های دیفرانسیلی رادیکال باشد. ایده‌آل I را به صورت $I = \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i$ تعریف می‌کنیم. به سادگی نشان داده می‌شود که I یک ایده‌آل دیفرانسیلی رادیکال است. بنابراین $f_1, \ldots, f_s \in I$ موجود است به طوری که $I = \{f_1, \ldots, f_s\}$. از آنجا که هر $f_i \in I$ پس عدد طبیعی m موجود است به طوری که به‌ازای هر $1 \leq i \leq s$ داریم $f_i \in I_m$. بنابراین $\{f_1, \ldots, f_s\} \subseteq I_m \subseteq I$ و درنتیجه برای هر عدد طبیعی j داریم $I_m = I_{m+j} = \{f_1, \ldots, f_s\}$.

□

قضیه ۳.۶.۱ (قضیه ریت-رادنباش). فرض کنیم (K, δ) یک میدان دیفرانسیلی با $\mathbb{Q} \subseteq K$ باشد. در این صورت، حلقه چندجمله‌ای دیفرانسیلی $K\{y_1, \ldots, y_n\}$ ریت-نوتری است.

اثبات. طبق لم ۳.۶.۲ کافی است ثابت کنیم که هر ایده‌آل دیفرانسیلی رادیکال از $K\{y_1, \ldots, y_n\}$ به‌عنوان یک ایده‌آل دیفرانسیلی رادیکال، متناهی تولید است. به برهان خلف، فرض کنیم که یک ایده‌آل دیفرانسیلی رادیکال از $K\{y_1, \ldots, y_n\}$ وجود دارد به طوری متناهی تولید نیست. در این صورت، با استفاده از لم زرن، یک ایده‌آل دیفرانسیلی رادیکال ماکزیمال $J \subseteq K\{y_1, \ldots, y_n\}$ وجود دارد که به طور متناهی تولید نیست. ادعا می‌کنیم که J یک ایده‌آل دیفرانسیلی اول است. فرض کنیم اول نباشد. عناصر $a, b \in K\{y_1, \ldots, y_n\}$ وجود دارند به طوری که $a, b \notin J$ ولی $ab \in J$. چون $J \subsetneq \{a, J\}$ و $J \subsetneq \{b, J\}$، مجموعه‌های $\{a, J\}$ و $\{b, J\}$ به طور متناهی به عنوان ایده‌آل‌های دیفرانسیلی رادیکال تولید می‌شوند. پس $f_1, \ldots, f_s, g_1, \ldots, g_t \in J$ وجود دارند به طوری که $\{a, J\} = \{a, f_1, \ldots, f_s\}$ و $\{b, J\} = \{b, g_1, \ldots, g_t\}$. (در واقع، چون $\{a, J\}$ متناهی تولید است، عناصر $h_1, \ldots, h_l$ وجود دارند که $\{a, J\} = \{h_1, \ldots, h_l\}$ و برای هر i که در آن $h_i \in \{a, J\}$، عدد طبیعی m_i وجود دارد به طوری که $h_i^{m_i} \in [a, J]$. همچنین عناصر $f_1, \ldots, f_s \in J$ وجود دارند به طوری که $h_i^{m_i} \in [a, f_1, \ldots, f_s]$. بنابراین $h_i \in \{a, f_1, \ldots, f_s\} = \{a, J\}$ و درنتیجه خواهیم داشت $\{h_1, \ldots, h_l\} \subseteq \{a, f_1, \ldots, f_s\} \subseteq \{a, J\}$). از آنجایی که $\{a, f_1, \ldots, f_s\} \subseteq \{a, J\}$ پس می‌توان

نوشت

$$J^{2} \subseteq \{a, J\} \cdot \{b, J\} = \{a, f_{1}, \ldots, f_{s}\} \cdot \{b, g_{1}, \ldots, g_{t}\}$$

$$\subseteq \{ab, ag_{j}, bf_{i}, f_{i}g_{j} : 1 \leq i \leq s, 1 \leq j \leq t\} \triangleq P \subseteq J$$

برای هر $f \in J$، داریم $f^{2} \in J^{2} \subseteq P \Rightarrow f \in P \Rightarrow J = P$ که با فرض متناهی تولید نبودن J در تضاد است. اکنون یک رتبه‌بندی، روی $\Theta(Y)$ در نظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم که $\mathcal{A}$ مجموعه مشخصه J تحت این رتبه‌بندی باشد. فرض کنیم $\mathcal{A} = A_{1}, \ldots, A_{p}$ و تعریف می‌کنیم $\mathrm{IS} \triangleq \prod_{i=1}^{p}(I_{A_i}S_{A_i}) \subseteq K\{Y\}$. از آنجا که J اول است، داریم $J = \mathrm{sat}(\mathcal{A}) = [\mathcal{A}] : H_{\mathcal{A}}^{\infty} \subseteq \{\mathcal{A}\} : (\mathrm{IS})$ و از آنجایی که برای هر i داریم $I_{A_i}, S_{A_i} \notin J$، پس $\{J, \mathrm{IS}\}$ یک ایده‌آل دیفرانسیلی رادیکال متناهی تولید است. بنابراین عناصر $h_{1}, \ldots, h_{l}$ وجود دارند به طوری که $\{J, \mathrm{IS}\} = \{h_{1}, \ldots, h_{l}, \mathrm{IS}\}$. در نتیجه خواهیم داشت

$$J^{2} \subseteq J \cdot \{J, \mathrm{IS}\} = J \cdot \{h_{1}, \ldots, h_{l}, \mathrm{IS}\} \subseteq \{h_{1}, \ldots, h_{l}, \mathcal{A}\} \,(\mathrm{for IS} \cdot J \subseteq \{\mathcal{A}\}) \subseteq J.$$

بنابراین: $J = \{h_{1}, \ldots, h_{l}, A_{1}, \ldots, A_{p}\}$ که ایجاد یک تناقض می‌کند. پس هر ایده‌آل دیفرانسیلی رادیکال از $K\{y_{1}, \ldots, y_{n}\}$ متناهی تولید است.

□

۷.۳ تجزیه ایده‌آل دیفرانسیلی

این بخش را با ارائه یک قضیه مهم و کاربردی ادامه خواهیم داد. این قضیه به عنوان یک ابزار کاربردی، در مفاهیم و قضایای فصل‌های آتی به کار خواهد رفت. پیش از آن، نیاز است تا به ارائه یک تعریف بپردازیم.

تعریف ۱.۷.۳ (تجزیه نافزون). تجزیه ایده‌آل I به صورت $I = \cap_{i=1}^{l} P_{i}$ را یک تجزیه نافزون می‌نامیم هرگاه به‌ازای هر $1 \leq i \leq l$ داشته باشیم $\cap_{j \neq i} P_{j} \nsubseteq P_{i}$.

قضیه ۱.۷.۳. فرض کنیم R یک حلقه دیفرانسیلی ریت-نوتری باشد و $\mathbb{Q} \subseteq R$. در این صورت، برای هر ایده‌آل دیفرانسیلی رادیکال، مانند $I \subsetneq R$ تعداد متناهی از ایده‌آل‌های دیفرانسیلی اول $P_{1}, \ldots, P_{l}$ وجود دارند

به طوری که $I = \bigcap_{i=1}^{l} P_i$. علاوه بر این، اگر این تجزیه نافزون باشد ($\forall i, \bigcap_{j\neq i} P_j \not\subseteq P_i$)، آنگاه این مجموعه از ایده‌آل‌های اول، یکتا است.

اثبات. برای دستیابی به این منظور، مجموعه $A = \{I \mid I \subsetneq K\{y_1, \ldots, y_n\}\}$ را طوری در نظر می‌گیریم که I یک ایده‌آل دیفرانسیلی رادیکال است که نمی‌توان آن‌را به صورت اشتراک متناهی از ایده‌آل‌های اول نوشته نوشت. در این صورت، به برهان خلف، فرض کنیم گزاره نادرست باشد. لازمه این نادرستی آن است که A ناتهی باشد. از آنجایی که حلقه $R = K\{y_1, \ldots, y_n\}$ ریت-نوتری است، هر زنجیره صعودی از ایده‌آل‌های دیفرانسیلی رادیکال در A یک کران بالا دارد. طبق لم زرن، A یک عنصر ماکسیمال، مانند J در A وجود دارد. واضح است که J اول نیست. بنابراین عناصری مانند a و b وجود دارند که $ab \in J$ و $a, b \notin J$. پس می‌توان گفت $\{J, a\} \supsetneq J$ و $\{J, b\} \supsetneq J$.

همچنین $\{J, a\} \neq R$. فرض کنیم مساوی باشد. در این صورت $1 \in \{J, a\}$. از آنجایی که $\mathbb{Q} \subseteq R$ پس $1 \in [J, a]$ و $1 = f + \sum_k *\delta^k(a)$. چون $ab \in J$ و J نیز رادیکال است، پس به‌ازای هر k طبیعی $b\delta^k(a) \in J$. بنابراین $b = bf + \sum_k *b\delta^k(a) \in J$ که تناقض است با $b \notin J$. به طور مشابه داریم $\{J, b\} \neq R$. از آنجایی که J ماکسیمال است، ایده‌آل‌های دیفرانسیلی اول $P_1^a \cap \cdots \cap P_l^a$ و $P_{l+1}^b \cap \cdots \cap P_{l+t}^b$ وجود دارند به طوری که $\{J, a\} = P_1^a \cap \cdots \cap P_l^a$ و $\{J, b\} = P_{l+1}^b \cap \cdots \cap P_{l+t}^b$. در صورتی که بتوانیم نشان دهیم که $J = \{J, a\} \cap \{J, b\}$ قدم مهمی در اثبات این قضیه را برداشته‌ایم.

($\subseteq$) بدیهی است. چون $J \subsetneq \{J, a\}$ و $J \subsetneq \{J, b\}$.

($\supseteq$) فرض کنیم $f \in \{J, a\} \cap \{J, b\}$. پس $f^2 \in \{J, a\}.\{J, b\} \subseteq \{J, ab\} \subseteq J$. پس $f^2 \in J$ و چون J ایده‌آل دیفرانسیلی رادیکال است، $f \in J$.

چون $J = \{J, a\} \cap \{J, b\}$ پس $J \bigcap_{i=1}^{l} P_i^a \cap \bigcap_{j=l+1}^{l+t} P_j^b$ و این بدان معناست که می‌توان J را به صورت اشتراک تعداد متناهی از ایده‌آل‌های اول نوشت و این تناقض با ناتهی بودن مجموعه A است. پس فرض خلف باطل و حکم اثبات می‌شود.

اما برای اثبات یکتایی، فرض می‌کنیم $I = \bigcap_{i=1}^{l} P_i = \bigcap_{j=1}^{t} Q_j$ یک اشتراک نافزون باشد. برای هر $j = 1, \ldots, t$ داریم $\bigcap_{i=1}^{l} P_i \subseteq Q_j$. بنابراین، عددی مانند $i_\circ$ در مجموعه $\{1, \ldots, l\}$ وجود دارد به طوری که $P_{i_\circ} \subseteq Q_j$. حال، برعکس آن را فرض می‌کنیم. در این صورت، برای هر $i = 1, \ldots, l$ عنصری مانند f_i در $P_i \setminus Q_j$ وجود دارد. بنابراین $f_1 f_2 \cdots f_l \in \bigcap_{i=1}^{l} P_i \subseteq Q_j$ که یک تناقض است. به طور مشابه، عددی مانند $j_\circ$ در مجموعه $\{1, \ldots, t\}$ وجود دارد به طوری که $Q_{j_\circ} \subseteq P_{i_\circ} \subseteq Q_j$. از آنجا که $I = \bigcap_{j=1}^{t} Q_j$ نافزون

است، نتیجه می‌گیریم که $j_\circ = j$ و $P_{i_\circ} = Q_j$. بنابراین، $l = t$ و یک جایگشت $\sigma \in S_l$ وجود دارد به طوری که $P_i = Q_{\sigma(i)}$.

□

تعریف ۲.۷.۳ (مؤلفه اول). فرض کنیم $I = \cap_{i=1}^{l} P_j$ یک تجزیه نافزون باشد. در این صورت به هر یک از P_j ها یک مؤلفه اول از ایده‌آل I گفته می‌شود.

۸.۳ الگوریتم‌ها در جبر دیفرانسیلی

در این بخش بر آن هستیم تا پس از معرفی جبر دیفرانسیلی در شناخت ساختارهای نظری آن، کمی کاربردی‌تر به این مبحث نگاه کنیم. در این بخش، کمی گام خود را فراتر می‌نهیم و به جنبه‌های کاربردی جبر دیفرانسیلی در فیزیک می‌پردازیم. استنتاج قوانین حرکت و قانون گرانش نیوتن از قوانین کپلر، مهمترین موضوعی است که در این بخش، به آن پرداخته می‌شود. هدف این بخش، حرکت به سمت مفاهیم بین رشته‌ای است به طوری که پس از معرفی مفهوم خوش‌ترتیبی و بیان الگوریتم تجزیه دیفرانسیلی در جذاب‌ترین بخش این فصل، با ورود به علم فیزیک، وسعت کاربرد جبر دیفرانسیلی بیش از پیش بر ما نمایان خواهد شد.

۱.۸.۳ خوش ترتیبی چندجمله‌ای‌های دیفرانسیلی

فرض کنیم (K, δ) یک میدان دیفرانسیلی با مشخصه صفر باشد. همچنین حلقه چندجمله‌ای دیفرانسیلی $K\{Y\}$ را به صورت $K\{Y\} = K\{y_1, \dots, y_n\}$ در نظر می‌گیریم. پیش از این، در فصل سوم با «مفهوم مجموعه مشخصه دیفرانسیلی» آشنا شدیم. اینک بر آن هستیم تا بر جنبه‌های محاسباتی و کاربردی موضوع متمرکز شویم.

هدف ما در این بخش آن است که به سراغ خوش‌ترتیبی یک زیرمجموعه متناهی از حلقه چندجمله‌ای‌های دیفرانسیلی مانند $\Sigma \subseteq K\{Y\}$ برویم. برای این کار یک رنکینگ داده شده $\mathcal{R}$ را روی $K\{Y\}$ در نظر می‌گیریم.

تعریف ۱.۸.۳ (مجموعه پایه دیفرانسیلی). فرض کنیم $\Sigma \subseteq K\{Y\}$ یک مجموعه متناهی $\mathcal{A}$ یک زیر مجموعه خودکاهش‌یافته از Σ باشد به طوری که کمترین رتبه را در میان مجموعه‌های خودکاهش‌یافته داشته باشد. در این صورت، $\mathcal{A}$ را یک مجموعه پایه دیفرانسیلی برای Σ می‌نامیم.

به عبارت دیگر اگر $\mathcal{A} = A_1, \dots, A_p$ خودکاهش‌یافته و $A_i \in \Sigma$ به گونه‌ای باشد که $A_p < \cdots < A_1$ و $\mathcal{A}$ کمترین رتبه را در بین مجموعه‌های خودکاهش‌یافته داشته باشد، یک مجموعه پایه دیفرانسیلی برای Σ خواهد بود.

لم ۱.۸.۳. فرض کنیم Σ یک مجموعه متناهی از چندجمله‌ای‌های دیفرانسیلی غیرصفر در $K\{Y\}$ باشد. در این صورت، Σ لزوماً دارای مجموعه پایه است که به دست آوردن آن، با روشی الگوریتمیک، با تعداد متناهی مرحله، امکان‌پذیر است.

اثبات. از آنجایی که Σ متناهی است، طبق تعریف، وجود مجموعه پایه بدیهی است. بنابراین مسئله به تولید الگوریتمیک چنین مجموعه‌ای کاهش می‌یابد. برای نشان دادن این موضوع، ابتدا $A_1 \in \Sigma$ را به گونه‌ای در نظر می‌گیریم که کوچکترین رتبه را داشته باشد. حال $\Sigma_1 = \{f \in \Sigma | f \ \ is \ \ Reduced \ \ w.r.t \ \ A_1\}$ را در نظر می‌گیریم. از تعریف ۱.۸.۳ درمی‌یابیم که اگر $\Sigma_1 = \emptyset$ آنگاه، $A_1 \in \Sigma$ کمترین رتبه را دارد و مجموعه پایه برای Σ خواهد بود. در غیر این صورت $A_2 \in \Sigma_1$ را به گونه‌ای در نظر می‌گیریم که کوچکترین رتبه را داشته باشد. در این صورت A_1 و A_2 خودکاهش‌یافته هستند. حال $\Sigma_2 = \{f \in \Sigma | f \ \ is \ \ Reduced \ \ w.r.t \ \ A_1, A_2\}$ را در نظر می‌گیریم. اگر $\Sigma_2 = \emptyset$، در این صورت A_1 و A_2 مجموعه پایه برای Σ خواهد بود. درغیر این صورت $A_2 \in \Sigma_1$ را به گونه‌ای در نظر می‌گیریم که کوچکترین رتبه را داشته باشد و مراحل را همانند آنچه گه گفته شد، ادامه می‌دهیم. از آنجایی که طبق فرض، Σ یک مجموعه متناهی است، این فرآیند در تعداد متناهی مرحله به پایان خواهد رسید و این به معنای پایان اثبات قضیه است. □

لم ۲.۸.۳. فرض کنیم Σ یک مجموعه متناهی از چندجمله‌ای‌های دیفرانسیلی غیرصفر در $K\{Y\}$ با مجموعه پایه $\mathcal{A} = A_1, A_2, \dots, A_p$ باشد، به طوری که $A_1 \notin K$. همچنین B یک چندجمله‌ای دیفرانسیلی غیرصفر است که نسبت به $\mathcal{A}$ کاهش‌یافته است. در این صورت مجموعه $\Sigma_1 = \Sigma \cup \{B\}$ مجموعه پایه‌ای خواهد داشت که رتبه آن از رتبه $\mathcal{A}$ کمتر است.

اثبات. اگر $B \in K$، در این صورت، B یک مجموعه پایه برای Σ_1 است، چرا که رتبه‌ای کمتر از $\mathcal{A}$ دارد. در غیر این صورت عدد طبیعی $1 \leq i \leq p$ وجود دارد به طوری که روابط $\mathrm{rank}(B) \prec_{lex} \mathrm{rank}(A_i)$ و $\mathrm{rank}(B) \succ_{lex} \mathrm{rank}(A_{i-1})$ برقرار باشد. از آنجایی که B نسبت به $\mathcal{A}$ کاهش‌یافته است، $A_1, \dots, A_{i-1}, B$ یک مجموعه خودکاهش‌یافته در Σ_1 است که رتبه کمتری نسبت به $\mathcal{A}$ دارد. بنابراین به طریق اولی، مجموعه پایه Σ_1 رتبه کمتری نسبت به $\mathcal{A}$ دارد و اثبات به اتمام می‌رسد. □

اکنون فرض کنیم Σ یک مجموعه متناهی از چندجمله‌ای‌های دیفرانسیلی در $K\{Y\}$ باشد. قرار می‌دهیم $\Sigma_1 = \Sigma$. با استفاده از لم ۱.۸.۳، می‌دانیم که Σ_1 یک مجموعه پایه دارد که آن را $\mathcal{A}_1$ می‌نامیم. حال مجموعه R_1 را به صورت $R_1 = \{\delta\text{-}rem(f, \mathcal{A}_1) | f \in \Sigma_1 \setminus \mathcal{A}_1\} \setminus \{0\}$ در نظر می‌گیریم. اگر $R_1 = \emptyset$، در این صورت، $\mathcal{A}_1$ خروجی مد نظر خواهد بود و اگر $R_1 \neq \emptyset$ باشد، مجموعه $\Sigma_2 = \Sigma_1 \cup R_1$ را در نظر گرفته، مجموعه پایه آن را $\mathcal{A}_2$ می‌نامیم. از لم ۲.۸.۳ می‌دانیم که $\mathcal{A}_2$ رتبه کمتری نسبت به $\mathcal{A}_1$ دارد. حال اگر $R_2 = \emptyset$، در این صورت، $\mathcal{A}_2$ خروجی مد نظر خواهد بود. در غیر این صورت، این فرآیند را ادامه می‌دهیم. نهایتاً به یک دنباله از مجموعه چندجمله‌ای‌های دیفرانسیلی $\Sigma_1 \subseteq \Sigma_2 \subseteq \cdots$ خواهیم رسید که متناظر با آن، مجموعه‌های پایه $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \ldots$ رتبه نزولی دارد. از آنجایی که Σ یک مجموعه متناهی است، پس چنین دنباله‌ای، در تعداد متناهی جمله به پایان می‌رسد. به عبارت دیگر، اگر Σ_q آخرین جمله این دنباله، با مجموعه پایه A_q باشد، در این صورت $R_q = \emptyset$، بدان معنا که برای هر f متعلق به Σ_q خواهیم داشت: $\delta\text{-}rem(f, \mathcal{A}_q) = 0$ و در نتیجه خروجی الگوریتم A_q خواهد بود. در ادامه خواهیم دید که این الگوریتم، منجر به تعریف مفهوم جدیدی به نام «مجموعه مشخصه دیفرانسیلی» خواهد شد. در ادامه خواهیم دید که A_q مجموعه مشخصه حلقه $K\{Y\}$ است. همه آنچه که پیرامون این الگوریتم بیان شد، در شکل ۲.۳ به نمایش گذاشته شده است.

$$
\boxed{\begin{array}{ccccccc}
\Sigma_1 = \Sigma & \subseteq & \Sigma_2 = \Sigma_1 \cup R_1 & \subseteq & \cdots & \subseteq & \Sigma_q = \Sigma_{q-1} \cup R_{q-1} \\
\mathcal{A}_1 & > & \mathcal{A}_2 & > & \cdots & > & \mathcal{A}_q \\
R_1 \neq \emptyset & & R_2 \neq \emptyset & & \cdots & & R_q = \emptyset
\end{array}}
$$

شکل ۲.۳: طرحواره‌ای از الگوریتم یافتن مجموعه مشخصه دیفرانسیلی

قضیه ۱.۸.۳ (اصل خوش‌ترتیبی). زیرمجموعه متناهی از مجموعه چندجمله‌ای‌های دیفرانسیلی $\Sigma \subseteq K\{Y\}$ را در نظر می‌گیریم. در این صورت الگوریتمی برای به‌دست آوردن یک مجموعه مشخصه $\mathcal{A}$ از Σ پس از تعداد متناهی گام، وجود دارد. علاوه بر این، داریم $\mathbb{V}(\mathcal{A}/H_{\mathcal{A}}) \subseteq \mathbb{V}(\Sigma) \subseteq \mathbb{V}(\mathcal{A})$، و $\mathbb{V}(\Sigma) = \mathbb{V}(\mathcal{A}/H_{\mathcal{A}}) \cup \bigcup_{A \in \mathcal{A}} (\mathbb{V}(\Sigma, I_A) \cup \mathbb{V}(\Sigma, S_A))$.

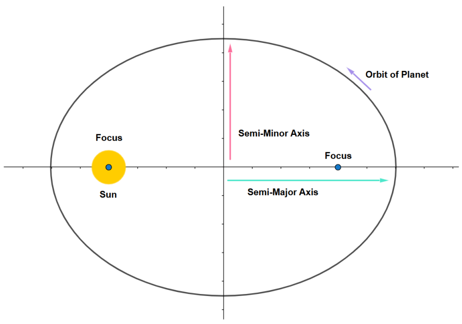
۲.۸.۳ کاربرد در فیزیک

اکنون تصمیم داریم تا آموخته‌های خود را به سمت کاربرد در سایر علوم هدایت کنیم و در نهایت، با ارائه یک مثال خواهیم دید که چگونه جبر دیفرانسیلی، به بررسی یک مسئله در قلمرو دانش فیزیک خواهد پرداخت. ریشه و اساس این موضوع، آن است که مثال پیش رو به حل یک دستگاه معادلات دیفرانسیل منجر خواهد شد.

قوانین کپلر، که به نام یوهانس کپلر [۲] شناخته می‌شوند، سه قانون اساسی در فیزیک هستند که رفتار سیارات را در اطراف خورشید توضیح می‌دهند. در ادامه به شرح این قوانین خواهیم پرداخت.

تعریف ۲.۸.۳ (قوانین کپلر). این قوانین حرکت سیارات به دور خورشید را مورد بررسی قرار می‌دهد. در عصر حاضر، این قوانین که حرکت هر دو جرمی را در فضا نسبت به هم تشریح می‌نماید برای ارسال محموله‌های فضایی اعم از ماهواره‌ها، فضاپیماهای سرنشین‌دار و روبات‌های کاوشگر به مدار زمین و فراتر از آن استفاده می‌شود. سه قانون کپلر به شرح زیر است:

۱. قانون اول کپلر (قانون مدارهای بیضی): هر سیاره در مسیر بیضی شکل حول خورشید حرکت می‌کند، به طوری که خورشید یکی از کانون‌های این بیضی است.

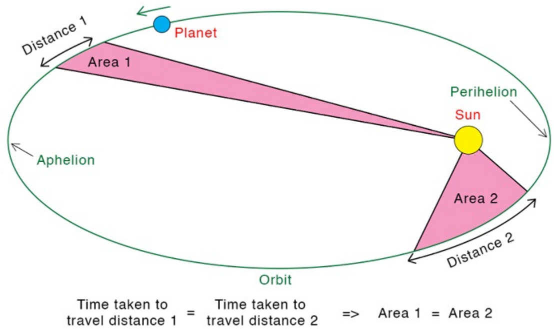


شکل ۳.۳: قانون اول کپلر

۲. قانون دوم کپلر (قانون مساحات): خط واصل از یک سیاره به خورشید، در مدت زمان یکسان، مساحت‌های مساوی را می‌پیماید. در این صورت اگر dA مساحت پیموده شده در مدت زمان dt باشد، خواهیم داشت $\frac{dA}{dt} =$ ثابت.

این قانون به این معناست که سرعت سیاره در مسیر مدار بیضی، زمانی که نزدیکتر به خورشید است، بیشتر از زمانی است که دورتر از خورشید قرار دارد.

[2] Johannes Kepler



شکل ۳.۴: قانون دوم کپلر

۳. قانون سوم کپلر (قانون نسبت‌های دوره‌ای): مربع دوره تناوب (زمان لازم برای یک دور کامل گردش سیاره) با مکعب میانگین فاصله سیاره از خورشید نسبت مستقیم دارد، یعنی همواره برای یک سیاره همواره داریم ثابت $= \frac{T^2}{r^3}$ که در آن T دوره تناوب سیاره (زمان یک گردش کامل) و r میانگین فاصله سیاره از خورشید است. این قانون نشان می‌دهد که هر چه سیاره دورتر از خورشید باشد، دوره تناوب آن بیشتر است.

تعریف ۳.۸.۳ (قانون گرانش نیوتن). قانون گرانش نیوتن بیان می‌کند که هر دو جسم در جهان به یکدیگر نیروی جاذبه وارد می‌کنند که این نیرو به جرم‌های آن‌ها و فاصله‌ی میان آن‌ها بستگی دارد.

فرمول این قانون به صورت $F = G\frac{m_1m_2}{r^2}$ است که در آن F نیروی جاذبه بین دو جسم است. G ثابت گرانش جهانی است و مقدار آن $G = 6{,}674 \times 10^{-11}\,\mathrm{N}\cdot\mathrm{m}^2/\mathrm{kg}^2$ است. m_1 و m_2 به ترتیب جرم‌های دو جسم هستند. r فاصله میان مراکز دو جسم است. این قانون نشان می‌دهد که نیروی گرانش با افزایش فاصله کاهش می‌یابد و با افزایش جرم‌ها، نیروی گرانش افزایش می‌یابد.

قوانین نیوتن، سه قانون اساسی در فیزیک هستند که حرکت اجسام را توصیف می‌کنند. در ادامه به تشریح این قوانین خواهیم پرداخت.

تعریف ۴.۸.۳ (قوانین حرکت نیوتن). این قوانین، رابطه نیروهای واردشده بر جسم و حرکت آن را به‌دست می‌دهد. این قوانین پایه و اساس مکانیک کلاسیک را تشکیل می‌دهند.

قانون اول نیوتن (قانون اینرسی): هر جسمی در حالت سکون باقی می‌ماند یا با سرعت ثابت در یک خط راست حرکت می‌کند، مگر اینکه نیرویی خارجی بر آن وارد شود و وضعیت آن را تغییر دهد. به عنوان مثال اگر یک کتاب روی میز باشد، تا زمانی که یک نیروی خارجی مانند دست شما آن را جابه‌جا نکند، در همان جای خود باقی می‌ماند. به عبارت دیگر، قانون اول نیوتن، بیانگر معرفی دستگاه لَخت است.

قانون دوم نیوتن (قانون شتاب): میزان تغییر حرکت (شتاب) یک جسم متناسب با نیروی خالص وارد بر آن است و در جهت همان نیرو قرار دارد. این قانون با رابطه $\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a}$ بیان می‌شود. در این رابطه $\sum \vec{F}_{ext}$ ،برآیند همه نیروی وارد شده بر جسم بر حسب نیوتن m جرم جسم بر حسب کیلوگرم و $\vec{a}$ بردار شتاب جسم بر حسب «متر بر مجذور ثانیه» است. به عنوان مثال، اگر یک توپ فوتبال را با نیروی بیشتری شوت کنید، شتاب بیشتری خواهد گرفت.

قانون سوم نیوتن (کنش و واکنش): این قانون بیان می‌دارد که هر عملی را عکس‌العملی است، مساوی با آن و در جهت خلاف آن. تصور کنید جسم یک و دو در تماس با هم هستند. هرگاه جسم یک به جسم دو نیرو وارد کند، جسم دوم نیز نیرویی به همان بزرگی ولی در خلاف جهت بر جسم یک وارد می‌کند. به عنوان مثال وقتی روی زمین راه می‌روید، پاهای شما به زمین نیرو وارد می‌کنند و زمین نیز با نیرویی مساوی اما در جهت مخالف به شما نیرو وارد می‌کند.

اکنون که فیزیک مسئله آشنایی کامل پیدا کردیم، می‌خواهیم ببینیم که با جبر دیفرانسیلی چگونه به تشریح این مسئله می‌پردازد. پیش از آنکه به مثال مهم این بخش بپردازیم نیاز داریم تا مفهوم جدیدی را تعریف کنیم که در این مثال از آن استفاده می‌شود:

تعریف ۵.۸.۳ (مجموعه پایه ضعیف). یک مجموعه پایه را ضعیف گوییم هرگاه خودکاهش‌یافته بودن را صرفاً برای جداساز و بنیان بررسی می‌کند و با بقیه جملات چندجمله‌ای، خودکاهش‌یافتگی بررسی نمی‌شود.

مثال ۱.۸.۳. در این مثال می‌خواهیم با علم به قوانین کپلر، قوانین نیوتن را نتیجه بگیریم. نخست باید این معادلات مربوط به هر یک از این قوانین را بنویسیم. همانند اثبات خودکار قضایای هندسی، این فرآیند باید به صورت در نظر گرفتن فرض و حکم و انجام عملیات لازم، به منظور دستیابی از فرض به حکم باشد. عمده عملیات مد نظر، آن است که یک ترتیب بین کمیت‌ها لحاظ شود و سپس فرآیند تقسیم انجام شود.

معادلات کپلر در مختصات قطبی تخت و تبدیل آن به مختصات کارتزین به صورت زیر است:

$$\begin{cases} (K_۱) \quad r = \dfrac{p}{۱ - e\cos\theta} \\ (K_۲) \quad r^۲\theta' = h \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} r = p + ex \\ p' = e' = ۰ \\ xy' - x'y = h \\ h' = ۰ \end{cases}$$

در این رابطه p، e و h ثابت هستند. در واقع این معادلات در حکم فرضیات قضیه هستند تا بتوانیم مسئله را به یک مسئله در جبر دیفرانسیلی تبدیل کنیم. اکنون به سراغ ثبت قوانین نیوتن به صورت معادلات دیفرانسیلی می‌رویم. از دیدگاه جبر دیفرانسیلی، این معادلات، به منزله حکم قضیه است که به صورت زیر بیان می‌شود. همانند قوانین کپلر، ابتدا این معادلات را در مختصات قطبی تخت می‌نویسیم و سپس به دستگاه مختصات کارتزین تبدیل می‌کنیم.

$$\begin{cases} (N_1) \quad a = \dfrac{\text{Const}}{r^2} \\ (N_2) \quad (x'', y'') = -\text{Const} \cdot (-x, -y) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \left((x'')^2 + (y'')^2\right) r^4 = k \\ k' = 0 \\ x''y - xy'' = 0 \end{cases}$$

پس فرض قضیه $\text{HYP} = \{r - p - ex, p', e', xy' - x'y - h, h', (x'')^2 + (y'')^2)r^4 - k\}$ و حکم آن $\text{Conc} = \{k', x''y - xy''\}$ خواهد بود. بنابراین با نامگذاری مجدد متغیرهای موجود در مسئله به صورت $(p, e, r, x, y, h, k) = (x_{21}, x_{22}, x_{31}, x_{32}, x_{33}, x_{51}, x_{52})$ بازنویسی می‌شود. پس حل مسئله در حلقه چندجمله‌ای‌های دیفرانسیلی $K\{x_{21}, x_{22}, x_{31}, x_{32}, x_{33}, x_{51}, x_{52}\}$ انجام می‌شود. در این شرایط و با در نظر گرفتن رتبه‌بندی حذفی به صورت $x_{21} < x_{22} < x_{31} < x_{32} < x_{33} < x_{51} < x_{52}$ کار را دنبال می‌کنیم. با استفاده از اصل خوش‌ترتیبی و در نظر گرفتن مجموعه پایه ضعیف، معادلات فرض ما پس از تبدیل به یک مجموعه پایه، به صورت زیر خواهد شد.

$$\mathbb{V}(\text{HYP}) = \begin{cases} r = p + ex \\ p' = 0 \\ e' = 0 \\ xy' - x'y = h \\ h' = 0 \\ r^2 = x^2 + y^2 \\ \left((x'')^2 + (y'')^2\right) r^4 = k \end{cases} \Rightarrow \quad \Sigma_1 = \begin{cases} x'_{21} = F_1 \\ x'_{22} = F_2 \\ x_{21} + x_{22}x_{32} - x_{31} = F_3 \\ x_{32}x'_{33} - x'_{32}x_{33} - x_{51} = F_4 \\ x'_{51} = F_5 \\ x_{32}^2 + x_{33}^2 - x_{31}^2 = F_6 \\ x''_{32}x_{31}^4 + x''_{33}x_{31}^4 - x_{52} = F_7 \end{cases}$$

اکنون که فیزیک مسئله را به تعدادی از معادلات دیفرانسیل در قالب فرض و حکم تبدیل کرده‌ایم، کافی است نشان دهیم که تحت شرایط غیرتبهگن، از $\mathrm{HYP} = 0$ می‌توان $\mathrm{Conc} = 0$ را نتیجه گرفت. منظور از شرایط غیرتبهگن، آن است که $p, r, e, y \neq 0$ باشند تا مسئله از نظر فیزیکی بامعنا باشد. لازم است توجه داشته باشیم که در روابط فوق، Σ_1 یک مجموعه پایه ضعیف است. با انجام الگوریتم تقسیم دیفرانسیلی و استفاده از الگوریتم موجود در لم ۲.۸.۳ خواهیم داشت:

$$\Sigma_1 = \{F_1, F_2, \dots, F_7\}.$$

$$\mathcal{A}_1 = F_1, F_2, F_3, F_6, F_4, F_7.$$

$$R_1 = \delta\text{-rem}(F_5, \mathcal{A}_1) = 4x_{21}\left((x_{31}^3 x_{22}^2 - x_{31}^3 + 2x_{31}^2 x_{21} - x_{31}x_{21}^2)x''_{31} + x_{31}x_{21}(x'_{31})^2 - x'^2_{31}x^2_{21}\right).$$

$$\Sigma_2 = \Sigma_1 \cup \{R_1\}.$$

$$\mathcal{A}_2 = \{F_1, F_2, r_1, F_3, F_4, F_6, F_7\}.$$

$$R_2 = \emptyset.$$

پس $\mathcal{A}_2$ یک مجموعه مشخصه است. با تقسیم جملات حکم بر این مجموعه مشخصه خواهیم داشت

$$\begin{cases} \delta\text{-rem}(x'_{52}, \mathcal{A}) = 0 \qquad h_1 = -128x_{33}^8 x_{22}^8 x_{21}^2, \\ \delta\text{-rem}(x''_{32}x_{33} - x_{32}x''_{33}, \mathcal{A}) = 0 \qquad h_2 = 16x_{33}^3 x_{22}^3 x_{21}. \end{cases}$$

در این صورت با درنظرگرفتن H_{HYP} به صورت زیر

$$4H_{\mathrm{HYP}} = 4x_{21}(x_{31}^3 x_{22}^2 - x_{31}^3 + 2x_{31}^2 x_{21} - x_{31}x_{21}^2)x_{33}x_{22} \xrightarrow{F_3} 4x_{21}x_{31}x_{22}^3 x_{33}^3$$

خواهیم داشت $V(\mathrm{HYP}/\mathrm{H_{HYP}}) \subseteq V(\mathrm{Conc})$ و در نتیجه N_1 و N_2 از K_1 و K_2 نتیجه می‌شود.

در این فصل، حلقه چندجمله‌ای دیفرانسیلی را شناختیم که نخستین دریچه ورود به مطالب عمیق بعدی را بر روی ما خواهد گشود. اکنون آماده آن هستیم تا درست همانند رویکرد هندسه جبری، چندگونا و سپس ارتباط آن با ایده‌آل را در دنیای جبر دیفرانسیلی بهتر و بیشتر بشناسیم. این موضوع در فصل بعد، به تفصیل بررسی خواهد شد.

فصل ۴

واژه نامه هندسه-جبر دیفرانسیلی

از هندسه جبری با مفاهیم ایده‌آل، چندگونا و ایده‌آل یک چندگونا آشنا شدیم. دانستیم که ایده‌آل، چندگونا و ایده‌آل یک چندگونا چه تعریفی دارند. اکنون برآن هستیم تا هریک از این مفاهیم را از جبر کلاسیک به جبر دیفرانسیلی منتقل کنیم. برای دستیابی به چنین هدفی لازم است تا برخی از مفاهیم فصل قبل یادآوری گردد و نیم نگاهی به آموزه‌های هندسه جبری، البته با عمق بیشتر داشته باشیم. منابع استفاده شده در این فصل [۹، ۷، ۵، ۱] است.

۱.۴ مقدمه

فرض کنیم (K, δ) یک میدان دیفرانسیلی با مشخصه صفر باشد، یعنی $Char(K) = 0$. در این صورت $K\{Y\} = K\{y_1, \ldots, y_n\}$ را حلقه چندجمله‌ای‌های دیفرانسیلی روی K با متغیرهای $y_1, \ldots, y_n$ می‌نامیم. زیر مجموعه دلخواهی مانند $\Sigma \subseteq K\{Y\}$ را در نظر بگیرید. در این صورت $\Sigma = 0$ نشان دهنده یک دستگاه معادلات دیفرانسیل جبری است. منظور از دستگاه معادلات دیفرانسیل جبری، دستگاهی از معادلات دیفرانسیلی است به طوری که معادلات آن عبارات جبری (چندجمله‌ای‌ها) هستند و شامل توابعی مانند توابع مثلثاتی، لگاریتمی و ... نمی‌شوند. مهمترین هدف جبر دیفرانسیلی، مطالعه جواب‌های چنین دستگاه‌هایی است که طبق آموخته‌های فصل ۳ چندگوناهای دیفرانسیلی هستند. حال که نام چندگونای دیفرانسیلی به میان آمد، طبیعی است که به سراغ ایده‌آل دیفرانسیلی برویم و همانند مفاهیم هندسه جبری، در جستجوی تعاریف و قضایای مرتبط با این دو مفهوم باشیم. در این شرایط و در ابتدای امر، قضایای هیلبرت، اولین چیزی است که به

ذهن خطور می‌کند. در این فصل، با قضایای «ضعیف صفرساز دیفرانسیلی» و «قوی صفرساز دیفرانسیلی» آشنا می‌شویم. در قسمت پایانی این فصل، به تجزیه چندگونای دیفرانسیلی می‌پردازیم. اهمیت کاربردی این موضوع، از آن جهت است که باعث سهولت در حل دستگاه معادلات مد نظر خواهد شد. این موضوع مشابه با تجزیه ایده‌آل دیفرانسیلی رادیکال به ایده‌آل‌های اول است که پیش از این در فصل سوم آموختیم. تفاوت اصلی تجزیه چندگونای دیفرانسیلی با ایده‌آل دیفرانسیلی در آن است که در تجزیه چندگونای دیفرانسیلی بحث تحویل‌ناپذیری مطرح می‌شود که در بخش آخر این فصل، تشریح خواهد شد. در نهایت با ارائه چند مثال، به تبیین مباحث مطرح شده خواهیم پرداخت.

۲.۴ ایده‌آل-چندگونا در جبر دیفرانسیلی

اکنون تعریف میدان‌های بسته دیفرانسیلی و چندگونای دیفرانسیلی را به خاطر بیاورید. بدین منظور، ابتدا به بیان مجدد مفهوم صفر دیفرانسیلی می‌پردازیم. به عبارت نادقیق ولی ساده، صفر دیفرانسیلی یک چندجمله‌ای دیفرانسیلی دلخواه مانند $f \in K\{Y\}$، عبارتست از یک n تایی مرتب مانند $\eta = (\eta_1, \ldots, \eta_n)$ به طوری که $f(\eta)$ برابر با صفر شود.

اکنون به بیان دقیق و ریاضی این مفهوم می‌پردازیم. نخست آنکه $f \in K\{Y\} = K\{y_1, \ldots, y_n\}$ و $\eta = (\eta_1, \ldots, \eta_n) \subseteq L^n$ مفروض است. با در نظر گرفتن اینکه (K, δ) یک زیر میدان دیفرانسیلی از (L, δ) است ($(L, \delta) \supseteq (K, \delta)$)، η را یک صفر دیفرانسیلی از f می‌نامیم، هرگاه $f(\eta) = 0$. در اینجا منظور از $f(\eta)$ جایگزین کردن $\delta^k y_i$ با $\delta^k \eta_i$ در عبارت $f(y_1, \ldots, y_n)$ است.

حال که مفهوم صفر دیفرانسیلی یادآوری شد، به سراغ مفهوم میدان بسته دیفرانسیلی می‌رویم.

تعریف ۱.۲.۴ (میدان بسته دیفرانسیلی). (E, δ) را یک میدان بسته دیفرانسیلی می‌نامیم اگر برای هر عنصر $F \in E\{y_1, \ldots, y_n\}$ اگر $(L, \delta) \supseteq (E, \delta)$ و $\eta \in L^n$ موجود باشند، به طوری که $F(\eta) = 0$؛ آنگاه $\xi \in E^n$ به طوری که $F(\xi) = 0$.

تعریف ۲.۲.۴ (بستار دیفرانسیلی). فرض کنیم $(K, \delta) \subseteq (E, \delta)$. در این صورت (E, δ) را بستار دیفرانسیلی از (K, δ) می‌نامیم هر گاه شرایط زیر برقرار باشد:

۱. (E, δ) بسته دیفرانسیلی باشد.

۲. برای هر میدان بسته دیفرانسیلی $(M,\delta) \supseteq (K,\delta)$ یک جانشانی دیفرانسیلی مانند $\varphi : E \hookrightarrow M$ موجود باشد که $\varphi|_K = id_K$.

در طول این فصل، $(E,\delta) \supseteq (K,\delta)$ یک میدان بسته دیفرانسیلی است. مشابه با مفهوم فضای آفین جبری که در فصل اول توضیح داده شد؛ فضای آفین دیفرانسیلی را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

تعریف ۳.۲.۴ (فضای آفین دیفرانسیلی). فضای آفین دیفرانسیلی، برای هر عدد طبیعی n عبارت E^n است که به عنوان ضرب دکارتی E تعریف می‌شود.

در این صورت، همانند آموخته‌های پیشین، n تایی مرتب $\eta = (\eta_1, \ldots, \eta_n) \in E^n$ را یک نقطه می‌نامیم. مجموعه $V \subseteq E^n$ را یک چندگونای دیفرانسیلی روی K می‌نامیم هرگاه $\Sigma \subseteq K\{Y\}$ موجود باشد به طوری که رابطه‌ای همچون $V = \mathbb{V}(\Sigma) \equiv \{\eta \in E^n \mid f(\eta) = 0, \forall f \in \Sigma\}$ برقرار باشد. در این رابطه $\mathbb{V}$ یک نگاشت است که ورودی آن چندجمله‌ای‌های دیفرانسیلی و خروجی آن، مجموعه نقاطی از فضای آفین دیفرانسیلی است. حال Π را به صورت «مجموعه همه چندگوناهای E^n روی K» تعریف می‌کنیم. در ادامه خواهیم دید که چنین مجموعه‌ای سه شرط زیر را برآورده می‌کند:

۱. نخست آنکه $\emptyset$ و E^n همواره عنصری از Π هستند.

۲. برای هر V_1, V_2 متعلق به Π همواره $V_1 \cup V_2$ نیز عنصری از Π خواهد بود.

۳. هر اشتراک دلخواه (متناهی یا نامتناهی) از عناصر Π عنصری از Π خواهد بود.

سه شرط مذکور، تعریف یک توپولوژی است که روی بسته‌های توپولوژیک تعریف شده است. بنابراین Π یک توپولوژی روی E^n است که توپولوژی کلچین [1] نامیده می‌شود و نقش آن معادل با توپولوژی زاریسکی در هندسه جبری کلاسیک است. [2] می‌باشد. اکنون به طور مجزا به بررسی این سه ویژگی می‌پردازیم.

حالت اول کاملاً واضح و بدیهی است. $\emptyset$ به انتفای مقدم، یک چندگوناست. این حالت مربوط به زمانی است که $f \in K$، یعنی f ثابت باشد. واضح است که E^n مربوط به زمانی است $f = 0$. برای بررسی حالت دوم توجه به این نکته ضروری است که اشتراک دو چندگونا یک چندگونا است. به کمک استقرا تعمیمی از ویژگی دوم آن است که اجتماع متناهی از چندگوناها نیز عنصری از فضای توپولوژیک است. این موضوع با آموخته‌های

[1] Kolchin Topology
[2] Zariski Topology

ما از فضای توپولوژیک و تعریف چندگونا به عنوان یک بسته توپولوژیک، سازگاری دارد. ویژگی سوم با در نظر گرفتن چندگونا به عنوان یک بسته توپولوژیک و دانسته‌های ما از تعریف توپولوژی کاملا بدیهی و واضح است.

برای یک مجموعه دلخواه مانند $S \subseteq E^n$، کوچکترین چندگونای دیفرانسیلی شامل S را بستار کلچین S می‌نامیم و با S^{Kol} نمایش می‌دهیم.

مجدداً زیرمجموعه دلخواهی از E^n مانند S را در نظر می‌گیریم. در این صورت، داریم: $S \subseteq E^n$. در این شرایط ایده‌آل S را به صورت $\mathbb{I}(S) = \{f \in K\{y_1, \ldots, y_n\} \mid \forall \eta \in S, f(\eta) = 0\}$ تعریف می‌کنیم. از آنجایی که این ایده‌آل، به‌ازای تمامی مقادیر نقاط موجود در S برابر با صفر می‌شود، آن را ایده‌آل دیفرانسیلی صفرساز می‌نامند.

لم ۴.۲.۱. $\mathbb{I}(S)$ یک ایده‌آل دیفرانسیلی رادیکال است.

اثبات. این روند در سه مرحله انجام می‌شود. ابتدا ایده‌آل بودن، سپس دیفرانسیلی بودن و پس از آن رادیکال بودن آن را باید نشان دهیم. به سادگی و با بررسی شرایط موجود در مفهوم ایده‌آل در بخش ۱.۲.۲ خواهیم دید که $\mathbb{I}(S)$ یک ایده‌آل است. همچنین از آنجایی که همواره داریم $\delta(0) = 0$، پس $\mathbb{I}(S)$ یک ایده‌آل دیفرانسیلی نیز هست. اما در مورد رادیکال بودن نیز باید دقت کنیم که چون $f(\eta) = 0$ و از طرفی K یک میدان است، پس هر توانی از f نیز، عضوی از $\mathbb{I}(S)$ خواهد بود که شرطی قوی‌تر از رادیکال بودن را به همراه دارد. بنابراین $\mathbb{I}(S)$ یک ایده‌آل دیفرانسیلی رادیکال است. □

گزاره ۴.۲.۱. فرض کنیم $S_1 \subseteq S_2 \subseteq E^n$. در این صورت $\mathbb{I}(S_2) \subseteq \mathbb{I}(S_1)$.

اثبات. فرض کنیم $f \in \mathbb{I}(S_2)$. در این صورت خواهیم داشت $f(S_2) = 0$. از آنجایی که $S_1 \subseteq S_2$ می‌توان گفت $f(S_1) = 0$. بنابراین $f \in \mathbb{I}(S_1)$ و به مطلوب خود دست یافته‌ایم. □

گزاره ۴.۲.۲. فرض کنیم $P_1 \subseteq P_2 \subseteq K\{Y\}$. در این صورت $\mathbb{V}(P_2) \subseteq \mathbb{V}(P_1)$.

اثبات. فرض کنیم $\eta \in \mathbb{V}(P_2)$. در نتیجه برای هر $f \in P_2$ خواهیم داشت $f(\eta) = 0$. از آنجایی که $P_1 \subseteq P_2$ می‌توان گفت برای هر $g \in P_1$ داریم $g(\eta) = 0$. بنابراین $\eta \in \mathbb{V}(P_1)$ و به مطلوب خود دست یافته‌ایم. □

گزاره ۴.۲.۳. فرض کنیم $S \subseteq E^n$. در این صورت $V = \mathbb{V}(\mathbb{I}(S))$ بستار کلچین S است. علاوه بر آن داریم $\mathbb{I}(V) \subseteq \mathbb{I}(S)$.

اثبات. فرض کنیم $\Sigma \subseteq K\{Y\}$ و $S^{Kol} = \mathbb{V}(\Sigma)$. در این صورت، برای هر $f \in \Sigma$ خواهیم داشت $f|_S \equiv ۰$. و در نتیجه $\Sigma \subseteq \mathbb{I}(S)$. بنابراین $V = \mathbb{V}(\mathbb{I}(V)) \subseteq \mathbb{V}(\Sigma) = S^{Kol}$. اکنون طبق تعریف بستار کلچین داریم $S^{Kol} = V$.

اما برای اثبات قسمت دوم قضیه، برهان خلف را برمی‌گزینیم و اینگونه عمل می‌کنیم که می‌دانیم $S \subseteq V$. پس $\mathbb{I}(V) \subseteq \mathbb{I}(S)$. اگر عنصری مانند f در $\mathbb{I}(S) \setminus \mathbb{I}(V)$ وجود داشته باشد، در این صورت عنصری مانند $\eta \in V$ موجود است، به طوری که $f(\eta) \neq ۰$. حال $\Sigma_۱$ را به صورت $\Sigma_۱ = \mathbb{I}(V) \cup \{f\}$ در نظر می‌گیریم. واضح است که $\Sigma_۱ \subseteq \mathbb{I}(S)$ و در نتیجه $\mathbb{V}(\Sigma_۱) \supseteq \mathbb{V}(\mathbb{I}(S)) = V$. از آنجایی که $\eta \in V$ پس $\eta \in \mathbb{V}(\Sigma_۱)$ و در نتیجه $f(\eta) = ۰$ که منجر به تناقض می‌شود. پس فرض خلف باطل و در نتیجه حکم به اثبات می‌رسد. □

نمادگذاری ۱.۲.۴. با توجه به آنچه که گفته شد، در می‌یابیم که $\mathbb{I}$ و $\mathbb{V}$ دو نگاشت هستند که در حلقه چندجمله‌ای‌های دیفرانسیلی $K\{Y\} = K\{y_۱, \ldots, y_n\}$ ایده‌آل‌های دیفرانسیلی رادیکال و چندگونای دیفرانسیلی را به یکدیگر مرتبط می‌سازند و به صورت زیر بیان می‌شود.

$$\begin{array}{cccc} \mathbb{I}: & \{\delta - varieties\ in\ E^n\ over\ K\} & \longrightarrow & \{radical\, \delta - ideals\ in\ K\{Y\}\} \\ & V & & \mathbb{I}(V) \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} \mathbb{V}: & \{radical\, \delta - ideals\ in\ K\{Y\}\} & \longrightarrow & \{\delta - varieties\ in\ E^n\ over\ K\} \\ & J & & \mathbb{V}(J) \end{array}$$

نتیجه ۱.۲.۴. برای هر چندگونای دیفرانسیلی V داریم $V = \mathbb{V}(\mathbb{I}(V))$. بنابراین $\mathbb{I}$ یک به یک و $\mathbb{V}$ پوشاست.

اثبات. با توجه به گزاره ۳.۲.۴ داریم $V = V^{Kol} = \mathbb{V}(\mathbb{I}(V))$. □

تعریف ۴.۲.۴ (صفر عام). فرض کنیم $L \supseteq K$ یک توسیع میدان باشد. نقطه $\eta \in L^n$ را یک صفر عام برای ایده‌آل دیفرانسیلی $I \in K\{Y\}$ گوییم، هر گاه $I = \mathbb{I}(\eta)$.

تذکر ۱.۲.۴. کمی جلوتر، گام خود را فراتر می‌نهیم و خواهیم دید که نگاشت‌های $\mathbb{I}$ و $\mathbb{V}$ دوسوئی هستند.

در بخش بعدی، قضایای صفرساز دیفرانسیلی را مطرح می‌کنیم که مشابه قضایای صفرساز هیلبرت در هندسه

جبری است. تا اینجا تمامی قضایا و مباحث مطرح شده حتی برای E هایی که بسته دیفرانسیلی نیستند، نیز برقرار است. حال آنکه، اعتبار قضایای صفرساز دیفرانسیلی، صرفاً به میدان‌های بسته دیفرانسیلی، محدود می‌شود.

۳.۴ صفرسازهای دیفرانسیلی

در فصل اول، با قضایای صفرساز هیلبرت در فرم قوی و ضعیف آشنا شدیم. اکنون و از آنجایی که دانش ما در سطح جبر دیفرانسیلی نسبت به فصل اول، افزایش داشته است، پس به تعمیق آن در قضایای زیر خواهیم پرداخت. مروری بر بخش ۳.۱ پیش از این مطالعه این بخش، خالی از لطف نیست.

قضیه ۱.۳.۴ (قضیه ضعیف صفرساز دیفرانسیلی). فرض کنیم $F \subseteq K\{y_1,\dots,y_n\}$ و $(E,\delta) \supseteq (K,\delta)$ یک میدان بسته دیفرانسیلی باشد. در این صورت $\mathbb{V}(F)=\{\eta\in E^n \mid F(\eta)=0\}=\emptyset \Longleftrightarrow 1\in[F]$.

اثبات. $(\Leftarrow)$ بدیهی است.

$(\Rightarrow)$ برای اثبات، برهان خلف را برمی‌گزینیم. کافی است نشان دهیم که اگر $[F]\neq K\{y_1,\dots,y_n\}$ آنگاه عنصری مانند η در E^n وجود دارد به طوری که برای هر $f\in F$ داریم $f(\eta)=0$. از آنجایی که $1\notin[F]$ پس $\sqrt{[F]}\neq K\{y_1,\dots,y_n\}$. اکنون فرض کنیم $\sqrt{[F]}=\bigcap_{i=1}^{l}P_i$ تجزیه اولیه مینیمال و $M=\mathrm{Frac}(K\{y_1,\dots,y_n\}/P_1)$. در این صورت، M یک توسیع دیفرانسیلی از میدان K است. همچنین $(\bar{y}_1,\dots,\bar{y}_n)\in M^n$ یک نقطه عمومی برای P_1 است. $F\subseteq P_1$ دلالت بر این دارد که $(\bar{y}_1,\dots,\bar{y}_n)$ یک صفر دیفرانسیلی برای F است و از آنجایی که $E\supseteq K$ یک میدان بسته دیفرانسیلی است، نقطه‌ای مانند $\eta=(\eta_1,\dots,\eta_n)\in E^n$ به طوری که برای هر $f\in F$ خواهیم داشت $f(\eta)=0$ که در تناقض با تهی بودن چندگونای دیفرانسیلی است. پس فرض خلف باطل و حکم به اثبات می‌رسد. $\square$

حال به سراغ قضیه صفرساز دیفرانسیلی می‌رویم تا ببینیم که رفت و برگشت از مسیر هندسه و جبر دیفرانسیلی چه تأثیری بر یک ایده‌آل دیفرانسیلی می‌گذارد.

قضیه ۲.۳.۴ (قضیه قوی صفرساز دیفرانسیلی). فرض کنیم $F\subseteq K\{y_1,\dots,y_n\}$ و $f\in K\{y_1,\dots,y_n\}$. اگر f در هر صفر دیفرانسیلی F در E^n برابر با صفر شود، آنگاه $f\in\{F\}$. همچنین $\mathbb{I}(\mathbb{V}(F))=\{F\}$

اثبات. برای اثبات این قضیه از تکنیک رابینوویچ استفاده می‌کنیم که پیش از این در بخش ۳.۱۱.۱ توضیح داده شد. برای انجام این تکنیک، یک متغیر دیفرانسیلی جدید، به نام t را معرفی می‌کنیم. در این صورت، مجموعه چندجمله‌ای‌های F و چندجمله‌ای $1 - ft$ را در حلقه $K\{y_1, \dots, y_n, t\}$ در نظر می‌گیریم. از آنجایی که f در هر صفر دیفرانسیلی E^n از F صفر می‌شود، پس $\mathbb{V} \subseteq E^{n+1} = \emptyset$. در این شرایط و با استفاده از قضیه صفرساز دیفرانسیلی ضعیف، داریم $1 \in [F, 1 - ft] \subseteq K\{y_1, \dots, y_n, t\}$. بنابراین عدد طبیعی s و عناصر A_i و B_i در حلقه $K\{y_1, \dots, y_n, t\}$ وجود دارند به طوری که $1 = \sum_{i=0}^{s} A_i F^{(i)} + \sum_{j=0}^{s} B_j (1 - ft)^{(j)}$. از آنجایی که $f \neq 0$ در می‌یابیم که با جایگزینی $\frac{1}{f}$ به جای t در دو طرف معادله اخیر، به معادله جدیدی به صورت $1 = \sum_{i=0}^{s} A_i (y_1, \dots, y_n, \frac{1}{f}) F^{(i)}$ دست خواهیم یافت. در این صورت عدد طبیعی m موجود است به طوری که $f^m \sum_{i=0}^{s} A_i (y_1, \dots, y_n, \frac{1}{f}) \in K\{y_1, \dots, y_n, \}$ پس $f^m \in [F]$ و درنتیجه $f \in \{F\}$.

□

تذکر ۱.۳.۴. آنچه که در بالا به آن اشاره شد، اثبات مختصری از قضیه صفرساز دیفرانسیلی ضعیف است که توسط ریت ارائه شده است. نخستین اثبات ساختاری این قضیه، توسط سیدنبرگ، [3] مطرح شده که در آن از نظریه حذف استفاده کرده است.

تذکر ۲.۳.۴. با درنظرگرفتن قضیه ۲.۳.۴ و نتیجه ۱.۲.۴ درمی‌یابیم که $\mathbb{I}$ و $\mathbb{V}$ دوسوئی هستند.

این بخش را با دو تعریف به پایان می‌رسانیم.

تعریف ۱.۳.۴ (حلقه مختصات دیفرانسیلی). فرض کنیم $V \subseteq E^n$ یک چندگونای دیفرانسیلی باشد. در این صورت، حلقه دیفرانسیلی $K\{V\} := K\{y_1, \dots, y_n\}/\mathbb{I}(V)$ حلقه مختصات دیفرانسیلی V نامیده می‌شود.

تعریف ۲.۳.۴ (زیرچندگونای دیفرانسیلی). $W \subseteq E^n$ را یک زیرچندگونای دیفرانسیلی برای V می‌نامیم هرگاه $W \subseteq V$ و W یک چندگونای دیفرانسیلی در E^n باشد.

۴.۴ تجزیه تحویل ناپذیر چندگونای دیفرانسیلی

تعریف ۱.۴.۴ (چندگونای تحویل‌ناپذیر). چند گونای دیفرانسیلی $V \subseteq E^n$ را تحویل ناپذیر گوییم هر گاه به صورت اجتماع دو زیرچندگونای دیفرانسیلی سره نباشد، یعنی $\nexists\ V_1 \,\&\, V_2 \subset V;\ \ V = V_1 \cap V_2$. به

[3] Seidenberg

عبارت دیگر داشته باشیم $V = V_1 \cap V_2 \;\Leftrightarrow\; V_1 = V_2 = V$.

لم ۱.۴.۴. چندگونای دیفرانسیلی V تحویل ناپذیر است اگر و تنها $\mathbb{I}(V) \subseteq K\{y_1, \ldots, y_n\}$ اول باشد.

اثبات. $(\Rightarrow)$: فرض کنیم f و g دو چندجمله‌ای دیفرانسیلی باشند به طوری که $fg \in \mathbb{I}(V)$. طبق تعریف ایده‌آل دیفرانسیلی اول، کافی است نشان دهیم که $f \in \mathbb{I}(V)$ یا $g \in \mathbb{I}(V)$ در این صورت، طبق تعریف چندگونا داریم $V = \mathbb{V}(\mathbb{I}(V), fg) = \mathbb{V}(\mathbb{I}(V), f) \cup \mathbb{V}(\mathbb{I}(V), g)$. از آنجایی که V تحویل‌ناپذیر است، لازم است تا یکی از دو رابطه $\mathbb{V}(\mathbb{I}(V), f) = V$ یا $\mathbb{V}(\mathbb{I}(V), g) = V$ برقرار باشد. این موضوع معادل آن است که یکی از دو رابطه $f \in \mathbb{I}(V)$ یا $g \in \mathbb{I}(V)$ برقرار باشد. بنابراین $\mathbb{I}(V)$ اول است.

$(\Leftarrow)$ فرض کنیم $V = V_1 \cup V_2$. در این صورت $\mathbb{I}(V) = \mathbb{I}(V_1) \cap \mathbb{I}(V_2)$. از آنجایی که $\mathbb{I}(V)$ اول است، $\mathbb{I}(V_1) \subseteq \mathbb{I}(V)$ یا $\mathbb{I}(V_2) \subseteq \mathbb{I}(V)$. در غیر این صورت، عنصری مانند f_1 در $\mathbb{I}(V_1) \setminus \mathbb{I}(V)$ و عنصری مانند f_2 در $\mathbb{I}(V_2) \setminus \mathbb{I}(V)$ موجود است، به طوری که $f_1 f_2 \in \mathbb{I}(V_1) \cap \mathbb{I}(V_2) = \mathbb{I}(V)$ که تناقض ایجاد می‌کند. بنابراین اگر $\mathbb{I}(V_1) \subseteq \mathbb{I}(V)$، آنگاه $V = V_1$. به طور مشابه، این رهیافت برای $V = V_2$ درست است. پس طبق تعریف، V یک چندگونای تحویل‌ناپذیر است. $\square$

تعریف ۲.۴.۴ (تجزیه تحویل‌ناپذیر). فرض کنیم چندگونای دیفرانسیلی V را به صورت اجتماعی متناهی از زیرچندگوناهای دیفرانسیلی تحویل‌ناپذیر V_i بنویسیم، یعنی $V = \bigcup_{i=1}^{l} V_i$. چنین اجتماعی را یک تجزیه تحویل‌ناپذیر V می‌نامیم.

تعریف ۳.۴.۴ (تجزیه تحویل‌ناپذیر نافزون). تجزیه چندگونای دیفرانسیلی V به صورت $V = \cup_{i=1}^{l} V_i$ را یک تجزیه تحویل‌ناپذیر نافزون (مینیمال) می‌نامیم هرگاه به‌ازای هر $1 \leq i \leq l$ داشته باشیم $V_i \not\subseteq \cup_{j \neq i} V_j$.

قضیه ۱.۴.۴. هر چندگونای دیفرانسیلی V را می‌توان به صورت اجتماع متناهی از چندگوناهای دیفرانسیلی تحویل‌ناپذیر نوشت، یعنی $V = \bigcup_{i=1}^{l} V_i$. علاوه بر آن اگر این تجزیه، نافزون باشد، مجموعه $\{V_1, \ldots, V_l\}$ یکتاست.

اثبات. در فصل سوم آموختیم که هر ایده‌ال دیفرانسیلی رادیکال سره از حلقه ریت-نوتری $K\{y_1, \ldots, y_n\}$ با مشخصه میدان صفر را می‌توان به صورت یک اشتراک متناهی از ایده‌آل‌های دیفرانسیلی اول نوشت. از آنجایی که $\mathbb{I}(V)$ یک ایده‌آل دیفرانسیلی رادیکال است، با در نظر گرفتن P_j ها به عنوان ایده‌آل دیفرانسیلی اول، داریم

$\mathbb{I}(V) = \bigcap_{j=1}^{l} P_j$. حال داریم $V = \mathbb{V}(\mathbb{I}(V)) = \mathbb{V}(\bigcap_{j=1}^{l} P_j)$ و در نتیجه $V = \bigcup_{j=1}^{l} \mathbb{V}(P_j)$ یک تجزیه تحویل‌ناپذیر از V است.

برای اثبات یکتایی فرض می‌کنیم که $V = \bigcup_{i=1}^{l} V_i$ و $V = \bigcup_{j=1}^{m} W_i$ دو تجزیه تحویل‌ناپذیر نافزون از V باشند. در این صورت $\mathbb{I}(V) = \bigcap_{i=1}^{l} \mathbb{I}(V_i)$ و $\mathbb{I}(V) = \bigcap_{j=1}^{m} \mathbb{I}(W_j)$ دو تجزیه اول نافزون برای $\mathbb{I}(V)$ خواهند بود. دراین صورت، با استفاده از قضیه بخش ۷.۳ خواهیم داشت $l = m$ و جایگشتی مانند σ وجود دارد به طوری که $\mathbb{I}(V_i) = \mathbb{I}(W_{\sigma(j)})$. بنابراین به‌ازای هر $1 \leq i \leq l$ همواره داریم $V_i = W_{\sigma(j)}$. □

تعریف ۴.۴.۴ (مؤلفه تحویل‌ناپذیر). فرض کنیم $V = \cup_{i=1}^{l} V_i$ یک تجزیه تحویل‌ناپذیر نافزون باشد. در این صورت به هر یک از V_i ها یک مؤلفه تحویل‌ناپذیر گفته می‌شود.

تذکر ۱.۴.۴. به مجموعه‌ای از زیرچندگوناهای $V_1, \ldots, V_l$ در تعریف فوق، «زیرچندگونای دیفرانسیلی تحویل‌ناپذیر ماکزیمال» گفته می‌شود.

۵.۴ اجزای یک معادله دیفرانسیل جبری

فرض کنیم $A \in K\{y_1, \ldots, y_n\} \backslash K$ یک چندجمله‌ای جبری تحویل‌ناپذیر باشد، یعنی به صورت حاصلضرب دو چندجمله‌ای دیفرانسیل در $K\{Y\} \setminus K$ نباشد. ما قصد داریم تجزیه اولیه ایده‌آل دیفرانسیل رادیکال $\{A\}$ را بررسی کنیم. ابتدا با ابتدا با یک مثال شروع می‌کنیم.

مثال ۱.۵.۴. فرض کنیم $A = y''^2 - y \in K\{y\}$. پس مشتقات مرتبه اول تا سوم A به صورت زیر است.

$A' = 2y''y^{(3)} - y', \quad A'' = 2y''y^{(4)} + 2(y^{(3)})^2 - y', \quad A^{(3)} = 2y''y^{(5)} + 6y^{(3)}y^{(4)} - y^{(3)}$.

پس می‌توان نوشت $2y^{(3)}A^{(3)} + A'' - 6y^{(4)}A' = y''(4y^{(3)}y^{(5)} - 12(y^{(4)})^2 + 8y^{(4)} - 1)$ و در نتیجه $\{A\} = \{A, y''\} \cap \{A, 4y^{(3)}y^{(5)} - 12(y^{(4)})^2 + 8y^{(4)} - 1\}$.

اکنون یک رتبه‌بندی دیفرانسیلی دلخواه $\mathcal{R}$ را روی $\Theta(Y)$ انتخاب می‌کنیم و جداساز S_A را تحت $\mathcal{R}$ در نظر می‌گیریم. فرض می‌کنیم برای هر عدد طبیعی h و $1 \leq p \leq n$ داشته باشیم $\mathrm{ld}(A) = y_p^{(h)}$. مرتبه A در y_i به صورت $\mathrm{ord}(A, y_i) = \max\{k \mid \deg(A, y_i^{(k)}) \geq 1\}$ تعریف می‌شود و مرتبه A به صورت $\mathrm{ord}A = \max_i\{\mathrm{ord}(A, y_i)\}$ تعریف می‌شود. قرار می‌دهیم $P_1 = \{A\} : S_A = \{f \in K\{Y\} \mid S_A f \in \{A\}\}$.

لم ۱.۵.۴. ۱. P_1 یک ایده‌آل اول است.

۲. برای یک چندجمله‌ای دیفرانسیلی $F \in K\{Y\}$، داریم $F \in P_1$ اگر و تنها اگر $\delta\text{-rem}(F, A) = 0$. به طور خاص، اگر $F \in P_1$ و $\operatorname{ord}(F, y_p) \leq \operatorname{ord}(A, y_p) = h$، در این صورت F بر A بخش‌پذیر است.

اثبات. ۱. فرض کنیم $fg \in P_1$ با $f, g \in K\{Y\}$. همچنین f_1 و g_1 باقیمانده‌های جزئی f و g نسبت به A باشند. پس اعداد طبیعی a, b وجود دارند به طوری که خواهیم داشت $S_A^a f \equiv f_1 \pmod{[A]}$ و $S_A^b g \equiv g_1 \pmod{[A]}$ و درنتیجه داریم $S_A^{a+b+1} fg \equiv S_A f_1 g_1 \pmod{[A]}$. با توجه به اینکه $fg \in P_1 = \{A\} : S_A$، داریم $S_A f_1 g_1 \in \{A\}$. پس اعداد طبیعی l, q وجود دارند به طوری که

$$(S_A f_1 g_1)^l = MA + M_1 A' + M_2 A'' + \cdots + M_q A^{(q)}. \qquad (*)$$

برای $k \geq 1$، $A^{(k)} = S_A y_p^{(h+k)} + T_k$ که در آن T_k از $y_p^{(h+1)}, \ldots, y_p^{(h+q)}$ مستقل است. هر سه S_A, f_1, g_1 از این مشتقات مستقل‌اند. حال $y_p^{(h+k)}$ را با $-\frac{T_k}{S_A}$ در طرفین معادله $(*)$ جایگزین می‌کنیم و خواهیم داشت $(S_A f_1 g_1)^l = \overline{M} \cdot A$ که در آن $\overline{M} = M\big|_{y_p^{(h+k)} = -\frac{T_k}{S_A}}$. با حذف کسرها داریم $S_A^t (f_1 g_1)^l = N \cdot A$. چون A تحویل‌ناپذیر است و $A \nmid S_A$، $A \nmid f_1$، و $A \nmid g_1$، پس $A \mid f_1$ یا $A \mid g_1$. بنابراین $f \in \{A\} : S_A = P_1$ و P_1 اول است.

۲. $(\Rightarrow)$ اگر $\delta\text{-rem}(F, A) = 0$، آنگاه $F \in \operatorname{sat}(A) = [A] : S_A^\infty$ است. (لازم به ذکر است که A یک مجموعه مشخصه از $[A] : S_A^\infty$ است و $[A] : S_A^\infty$ ایده‌آلی اول است). بنابراین خواهیم داشت: $\operatorname{sat}(A) \subseteq \{A\} : S_A = P_1$.

$(\Leftarrow)$ برعکس، فرض کنیم $F \in P_1$ باشد. آنگاه $S_A F \in \{A\}$. در این شرایط، فرض کنیم که R باقیمانده جزئی F نسبت به A باشد. در این صورت، عدد طبیعی l موجود است به طوری که خواهیم داشت $(S_A R)^l = MA + M_1 A' + \cdots + M_t A^{(t)}$. با روشی مشابه بخش اول اثبات، می‌توان نشان داد که R بر A بخش‌پذیر است. در نتیجه $\delta\text{-rem}(F, A) = 0$.

□

گزاره ۱.۵.۴. $\{A\} = P_1 \cap \{A, S_A\}$.

اثبات. به وضوح داریم $\{A\} \subseteq P_1 \cap \{A, S_A\}$. فرض کنیم $f \in P_1 \cap \{A, S_A\}$. کافی است نشان دهیم $f \in \{A\}$. از آنجایی که $f \in \{A, S_A\}$ عدد طبیعی l وجود دارد به طوری که $f^l = T_1 + T_2$ و در آن $T_1 \in [A]$ و $T_2 \in [S_A]$. از $f \in P_1$ نتیجه می‌گیریم که $S_A f \in \{A\}$ پس $\delta^k(S_A) f \in \{A\}$ و در نتیجه $f^{l+1} \in \{A\}$ که منجر به $f \in \{A\}$ خواهد شد.

□

فرض کنیم $\{A, S_A\} = Q_1 \cap \cdots \cap Q_t$ تجزیه‌ی اول مینیمال از $\{A, S_A\}$ باشد. آنگاه خواهیم داشت $\{A\} = P_1 \cap Q_1 \cap Q_1 \cap \cdots \cap Q_t$. با حذف آن دسته از Q_i هایی که $P_1 \subseteq Q_i$ هستند و نامگذاری مابقی به صورت: $P_2, \ldots, P_r$ خواهیم داشت $\{A\} = P_1 \cap \cdots \cap P_r$ که تجزیه اول مینیمال از $\{A\}$ است.

لم ۲.۵.۴. برای هر جداساز S از A تحت هر رتبه بندی دلخواه، خواهیم داشت: $S \notin P_1 = \{A : S_A\}$ و $S \in P_2, \ldots, P_r$.

اثبات. از لم ۱.۵.۴ و این واقعیت که $S \nmid A$ نتیجه می‌گیریم که $S \notin P_1$. از آنجا که $\{A, S_A\} \subseteq P_2, \ldots, P_r$ نتیجه می‌گیریم که $S_A \in P_2, \ldots, P_r$. با توجه به اینکه $\{P_1, \ldots, P_r\}$ مؤلفه‌های تحویل‌ناپذیر یکتای $\{A\}$ هستند، نتیجه می‌شود: $S \in P_2, \ldots, P_r$. □

در این فصل چندگونای دیفرانسیلی را شناختیم و با استفاده از ارتباط آن با ایده‌آل دیفرانسیلی، به اثبات قضایای مهمی پرداختیم. فصل بعد، توسیع مشتق دیفرانسیلی را مورد بحث و بررسی قرار می‌دهد که کمی متفاوت و تا حدودی مستقل از مباحث این فصل است.

فصل ۵

توسیع میدان‌های دیفرانسیلی

در این فصل، ابتدا مفهوم توسیع مشتق را روی یک میدان بررسی می‌کنیم. سپس با رویکردی برگرفته از جبرخطی به معرفی پایه های جبری و متعالی روی یک میدان خواهیم پرداخت. سپس با معرفی عنصر اولیه، به بیان مهمترین قضیه مد نظر در این فصل خواهیم پرداخت. در نهایت، کاربرد این موضوع را بر روی چندگوناهای دیفرانسیلی بررسی خواهیم کرد که یکی از اهداف مهم کاربردی در این شاخه از ریاضیات است. منابع استفاده شده در این فصل [۱۱، ۹، ۵، ۴، ۱] است.

۱.۵ مقدمه

تا کنون مفهوم توسیع را در موارد متعددی آموخته ایم. به عنوان مثال، توسیع یک میدان دیفرانسیلی یا توسیع یک حلقه به میدان کسرها. در این فصل، برآن هستیم تا مشتق را روی یک میدان دیفرانسیلی توسیع دهیم. رهیافت برگرفته در این رویکرد، به سبب کاربرد آن است که در ادامه مطالب، به آن دست خواهیم یافت.

۲.۵ توسیع مشتق روی میدان

قضیه ۱.۲.۵. فرض کنیم (K,δ) یک میدان دیفرانسیلی با مشخصه صفر و x یک متغیر روی K باشد. در این صورت می‌توان توسیعی مانند δ_0 روی حلقه $K[x]$ یافت به طوری که $\delta_0(x) = 0$ و برای هر چندجمله‌ای دلخواه $f = \sum_{i=0}^{l} r_i x^i \in K[x]$ داریم $\delta_0(f) = \sum_{i=0}^{l} \delta(r_i)x^i$. علاوه بر آن، مشتق دیگری روی حلقه $K[x]$ وجود دارد که در آن $\frac{d}{dx}(K) = 0$ و $\frac{d}{dx}(x) = 1$ و برای هر چندجمله‌ای دلخواه $f \in K[x]$ به صورت $\frac{d}{dx}\left(\sum_{i=0}^{l} r_i x^i\right) = \sum_{i=1}^{l} i r_i x^{i-1}$ تعریف می‌شود. هر مشتق δ_1 روی حلقه $K[x]$ که δ را توسیع دهد، به صورت $\delta_1 = \delta_0 + \delta_1(x)\frac{d}{dx}$ داده می‌شود. برعکس، با تعریف $\delta_1(x) = p(x) \in K[x]$ مشتق δ_1 به صورت $\delta_1 = \delta_0 + p(x)\frac{d}{dx}$ خواهد بود که یک مشتق روی $K[x]$ بوده و توسیعی برای δ است.

اثبات. ابتدا فرض کنیم δ_1 یک مشتق روی $K[x]$ باشد که توسیعی از δ است. برای هر چندجمله‌ای دلخواه $f = \sum_{i=0}^{r} r_i x^i \in K[x]$ داریم $\delta_1(f) = \sum_{i=0}^{r} \delta(r_i)x^i + \sum_{i=1}^{r} i r_i x^{i-1}\delta_1(x)$. بنابراین، می‌توان نوشت $\delta_1 = \delta_0 + \delta_1(x)\frac{d}{dx}$.

اینک فرض می‌کنیم $\delta_1 : K[x] \to K[x]$ با رابطه $\delta_1(f) = \delta_0(f) + \delta_1(x)\frac{d}{dx}(f)$ تعریف شده است. در این صورت، برای هر $a \in K$ خواهیم داشت $\delta_1(a) = \delta_0(a) + \delta_1(x)\frac{d}{dx}(a) = \delta(a)$ و برای هر $f, g \in K[x]$ داریم $\delta_1(f+g) = \delta_0(f+g) + \delta_1(x)\frac{d}{dx}(f+g) = \delta_1(f) + \delta_1(g)$. علاوه بر آن می‌توان گفت $\delta_1(fg) = \delta_0(fg) + \delta_1(x)\frac{d}{dx}(fg) = \delta_1(f)g + f\delta_1(g)$. برقراری دو رابطه اخیر، حاکی از آن است که δ_1 یک نگاشت مشتق، روی حلقه $K[x]$ است. پس δ_1 یک توسیع مشتق است از δ است. □

تعریف ۱.۲.۵. فرض کنیم $L \supseteq K$ یک توسیع میدان باشد. در این صورت، L را روی K جبری گوییم هرگاه هر عنصر $\alpha \in L$ روی K جبری باشد.

قضیه ۲.۲.۵. فرض کنیم $(K,\delta) \subseteq (L,\delta)$ میدان‌هایی با مشخصه صفر باشند، آنگاه هر مشتق روی K را می‌توان به یک مشتق روی L توسیع داد. این گسترش یکتاست اگر و تنها اگر L روی K جبری باشد.

اثبات. فرض کنیم δ یک مشتق روی K باشد. ابتدا فرض کنیم که $L = K(\alpha)$ باشد. اثبات این قضیه را در دو حالت زیر درنظر می‌گیریم.

- اگر α روی K متعالی باشد، آنگاه مشتق δ_0 روی $K[\alpha]$ وجود دارد که $\delta_0|_K = \delta$ و $\delta_0(\alpha) = 0$. بنابراین δ به یک مشتق‌گیری روی $L = K(\alpha)$ گسترش می‌یابد.

- اگر α روی K جبری باشد، فرض کنیم $F(x)$ چندجمله‌ای مینیمال α روی K باشد. یک چندجمله‌ای مانند $g(x) \in K[x]$ را در نظر می‌گیریم. مشتق δ را می‌توان به δ_0 روی $K[x]$ با شرط $\delta_0(x) = 0$ توسیع داد. بنابراین، مشتق δ_1 به صورت $\delta_1 = \delta_0 + g(x)\frac{d}{dx}$ خواهد بود. هدف ما انتخاب $g(x)$ است به گونه ای که δ_1 ایده آل $F \cdot K[x]$ را به خودش نگاشت کند. این امر زمانی محقق می‌شود که یکی از دو شرط $\delta_1(F)(\alpha) = 0$ یا $\delta_0(F)(\alpha) + g(\alpha)\frac{dF}{dx}(\alpha) = 0$ برقرار باشد. از آنجا که $\frac{dF}{dx}(\alpha) \neq 0$ می‌توان $g(\alpha)$ را به صورت $g(\alpha) = -\frac{\delta_0(F)(\alpha)}{\frac{dF}{dx}(\alpha)}$ انتخاب کرد. چون $K(\alpha) = K[\alpha]$ است، می‌توان $g(x) \in K[x]$ را یافت که این خاصیت را داشته باشد. با انتخاب مناسب $g(x)$ مشتق δ_1 به صورت $\delta_1(A(x)) + F \cdot K[x]$ تعریف شده و مشتق مطلوب روی $K(\alpha) = K[\alpha]$ را القا می‌کند. در این حالت، داریم $\bar{\delta}_1(\alpha) = g(\alpha) = -\frac{\delta_0(F)(\alpha)}{F'(\alpha)}$.

برای حالت کلی، فرض کنیم $E = \{(K_i, \delta_i) \mid K \subseteq K_1 \subseteq L \ \ and \delta_1|_K = \delta_K\}$. از آنجایی که $K \in E$ پس E ناتهی است. فرض کنیم $(K_1, \delta_1) \subseteq (K_2, \delta_2) \subseteq \cdots \subseteq (K_n, \delta_n) \subseteq \cdots$ یک زنجیره صعودی در E باشد. به سادگی نشان داده می‌شود که $(\bigcup_i K_i, \delta)$ یک عنصر در E و یک کران بالا برای زنجیر صعودی یاد شده است. از آنجا که تمامی شرایط لم زرن برقرار است، با استفاده از این لم، در می‌یابیم که عنصر ماکزیمال (M, δ_M) در E وجود دارد. ادعا می‌کنیم که $M = L$. برای اثبات این ادعا به برهان خلف، فرض می‌کنیم که $M \neq L$. بنابراین عنصری مانند α متعلق به $L \setminus M$ وجود دارد. با استفاده از بخش اول اثبات قضیه، می‌توانیم δ را به یک مشتق δ_1 روی $M[\alpha] \supsetneq M$ توسیع دهیم. این امر، با ماکزیمال بودن M تناقض دارد که صحت ادعای $M = L$ را به اثبات می‌رساند.

یکتایی تنها موضوع باقیمانده از این قضیه است که باید به اثبات برسد.

($\Leftarrow$) به برهان خلف، فرض کنیم، L بر روی K جبری نباشد، آنگاه عنصری مانند $\alpha \in L$ موجود است، به طوری که متعالی بر روی K است. در این صورت، بیش از یک مشتق روی $K[\alpha]$ موجود است به طوری که حاصل از توسیع δ را روی K است.

($\Rightarrow$) اگر L بر روی K جبری باشد، آنگاه برای هر $\alpha \in L$ چندجمله‌ای $F(x) = \sum_{i=0}^{n} r_i x^i \in K[x]$ را به عنوان چندجمله‌ای مینیمال α بر روی K درنظر می‌گیریم. فرض کنیم D یک مشتق روی L باشد، به طوری که حاصل از توسیع مشتق δ روی K است. از آنجایی که $F(\alpha) = 0$ با مشتق‌گیری از $F(x)$ خواهیم داشت $D(F(\alpha)) = \sum_{i=0}^{n} r_i \alpha^i = \sum_{i=0}^{n} \delta(r_i)\alpha^i + \sum_{i=1}^{n} i r_i \alpha^{i-1} D(\alpha) = 0$ و در نتیجه مشتق $D(\alpha)$ به صورت یکتای $D(\alpha) = -\frac{\sum_{i=0}^{n} \delta(r_i)\alpha^i}{\sum_{i=1}^{n} i r_i \alpha^{i-1}}$ به دست خواهد آمد. $\square$

نتیجه ۵.۲.۱. اگر $K \subseteq L$ میدان‌هایی با مشخصه صفر و δ یک مشتق روی L باشد به طوری که $\delta(K) \subseteq K$. در این صورت اگر $\alpha \in L$ روی K جبری باشد، داریم $\delta(\alpha) \in K(\alpha)$. به طور خاص اگر $\alpha \in L$ بر روی یک زیرمیدان ثابت جبری باشد، آنگاه α یک مقدار ثابت است.

با درنظر گرفتن چندجمله‌ای‌های دیفرانسیلی تعریف ۵.۲.۳ بیان تازه‌ای به صورت زیر خواهد داشت.

تعریف ۵.۲.۲. فرض کنیم $L \supseteq L$ یک توسیع میدان و $\alpha \in K$. اگر $p(y) \in K\{y\} \setminus \{0\}$ وجود داشته باشد به طوری که $p(\alpha) = 0$، آنگاه α را جبری دیفرانسیلی روی K می‌نامیم. در غیر این صورت، α را متعالی دیفرانسیلی روی K گوییم.

تعریف ۵.۲.۳. فرض کنیم $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in K$. در این صورت می‌گوییم $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ روی K وابسته جبری دیفرانسیلی هستند هرگاه $F(y_1, \ldots, y_n) \in K\{y_1, \ldots, y_n\}$ موجود باشد به طوری که داشته باشیم $F(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = 0$. در غیر این صورت، گفته می‌شود که $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ بر روی K متعالی دیفرانسیلی هستند.

اکنون لازم است تا به معرفی یک کمیت جدید بپردازیم تا بتوانیم در ادامه مطلب از آن استفاده کنیم. این کمیت جدید درجه تعالی نام دارد.

تعریف ۵.۲.۴ (درجه تعالی). بیشترین تعداد عناصر مستقل دیفرانسیلی در $K\langle\alpha\rangle$ را نسبت به K درجه تعالی می‌نامیم و با نماد $\operatorname{tr.deg} K\langle\alpha\rangle/K$ نمایش می‌دهیم.

به عبارت دیگر می‌توان گفت اگر $\operatorname{tr.deg} K\langle\alpha\rangle/K = 0$ آنگاه α روی K جبری دیفرانسیلی و اگر $\operatorname{tr.deg} K\langle\alpha\rangle/K = 1$ آنگاه α روی K متعالی دیفرانسیلی است.

مثال ۵.۲.۱. فرض کنیم $K = \mathbb{C}$ و $\alpha = e^x$. مشتق α' برابر با e^x است و هیچ معادله دیفرانسیلی جبری با ضرایب مختلط وجود ندارد که $F(\alpha) = 0$ برای آن برقرار باشد. بنابراین $\operatorname{tr.deg} \mathbb{C}\langle e^x\rangle/\mathbb{C} = 1$.

مثال ۵.۲.۲. فرض کنیم $K = \mathbb{C}(x)$ و $\alpha = x$. مشتق α' درون K قرار دارد و α جبری دیفرانسیلی است. بنابراین $\operatorname{tr.deg} \mathbb{C}(x)\langle x\rangle/\mathbb{C}(x) = 0$ و α روی K متعالی دیفرانسیلی است.

اکنون که با مفهوم درجه تعالی آشنا شدیم می‌توانیم یک لم مهم و کلیدی را دنبال کنیم

لم ۵.۲.۱. فرض کنیم $K \subseteq L$ میدان‌های دیفرانسیلی با مشخصه صفر و $\alpha \in L$. آنگاه α روی K جبری دیفرانسیلی است اگر و تنها اگر $\operatorname{tr.deg} K\langle\alpha\rangle/K < \infty$.

اثبات. $(\Rightarrow)$ فرض کنیم α روی K جبری دیفرانسیلی و مجموعه $A(y) \in K\{y\}$ یک مجموعه مشخصه از $\mathbb{I}(\alpha) \subseteq K\{y\}$ باشد. فرض کنیم $\operatorname{ord}(A) = n$. ادعا می‌کنیم که $\operatorname{tr.deg} K\langle\alpha\rangle/K = n$. با توجه به تعریف درجه تعالی، بدیهی است که $\alpha, \alpha', \ldots, \alpha^{(n-1)}$ بر روی K جبری دیفرانسیلی نیستند و مستقل جبری هستند. اما $\alpha^{(n)}$ بر روی $K(\alpha, \alpha', \ldots, \alpha^{(n-1)})$ جبری است. از آنجایی که $A(\alpha) = 0$ خواهیم داشت $S_A(\alpha) \cdot \alpha^{(n+1)} + T_A(\alpha) = 0$ که در آن $T_A(\alpha) \in K(\alpha, \ldots, \alpha^{(n)})$ است. با توجه به این رابطه درمی‌یابیم که $\alpha^{(n+1)} = -\frac{T_A(\alpha)}{S_A(\alpha)} \in K(\alpha, \alpha', \ldots, \alpha^{(n)})$ و از آن نتیجه می‌گیریم که برای هر عدد طبیعی k داریم $\alpha^{(n+k)} \in K(\alpha, \alpha', \ldots, \alpha^{(n)})$. پس داریم $K\langle\alpha\rangle = K(\alpha, \alpha', \ldots, \alpha^{(n)})$ و در نتیجه خواهیم داشت $\operatorname{tr.deg} K\langle\alpha\rangle/K = n$.

$(\Leftarrow)$ $n = \operatorname{tr.deg} K\langle\alpha\rangle/K < \infty$ دلالت بر آن دارد که مجموعه $\{\alpha, \alpha', \ldots, \alpha^{(n)}\}$ روی K وابسته جبری است. بنابراین α روی K جبری یفرانسیلی است. $\square$

تذکر ۵.۲.۱. با توجه به مثال‌های ۵.۲.۱ و ۵.۲.۲ خواهیم داشت اگر α روی K دیفرانسیلی جبری باشد و چندجمله‌ای $f(y) \neq 0$ یک چندجمله‌ای دیفرانسیلی با کمترین مرتبه‌ای باشد که در α صفر می‌شود، آنگاه خواهیم داشت $\operatorname{tr.deg}_K K\langle\alpha\rangle = \operatorname{ord}(f)$.

مثال ۵.۲.۳. دو میدان دیفرانسیلی $K = \left(\mathbb{R}(x), \frac{d}{dx}\right)$ و $L = \left(K(e^x, \sin(x)), \frac{d}{dx}\right)$ را درنظر می‌گیریم. از آنجایی که $\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$ و $(\frac{d}{dx})^2(\sin(x)) = -\sin(x)$ تابع‌های e^x و $\sin(x)$ هر دو بر روی K جبری دیفرانسیلی هستند. علاوه بر این $\operatorname{tr.deg}_K(K\langle e^x\rangle) = 1$ و $\operatorname{tr.deg}_K(K\langle\sin(x)\rangle) = 2$.

مطابق معمول می‌گوییم $K \supseteq L$ روی K جبری دیفرانسیلی است، اگر هر عنصر $a \in L$ روی K جبری دیفرانسیلی باشد. توجه می‌کنیم که هر توسیع میدان دیفرانسیلی، با درجه تعالی متناهی، جبری دیفرانسیلی است. اما عکس آن لزوماً برقرار نیست.

لم ۵.۲.۲. فرض کنیم $K \supseteq L$ یک توسیع میدان دیفرانسیلی و $a, b \in L$ روی K جبری دیفرانسیلی باشند. در این صورت $a + b$، ab، $\delta(a)$ و a^{-1} (برای $a \neq 0$) نیز بر روی K جبری دیفرانسیلی هستند. به طور خاص، یک توسیع میدان دیفرانسیلی که توسط عناصر جبری دیفرانسیلی بر روی K ایجاد شده است و مجموعه تمامی عناصر در L که روی K جبری دیفرانسیلی هستند، یک توسیع میدان دیفرانسیلی از K است.

اثبات. تناهی درجه تعالی $K\langle a\rangle$ و $K\langle b\rangle$ به صورت $\operatorname{tr.deg}_K K\langle a\rangle < \infty$ و $\operatorname{tr.deg}_K K\langle b\rangle < \infty$ است. پس $\operatorname{tr.deg}_K K\langle a, b\rangle/K = \operatorname{tr.deg}_K K\langle a\rangle/K + \operatorname{tr.deg}_K K\langle b\rangle/K < \infty$. $\square$

لم ۵.۲.۳. اگر $K \subseteq L \subseteq M$ میدان‌های دیفرانسیلی باشند، آنگاه M بر روی K جبری دیفرانسیلی است اگر و تنها اگر M روی L و L روی K جبری دیفرانسیلی باشد.

اثبات. $(\Rightarrow)$ واضح است، زیرا در تعریف جبری دیفرانسیلی بودن صدق می‌کند.

$(\Leftarrow)$ هر عنصر متعلق به M روی L جبری دیفرانسیلی است. اگر این عنصر دلخواه را a بنامیم، آنگاه چندجمله‌ای دیفرانسیلی $p(y) \in L\{y\} \setminus \{۰\}$ وجود دارد به طوری که $p(a) = ۰$. مجموعه ضرایب $p(y)$ را $\{b_۱, \dots, b_t\}$ قرار می‌دهیم که زیرمجموعه‌ای از L است. پس داریم

$$\mathrm{tr.deg}_K K\langle b_۱, \dots, b_t, a\rangle/K =$$

$$\mathrm{tr.deg}_K K\langle b_۱, \dots, b_t\rangle/K + \mathrm{tr.deg}_K K\langle b_۱, \dots, b_t, a\rangle/K\langle b_۱, \dots, b_t\rangle < \infty.$$

بنابراین $\mathrm{tr.deg}_K K\langle a\rangle/K < \infty$ و a روی K جبری دیفرانسیلی است. □

۵.۳ قضیه عنصر اولیه دیفرانسیلی

هدف اصلی این بخش، تعرفی یکی از قضایای بنیادین جبر دیفرانسیلی است. برای بیان و اثبات این قضیه لازم داریم تا برخی مقدمات را معرفی کنیم. ابتدا به معرفی مشابه این قضیه در جبر کلاسیک می‌پردازیم و با بیان چند لم و استفاده از مفاهیم جبر خطی، به قضیه مهم مورد نظر در این بخش خواهیم رسید. از جبر کلاسیک می‌دانیم که یک توسیع جبری متناهی از میدان K با مشخصه صفر، یک عنصر اولیه مانند ω دارد به طوری که $K(a_۱, \dots, a_n) = K(\omega)$. حال بر آن هستیم تا مسئله ای مشابه را برای هر میدان دیفرانسیلی دلخواه با مشخصه صفر، مورد بحث و بررسی قرار دهیم. به منظور درک بهتر این قضیه مطالعه و بررسی مثال زیر را دنبال می‌کنیم. میدان کسرهای $\mathbb{Q}(x,y) = \{\frac{f}{g} \mid f, g \in \mathbb{Q}[x,y], g \neq ۰\}$ را درنظر می‌گیریم. در مثال بعدی، قصد آن داریم تا عنصر اولیه را روی یک توسیع میدان از اعداد گویا به دست آوریم. در این مثال، یک عنصر اولیه برای توسیع میدان $\mathbb{Q}(\sqrt{۲}, \sqrt{۳})$ بر $\mathbb{Q}$ را بررسی می‌کنیم.

مثال ۵.۳.۱. توسیع میدان $\mathbb{Q}(\sqrt{۲}, \sqrt{۳})$ بر میدان $\mathbb{Q}$ به صورت ترکیبی از دو عدد $\sqrt{۲}$ و $\sqrt{۳}$ است. هدف ما این است که نشان دهیم $\alpha = \sqrt{۲} + \sqrt{۳}$ یک عنصر اولیه است. پیش از این با بعد یک ایده‌آل آشنا شدیم. با توجه به این موضوع، کافی است نشان دهیم که مجموعه $\{۱, \sqrt{۲} + \sqrt{۳}, (\sqrt{۲} + \sqrt{۳})^۲, (\sqrt{۲} + \sqrt{۳})^۳\}$

یک پایه برای $\frac{\mathbb{Q}[x,y]}{\langle x^{۲}-۲,y^{۲}-۳\rangle}$ به عنوان یک Q- فضای برداری می‌باشد. پس باید مستقل خطی بودن و مولد بودن را بررسی کنیم. با این بررسی خواهیم دید که $\alpha = \sqrt{۲} + \sqrt{۳}$ یک عنصر اولیه برای توسیع $\mathbb{Q}(\sqrt{۲}, \sqrt{۳})$ بر $\mathbb{Q}$ است و در نتیجه $\mathbb{Q}(\sqrt{۲}, \sqrt{۳}) = \mathbb{Q}(\alpha)$.

تذکر ۵.۳.۱. عنصر اولیه لزوماً یکتا نیست. با راهبردی مشابه با مثال فوق، خواهیم دید که $\beta = \sqrt{۲} - \sqrt{۳}$ نیز یک عنصر اولیه برای $\mathbb{Q}(\sqrt{۲}, \sqrt{۳})$. است و می‌نویسیم $\mathbb{Q}(\sqrt{۲}, \sqrt{۳}) = \mathbb{Q}(\beta)$

نتیجه ۵.۳.۱. می‌توان گفت که عنصر اولیه منحصر به فرد نیست و می‌توان از ترکیب‌های مختلف از $\sqrt{۲}$ و $\sqrt{۳}$ به عنوان عنصر اولیه استفاده کرد.

و اینک به سراغ مثالی می‌رویم که این قضیه را در فرم دیفرانسیلی به نمایش می‌گذارد.

مثال ۵.۳.۲. میدان دیفرانسیلی $\mathbb{Q}\langle \pi, e\rangle$ را در نظر می‌گیریم. از آنجایی که $\delta(\pi) = \delta(e) = ۰$ پس این میدان دیفرانسیلی، یک توسیع میدان متناهی مولد از $\mathbb{Q}$ است. پس واضح است که برای هر $\omega \in \mathbb{Q}\langle \pi, e\rangle$ همواره $\mathbb{Q}\langle \pi, e\rangle \neq \mathbb{Q}\langle \omega\rangle$.

این مثال نشان می‌دهد که برای به دست آوردن قضیه ای مشابه با قضیه عنصر اولیه در جبر دیفرانسیلی، نیاز به برخی محدودیت‌ها داریم. ازمثال مطرح شده درمی‌یابیم که برای یک میدان دیفرانسیلی معمولی مانند (K, δ) یک شرط خفیف، آن است که این میدان، شامل یک عنصر غیرثابت باشد. به بیان ریاضی، عنصری مانند $\eta \in K$ موجود باشد، به طوری که $\delta(\eta) \neq ۰$. برای رسیدن به قضیه اصلی این بخش، نیاز به معرفی دو لم داریم. در طول این بخش، (K, δ) یک میدان دیفرانسیلی معین، با مشخصه صفر است که به طوری که یک عنصر غیر ثابت را شامل می‌شود. از مفاهیم جبر خطی یادآوری می‌شود که عناصر $\eta_۱, \ldots, \eta_s$ وابسته خطی نامیده می‌شوند، هرگاه رابطه $c_۱\eta_۱ + \cdots + c_s\eta_s = ۰$ به گونه ای وجود داشته باشد که همه c_i ها صفر نباشند. همچنین رونسکین برای مجموعه ای از $\eta_۱, \ldots, \eta_s$ یک دترمینان است که به صورت زیر است:

$$\mathrm{wr}(\eta_۱, \ldots, \eta_s) = \begin{vmatrix} \eta_۱ & \cdots & a_{۱n} \\ \eta_۱' & \cdots & \eta_s' \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \eta_۱^{(s-۱)} & \cdots & \eta_s^{(s-۱)} \end{vmatrix}$$

لم ۵.۳.۱. فرض کنیم $\eta_1, \dots, \eta_s$ عناصری در K باشند. در این صورت، $\eta_1, \dots, \eta_s$ مستقل خطی هستند اگر و تنها اگر $\mathrm{wr}(\eta_1, \dots, \eta_s) = 0$، یعنی

$$\begin{vmatrix} \eta_1 & \cdots & a_{1n} \\ \eta_1' & \cdots & \eta_s' \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \eta_1^{(s-1)} & \cdots & \eta_s^{(s-1)} \end{vmatrix} = 0 \qquad (*)$$

اثبات. $(\Leftarrow)$ فرض کنیم $\eta_1, \dots, \eta_s$ خطی وابسته باشند. آنگاه اعداد ثابت $c_1, \dots, c_s$ در K وجود دارند که همگی صفر نیستند و $c_1\eta_1 + \cdots + c_s\eta_s = 0$. با $s-1$ بار مشتق‌گیری از این رابطه، دستگاه معادلات خطی زیر برای ضرایب c_i به دست می‌آید.

$$\begin{cases} c_1\eta_1 + \cdots + c_s\eta_s = 0 \\ c_1\eta_1' + \cdots + c_s\eta_s' = 0 \\ \qquad\cdots \\ c_1\eta_1^{(s-1)} + \cdots + c_s\eta_s^{(s-1)} = 0 \end{cases}$$

این دستگاه دارای یک جواب ناصفر است؛ بنابراین شرط $(*)$ برقرار است.

$(\Rightarrow)$ حال فرض کنیم شرط $(*)$ برقرار باشد. نشان می‌دهیم که $\eta_1, \dots, \eta_s$ وابسته خطی هستند. این کار را با استقرا روی s انجام می‌دهیم. طبق فرض صفر اگر $s = 1$ باشد، آنگاه $\eta_1 = 0$ و بنابراین وابسته خطی است.

فرض استقرا را اینگونه در نظر می‌گیریم که ادعا برای تمام مقادیر کوچکتر یا مساوی با $s-1$ برقرار باشد و اکنون حالت s را بررسی می‌کنیم. با توجه به شرط $(*)$، اعداد ثابت $c_1, \dots, c_s$ وجود دارند که همگی صفر نیستند، به طوری که برای $j = 0, \dots, s-1$ داریم

$$c_1\eta_1^{(j)} + \cdots + c_s\eta_s^{(j)} = 0. \qquad (**)$$

حال اگر داشته باشیم

$$\mathrm{wr}(\eta_1, \dots, \eta_{s-1}) = \begin{vmatrix} \eta_1 & \cdots & \eta_{s-1} \\ \eta'_1 & \cdots & \eta'_{s-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \eta_1^{(s-2)} & \cdots & \eta_{s-1}^{(s-2)} \end{vmatrix} = 0,$$

طبق فرض استقرا $\eta_1, \dots, \eta_{s-1}$ وابسته خطی‌اند. پس نشان دادن وابستگی خطی برای $\eta_1, \dots, \eta_s$ کافی است. اگر $\mathrm{wr}(\eta_1, \dots, \eta_{s-1}) \neq 0$، آنگاه $c_s \neq 0$ و با تقسیم معادله‌ها بر c_s (در صورت نیاز) درمی‌یابیم که $c_s = 1$. حال برای $j = 0, \dots, s-2$ از معادله $(**)$ مشتق می‌گیریم و معادله متناظر با $j+1$ را از آن کم می‌کنیم. به این ترتیب به معادله زیر می‌رسیم.

$$c'_1\eta_1^{(j)} + \cdots + c'_{s-1}\eta_{s-1}^{(j)} = 0 \quad \text{برای} \quad j = 0, \dots, s-2.$$

از آنجایی که $\mathrm{wr}(\eta_1, \dots, \eta_{s-1}) \neq 0$، نتیجه می‌گیریم $c'_i = 0$ برای $i = 1, \dots, s-1$. بنابراین، $\eta_1, \dots, \eta_s$ وابسته خطی‌اند.

□

لم ۲.۳.۵. اگر G یک چندجمله‌ای دیفرانسیلی ناصفر در $K\{y_1, \dots, y_n\}$ باشد، آنگاه عناصر $\eta_1, \dots, \eta_n$ در K وجود دارند به طوری که $G(\eta_1, \dots, \eta_n) \neq 0$.

اثبات. کافی است یک چندجمله‌ای دیفرانسیلی را در حالت تک متغیره y بررسی کنیم. پس مورد $n = 1$ را در نظر می‌گیریم. در ادامه r یک عدد طبیعی ثابت و ξ یک عنصر غیرثابت در K است.

ادعا می‌کنیم که اگر $G \in K\{y\}$ یک چندجمله‌ای دیفرانسیلی ناصفر از مرتبه کوچکتر از r باشد، آنگاه $\eta = c_0 + c_1\xi + \cdots + c_r\xi^r$ وجود دارد که در آن ضرایب ثابت c_i از K هستند، به طوری که $G(\eta) \neq 0$.

به برهان خلف، فرض کنیم این ادعا نادرست باشد و H یک چندجمله‌ای دیفرانسیلی ناصفر با کمترین مرتبه‌ای باشد که برای هر مقدار $\eta = c_0 + c_1\xi + \cdots + c_r\xi^r$ صفر می‌شود. مرتبهٔ H را $\mathrm{ord}(H, y) = s$ می‌نامیم که در آن $0 \leq s \leq r$. اکنون متغیرهای جبری $z_0, \dots, z_r$ را معرفی می‌کنیم که $z'_i = 0$ باشد. پس $H = H(z_0 + z_1\xi + \cdots + z_r\xi^r) \in K[z_0, \dots, z_r]$ چندجمله‌ای صفر است. با مشتق‌گیری جزئی از H نسبت به $z_0, \dots, z_s$ داریم

$$\begin{cases} \overline{\frac{\partial H}{\partial y}} = 0, \\ \overline{\frac{\partial H}{\partial y}}\,\xi + \overline{\frac{\partial H}{\partial y'}}\,\xi' + \cdots + \overline{\frac{\partial H}{\partial y_{(s)}}}\,\xi^{(s)} = 0, \\ \cdots \\ \overline{\frac{\partial H}{\partial y}}\,\xi^s + \overline{\frac{\partial H}{\partial y'}}(\xi^s)' + \cdots + \overline{\frac{\partial H}{\partial y_{(s)}}}(\xi^s)^{(s)} = 0, \end{cases} \qquad \overline{\frac{\partial H}{\partial y_{(j)}}} = \frac{\partial H}{\partial y_{(j)}}(z_0 + \cdots + z_r\xi^r)$$

پس داریم

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \xi & \xi' & \cdots & \xi^{(s)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \xi^s & (\xi^s)' & \cdots & (\xi^s)^{(s)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{\frac{\partial H}{\partial y}} \\ \overline{\frac{\partial H}{\partial y'}} \\ \vdots \\ \overline{\frac{\partial H}{\partial y^{(s)}}} \end{pmatrix} = 0.$$

از آنجا که $\overline{\frac{\partial H}{\partial y^{(s)}}}$ دارای رتبه کمتری نسبت به H است، داریم $\overline{\frac{\partial H}{\partial y^{(s)}}} \neq 0$. بنابراین

$$\begin{vmatrix} \xi' & (\xi^2)' & \cdots & (\xi^s)' \\ \xi'' & (\xi^2)'' & \cdots & (\xi^s)'' \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \xi^{(s)} & (\xi^2)^{(s)} & \cdots & (\xi^s)^{(s)} \end{vmatrix} = \mathrm{wr}(\xi', (\xi^2)', \ldots, (\xi^s)') = 0.$$

پس ضرایب ثابت $c_1, \ldots, c_s$ متعلق به K وجود دارند، که همگی برابر صفر نیستند، به طوری که: $c_1\xi' + c_2(\xi^2)' + \cdots + c_s(\xi^s)' = 0$. در نتیجه $c_1\xi + c_2\xi^2 + \cdots + c_s\xi^s = c_0$ که در آن c_0 یک ثابت است. بنابراین ξ بر روی میدان ثابت‌های K جبری است. با توجه به نتیجه $\xi' = 0$، که این با فرضیه $\xi' \neq 0$ در تضاد است. پس می‌توان $\eta = c_0 + c_1\xi + \cdots + c_r\xi^r$ با ضرایب ثابت c_i پیدا کرد به طوری که $G(\eta) \neq 0$.

برای حالت مشتق‌گیری جزئی $(K, \{\delta_1, \ldots, \delta_m\})$، شرط وجود $\xi \in K$ به طوری که $\xi' = 0$ با شرط

وجود $\xi_1, \ldots, \xi_m \in K$ جایگزین می‌شود به طوری که

$$\begin{vmatrix} \delta_1(\xi_1) & \cdots & \delta_1(\xi_m) \\ \delta_2(\xi_1) & \cdots & \delta_2(\xi_m) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \delta_m(\xi_1) & \cdots & \delta_m(\xi_m) \end{vmatrix} \neq 0.$$

□

تذکر ۵.۳.۲. لم ۵.۳.۲ به عنوان «چندجمله‌ای‌های دیفرانسیلی ناصفر » شناخته می‌شود. ضمن آنکه این لم به عنوان مشابه دیفرانسیلی قضیه زیر، در جبر شناخته می‌شود.

قضیه ۵.۳.۱. فرض کنیم K یک میدان نامتناهی باشد. آنگاه برای هر چندجمله‌ای ناصفر $f \in K[y_1, \ldots, y_n]$ عناصر $(a_1, \ldots, a_n) \in K^n$ وجود دارند به طوری که $f(a_1, \ldots, a_n) \neq 0$.

قضیه ۵.۳.۲ (قضیه عنصر اولیه دیفرانسیلی). فرض کنیم (K, δ) یک میدان دیفرانسیلی ناثابت باشد، یعنی عنصری ماندد $b \in K$ وجود دارد طوری که $\delta(b) \neq 0$. همچنین فرض کنیم مشخصه این میدان صفر یاشد. اگر $K\langle\alpha_1, \ldots, \alpha_n\rangle$ جبری دیفرانسیلی روی K باشد، آنگاه عنصر $\xi \in K\langle\alpha_1, \ldots, \alpha_n\rangle$ وجود دارد به طوری که $K\langle\alpha_1, \ldots, \alpha_n\rangle = K\langle\xi\rangle$.

اثبات. کافی است نشان دهیم که اگر γ, β نسبت به K جبری دیفرانسیلی باشند، آنگاه عنصری مانند $e \in K$ وجود دارد به طوری که $K\langle\gamma, \beta\rangle = K\langle\gamma + e\beta\rangle$. متغیر دیفرانسیلی جدید t را روی $K\langle\gamma, \beta\rangle$ معرفی کرده و عبارت $\gamma + t\beta \in K\langle t\rangle\langle\gamma, \beta\rangle$ را در نظر می‌گیریم. با توجه به لم ۵.۲.۲ درمی‌یابیم که $\gamma + t\beta$ نسبت به $K\langle t\rangle$ جبری دیفرانسیلی است. ایده آل دیفرانسیلی اول $\mathbb{I}(\gamma + t\beta) \subseteq K\langle t\rangle\{y\}$ را در نظر می‌گیریم فرض کنیم $A(y) \in K\langle t\rangle\{y\}$ یک مجموعه مشخصه از $\mathbb{I}(\gamma + t\beta)$ باشد. آنگاه $A(\gamma + t\beta) = 0$.

اما داریم $S_A(\gamma + t\beta) \neq 0$. فرض کنیم $\operatorname{ord}(A) = s$. با حذف مخرج‌ها در صورت لزوم، می‌توانیم $A \in K\{t, y\}$ را در نظر بگیریم و به منظور سهولت در نوشتار به صورت $A(t, y)$ بنویسیم.

اکنون داریم $A(t, \gamma + t\beta) = 0$ اما $\frac{\partial A}{\partial y^{(s)}}(t, \gamma + t\beta) \neq 0$. توجه داریم که:

$$\frac{\partial((\gamma + t\beta)^{(k)})}{\partial t^{(s)}} = \begin{cases} 0, & k < s, \\ \beta, & k = s. \end{cases} \quad \text{for} \qquad k \leq s.$$

مشتق جزئی $A(t, \gamma + t\beta) = 0$ را نسبت به $t^{(s)}$ می‌گیریم. در این صورت و با انجام محاسبات رابطه‌ای به صورت $\frac{\partial A}{\partial t^{(s)}}(t, \gamma+t\beta)+\beta \cdot \frac{\partial A}{\partial y^{(s)}}(t, \gamma+t\beta) = 0$ به دست خواهیم آورد. از آنجا که $\frac{\partial A}{\partial y^{(s)}}(t, \gamma+t\beta) \neq 0$ و این عبارت متعلق به $K\langle\gamma, \beta\rangle\{t\}$ است، طبق لم ۲.۳.۵ عنصری مانند $e \in K$ وجود دارد به طوری که $\frac{\partial A}{\partial y^{(s)}}(e, \gamma + e\beta) \neq 0$ و در نتیجه خواهیم داشت

$$\beta = -\frac{\frac{\partial A}{\partial t^{(s)}}(e, \gamma + e\beta)}{\frac{\partial A}{\partial y^{(s)}}(e, \gamma + e\beta)} \in K\langle\gamma + e\beta\rangle$$

. پس با دستیابی به $K\langle\gamma, \beta\rangle = K\langle\gamma + e\beta\rangle$ حکم را اثبات نموده‌ایم. $\square$

نتیجه ۲.۳.۵. فرض کنیم (K, δ) یک میدان دیفرانسیلی ناثابت باشد. همچنین فرض کنیم $K\langle\eta_1, \ldots, \eta_n\rangle$ یک توسیع میدان جبری دیفرانسیلی از K باشد. در این صورت، عناصر $e_1, \ldots, e_n \in K$ وجود دارند به طوری که $K\langle\eta_1, \ldots, \eta_n\rangle = K\langle e_1\eta_1 + \cdots + e_n\eta_n\rangle$.

۴.۵ پایه دیفرانسیلی متعالی

این بخش را با چند تعریف آغاز می‌کنیم. ابتدا مفهوم وابسته جبری دیفرانسیلی را روی یک حلقه دیفرانسیلی تعریف کرده، به تعمیم آن روی توسیع میدان دیفرانسیلی خواهیم پرداخت.

تعریف ۱.۴.۵ (وابسته جبری دیفرانسیلی). فرض کنیم R یک حلقه دیفرانسیلی باشد. عناصر $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ در یک زیرحلقه دیفرانسیلی S از R وابسته جبری دیفرانسیلی وری R نامیده می‌شوند، هرگاه چندجمله‌ای دیفرانسیلی ناصفری مانند $G \in R\{y_1, \ldots, y_n\}$ موجود باشد، به طوری که $G(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = 0$.

تعریف ۵.۴.۲. در تعریف فوق، اگر چندجمله‌ای دیفرانسیلی G وجود نداشته باشد، عناصر $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ را مستقل جبری دیفرانسیلی روی R می‌نامیم.

تعریف ۵.۴.۳. مجموعه S مستقل جبری دیفرانسیلی روی R نامیده می‌شود، هر گاه همه زیرمجموعه های متناهی آن، مستقل جبری دیفرانسیلی روی R باشند.

تعریف ۵.۴.۴. فرض کنیم $(K,\delta) \subseteq (L,\delta)$ یک توسیع میدان دیفرانسیلی و $A \subseteq L$. یک عنصر $b \in L$ مستقل جبری دیفرانسیلی در A (روی K) نامیده می‌شود، هرگاه b جبری دیفرانسیلی روی $K\langle A\rangle$ باشد.

تعریف ۵.۴.۵. $B \subseteq L$ وابسته جبری دیفرانسیلی در A (روی K) نامیده می‌شود، هرگاه هر عنصر از B وابسته جبری دیفرانسیلی در A باشد.

لم ۵.۴.۱. فرض کنیم $(K,\delta) \subseteq (L,\delta)$ یک توسیع میدان دیفرانسیلی و $A \subseteq L$ و $b \in L$. در این صورت b وابسته جبری دیفرانسیلی در A است، اگر و تنها اگر $f \in K\{y_1, \ldots, y_n, z\}$ و $a_1, \ldots, a_n \in A$ به طوری که $f(a_1, \ldots, a_n, z) \neq 0$ و $f(a_1, \ldots, a_n, b) = 0$.

اثبات. $(\Leftarrow)$ طبق تعریف وابستگی جبری دیفرانسیلی بدیهی است.

$(\Rightarrow)$ فرض کنیم b وابسته جبری دیفرانسیلی در A باشد. در این صورت با استفاده از تعریف، b جبری دیفرانسیلی روی $K\langle A\rangle$ است. بنابراین چندجمله‌ای دیفرانسیلی ناصفر g در حلقه $K\langle A\rangle\{z\}$ موجود است، به طوری که $g(b) = 0$. فرض کنیم $\{a_1, \ldots, a_n\} \subseteq A$ زیرمجموعه ای باشد که به طور مؤثر در ضرایب g ظاهر می‌شود. با ضرب g در عنصری مناسب از $K\{a_1, \ldots, a_n\}$، می‌توانیم فرض کنیم که: $g \in K\{a_1, \ldots, a_n, z\}$. در نتیجه، این چندجمله‌ای g دو ویژگی مورد نظر در فرض لم را تأمین می‌کند. □

لم ۵.۴.۲. فرض کنیم $K \subseteq L$ یک توسیع میدان دیفرانسیلی باشد. باشد و $A \subset L$ زیرمجموعه ای باشد که عناصر آن، مستقل جبری دیفرانسیلی روی K باشند. فرض کنیم $b \in L$. اگر A و b وابسته جبری دیفرانسیلی روی روی K باشند، آنگاه b جبری دیفرانسیلی روی K است.

اثبات. از آنجا که A, b بر روی K به طور جبری دیفرانسیلی وابسته‌اند، پس $0 \neq f \in K\{y_1, \ldots, y_n, z\}$ وجود دارد به طوری که برای $a_1, \ldots, a_n \in A$ داریم $f(a_1, \ldots, a_n, b) = 0$. از آنجا که $a_1, \ldots, a_n$ بر روی K به طور جبری دیفرانسیلی مستقلند و $f(a_1, \ldots, a_n, z) \neq 0$ و درنتیجه b روی $K\langle A\rangle$ به طور جبری دیفرانسیلی است. □

لم ۵.۴.۳. (تراگذری وابستگی جبری دیفرانسیلی) فرض کنیم $(K,\delta) \subseteq (L,\delta)$ و $A, B, C \subseteq L$. اگر A روی B به طور جبری دیفرانسیلی وابسته باشد و B روی C به طور جبری دیفرانسیلی وابسته باشد، آنگاه A روی C به طور جبری دیفرانسیلی وابسته است.

اثبات. با توجه به فرض، داریم: $K\langle B\rangle\langle A\rangle$ جبری دیفرانسیلی روی $K\langle B\rangle$ است. از طرفی $K\langle C\rangle\langle B\rangle$ جبری دیفرانسیلی روی $K\langle C\rangle$ است. طبق لم ۵.۲.۳ داریم $K\langle C\rangle\langle B\rangle\langle A\rangle$ روی $K\langle C\rangle$ جبری دیفرانسیلی است. در نتیجه هر عنصر A روی $K\langle C\rangle$ به طور جبری دیفرانسیلی است. $\square$

لم ۵.۴.۴. (ویژگی تبادل) فرض کنیم $a_1, \ldots, a_n, b$ عناصری از یک میدان امتداد δ-دار از K باشند. اگر b روی $a_1, \ldots, a_n$ به طور جبری دیفرانسیلی وابسته باشد ولی روی $a_1, \ldots, a_{n-1}$ نباشد، آنگاه a_n روی $a_1, \ldots, a_{n-1}, b$ به طور جبری دفرانسیلی وابسته است.

اثبات. از آنجا که b بر روی $a_1, \ldots, a_n$ به طور جبری دیفرانسیلی وابسته است، طبق لم ۵.۴.۲ عنصری داریم مانند $g \in K\{y_1, \ldots, y_n, z\} \setminus \{0\}$ به طوری که $g(a_1, \ldots, a_n, b) = 0$ و $g(a_1, \ldots, a_n, z) \neq 0$. چندجمله‌ای δ را به عنوان چندجمله‌ای یک‌متغیره در y_n با ضرایب از $K\{y_1, \ldots, y_{n-1}, z\}$ در نظر می‌گیریم و قرار می‌دهیم $g_1, \ldots, g_n \in K\{y_1, \ldots, y_{n-1}, z\}$ تمام ضرایب ناصفر g باشند. در این صورت، عددی صحیح i وجود دارد که $g_i(a_1, \ldots, a_{n-1}, z) \neq 0$. در غیر این صورت $g(a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n, z) = 0$. از آنجا که b روی $a_1, \ldots, a_{n-1}$ به طور جبری دیفرانسیلی وابسته نیست، نتیجه می‌گیریم $g_i(a_1, \ldots, a_{n-1}, b) \neq 0$. پس $g(a_1, \ldots, a_{n-1}, y_n, b) \neq 0$ و $g(a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n, b) = 0$. در نتیجه a_n روی $a_1, \ldots, a_{n-1}, b$ به طور جبری دیفرانسیلی وابسته است. $\square$

گزاره ۵.۴.۱. فرض کنیم $K \subseteq L$ یک توسیع میدان دیفرانسیلی باشد و داشته باشیم $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$، $B = \{b_1, \ldots, b_m\}$ دو زیرمجموعه از L باشند. اگر ۱) مجموعه A نسبت به K مستقل جبری دیفرانسیلی باشد ۲) مجموعه A نسبت به B وابسته جبری دیفرانسیلی باشد آنگاه $n \leq m$.

اثبات. بگذارید $r = |A \cap B|$ باشد. اگر $r = n$ باشد، نتیجه حاصل است. حال فرض کنیم $r < n$ و می‌نویسیم: $B = a_1, \ldots, a_r, b_{r+1}, \ldots, b_m$. از آنجا که a_{r+1} نسبت به مجموعه $\{a_1, \ldots, a_r, b_{r+1}, \ldots, b_m\}$ وابسته جبری دیفرانسیلی است ولی نسبت به $\{a_1, \ldots, a_r\}$ وابسته نیست، عددی صحیح j با شرط $r+1 \leq j \leq m$ وجود دارد به طوری‌که a_{r+1} نسبت به $\{a_1, \ldots, a_r, b_{r+1}, \ldots, b_j\}$ وابسته جبری دیفرانسیلی است

ولی نسبت به $\{a_1, \dots, a_r, b_{r+1}, \dots, b_{j-1}\}$ وابسته نیست. با استفاده از لم ۴.۴.۵ نتیجه می‌گیریم که b_j نسبت به: $\{a_1, \dots, a_r, b_{r+1}, \dots, b_{j-1}, a_{r+1}\}$ وابسته جبری دیفرانسیلی است. در این صورت، مجموعه $B_1 := (B \setminus \{b_j\}) \cup \{a_{r+1}\}$ نیز نسبت به B وابسته جبری دیفرانسیلی است. از آنجا که A نسبت به B به طور جبری دیفرانسیلی وابسته است، طبق لم ۳.۴.۵ A نسبت به B_1 نیز به طور جبری دیفرانسیلی وابسته است. توجه داریم که $|B_1| = m$ و $|A \cap B_1| = r + 1$. با ادامه این روند، در نهایت به حالتی می‌رسیم که $r = n$ و به عبارتی $A \subseteq B_{n-r}$. پس نتیجه می‌گیریم که $n \leq m$.

□

گزاره ۲.۴.۵. فرض کنیم $L = K\langle a_1, \dots, a_n\rangle$. علاوه بر آن فرض می‌کنیم K شامل یک عنصر غیرثابت در حالت $d = \delta\text{-tr.deg}(L/K) = 0$ می‌شود. در این صورت L با حداکثر $d + 1$ عنصر، به صورت دیفرانسیلی تولید می‌شود.

اثبات. در حالت $d = 0$ این همان قضیه عنصر اولیه دیفرانسیلی است. حال فرض کنید $d > 0$ باشد. در این صورت، عناصر $\{\xi_1, \dots, \xi_d\} \subseteq \{a_1, \dots, a_n\}$ وجود دارند به طوری که $\xi_1, \dots, \xi_d$ یک پایه متعالی دیفرانسیلی از L روی K را تشکیل می‌دهند. سایر عناصر را با $\xi_{d+1}, \dots, \xi_n$ نمایش می‌دهیم. بنابراین داریم $L = K\langle \xi_1, \dots, \xi_d\rangle/\langle \xi_{d+1}, \dots, \xi_n\rangle = K\langle \xi_1, \dots, \xi_d\rangle\langle a_{d+1}\xi_{d+1} + \dots + a_n\xi_n\rangle$. از آنجایی که $d > 0$ داریم $K\langle \xi_1, \dots, \xi_d\rangle' \neq \{0\}$. □

۵.۵ تابع هیلبرت

در ادامه این بخش، سعی داریم تا با معرفی چند مفهوم و قضیه مهم کار را ادامه دهیم. ابتدا به «چندجمله‌ای هیلبرت» ، «سری هیلبرت» و «تابع هیلبرت» در هندسه جبری می‌پردازیم. این تابع به ویژه برای توصیف نقاط خاص و بررسی درجه چندجمله‌ای‌های مرتبط با مجموعه های جبری کاربرد دارد. برای دستیابی به این هدف لازم است تا با برخی از مفاهیم مقدماتی آشنا شویم. در این قسمت به بیان چند لم و نتایج آن خواهیم پرداخت و مثال‌های مربوط به آن ارائه خواهد شد. در صورتی که علاقه مند به مطالعه اثبات این قضایا و بررسی بیشتر پیرامون آن هستید؛ می‌توانید به منبع [۵] مراجعه نمایید.

در ادامه فرض کنیم $R = K[x_1, \dots, x_n]$ و $I \subseteq R$ یک ایده آل از این حلقه باشد.

لم ۵.۵.۱. تعداد تک‌جله ای‌های R از درجه d برابر است با $\binom{n+d-1}{d}$.

نتیجه ۵.۵.۱. تعداد تک‌جله ای‌های R از درجه حداکثر d برابر است با $\binom{n+d}{d}$.

تذکر ۵.۵.۱. با توجه به اینکه تعداد تک‌جمله ای‌های از درجه حداکثر d برحسب n متغیر، برابر با جمع تک‌جمله ای‌های از درجه $0 \leq i \leq d$ است که برحسب n متغیر در نظر گرفته می‌شود. در این صورت، با توجه به نتایج لم ۵.۵.۱ و نتیجه ۵.۵.۱ اتحاد ترکیبیاتی به صورت $\sum_{i=0}^{d}\binom{n+i-1}{i} = \binom{n+d}{d}$ را خواهیم داشت.

برای هر عدد طبیعی s فرض کنیم $R_{\leq s}$ مجموعه همه چندجمله‌ای‌های از درجه حداکثر s متعلق به R باشد. اگر $I \subset R$ یک ایده آل باشد، آن‌گاه $I_{\leq s}$ را مجموعه چندجمله‌ای‌های از درجه حداکثر s در I تعریف می‌کنیم که برابر است با $I \cap R_{\leq s}$. با یک بررسی ساده در می‌یابیم که $R_{\leq s}$ و $I_{\leq s}$ دارای ساختار K- فضای برداری هستند.

تعریف ۵.۵.۱ (تابع هیلبرت آفین). فرض کنیم I یک ایده آل حلقه R باشد. در این صورت تابع هیلبرت آفین I تابعی است که برای هر عدد طبیعی s به صورت $^a\mathrm{HF}_I(s) := \dim(\frac{R_{\leq s}}{I_{\leq s}}) = \dim_K(R_{\leq s}) - \dim_K(I_{\leq s})$ تعریف می‌شود.

در تعریف فوق، منظور از $\dim_K(X)$ بعد K فضای برداری X است.

مثال ۵.۵.۱. با توجه به نتیجه ۵.۵.۱ اگر $I = \langle 0 \rangle \subseteq R$ آنگاه $^a\mathrm{HF}_I(s) = \binom{n+s}{s}$.

قضیه ۵.۵.۱. فرض کنیم $I \trianglelefteq R$. در این صورت عدد طبیعی m و چندجمله‌ای تک متغیره و یکتای p وجود دارند که برای هر $s \geq m$ داریم $^a\mathrm{HF}_I(s) = p(s)$.

تعریف ۵.۵.۲ (چندجمله‌ای هیلبرت آفین). فرض کنیم I یک ایده آل از حلقه R باشد. در این صورت، چندجمله‌ای یکتای معرفی شده، در قضیه ۵.۵.۱ را چندجمله‌ای هیلبرت آفین I می‌نامیم و با نماد $^a\mathrm{HP}_I(s)$ نمایش می‌دهیم.

قضیه ۵.۵.۲. اگر I یک ایده آل در حلقه R و $\prec$ یک ترتیب تک‌جمله ای مدرج روی R باشد، آنگاه خواهیم داشت $\dim(I) = \dim(\mathrm{LT}(I)) = \deg(^a\mathrm{HP}_I(s))$.

مثال ۵.۵.۲. از آنجایی که چندجمله‌ای هیلبرت آفین $I = \langle x^2, xy\rangle \subset R = K[x,y,z]$ برابر است با $\frac{1}{2}s^2 + \frac{5}{2}s + 1$ پس $\dim(I) = 2$.

اکنون آمادگی آن را داریم تا با مفهوم جدیدی به نام سری هیلبرت آفین آشنا شویم

تعریف ۳.۵.۵ (سری هیلبرت آفین). فرض کنیم I ایده آلی در حلقه R باشد. در این صورت، سری هیلبرت آفین I را به صورت ${}^a\mathrm{HS}_I(z) = \sum_{i=0}^{\infty} {}^a\mathrm{HF}_I(z) \cdot z^i$ تعریف می‌کنیم.

در ادامه تابع هیلبرت (همگن) را معرفی می‌کنیم. فرض کنیم I یک ایده آل همگن، در حلقه $R = K[x_1, \ldots, x_n]$ باشد. برای هر عدد طبیعی s، I_s و R_s را به ترتیب، مجموعه همه چندجمله‌ای‌های همگن از درجه s در I و R همراه با صفر در نظر می‌گیریم. به راحتی مشاهده می‌شود که I_s و R_s دو K- فضای برداری با بعد متناهی هستند.

تعریف ۴.۵.۵ (تابع هیلبرت (همگن)). این تابع برای ایده آل همگن I در s به صورت $\mathrm{HF}_I(s) = \dim(\frac{R_s}{I_s})$ تعریف می‌کنیم. در ادامه از به کار بردن واژه «همگن» خودداری می‌کنیم.

قضیه ۳.۵.۵. اگر I یک ایده آل همگن از R و $\prec$ یک ترتیب تک‌جمله ای از R باشد، آنگاه

۱. تابع هیلبرت I و $\mathrm{LT}(I)$ با هم برابرند.

۲. چندجمله‌ای یکتای p و عدد طبیعی m وجود دارند، به طوری که برای هر $s \geq m$ داریم $\mathrm{HF}_I(s) = p(s)$.

تعریف ۵.۵.۵ (چندجمله‌ای هیلبرت). اگر I یک ایده آل همگن باشد، چندجمله‌ای یکتای معرفی شده در قضیه ۳.۵.۵ را چندجمله‌ای هیلبرت I می‌نامیم و با HP_I نمایش می‌دهیم.

نتیجه ۲.۵.۵. اگر I یک ایده آل همگن باشد، آنگاه $\dim(I) = \deg(\mathrm{HP}_I) + 1$

۶.۵ کاربردها در چندگوناهای دیفرانسیلی

فرض کنیم (K, δ) یک میدان دیفرانسیلی با مشخصه صفر باشد و $V \subseteq \mathbb{A}^n$ یک چندگونای دیفرانسیلی تحویل‌ناپذیر، روی K باشد. مختصات حلقه دیفرانسیلی V به صورت $K\{V\} \triangleq K\{y_1, \ldots, y_n\}/\mathbb{I}(V)$ تعریف می‌شود. در اینجا $K\{V\}$ یک دامنه دیفرانسیلی است و میدان خارج قسمتی دیفرانسیلی متناظر با آن، به

صورت $K\langle V\rangle = \mathrm{Frac}(K\{V\})$ تعریف می‌شود. به طور طبیعی، $K\langle V\rangle$ یک توسیع میدان دیفرانسیلی از K است و میدان توابع دیفرانسیلی V نامیده می‌شود. واضح است که طبق تعریف، اگر $(\bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_n)$ عضوی از $K\langle V\rangle^n$ باشد؛ یک نقطه عام از V خواهد بود. در این صورت، به ازای هر نقطه عام دلخواه دیگری مانند $(a_1, \ldots, a_n)$ خواهیم داشت $K\langle V\rangle = K\langle \bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_n\rangle \cong K\langle a_1, \ldots, a_n\rangle$. با بررسی ساده درخواهیم یافت که $f(\bar{y}_i) = a_i$ تابعی یک به یک و پوشاست که این یکریختی، به وسیله آن تعریف می‌شود. به ویژه می‌توان گفت $\delta\text{-tr.deg}K\langle \bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_n\rangle/K = \delta\text{-tr.deg}K\langle a_1, \ldots, a_n\rangle/K$.

اکنون برآن هستیم تا معیاری برای اندازه یک چندگونای دیفرانسیلی داشته باشیم. منظور از اندازه یک چندگونای دیفرانسیلی، مجموعه جواب‌های یک معادله دیفرانسیل جبری است. برای دستیابی به این مهم، مفهوم بُعد دیفرانسیلی را معرفی می‌کنیم.

تعریف ۱.۶.۵ (بُعد دیفرانسیلی). فرض کنیم $V \subseteq \mathbb{A}^n$ یک چندگونای دیفرانسیلی تحویل‌ناپذیر، روی K باشد. بعد دیفرانسیلی V عبارتست از درجه تعالی دیفرانسیلی میدان توابع دیفرانسیلی V روی K، یعنی می‌توان گفت $\delta\text{-dim}(V) = \delta\text{-tr.deg}K\langle V\rangle/K$.

با توجه به این تعریف، برای هر چندگونای دلخواه V با مؤلفه های تحویل‌ناپذیر $V_1, \ldots, V_m$ خواهیم داشت $\delta\text{-dim}(V) = \max_i\{\delta\text{-dim}(V_i)\}$.

حال فرض کنیم $P \subseteq K\{y_1, \ldots, y_n\}$ یک ایده آل دیفرانسیلی اول باشد. یک زیرمجموعه از متغیرهای دیفرانسیلی $U \subseteq \{y_1, \ldots, y_n\}$ را مستقل دیفرانسیلی به پیمانه P می‌نامیم، هر گاه $P \cap K\{U\} = \{0\}$. در این صورت مجموعه پارامتری P مجموعه مستقل دیفرانسیلی ماکزیمال به پیمانه P است.

تعریف معادل دیگری از بعد دیفرانسیلی ارائه شده است که به زبان ایده آل دیفرانسیلی بیان می‌شود. این تعریف توسط جوزف ریت ارائه شده و در ادامه به آن می‌پردازیم.

تعریف ۲.۶.۵. بُعد دیفرانسیلی P (یا $\mathbb{V}(P)$) عبارتست از عدد کاردینال مجموعه پارامتری P (یا $\mathbb{V}(P)$).

لم ۱.۶.۵. فرض کنیم V یک چندگونای دیفرانسیلی و $W \subseteq V$ یک زیرچندگونای دیفرانسیلی باشد. در این صورت $\delta\text{-dim}(W) \leq \delta\text{-dim}(V)$.

اثبات. راهبرد اثبات بدین صورت است که ابتدا برای چندگونای تحویل‌ناپذیر و با استفاده از نتیجه آن، حکم را برای چندگونای تحویل‌پذیر به اثبات می‌رسانیم. ابتدا فرض می‌کنیم که V و W تحویل‌ناپذیر باشند. $W \subseteq V$

دلالت بر آن دارد که $\mathbb{I}(V) \subseteq \mathbb{I}(W)$. حال فرض کنیم $\delta\text{-}\mathbf{dim}(W) = d$ و $\{y_1, \ldots, y_d\}$ یک مجموعه پارامتری از $\mathbb{I}(W)$ باشد. در این صورت، با توجه به تعریف، $\mathbb{I}(V) \cap K\{y_1, \ldots, y_d\} = \{0\}$ و $\{y_1, \ldots, y_d\}$ یک مجموعه مستقل دیفرانسیلی به پیمانه $\mathbb{I}(V)$ است که می‌تواند به یک مجموعه پارامتری $\mathbb{I}(V)$ توسیع یابد. بنابراین $\delta\text{-}\mathbf{dim}(V) = \delta\text{-}\mathbf{dim}(\mathbb{I}(V)) \geq d$.

اکنون به سراغ حالتی می‌رویم که V و W لزوماً تحویل‌ناپذیر نیستند. فرض کنیم W_1 مؤلفه تحویل‌ناپذیر W باشد، به طوری که $\delta\text{-}\mathbf{dim}(W) = \delta\text{-}\mathbf{dim}(W_1)$. در این صورت، مولفه تحویل‌ناپذیر از V مانند V_1 وجود دارد، به طوری که $W_1 \subseteq V_1$. بنابراین و با توجه به اثبات قضیه در مورد چندگونای تحویل‌ناپذیر، خواهیم داشت $\delta\text{-}\mathbf{dim}(W) = \delta\text{-}\mathbf{dim}(W_1) \leq \delta\text{-}\mathbf{dim}(V_1) \leq \delta\text{-}\mathbf{dim}(V)$. این رابطه، به معنای برقراری حکم، برای چندگونای تحویل‌پذیر است و اثبات برقراری حکم است. $\square$

تذکر ۱.۶.۵. فرض کنیم $V \subseteq W$ دو چندگونای دیفرانسیلی تحویل‌ناپذیر باشند، به طوری که در شرط $\delta\text{-}\mathbf{dim}(W) = \delta\text{-}\mathbf{dim}(V)$ صدق کنند. با در نظر گرفتن این شرایط، در جبر خطی داریم $W = V$. اما سؤال اینجاست که آیا این تساوی در جبر دیفرانسیلی نیز، برقرار است؟ پاسخ آن است که خیر. مثال پیش رو در راستای نقض چنین ادعایی به کار می‌رود.

مثال ۱.۶.۵. فرض کنیم $W = \mathbb{V}(y') \subseteq \mathbb{A}^1$ و $V = \mathbb{V}(y'') \subseteq \mathbb{A}^1$ دو چندگونا باشند. در این صورت، طبق تعریف، $W \subseteq V$ و $\delta\text{-}\mathbf{dim}(W) = \delta\text{-}\mathbf{dim}(V)$. این درحالی است که $W \neq V$.

نکته مهم نهفته در بطن این مثال، آن است که معیار بعد دیفرانسیلی، صرفاً اندازه یک مجموعه نیست. بنابراین به یک معیار دقیق‌تر برای تفکیک نیاز داریم. این معیار، «چندجمله‌ای بُعد دیفرانسیلی» برای یک چندگونای دیفرانسیلی تحویل‌ناپذیر V یا $\mathbb{I}(V)$ است.

ایده چندجمله‌ای هیلبرت برای ایده آل‌های همگن نشان می‌دهد که می‌توان حلقه مختصات را بر اساس مرتبه آن برش زد. فرض کنیم $P \subset K\{Y_1, \ldots, Y_n\}$ یک ایده آل اول دیفرانسیلی باشد.

قضیه ۱.۶.۵ (قضیه کلچین). فرض کنیم $P \subset K\{Y_1, \ldots, Y_n\}$ یک ایده آل اول دیفرانسیلی با نقطه عمومی $(\theta_1, \ldots, \theta_n)$ باشد. در این صورت، یک چندجمله‌ای عددی $\omega_P(t) \in \mathbb{R}[t]$ وجود دارد که ویژگی‌های زیر را دارد:

۱. برای مقادیر کافی بزرگ $t \in \mathbb{N}$، داریم $\dim(P_t) = \omega_P(t)$.

۲. چندجمله‌ای دارای فرم $\omega_P(t) = d(t+1) + s$ با d و $s \in \mathbb{N}$ است.

۳. اگر $A_1, \dots, A_m$ مجموعه مشخصه P با ترتیب مرتب، روی $\Theta(Y) = \{\delta^k y_j \mid k \in \mathbb{N}, j = 1, \dots, n\}$ باشد و فرض کنیم $\mathrm{ld}(A_i) = d(A_i)$ را تعریف کنیم، آنگاه

$$\omega_P(t) = \sum_{i=1}^{m} \binom{t+s_i}{s_i}.$$

ایده چندجمله‌ای هیلبرت برای ایده آل‌های همگن نشان می‌دهد که ممکن است روشی برای در نظر گرفتن حلقه مختصات برش یافته بر اساس ترتیب وجود داشته باشد: فرض کنیم $P \subseteq K\{y_1, \dots, y_n\}$ یک ایده آل دیفرانسیلی اول باشد. تعریف می‌کنیم $K[y_1^{[t]}, \dots, y_n^{[t]}] = K[y_i^{(j)} : j \leq t, i = 1, \dots, n]$ و قرار می‌دهیم $P_t = P \cap K[y_1^{[t]}, \dots, y_n^{[t]}]$. آنگاه P_t یک ایده آل جبری اول با بعد $\dim(P_t)$ است. کلچین نشان داد که برای $t \gg 0$، $\dim(P_t)$ یک چندجمله‌ای عددی است. این موضوع را با زبان بسط میدان‌های دیفرانسیلی بیان می‌کنیم.

قضیه ۵.۶.۱. فرض کنیم $P \subseteq K\{y_1, \dots, y_n\}$ یک ایده آل دیفرانسیلی اول با نقطه عمومی $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_m)$ باشد. آنگاه یک چندجمله‌ای عددی $\omega_P(t) \in \mathbb{R}[t]$ وجود دارد به طوری که ویژگی‌های زیر را داراست:

۱. برای مقادیر به اندازه کافی بزرگ $t \in \mathbb{N}$ داریم $\dim(P_t) = \omega_P(t)$

۲. $\omega_P(t) = d(t+1) + s$، که در آن $d = \delta - \dim(V(P))$ و $s \in \mathbb{N}$.

۳. (محاسبه $\omega_P(t)$) $\mathcal{A} = A_1, \dots, A_l$ یک مجموعه مشخصه از P نسبت به رتبه‌بندی مرتب برای $\Theta(Y) = \{\delta^k y_j : k \in \mathbb{N}, j = 1, \dots, n\}$ باشد. فرض کنیم $\mathrm{ld}(A_i) = y_{\sigma(i)}^{(s_i)}$. آنگاه $\omega_P(t) = (n-l)(t+1) + \sum_{i=1}^{l} s_i$

۴. $\omega_P(t) = n(t+1)$ اگر و تنها اگر $P = [0]$ که معادل است با $V(P) = \mathbb{A}^n$. همچنین $\omega_P(t) = 0$ اگر و تنها اگر $V(P)$ یک مجموعه متناهی باشد.

اثبات. فرض کنیم $\eta^{[t]} = (\eta_1, \dots, \eta_n, \eta_1', \dots, \eta_n', \dots, \eta_1^{(t)}, \dots, \eta_n^{(t)})$. آشکار است که $\eta^{[t]}$ یک نقطه عمومی از $P_t \subseteq K[y_1^{[t]}, \dots, y_n^{[t]}]$ است. بنابراین $\dim(P_t) = \mathrm{tr.deg} K(\eta^{[t]})/K$. پس برای هر $A \in \mathcal{A}$،

داریم $A(\eta)=0$ و $I_A(\eta)\neq 0$ که نتیجه می‌دهد $u_A(\eta)$ روی $K(\eta_j^{(k)}:y_j^{(k)}<u_A, j=1,\ldots,n)$ جبری است. با مشتق‌گیری متوالی درمی‌یابیم که اگر v هر مشتقی از u_A باشد، آنگاه $v(\eta)$ روی

$$K(\eta_j^{(k)}:y_j^{(k)}<v, j=1,\ldots,n)$$

جبری است. مجموعه M را به عنوان مجموعه تمام مشتقات $y_j^{(k)}$ که مشتق هیچ u_A از $A\in\mathcal{A}$ نیستند تعریف می‌کنیم و قرار می‌دهیم $M(t)=M\cap\{y_j^{(k)}:k\leq t, j=1,\ldots,n\}$. پس، برای $t\geq\max\{s_1,\ldots,s_l\}$ داریم: $K(\eta^{[t]})$ روی $K\big((v(\eta))_{v\in M(t)}\big)$ جبری است. این رابطه را با $(*)$ از این‌رو $\dim(P_t)=\mathrm{tr.deg}K(\eta^{[t]})/K=\mathrm{Card}(M(t))$. از آنجایی که

$$M(t)=\underbrace{\{y_{\sigma(i)},y'_{\sigma(i)},\ldots,y_{\sigma(i)}^{(s_i-1)}:i=1,\ldots,l\}}_{\text{مشتقات متغیرهای پیشرو}}\cup\underbrace{\{y_j,y'_j,\ldots,y_j^{(t)}:j\neq\sigma(1),\ldots,\sigma(l)\}}_{\text{قسمت‌های متغیرهای پارامتری}}.$$

پس $\mathrm{Card}(M(t))=(n-l)(t+1)+\sum_{i=1}^{l}s_i$ بنابراین $\dim(P_t)=(n-l)(t+1)+\sum_{i=1}^{l}s_i$ برای $t\geq\max\{s_1,\ldots,s_l\}$. نمادگذاری می‌کنیم $\omega_P(t)=(n-l)(t+1)+\sum_{i=1}^{l}s_i$ این، اثبات بخش‌های اول و سوم را کامل می‌کند.

اکنون کافی است نشان دهیم $\delta-\dim(P)=n-l$.

فرض کنیم $d=\delta-\dim(P)=\delta-\mathrm{tr.deg}K\langle\eta\rangle/K$. بدون کاستن از کلیت، قرار می‌دهیم $\eta_1,\ldots,\eta_d$ یک پایه متعالی دیفرانسیلی از $K\langle\eta\rangle$ بر K باشد. پس

$$\omega_P(t)=\mathrm{tr.deg}K(\eta_1^{[t]},\ldots,\eta_d^{[t]})/K=(n-l)(t+1)+\sum_{i=1}^{l}s_i$$

$$\geq\mathrm{tr.deg}K(\eta_1^{[t]},\ldots,\eta_d^{[t]})/K=d(t+1)$$

و در نتیجه $n-l\geq d$ نتیجه می‌شود.

برعکس، فرض کنیم $\{z_1,\ldots,z_{n-l}\}=\{y_1,\ldots,y_n\}\setminus\{y_{\sigma(1)},\ldots,y_{\sigma(l)}\}$. از آنجا که هر چندجمله‌ای

غیرصفر در $K\{z_1, \dots, z_{n-l}\}$ نسبت به $\mathcal{A}$ کاهش‌یافته است، داریم $K\{z_1, \dots, z_{n-l}\} \cap P = \{0\}$. پس $\{z_1, \dots, z_{n-l}\}$ یک مجموعه مستقل به پیمانه P است و می‌توان آن را به یک مجموعه پارامتری از P گسترش داد. بنابراین $n-l \leq \delta\text{-}\dim(P) = d$. از ترکیب دو نامساوی، رابطه‌ای به صورت $n-l = d = \delta\text{-}\dim(P)$ به دست می‌آید و بدین ترتیب، اثبات خود را کامل نموده‌ایم. $\square$

در این فصل آموختیم که چگونه مشتق تعریف شده روی یک میدان، می‌تواند توسعه پیدا کند و با استفاده از مفاهیم جبرخطی به قضایای مهمی در مورد چندگونای دیفرانسیلی پرداختیم. در فصل بعد کمی به سمت توابع غیر جبری حرکت خواهیم کرد و کاربرد جبر دیفرانسیلی در این زمینه را خواهیم دید.

فصل ۶

انتگرال‌گیری نمادین برای توابع مقدماتی

منظور از توابع مقدماتی در این فصل توابعی همچون توابع نمایی، لگاریتمی و مثلثاتی است. هدف ما در این فصل توسیع برخی مفاهیم مقدماتی در جبر دیفرانسیلی و کاربرد آن در این گونه توابع است. در این فصل خواهیم دید که بررسی توابع مقدماتی ریاضی، چگونه در تیررس جبر دیفرانسیلی قرار خواهد گرفت. نکته قابل ذکر، این است که جبر دیفرانسیلی به سراغ توابع غیرجبری رفته است و فصل جذابی را در این رشته شروع می‌کند. در این فصل از منابع [۱۱، ۱۰، ۶، ۱] است.

۱.۶ مقدمه

در این فصل برآن هستیم تا با توسیع برخی مفاهیم مقدماتی جبر دیفرانسیلی، اثر آنها را بر روی توابع مقدماتی از جمله توابع مثلثاتی و لگاریتمی بررسی خواهیم کرد. از آنجایی که گام را فراتر نهاده، بررسی خود را به توابع غیرخطی، گسترش داده‌ایم؛ این رویکرد، اقدامی چشمگیر و رو به جلو در این شاخه از ریاضیات به حساب می‌آید. علاوه بر جبری بودن یک عنصر، روی یک میدان، با مفاهیمی همچون نمایی بودن، لگاریتمی بودن یک عنصر روی میدان آشنا خواهیم شد و پس از آن با معرفی قضیه لیوویل و ارائه چند مثال، به بررسی کاربردهای متنوع آن خواهیم پرداخت.

۲.۶ انتگرال‌گیری نمادین برای توابع مقدماتی

فرض کنیم (R, D) یک حلقه دیفرانسیلی باشد. می‌دانیم که $C_R = \{r \in R \mid D(R) = 0\}$ ثوابت حلقه (R, D) هستند. پیش از این، در فصل دوم آموختیم که (C_R, D) تشکیل یک حلقه دیفرانسیلی می‌دهد و حلقه ثوابت (R, D) نامیده می‌شود. از آموخته‌های قبلی می‌دانیم که

۱. اگر ۱ عنصر یکِ حلقه باشد، در این صورت $D(1) = 0$.

۲. برای هر $n \in \mathbb{N}$ و $a \in R$ همواره رابطه $D(a^n) = na^{n-1}D(a)$ برقرار است.

۳. فرض کنیم b عنصری وارون‌پذیر در R باشد، در این صورت خواهیم داشت $D(\frac{a}{b}) = \frac{D(a)b-aD(b)}{b^2}$.

۴. اگر k یک عدد طبیعی و a عنصری وارون‌پذیر در R باشد، در این صورت، عناصر $a^k = \underbrace{a\ldots a}_{k}$ و $a^{-k} = \underbrace{a^{-1}\ldots a^{-1}}_{k}$ وارون یکدیگرند.

نمادگذاری ۱.۲.۶. وارون a را با نماد a^{-1} یا $\frac{1}{a}$ نمایش می‌دهیم.

لم ۱.۲.۶. فرض کنیم a_i عنصری وارون‌پذیر در R باشد، برای هر m_i صحیح، داریم $\frac{D(a_1^{m_1}\ldots a_s^{m_s})}{a_1^{m_1}\ldots a_s^{m_s}} = \sum_{i=1}^{s} m_i \frac{D(a_i)}{a_i}$

اثبات. برای اثبات از استقرا استفاده می‌کنیم. نکته قابل ذکر در این مبحث، آن است که استقرا برای اعداد صحیح به کار می‌رود؛ در حالی که m_i ها اعداد صحیح هستند؛ لذا رویکرد اثبات، با توجه به مورد شماره ۴ آن است که مسئله را برای اعداد طبیعی در نظر می‌گیریم. از آنجا که a_i ها وارون‌پذیرند، پس وارون آن‌ها نیز، عنصری از R است و لذا این فرآیند، برای اثبات موجه است. با این مقدمه به سراغ اثبات می‌رویم. ابتدا به فرض صفر می‌پردازیم، یعنی به بررسی درستی رابطه $\frac{D(a_1^{m_1})}{a_1^{m_1}} = m_1\frac{D(a_1)}{a_1}$ می‌پردازیم. با استفاده از مورد شماره ۲ خواهیم داشت $\frac{D(a_1^{m_1})}{a_1^{m_1}} = \frac{m_1 a^{m_1-1}D(a)}{a^{m_1}} = m_1\frac{D(a_1)}{a_1}$. بنابراین فرض صفر در این لم، برقرار است. حال اینگونه کار را ادامه می‌دهیم. فرض کنیم $\frac{D(a_1^{m_1}\ldots a_s^{m_s})}{a_1^{m_1}\ldots a_s^{m_s}} = \sum_{i=1}^{s} m_i\frac{D(a_i)}{a_i}$ درست باشد. کافی است نشان دهیم که رابطه اخیر، برای $s+1$ درست است، یعنی باید نشان دهیم که $\frac{D(a_1^{m_1}\ldots a_s^{m_s}a_{s+1}^{m_{s+1}})}{a_1^{m_1}\ldots a_s^{m_s}a_{s+1}^{m_{s+1}}} = \sum_{i=1}^{s+1} m_i\frac{D(a_i)}{a_i}$ برقرار است. در این فرآیند، ابتدا استفاده از قاعده لایبنیتز را در دستور کار قرار می‌دهیم و سپس با بهره‌مندی از فرض استقرا و انجام محاسبات لازم، خواهیم داشت:

$$\frac{D(a_1^{m_1}\ldots a_s^{m_s}a_{s+1}^{m_{s+1}})}{a_1^{m_1}\ldots a_s^{m_s}a_{s+1}^{m_{s+1}}} = \frac{D(a_1^{m_1}\ldots a_s^{m_s})a_{s+1}^{m_{s+1}} + a_1^{m_1}\ldots a_s^{m_s}D(a_{s+1}^{m_{s+1}})}{a_1^{m_1}\ldots a_s^{m_s}a_{s+1}^{m_{s+1}}}$$

$$= \frac{a_1^{m_1}...a_s^{m_s}(\sum_{i=1}^{s} m_i \frac{D(a_i)}{a_i})a_{s+1}^{m_{s+1}} + m_{s+1}a_1^{m_1}...a_s{}^{m_s}a_{s+1}^{m_{s+1}-1}D(a_{s+1})}{a_1^{m_1}...a_s^{m_s}a_{s+1}^{m_{s+1}}}$$

$$= \frac{a_1^{m_1}...a_s^{m_s}}{a_1^{m_1}...a_s^{m_s}a_{s+1}^{m_{s+1}}}(a_{s+1}^{m_{s+1}} \sum_{i=1}^{s} m_i \frac{D(a_i)}{a_i} + m_{s+1}a_{s+1}^{m_{s+1}-1}D(a_{s+1}))$$

$$= \sum_{i=1}^{s} m_i \frac{D(a_i)}{a_i} + m_{s+1}\frac{D(a_{s+1})}{a_{s+1}} = \sum_{i=1}^{s+1} m_i \frac{D(a_i)}{a_i}.$$

آخرین تساوی، بیانگر اثبات حکم استقرا و دستیابی به نتیجه مطلوب مورد نظر ماست. □

تذکر ۶.۲.۱. مجموعه همه نگاشت‌های مشتق روی حلقه R را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$Der(R) = \{D : R \longrightarrow R | D \ is \ a \ Derivative \ on \ R\}.$$

در این صورت، طبق تعریف مدول در بخش ۹.۱ و یک بررسی ساده خواهیم دید که $Der(R)$ یک R- مدول است؛ چرا که به‌ازای هر $r_1, r_2 \in R$ و $D_1, D_2 \in Der(R)$ خواهیم داشت $r_1D_1 + r_2D_2 \in Der(R)$.

نمادگذاری ۶.۲.۲. فرض کنیم (R, D) و $(\bar{R}, \bar{D})$ دو حلقه دیفرانسیلی باشند. اگر $R \subseteq \bar{R}$ و $\bar{D}|_R = D$، در این صورت $(\bar{R}, \bar{D})$ یک توسیع دیفرانسیلی از (R, D) نامیده می‌شود.

قضیه ۶.۲.۱. فرض کنیم (R, D) یک دامنه صحیح دیفرانسیلی و $F = \{\frac{a}{b} | a, b \in R, b \neq 0\}$ میدان خارج قسمتی R باشد. در این صورت D به طور یکتا با ضابطه $\bar{D}(\frac{a}{b}) = \frac{D(a)b-aD(b)}{b^2}$ روی میدان خارج قسمتی F، قابل توسیع است. به عبارت دیگر $(F, \bar{D})$ یک میدان دیفرانسیلی است.

اثبات. به لم ۱.۴.۲ مراجعه نمایید. □

قضیه ۶.۲.۲. فرض کنیم (F, D) یک میدان دیفرانسیلی و α روی F جبری باشد. در این صورت F به طور یکتا به توسیع جبری $F(\alpha)$ قابل توسیع است.

قضیه ۶.۲.۳. فرض کنیم (F, D) یک میدان دیفرانسیلی و t روی F متعالی باشد. در این صورت، با در نظر گرفتن یک $D(t)$ معین، متعلق به $F(t)$ می‌توان D را به صورت یکتایی توسیع داد.

مثال ۶.۲.۱. میدان $F = \mathbb{Q}(x)$ و عنصر $\alpha \in \overline{F}$ را درنظر می‌گیریم به طوری که $4\alpha^2 - 9x = 0$. در این صورت $\frac{d}{dx}(4\alpha^2 - 9x) = 8\alpha\frac{d\alpha}{dx} - 9 = 0$ و در نتیجه $\frac{d\alpha}{dx} = \frac{9}{8\alpha}$.

قضیه ۶.۲.۴. فرض کنیم (F, D) یک میدان دیفرانسیلی با مشخصه صفر و α بر روی F جبری باشد. آنگاه داریم $D(\alpha) \in F(\alpha)$.

اثبات. اگر $\alpha \neq ۰$ چندجمله‌ای مینیمال P از α را در نظر بگیرید، یعنی $P(\alpha) = ۰$ و P روی F تحویل‌ناپذیر است. بنابراین $P = P_d x^d + P_{d-۱} x^{d-۱} + \cdots + P_۰$ که در آن $P_i \in F$ و $P_۰ P_d \neq ۰$. با اعمال مشتق خواهیم داشت $D(P(\alpha)) = D(P)(\alpha) + P_x(\alpha) D(\alpha)$ که در آن $D(P) = \sum_{i=۰}^{d} D(P_i) x^i$ و از طرف دیگر $P_x = \sum_{i=۱}^{d} i P_i x^{i-۱}$. از آنجایی که P تحویل‌ناپذیر است، داریم $\gcd(P, P_x) = ۱$. بنابراین می‌توان ضرایبی همچون $a, b \in F[x]$ یافت به طوری که $aP + bP_x = ۱$. از این رابطه نتیجه می‌شود که $D(\alpha) = -\frac{D(P)(\alpha)}{P_x(\alpha)} = -D(P(\alpha)).b(\alpha) \in F(\alpha)$. پس به مطلوب خود دست یافته‌ایم. □

تعریف ۶.۲.۱ (درجه توسیع میدان). فرض کنیم $L \supseteq K$ یک توسیع میدان باشد. درجه توسیع میدان، که با $[L : K]$ نمایش داده می‌شود، به عنوان بعد L یک فضای برداری روی K تعریف می‌شود. به بیان دیگر $[L : K] = \dim_K(L)$.

این بدان معناست که درجه توسیع، تعداد عناصر یک پایه از L روی K است، به طوری که هر عنصر در L می‌تواند به صورت ترکیب خطی از عناصر پایه با ضرایب در K نوشته شود. ناگفته پیداست که اگر $[L : K] = ۱$ باشد، آنگاه $L = K$.

اگر $[L : K]$ متناهی باشد، می‌گوییم توسیع، متناهی است. اگر $[L : K] = ۱$ باشد، آنگاه $L = K$ است. همچنین اگر توسیع، از طریق افزودن یک عنصر جبری α به دست آید، یعنی $L = K(\alpha)$، درجه توسیع برابر با درجه چندجمله‌ای مینیمال α روی K است.

مثال ۶.۲.۲. با ارائه دو مثال ساده، مفهوم درجه توسیع میدان برایمان روشن خواهد شد و شهود و درک بهتری از این موضوع پیدا خواهیم کرد.

توسیع $\mathbb{Q}(\sqrt{۲})$ روی $\mathbb{Q}$ از درجه ۲ است، چون پایه آن $\{۱, \sqrt{۲}\}$ است.

توسیع $\mathbb{C}$ روی $\mathbb{R}$ از درجه ۲ است، چون $\{۱, i\}$ یک پایه است.

مثال ۶.۲.۳. میدان‌های $\mathbb{Q}$ و $\mathbb{Q}(x)$ درنظر می‌گیریم به طوری که x یک عنصر متعالی روی $\mathbb{Q}$ است، یعنی هیچ چندجمله‌ای غیرصفر $f(x) = a_n x^n + a_{n-۱} x^{n-۱} + \cdots + a_۱ x + a_۰$ با $a_i \in \mathbb{Q}$ وجود ندارد که $f(x) = ۰$. در این حالت، توسیع $\mathbb{Q}(x)$ روی $\mathbb{Q}$ یک توسیع متعالی است. مجموعه $\{۱, x, x^۲, x^۳, \ldots\}$ یک مجموعه نامتناهی از بردارهای مستقل روی $\mathbb{Q}$ است. بنابراین $[\mathbb{Q}(x) : \mathbb{Q}] = \infty$.

تذکر ۶.۲.۲. اگر عنصر x جبری باشد، درجه توسیع، متناهی و برابر با درجه چندجمله‌ای مینیمال آن می‌شود. اما اگر x متعالی باشد، هیچ محدودیتی برای توان‌های آن وجود ندارد که منجر به نامتناهی شدن درجه توسیع، می‌شود.

مثال ۶.۲.۴. فرض کنیم $\alpha = \sqrt{x}$ باشد. در این حالت α یک عنصر جبری روی $\mathbb{C}(x)$ است زیرا در معادله $\alpha^۲ - x = ۰$ صدق می‌کند. در این مثال، توسیع میدان $\mathbb{C}(x)(\alpha)$ روی $\mathbb{C}(x)$ از درجه ۲ است، یعنی می‌توان نوشت $[\mathbb{C}(x)(\alpha) : \mathbb{C}(x)] = ۲$. این رابطه بدان معناست که $\{۱, \alpha\}$ یک پایه برای توسیع میدان است و هر عنصر در $\mathbb{C}(x)(\alpha)$ را می‌توان به صورت ترکیب خطی از این دو نوشت. حال مشتقات را در نظر می‌گیریم. می‌دانیم که $\frac{d\alpha}{dx} = \frac{۱}{۲\sqrt{x}}$. چون α جبری است، مجموعه $\{\alpha, \frac{d\alpha}{dx}\}$ بر روی $\mathbb{C}(x)$ وابسته خطی است. در واقع، می‌توانیم مشتق را بر حسب α به صورت $\frac{d\alpha}{dx} = \frac{۱}{۲\alpha}$ بنویسیم.

نتیجه ۶.۲.۱. فرض کنیم $a(x)$ یک تابع جبری بر روی $\mathbb{C}(x)$ باشد. آنگاه $a(x)$ در یک معادله دیفرانسیل خطی غیربدیهی با ضرایب در $\mathbb{C}[x]$ صدق می‌کند، یعنی $P_n\frac{d^na}{dx^n} + P_{n-۱}\frac{d^{n-۱}a}{dx^{n-۱}} + \cdots + P_۰a = ۰$ که در آن $P_i \in \mathbb{C}[x]$ و $P_n \neq ۰$ به گونه‌ای که همه P_i ها صفر نباشند.

اثبات. از آنجایی که $\frac{d^ia}{dx^i} \in \mathbb{C}(x)(a)$ و مرتبه جبری $[\mathbb{C}(x)(a) : \mathbb{C}(x)] = n$ متناهی است، خواهیم داشت $\{a, \frac{da}{dx}, \ldots, \frac{d^na}{dx^n}\}$ وابسته خطی بر روی $\mathbb{C}(x)$ است. □

مثال ۶.۲.۵. فرض کنیم $F = \mathbb{C}(x)$ و $D = \frac{d}{dx}$. نشان می‌دهیم که $t = \exp(x)$ بر روی F متعالی است.

اثبات. توجه می‌کنیم که $D(t) = t$. به برهان خلف، فرض کنیم $\exp(x)$ بر روی F جبری باشد. پس چندجمله‌ای تحویل‌ناپذیر غیر صفر P به صورت $P = P_ny^n + P_{n-۱}y^{n-۱} + \cdots + P_۰$ با $P_۰ \neq ۰$ وجود دارد که در آن $t^n + P_{n-۱}t^{n-۱} + \cdots + P_۰ = ۰$. اکنون با مشتق‌گیری از رابطه اخیر، رابطه ای به صورت $nt^{n-۱}D(t) + D(P_{n-۱})t^{n-۱} + (n-۱)P_{n-۱}D(t)t^{n-۲} + \cdots + D(P_۰) = ۰$ خواهیم داشت. چون $D(t) = t$ با ساده‌سازی، خواهیم داشت $nt^n + (D(P_{n-۱}) + (n-۱)P_{n-۱})t^{n-۱} + \cdots + D(P_۰) = ۰$ و در نتیجه $D(P_۰) = nP_۰ \neq ۰$. □

اکنون ادعا می‌کنیم که معادله $D(y) = ny$ در $\mathbb{C}(x)$ هیچ جواب ناصفری ندارد.

اثبات. به برهان خلف، فرض کنیم $f = \frac{p(x)}{q(x)}$ یک جواب ناصفر برای $\mathrm{D}(y) = ny$ باشد، آنگاه خواهیم داشت $\mathrm{D}(f) = \frac{\mathrm{D}(p)q - p\mathrm{D}(q)}{q^۲} = \frac{np}{q}$ و در نتیجه $(\mathrm{D}(p) - np)q = p\mathrm{D}(q)$. رابطه اخیر را با $(*)$ نامگذاری می‌کنیم.

فرض کنیم $q \notin \mathbb{C}$ باشد. در این صورت $q = (x-\lambda)^m \overline{q}$ به طوری که $\overline{q}(\lambda) \neq 0$. بنابراین می‌توان نوشت $\mathrm{D}(q) = m(x-\lambda)^{m-1}\overline{q} + (x-\lambda)^m \mathrm{D}(\overline{q})$ و درنتیجه $(x-\lambda)^{m-1} \mid \mathrm{D}(q)$ ولی $(x-\lambda)^m \nmid \mathrm{D}(q)$. اما با توجه به رابطه $(*)$ و از آنجایی که $\gcd(p,q) = 1$ پس $q \mid p\mathrm{D}(q)$ و درنتیجه $(x-\lambda)^m \mid \mathrm{D}(q)$ که تناقض است. بنابراین $t = \exp(x)$ روی $\mathbb{C}(x)$ متعالی است.

$\square$

تعریف ۶.۲.۲ (توسیع‌های ابتدایی). فرض کنیم (E, D) یک توسیع دیفرانسیلی از (F, D) باشد. در این صورت برای $t \in E$ داریم.

- t بر روی F جبری است اگر چندجمله‌ای $P \in F[x] \setminus \{0\}$ موجود باشد به طوری که $P(t) = 0$.
- t بر روی F نمایی است اگر عنصر $a \in F$ موجود باشد به طوری که $D(t) = D(a) \cdot t$.
- t بر روی F لگاریتمی است اگر عنصر $a \in F \setminus \{0\}$ موجود باشد به طوری که $D(t) = \frac{D(a)}{a}$.
- عنصر t روی F را ابتدایی گوییم هرگاه جبری، نمایی یا لگاریتمی روی F باشد.
- میدان E روی F را ابتدایی گوییم هرگاه داشته باشیم $E = F(t_1, \ldots, t_n)$ و برای $1 \leq i \leq n$ هریک از t_i ها روی میدان $F(t_1, \ldots, t_{i-1})$ ابتدایی باشد.

مثال: فرض کنید $F = \mathbb{C}(x)$ و $D = \frac{d}{dx}$. تابع زیر را در نظر می‌گیریم:

$$f(x) = \frac{\pi}{\sqrt{\log\left(\exp\left(\sqrt{\frac{1}{2x^2+1}}\right)^2 + x^2 + 1\right)}}.$$

نشان می‌دهیم که $f(x)$ بر روی $\mathbb{C}(x)$ ابتدایی است. فرض کنیم: $E = \mathbb{C}(x)(t_1, t_2, t_3, t_4)$ که در آن $t_1 = \sqrt{\frac{1}{2x^2+1}}, \quad t_2 = \exp(t_1), \quad t_3 = \log(t_2^2 + x^2 + 1), \quad t_4 = \sqrt{t_3}$. و در نتیجه $f = \frac{\pi}{t_4} \in E$.

تعریف ۶.۲.۳. فرض کنیم (F, D) یک میدان دیفرانسیلی و f عنصری متعلق به F باشد. اگر یک توسیع ابتدایی (E, D) از (F, D) و عنصری مانند $g \in E$ موجود باشد به طوری که $f = D(g)$ در این صورت گفته می‌شود f بر روی F به‌طور ابتدایی انتگرال‌پذیر است.

تعریف ۶.۲.۴ (چندجمله‌ای ویژه). فرض کنیم (K, D) یک میدان دیفرانسیلی باشد. علاوه بر آن t بر K متعالی و $Dt \in K[t]$ و $P \in K[t]$. P را چندجمله‌ای ویژه می‌نامیم هرگاه: $\gcd(P, D(P)) = P$.

تعریف ۶.۲.۵ (چندجمله‌ای نرمال). فرض کنیم (K, D) یک میدان دیفرانسیلی باشد. علاوه بر آن t بر K متعالی و $Dt \in K[t]$ و $P \in K[t]$. P را چندجمله‌ای نرمال می‌نامیم هرگاه: $\gcd(P, D(P)) = ۱$.

تذکر ۶.۲.۳. اگر P تحویل‌ناپذیر باشد، آنگاه یا ویژه است یا نرمال. اگر P تحویل‌ناپذیر نباشد، ممکن است نه ویژه باشد و نه نرمال.

مثال ۶.۲.۶. ۱. فرض کنیم $K = \mathbb{C}(x)$ و $t = \tan(x)$. آنگاه $D(t) = ۱ + t^۲$. قرار می‌دهیم $P_۱ = ۱ + t^۲$. در این صورت داریم $D(P_۱) = ۲t(۱ + t^۲)$. پس $P_۱$ یک چندجمله‌ای ویژه است. حال قرار می‌دهیم $P_۲ = t^۲$. در این صورت داریم $D(P_۲) = ۲t(۱ + t^۲)$ بنابراین $P_۲$ نه ویژه است و نه نرمال. در نهایت $P_۳ = t$ یک چندجمله‌ای نرمال است.

۲. فرض کنیم $K = \mathbb{C}(x)$ و $t = \exp(x)$. در این صورت $P_۱ = t$ یک چندجمله‌ای ویژه و $P_۲ = ۱ + t$ یک چندجمله‌ای نرمال است.

۳. فرض کنیم $K = \mathbb{C}(x)$ و $t = \log(x)$. در این صورت، تمام چندجمله‌ای‌های تکین تحویل‌ناپذیر P نرمال هستند زیرا $\deg_t D(P) < \deg_t P$.

تعریف ۶.۲.۶. فرض کنیم K میدانی با مشخصه صفر و t بر K متعالی باشد. فرض کنیم $f \in K(t)$ و $P \in K[t]$ یک چندجمله‌ای تحویل‌ناپذیر باشد. آنگاه برای عدد صحیح m می‌توان نوشت $f = P^m \cdot g$ که با درنظر گرفتن $a, b \in K[t]$ داشته باشیم $g = \frac{a}{b} \in K(t)$ و $\gcd(a, b) = ۱$ به طوری که P بر ab بخش‌پذیر باشد. در این حالت m را مرتبه f در P می‌نامیم و با نماد $\mathrm{ord}_P(f)$ نمایش می‌دهیم.

لم ۶.۲.۲. فرض کنیم $P \in K[t]$ تحویل‌ناپذیر باشد و $f, g \in K(t)$ باشند. آنگاه

(1) $\mathrm{ord}_P(fg) = \mathrm{ord}_P(f) + \mathrm{ord}_P(g)$,

(2) $\mathrm{ord}_P(f + g) \geq \min\{\mathrm{ord}_P(f), \mathrm{ord}_P(g)\}$.

برابری زمانی برقرار است که $\mathrm{ord}_P(f) \neq \mathrm{ord}_P(g)$.

مثال ۶.۲.۷. اگر P تحویل‌ناپذیر نباشد، ممکن است قسمت (۱) برقرار نباشد. برای مثال، اگر $P = t^2$ و $f = g = t$ آنگاه $\mathrm{ord}_P(fg) \geq \mathrm{ord}_P(f) + \mathrm{ord}_P(g)$.

لم ۶.۲.۳. فرض کنیم (K, D) یک میدان دیفرانسیلی و t بر K متعالی باشد و $\mathrm{D}(t) \in K[t]$. همچنین فرض کنیم $f \in K(t)$ و P در $K[t]$ تحویل‌ناپذیر باشد. آنگاه

۱. $\mathrm{ord}_P(\mathrm{D}(f)) \geq \mathrm{ord}_P(f) - 1$؛

۲. اگر P یک چندجمله‌ای نرمال باشد، آنگاه

$$\mathrm{ord}_P(\mathrm{D}(f)) = \begin{cases} \geq 0 & if \quad \mathrm{ord}_P(f) = 0, \\ \mathrm{ord}_P(f) - 1, & if \quad \mathrm{ord}_P(f) \neq 0. \end{cases}$$

اثبات. ۱. می‌نویسیم $f = P^m g = P^m \frac{a}{b}$ که در آن $\gcd(P, ab) = 1$ و $m = \mathrm{ord}_P(f)$ است.

اگر $m = 0$، آنگاه:

$$\mathrm{ord}_P(\mathrm{D}(f)) = \mathrm{ord}_P\left(\mathrm{D}\left(\frac{a}{b}\right)\right) = \mathrm{ord}_P\left(\frac{\mathrm{D}(a)b - a\mathrm{D}(b)}{b}\right) \geq 0 \geq -1.$$

اگر $m \neq 0$، آنگاه:

$$\mathrm{D}(f) = (mP^{m-}\mathrm{D}(P))\frac{a}{b} + P^m\mathrm{D}\left(\frac{a}{b}\right) = P^{m-1}(m\mathrm{D}(P)\frac{a}{b} + P\mathrm{D}\left(\frac{a}{b}\right)).$$

از آنجا که $\gcd(P, ab) = 1$ نتیجه می‌گیریم که $\mathrm{ord}_P\left(m\mathrm{D}(P)\frac{a}{b}\right) \geq 0$ است. از طرفی داریم $\mathrm{D}\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{b\mathrm{D}(a) - a\mathrm{D}(b)}{b^2}$ و در نتیجه $\mathrm{ord}_P\left(\mathrm{D}\left(\frac{a}{b}\right)\right) \geq 0$. پس با توجه به فرضیات موجود خواهیم داشت $\mathrm{ord}_P(\mathrm{D}(f)) \geq m - 1 = \mathrm{ord}_P(f) - 1$.

۲. اگر $\mathrm{ord}_P(f) = 0$، آنگاه $\mathrm{ord}_P(\mathrm{D}(f)) \geq 0$ و اگر $\mathrm{ord}_P(f) \neq 0$ باشد، با توجه به قسمت اول، داریم $\mathrm{ord}_P(\mathrm{D}(f)) \geq \mathrm{ord}_P(f) - 1$. چون P نرمال است، داریم $\gcd(P, \mathrm{D}(P)) = 1$. و به تبع آن

$\mathrm{ord}_P(\mathrm{D}(P)) = ۰$. و در نتیجه $\mathrm{ord}_P((mP^{m-}\mathrm{D}(P))\frac{a}{b}) = m-۱$ و چون $\mathrm{ord}_P(P^m\mathrm{D}(\frac{a}{b})) \geq$ m آنگاه $\mathrm{ord}_P(\mathrm{D}(f)) = m-۱$.

□

تذکر ۴.۲.۶. لم ۳.۲.۶ در بحث‌های بعدی بسیار کاربردی است. به طور خاص، داریم $\mathrm{ord}_P\left(\frac{\mathrm{D}(f)}{f}\right) = -۱$ اگر $\mathrm{ord}_P(f) \neq ۰$. همچنین $\mathrm{ord}_P(\mathrm{D}(P)) \neq -۱$ برقرار است اگر P یک چندجمله‌ای نرمال تحویل‌ناپذیر باشد.

گزاره ۱.۲.۶. فرض کنیم (K, D) یک میدان دیفرانسیلی و F یک توسیع دیفرانسیلی از K باشد. اگر $t \in F$ به گونه‌ای باشد که $a = \frac{t'}{t} \in K$ و برای هر عدد طبیعی n و $u \in K \setminus \{۰\}$ داشته باشیم $a \neq \frac{۱}{n}\frac{u'}{u}$ آنگاه t بر K متعالی است. علاوه بر آن $C_{K(t)} = C_K$ و t تنها چندجمله‌ای تحویل‌ناپذیر ویژه در $K[t]$ است.

اثبات. فرض می‌کنیم t بر روی میدان K جبری باشد. در این صورت، یک چندجمله‌ای تحویل‌ناپذیر، همچون $P = x^n + P_{n-۱}x^{n-۱} + \cdots + P_۱x + P_۰ \in K[x]$ با $P_۰ \neq ۰$ وجود دارد به طوری که می‌توان نوشت $t^n + P_{n-۱}t^{n-۱} + \cdots + P_۰ = ۰$. اکنون با اعمال عملگر مشتق $\mathrm{D}(t) = at$ خواهیم داشت $ant^n + (P'_{n-۱} + P_{n-۱}(n-۱)a)t^{n-۱} + \cdots + P'_۰ = ۰$. از آنجا که $an = \frac{P'_۰}{P_۰}$ نتیجه‌ای به صورت $a = \frac{۱}{n}\frac{P'_۰}{P_۰}$ با $P_۰ \in K \setminus \{۰\}$ حاصل می‌شود که با فرض اولیه در تناقض است. پس t بر روی K متعالی است.
اکنون به اثبات دوم قضیه می‌پردازیم. اگر $C_{K(t)} \neq C_K$ آنگاه عنصری مانند $\frac{p}{q} \in K(t) \setminus K$ با $\gcd(p, q) = ۱$ وجود دارد به طوری که $\mathrm{D}\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{\mathrm{D}(p)q - p\mathrm{D}(q)}{q^۲} = ۰$ و درنتیجه $\mathrm{D}(p)q = p\mathrm{D}(q)$.
پس داریم $p \mid \mathrm{D}(p)$ و $q \mid \mathrm{D}(q)$ پس p و q هر دو ویژه‌اند.
ادعا می‌کنیم که چندجمله‌ای‌های ویژه در $K[t]$ به فرم bt^m هستند که b عضوی از K و m عددی صحیح است.

فرض کنیم $P = P_nt^n + \cdots + P_۰ \in K[t]$ یک چندجمله‌ای با $P_n \neq ۰$ و $P_i \neq ۰$ برای $۰ \leq i \leq n-۱$ باشد. در این صورت $\mathrm{D}(P) = (\mathrm{D}(P_n) + P_nna)t^n + \cdots + \mathrm{D}(P_۰)$. اگر P ویژه باشد، آنگاه $P \mid \mathrm{D}(P)$ و در نتیجه: $\frac{\mathrm{D}(P_n) + nP_na}{P_n} = \frac{\mathrm{D}(P_i)}{P_i} + iP_ia$ و درنتیجه $\frac{\mathrm{D}(P_i)}{P_i} - \frac{\mathrm{D}(P_n)}{P_n} = (n-i)a$. بنابراین خواهیم داشت

$$a = \frac{۱}{n-i} \cdot \frac{\frac{\mathrm{D}(P_i)}{P_i} - \frac{\mathrm{D}(P_n)}{P_n}}{\frac{P_i}{P_n}}$$

که در تناقض با فرض اولیه است.

پس ادعا برقرار است و t تنها چندجمله‌ای تحویل‌ناپذیر ویژه در $K[t]$ است. در نتیجه $\frac{p}{q} = bt^m$ با $b \in K$ و عدد صحیح غیر صفر m است. به راحتی می‌توان دید که $\mathrm{D}\left(\frac{p}{q}\right) \neq ۰$ و $C_{K(t)} = C_K$. $\square$

نتیجه ۶.۲.۲. تابع $\exp(f(x))$ بر روی $\mathbb{C}(x)$ متعالی است اگر $f \in \mathbb{C}(x) \setminus \mathbb{C}$ باشد.

اثبات. فرض کنیم $t = \exp(f(x))$ و $f \in \mathbb{C}(x) \setminus \mathbb{C}$. در این صورت $\frac{\mathrm{D}(t)}{t} = \mathrm{D}(f(x))$. اگر برای هر عدد طبیعی مثبت و $g \in \mathbb{C}(x) \setminus \{۰\}$ داشته باشیم $\mathrm{D}(f) = \frac{۱}{n}\frac{\mathrm{D}(g)}{g}$. حال، هر چندجمله‌ای تحویل‌ناپذیر را به صورت $P \in \mathbb{C}[x]$ را درنظر می‌گیریم. آنگاه $\mathrm{ord}_P(\mathrm{D}(f))$ یا بزرگتر مساوی صفر است یا کوچکتر مساوی ۱−. اما

$$\mathrm{ord}_P\left(\frac{\mathrm{D}(g)}{g}\right) = \begin{cases} \geq ۰, & \mathrm{ord}_P(g) = ۰ \\ -۱, & \mathrm{ord}_P(g) \neq ۰. \end{cases}$$

بنابراین، برای هر P، داریم $\mathrm{ord}_P(g) = ۰$ و در نتیجه $g \in \mathbb{C}$ و $\mathrm{D}(f) = ۰$ که با فرض $f \in \mathbb{C}(x) \setminus \mathbb{C}$ در تناقض است. پس طبق گزاره ۶.۲.۱ t روی $\mathbb{C}(x)$ متعالی است. $\square$

گزاره ۶.۲.۲. فرض کنید (K, D) یک میدان دیفرانسیلی و F یک توسیع دیفرانسیلی از K باشد. اگر $t \in F$ به گونه‌ای باشد که $\mathrm{D}(t) \in K$ و برای هر $u \in K$ داشته باشیم $\mathrm{D}(t) \neq \mathrm{D}(u)$. آنگاه t بر روی K متعالی است و $C_{K(t)} = C_K$. علاوه بر آن، تمام چندجمله‌ای‌های تحویل‌ناپذیر در $K[t]$ نرمال هستند.

اثبات. برهان خلف را برمی‌گزینیم. پس فرض کنیم t بر روی K جبری باشد. در این صورت چندجمله‌ای تحویل‌ناپذیری مانند $P = x^n + P_{n-۱}x^{n-۱} + \cdots + P_۱x + P_۰ \in K[x]$ با $P_۰ \neq ۰$ وجود خواهد داشت به طوری که $t^n + P_{n-۱}t^{n-۱} + \cdots + P_۰ = ۰$. با توجه به اینکه $\mathrm{D}(t) = a \in K$ خواهیم داشت $(na + \mathrm{D}(P_{n-۱}))t^{n-۱} + (P_{n-۱}(n-۱)a + \mathrm{D}(P_{n-۲}))t^{n-۲} + \cdots + P_۱a + \mathrm{D}(P_۰) = ۰$. از آنجا که $na + \mathrm{D}(P_{n-۱}) = ۰$ نتیجه می‌گیریم که $\mathrm{D}(t) = a = \mathrm{D}\left(-\frac{۱}{n}P_{n-۱}\right)$ که این نتیجه با فرض تناقض دارد. بنابراین t بر روی K متعالی است.

حال فرض کنیم $P(t) = t^n + P_{n-۱}t^{n-۱} + \cdots + P_۰ \in K[t]$ یک چندجمله‌ای تحویل‌ناپذیر و $\mathrm{D}(P) = (na + \mathrm{D}(P_{n-۱}))t^{n-۱} + (P_{n-۱}(n-۱)a + \mathrm{D}(P_{n-۲}))t^{n-۲} + \cdots + P_۱a + \mathrm{D}(P_۰)$. چون $\deg_t(\mathrm{D}(P)) < \deg_t(P)$ نتیجه می‌گیریم که $\gcd(P, \mathrm{D}(P)) = ۱$. اکنون فرض کنیم $f = \frac{a}{b} \in C_{K(t)}$

و $\gcd(a,b)=1$. چون 0 $\mathrm{D}(f)=\frac{\mathrm{D}(a)b-a\mathrm{D}(b)}{b^2}$. درمی‌یابیم که $\mathrm{D}(a)b=\mathrm{D}(b)a$. از آنجا که a و b نسبت به هم اول‌اند، نتیجه می‌شود $a\mid\mathrm{D}(a)$ و $b\mid\mathrm{D}(b)$. پس $a,b\in K$ و درنتیجه $f\in C_K$. بنابراین خواهیم داشت $C_{K(t)}=C_K$.

□

نتیجه ۶.۲.۳. اگر $f\in\mathbb{C}(x)\setminus\mathbb{C}$ باشد، آنگاه $\log(f(x))$ بر روی $\mathbb{C}(x)$ متعالی است.

اثبات. قرار می‌دهیم $t=\log(f(x))$. در این صورت $\mathrm{D}(t)=\frac{\mathrm{D}(f(x))}{f(x)}$. ادعا می‌کنیم که برای هر $g\in\mathbb{C}(x)$ داریم $\mathrm{D}(t)\neq\mathrm{D}(g)$. برای اثبات ادعا بر اساس برهان خلف، اینگونه فرض می‌کنیم که $\mathrm{D}(g)=\frac{\mathrm{D}(f)}{f}$. از آنجا که f عضوی از $\mathbb{C}(x)\setminus\mathbb{C}$ است، پس یک چندجمله‌ای تحویل‌ناپذیر مانند P در $\mathbb{C}[x]$ وجود دارد به طوری که $\mathrm{ord}_P(f)\neq 0$. در نتیجه $\mathrm{ord}_P\left(\frac{\mathrm{D}(f)}{f}\right)=-1$. اما برای هر چندجمله‌ای تحویل‌ناپذیر P داریم $\mathrm{ord}_P(\mathrm{D}(g))\neq -1$ که این یک تناقض است. □

۶.۳ قضیه لیوویل

فرض کنیم $(E,')$ یک توسیع دیفرانسیلی از $(F,')$ با مشخصه صفر و $\alpha\in E$ یک عنصر جبری روی F با چندجمله‌ای مینیمال تکین $P=x^n+\sum_{i=0}^{n-1}P_ix^i$ باشد که در آن $P(\alpha)=0$. در این صورت، اگر $[F(\alpha):F]=n$ و مجموعه $\{1,\alpha,\dots,\alpha^{n-1}\}$ یک پایه برای $F(\alpha)$ روی F باشد، آنگاه اگر $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ ریشه‌های P در توسیع جبری $\overline{F}$ باشند، خواهیم داشت:

$$\begin{cases} P_{n-1}=-(\lambda_1+\cdots+\lambda_n),\\ P_0=(-1)^n\lambda_1\cdots\lambda_n. \end{cases}$$

برای هر $\beta\in F(\alpha)$ نگاشت $\varphi_\beta:F(\alpha)\to F(\alpha)$ را به صورت $\varphi_\beta(\gamma)=\beta\gamma$ و به‌ازای هر $\gamma\in F(\alpha)$ تعریف می‌کنیم. در این حالت، φ_β خطی است و به آن نگاشت ضرب متناظر با β می‌گوییم. اگر $\{\alpha_1,\dots,\alpha_n\}$

یک پایه برای $F(\alpha)$ روی F باشد، آنگاه داریم

$$\varphi_\beta \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = M_\beta \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix},$$

که در آن $M_\beta \in F^{n\times n}$ است. ماتریس M_β به عنوان نمایش ماتریسی β نسبت به پایه $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ شناخته می‌شود. همچنین می‌دانیم که نمایش‌های ماتریسی β نسبت به دو پایه متفاوت مشابه هستند.

تعریف ۶.۳.۱. فرض کنیم $\beta \in F(\alpha)$ و M_β نمایش ماتریسی β نسبت به یک پایه باشد. اثر β در $F(\alpha)$ روی F، به صورت $\mathrm{Tr}_{F(\alpha)/F}(\beta)$ تعریف می‌شود که همان اثر ماتریس M_β است. همچنین نرم β در $F(\alpha)$ روی F، با نماد $N_{F(\alpha)/F}(\beta)$ نمایش داده می‌شود که برابر با دترمینان M_β است.

تذکر ۶.۳.۱. از آنجا که ماتریس‌های مشابه، اثر و دترمینان یکسانی دارند، تعاریف فوق برای اثر و نرم مستقل از انتخاب پایه است.

فرض کنیم $A, B \in F^{n\times n}$ مشابه باشند، یعنی ماتریس وارون‌پذیر $P \in F^{n\times n}$ وجود دارد به طوری که $A = P^{-1}BP$. در این صورت $|\lambda I - A| = |\lambda I - P^{-1}BP| = |P^{-1}(\lambda I - B)P| = |\lambda I - B|$ و درنتیجه چندجمله‌ای سرشت‌نمای ماتریس‌های A و B برابر است. اگر بنویسیم

$$|\lambda I - A| = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_0 = (\lambda - \lambda_1)\cdots(\lambda - \lambda_n),$$

آنگاه خواهیم داشت

$$\begin{cases} \mathrm{Tr}(A) = \lambda_1 + \cdots + \lambda_n, \\ \det(A) = \lambda_1 \cdots \lambda_n. \end{cases}$$

در نتیجه، اثر و دترمینان ماتریس A تحت تبدیلات مشابه، پایدار باقی می‌مانند.

قضیه ۶.۳.۱. فرض کنیم α روی F جبری و چندجمله‌ای مینیمال آن به صورت $P = \sum_{i=0}^{n} P_i x^i \in F[x]$ باشد. ریشه‌های متمایز P در $\overline{F}$ را به صورت $\alpha_1 = \alpha, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ می‌نامیم و نگاشت جانشانی F را به

صورت $\sigma_i : F(\alpha) \to \overline{F}$ با ضابطه $\sigma_i(\alpha) = \alpha_i$ تعریف می‌کنیم. آنگاه برای هر $\beta \in F(\alpha)$ خواهیم داشت $\sigma_i(\beta') = (\sigma_i(\beta))'$.

اثبات. کافی است نشان دهیم که $\sigma_i(\alpha') = (\sigma_i(\alpha))'$. فرض کنیم $P_0 = \sum_{i=0}^{n} P_i x^i$ و $P_1 = \sum_{i=1}^{n} iP_i x^{i-1}$. برای هر ریشه α_i از P داریم $\alpha_i' = -\frac{P_0(\alpha_i)}{P_1(\alpha_i)} = Q(\alpha_i)$ که در آن Q عنصری از $F[x]$ است و داریم $\deg_x(Q) \le n-1$. حال برای هر $1 \le i \le n$ خواهیم داشت

$$\sigma_i(\alpha_1') = \sigma_i(Q(\alpha_1)) = Q(\sigma_i(\alpha_1)) = (\alpha_i)' = (\sigma_i(\alpha_1))'.$$

پس به اثبات مطلوب خود دست یافته‌ایم. □

گزاره ۶.۳.۱. فرض کنید $(F,')$ یک میدان دیفرانسیلی با مشخصه صفر و α روی F جبری و نامنفی باشد. برای $\beta_1, \beta_2 \in F(\alpha)$ آنگاه داریم

(1) $\mathrm{Tr}(\beta_1 + \beta_2) = \mathrm{Tr}(\beta_1) + \mathrm{Tr}(\beta_2)$,

(2) $N(\beta_1\beta_2) = N(\beta_1)N(\beta_2)$,

(3) $\dfrac{N(\alpha)'}{N(\alpha)} = \mathrm{Tr}\left(\dfrac{\alpha'}{\alpha}\right)$.

اثبات. اثبات قسمت اول و دوم به سادگی امکان‌پذیر است. بنابراین به سراغ اثبات قسمت سوم می‌رویم. فرض کنیم $P = x^n + \sum_{i=0}^{n-1} P_i x^i \in F[x]$ چندجمله‌ای مینیمال α باشد. آنگاه ماتریس ضرب در α نسبت به پایه $\{1, \alpha, \dots, \alpha^{n-1}\}$ به صورت زیر است

$$M_\alpha = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -P_0 & -P_1 & -P_2 & \cdots & -P_{n-1} \end{pmatrix}.$$

با توجه به آنچه گفته شد، داریم $|xI - M_\alpha| = P_0 + P_1 x + \cdots + P_{n-1}x^{n-1} + x^n$. در این صورت، اثر و نرم این ماتریس در نقطه α به ترتیب با روابط $\mathrm{Tr}(\alpha) = -P_{n-1} = \sigma_1(\alpha) + \cdots + \sigma_n(\alpha)$ و $N(\alpha) = (-1)^n P_0 = \sigma_1(\alpha)\cdots\sigma_n(\alpha)$ بیان خواهد شد و به طور کلی، برای هر $\beta \in F(\alpha)$ خواهیم داشت $\mathrm{Tr}_{F(\alpha)/F}(\beta) = \sigma_1(\beta) + \cdots + \sigma_n(\beta)$ و $N_{F(\alpha)/F}(\beta) = \sigma_1(\beta)\cdots\sigma_n(\beta)$ و در نهایت

$$\frac{N(\alpha)'}{N(\alpha)} = \frac{\prod_{i=1}^{n}\sigma_i(\alpha)'}{\prod_{i=1}^{n}\sigma_i(\alpha)} = \sum_{i=1}^{n}\frac{(\sigma_i(\alpha))'}{\sigma_i(\alpha)} = \sum_{i=1}^{n}\frac{\sigma_i(\alpha')}{\sigma_i(\alpha)} = \sum_{i=1}^{n}\sigma_i\left(\frac{\alpha'}{\alpha}\right) = \mathrm{Tr}\left(\frac{\alpha'}{\alpha}\right).$$

□

قضیه ۲.۳.۶ (قضیه لیوویل). فرض کنیم $(F,')$ یک میدان دیفرانسیلی با مشخصه صفر و $f \in F$. اگر یک توسیع ابتدایی $E = F(t_1, \ldots, t_n)$ با $C_E = C_F$ و $g \in E$ موجود باشد به طوری که $f = g'$ آنگاه عناصر $v \in F$، $u_1, \ldots, u_m \in F^* = F \setminus \{0\}$ و $c_1, \ldots, c_m \in C_F$ وجود دارند به‌طوری که $f = v' + \sum_{i=1}^{m} c_i \frac{u_i'}{u_i}$.

تذکر ۲.۳.۶. نسخه قوی‌تری از قضیه لیوویل وجود دارد که بیان می‌کند اگر f در $E = F(t_1, \ldots, t_n)$ یک انتگرال ابتدایی داشته باشد، آنگاه $v \in F$، $c_1, \ldots, c_m \in \overline{F}$ و $u_1, \ldots, u_m \in F(c_1, \ldots, c_m)$ وجود دارد به طوری که $f = v' + \sum_{i=1}^{m} c_i \frac{u_i'}{u_i}$.

در این بخش قصد آن داریم تا با ارائه چند مثال، نسبت به برخی از کاربردهای قضیه لیوویل آگاه شویم.

۴.۶ کاربردهای قضیه لیوویل

در این بخش، قصد آن داریم تا با ارائه دو مثال، کاربرد قضیه لیوویل را روشن نماییم. اکنون می‌توانیم نشان دهیم که توابع $\exp(x^2)$ و $\frac{1}{\log(x)}$ انتگرال ابتدایی ندارند:

مثال ۱.۴.۶. $f = \exp(x^2)$ انتگرال ابتدایی ندارد.

فرض کنیم $F = \mathbb{C}(x)(f)$ که روی $\mathbb{C}(x)$ ابتدایی است. توجه کنید که f بر روی $\mathbb{C}(x)$ متعالی است. اگر f یک انتگرال ابتدایی داشته باشد، آنگاه $v \in F$، $c_1, \ldots, c_m \in C_F = \mathbb{C}$ و $u_1, \ldots, u_m \in F$ وجود دارد به طوری که $f = v' + \sum_{i=1}^m c_i \frac{u_i'}{u_i}$.

با استفاده از برآورد مرتبه داریم که برای هر چندجمله‌ای نرمال تحویل‌ناپذیر $P \in \mathbb{C}(x)[f]$ مرتبه عناصر یاد شده در قضیه لیوویل به صورت $\operatorname{ord}_P(v) \geq 0$ و $\operatorname{ord}_P(u_i) = 0$ خواهد بود. بنابراین $v \in \mathbb{C}(x)[f, f^{-1}]$ و حداکثر یکی از u_i ها برابر با f است. از آنجایی که $\deg_f \left(f - \sum_{i=1}^m c_i \frac{u_i'}{u_i}\right) = 1$ پس می‌توان نوشت $v = af + b$. که در آن $a, b \in \mathbb{C}(x)$ و $a \neq 0$. پس $f = (af)' = (a' + 2xa)f$. و درنتیجه $a' + 2xa = 1$. با استفاده از برآورد مرتبه نشان می‌دهیم معادله $y' + 2xy = 1$ هیچ جوابی در $\mathbb{C}(x)$ ندارد. بنابراین $f = \exp(x^2)$ انتگرال ابتدایی ندارد.

مثال ۶.۴.۲. می‌خواهیم نشان دهیم که $f = \frac{1}{\log(x)}$ انتگرال ابتدایی ندارد.

فرض کنیم $F = \mathbb{C}(x)(t)$ که در آن $t = \log(x)$ است و بر روی $\mathbb{C}(x)$ متعالی است. اگر f یک انتگرال ابتدایی بر روی F داشته باشد، آنگاه $v \in F$، $u_1, \ldots, u_m \in F \setminus \{0\}$ و $c_1, \ldots, c_m \in \mathbb{C}$ وجود دارند به طوری که $\frac{1}{t} = v' + \sum_{i=1}^m c_i \frac{u_i'}{u_i}$. با استفاده از برآورد مرتبه می‌توان نشان داد که $\operatorname{ord}_P(v) \geq 0$ و $u_i = t$ یا $\operatorname{ord}_P(u_i) = 0$ برای هر چندجمله‌ای نرمال تحویل‌ناپذیر $P \in \mathbb{C}(x)[t]$ برقرار است. در واقع، اگر $P \neq t$ باشد، داریم

$$\operatorname{ord}_P(v') = \begin{cases} \geq 0, & \text{اگر } \operatorname{ord}_P(v) \geq 0, \\ < -1, & \text{اگر } \operatorname{ord}_P(v) < 0. \end{cases}$$

اما داریم:

$$\operatorname{ord}_P\left(\frac{1}{t} - \sum_{i=1}^m c_i \frac{u_i'}{u_i}\right)$$

که بزرگ‌تر مساوی ۰ یا برابر با ۱− است. در نتیجه $\operatorname{ord}_P(v) \geq 0$. اگر $\operatorname{ord}_P(u_i) \neq 0$ برای عددی مانند $i \in \{1, \ldots, m\}$ برقرار باشد، آنگاه $\operatorname{ord}_P\left(\frac{1}{t} - \sum_{i=1}^m c_i \frac{u_i'}{u_i}\right) = -1$ که این رابطه با شرط $\operatorname{ord}_P(v') \geq 0$ در تناقض است. بنابراین، $\operatorname{ord}_P(u_i) = 0$ برای هر $i \in \{1, \ldots, m\}$ برقرار است. اگر $P = t$ باشد، آنگاه $\operatorname{ord}_P\left(\frac{1}{t}\right) = -1$ و این نتیجه می‌دهد که $u_i = t$ برای عددی مانند i. پس $\frac{1}{t} = v' + c_i \frac{t'}{t} + \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^m c_j \frac{u_j'}{u_j}, \quad c_i \in \mathbb{C}$ و در نتیجه $1 = c_i t' = c_i \frac{1}{x}$ که این یک تناقض است.

این فصل، اگرچه قضایای تئوری و اثباتهای محض را در خود جای داده بود، به وضوح نوعی از کاربرد جبر دیفرانسیلی را در مورد توابع مقدماتی به نمایش گذاشت. نکته اساسی موجود در این فصل این بود که فراتر از توابع جبری و چندجلمه‌ای‌ها حرکت کردیم و اطلاعات مفید و مناسبی را با استفاده از قضیه لیوویل پیرامون آن‌ها به دست آوردیم.

کتاب‌نامه

[1] Casale, Guy. Galoisian proof of Nishioka-Umemura irreducibility of first Painlevé equation. In *Équations différentielles et singularités. En l'honneur de J. M. Aroca*, pages 83–100. Paris: Société Mathématique de France, 2009.

[2] Cox, David A., Little, John, and O'Shea, Donal. *Ideals, varieties, and algorithms. An introduction to computational algebraic geometry and commutative algebra*. Undergraduate Texts Math. Cham: Springer, 4th revised ed. edition, 2015.

[3] Eisenbud, David. *Commutative algebra. With a view toward algebraic geometry*, volume 150 of *Grad. Texts Math.* Berlin: Springer-Verlag, 1995.

[4] Guo, Li, Cassidy, Phyllis J., Keigher, William F., and Sit, William Y., editors. *Differential algebra and related topics. Proceedings of the international workshop, Rutgers - The State University of New Jersey, New Brunswick, NJ, USA, November 2–3, 2000.* Singapore: World Scientific, 2002.

[5] Hashemi, Amir. *Gröbner basis and its applications*. Isfahan University of Technology Press (in Persian), 2023.

[6] Hashemi, Amir and Lazard, Daniel. Sharper complexity bounds for zero-dimensional Gröbner bases and polynomial system solving. *Int. J. Algebra Comput.*, 21(5):703–713, 2011.

[7] Ishihara, Yuki. Primary decomposition of symmetric ideals. *Comment. Math. Univ. St. Pauli*, 72(1):43–56, 2024.

[8] Kolchin, E. R. *Differential algebra and algebraic groups*, volume 54 of *Pure Appl. Math., Academic Press*. Academic Press, New York, NY, 1973.

[9] Kolchin, E. R. Differential algebraic structures. Complex analysis and its applications, Collect. Artic., Steklov Math. Inst., Moscow 1978, 245-256 (1978)., 1978.

[10] Kolchin, E. R. Differential algebraic groups. Group theory, Proc. Int. Symp., Beijing/China 1984, Lect. Notes Math. 1185, 155-174 (1986)., 1986.

[11] León Sánchez, Omar, Meretzky, David, and Pillay, Anand. More on Galois cohomology, definability, and differential algebraic groups. *J. Symb. Log.*, 89(2):496–515, 2024.

[12] Ritt, Joseph Fels. Differential algebra. New York: Dover Publications, Inc. viii, 184 p. (1955)., 1955.

واژه‌نامهٔ فارسی به انگلیسی

الف

اصل خوش‌ترتیبی . . . . Well-Ordering Principle
الگوریتم تقسیم . . . . Division Algorithm
الگوریتم شبه تقسیم . . . . Pseduo-Division Algorithm
ایده‌آل اشباع شده . . . . Saturated Ideal
ایده‌آل اول . . . . Prime Ideal
ایده‌آل اولیه . . . . Primary Ideal
ایده‌آل جمله پیشرو . . . . Leading Term Ideal
ایده‌آل حذفی . . . . Elimination Ideal
ایده‌آل خارج قسمتی . . . . Quotient Ideal
ایده‌آل دیفرانسیلی . . . . Differential Ideal
ایده‌آل رادیکال . . . . Radical Ideal
ایده‌آل سره . . . . Proper Ideal
ایده‌آل ماکزیمال . . . . Maximal Ideal
ایده‌آل همگن . . . . Homogeneous Ideal

ب

باقیمانده جزئی . . . . Partial Reminder
بستار دیفرانسیلی . . . . Differential Clusure
بُعد دیفرانسیلی . . . . Differential Dimension
بعد کرول . . . . Krull Dimension
بنیان . . . . Initial

پ

پایه گربنر . . . . . . Gröbner basis

ت

تابع هیلبرت (همگن) . . . . . . Hilbert Function
تابع هیلبرت آفین . . . . . . Affine Hilbert Function
تجزیه اولیه . . . . . . Primary Decomposition
تجزیه تحویل‌ناپذیر . . . . . . Irreducilble Decomposition
تجزیه تحویل‌ناپذیر نافزون . . . . . . Irredundant Irreducilble Decomposition
تجزیه نافزون . . . . . . Irredundant Decomposition
ترتیب الفبایی . . . . . . Lexicographical Ordering
ترتیب الفبایی مدرج . . . . . . Degree Lexicographical Ordering
ترتیب الفبایی معکوس مدرج . . . . . . Degree Reverse Lexicographical Ordering
ترتیب تک‌جمله‌ای . . . . . . Monomial Ordering
ترتیب چندجمله‌ای . . . . . . Polynomial Ordering
تک جمله‌ای . . . . . . Monomial
توسیع میدان دیفرانسیلی . . . . . . Differential Field Exstension
توسیع‌های ابتدایی . . . . . . Elementary Extensions

ث

ثابت حلقه . . . . . . Ring’s Constant

ج

جانشانی . . . . . . Embedding
جبر ریت . . . . . . Ritt Algebra
جداساز . . . . . . Separant

چ

چندجمله‌ای مینیمال . . . . . Minimal Polynomial
چندجمله‌ای نرمال . . . . . Normal Polynomial
چندجمله‌ای ویژه . . . . . Special Polynomial
چندجمله‌ای همگن . . . . . Homogeneous Polynomial
چندجمله‌ای هیلبرت . . . . . Hilbert Polynomial
چندجمله‌ای هیلبرت آفین . . . . . Affine Hilbert Polynomial
چندگونای آفین . . . . . Affine Variety
چندگونای تحویل‌ناپذیر . . . . . Irreducilble Variety
چندگونای دیفرانسیلی . . . . . Differential Variety

ح

حلقه . . . . . Ring
حلقه ثوابت . . . . . Ring of Constants
حلقه چندجمله‌ای‌های تک متغیره . . . . . Univariate Polynomial Ring
حلقه چندجمله‌ای‌های چند متغیره . . . . . Multivariable Polynomial Ring
حلقه چندجمله‌ای‌های دیفرانسیلی . . . . . Ring of Differential Polynomials
حلقه خارج قسمتی . . . . . Quotient Ring
حلقه دیفرانسیلی . . . . . Differential Ring
حلقه ریت-نوتری . . . . . Ritt-Noetherian Ring
حلقه مختصات دیفرانسیلی . . . . . Differential Coordinate Ring
حلقه نوتری . . . . . Noetherian Ring

خ

خودکاهش‌یافته . . . . . Autoreduced

د

دامنه اقلیدسی . . . . . Euclidean Domain
دامنه دیفرانسیلی . . . . . Differential Domain

دامنه صحیح . . . . Integral Domain
درجه تعالی . . . . Transcendence Degree
درجه توسیع میدان . . . . Field Extension Degree
درجه کلاس چندجمله‌ای‌ها . . . . Polynomial Class Degree

ر

رتبه‌بندی حذفی . . . . Elimination Ranking
رتبه‌بندی مرتب . . . . Orderly Ranking

ز

زبرحلقه دیفرانسیلی . . . . Differential Overring
زیرچندگونای دیفرانسیلی . . . . Differential Subvariety
زیرحلقه دیفرانسیلی . . . . Differential Subring

س

سری هیلبرت آفین . . . . Affine Hilbert Series

ش

شبه تقسیم متوالی . . . . Succesive Pseduo-Division

ص

صفر دیفرانسیلی . . . . Differential Zero
صفر عام . . . . Generic Zero

ف

فرم مثلثی چندجمله‌ای‌ها .... Traingular Form of Polynomials
فضای آفین .... Affine Space
فضای آفین دیفرانسیلی .... Differential Affine Space
فضای برداری .... Vector Space
فضای تولید شده .... Generated Space

ق

قانون گرانش نیوتن .... Newton's Law of Gravitation
قضیه پایه‌ای هیلبرت .... Hilbert Basis Theorem
قضیه حذفی .... Elimination Theorem
قضیه ریت-رادنباش .... Ritt-Raudenbush Theorem
قضیه ضعیف صفرساز دیفرانسیلی .... Weak Differential Nullstellensatz
قضیه ضعیف صفرساز هیلبرت .... Weak Hilbert's Nullestellensatz
قضیه عنصر اولیه دیفرانسیلی .... Differential Primitive Element Theoreme
قضیه قوی صفرساز دیفرانسیلی .... Strong Differential Nullstellensatz
قضیه قوی صفرساز هیلبرت .... Strong Hilbert's Nullestellensatz
قضیه کلچین .... Kolchin Theorem
قضیه لاسکر-نوتر .... Lasker-Noether Theorem
قضیه لیوویل .... Liouville's Theorem
قوانین حرکت نیوتن .... Newton's Law of Motion
قوانین کپلر .... Kepler's Laws

ک

کلاس چندجمله‌ای‌ها .... Polynomial Class

ل

لم دیکسون .... Dickson's Lemma

م

متناهی مولد .... Finitely Generated
مجموعه پایه دیفرانسیلی .... Differential Basic Set
مجموعه پایه ضعیف .... Weak Basic Set
مجموعه صعودی .... Acsending Set
مجموعه مشخصه .... Characteristic Set
مجموعه مشخصه دیفرانسیلی .... Differential Characteristic Set
مجموعه مولد .... Generating Set
مدول .... Module
مشتق .... Derivative
مشخصه میدان .... Field's Characteristic
مقسوم علیه صفر .... Zero Divisor
مؤلفه اول .... Prime Component
مؤلفه تحویل‌ناپذیر .... Irreducilble Component
میدان .... Field
میدان بسته جبری .... Algebrically Closed Field
میدان بسته دیفرانسیلی .... Differentially Closed Field
میدان دیفرانسیلی .... Differential Field
میدان کسرها .... Field of Fractions

ن

نقطه عام .... Generic Point

و

وابسته جبری دیفرانسیلی .... Differentially Algebrically Dependent
وابسته دیفرانسیلی .... Differentially Dependent

ه

همریختی حلقه‌ای .... Ring Homomorphism

همریختی دیفرانسیلی . . . . Differential Homomorphism

ی

یکریختی حلقه‌ای . . . . Ring Isomomorphism

واژه‌نامهٔ انگلیسی به فارسی

A

Acsending Set . . . . مجموعه صعودی
Affine Variety . . . . چندگونای آفین
Affine Hilbert Function . . . . تابع هیلبرت آفین
Affine Hilbert Polynomial . . . . چندجمله‌ای هیلبرت آفین
Affine Hilbert Series . . . . سری هیلبرت آفین
Affine Space . . . . فضای آفین
Autoreduced . . . . خودکاهش‌یافته
Algebrically Closed Field . . . . میدان بسته جبری

C

Characteristic Set . . . . مجموعه مشخصه

D

Degree Lexicographical Ordering . . . . ترتیب الفبایی مدرج
Degree Reverse Lexicographical Ordering . . . . ترتیب الفبایی معکوس مدرج
Derivative . . . . مشتق
Dickson’s Lemma . . . . لم دیکسون
Differential Affine Space . . . . فضای آفین دیفرانسیلی
Differential Basic Set . . . . مجموعه پایه دیفرانسیلی
Differential Characteristic Set . . . . مجموعه مشخصه دیفرانسیلی
Differential Clusure . . . . بستار دیفرانسیلی

Differential Closure . . . . بستار دیفرانسیلی
Differential Coordinate Ring . . . . حلقه مختصات دیفرانسیلی
Differential Dimension . . . . بُعد دیفرانسیلی
Differential Domain . . . . دامنه دیفرانسیلی
Differential Field . . . . میدان دیفرانسیلی
Differential Field Exstension . . . . توسیع میدان دیفرانسیلی
Differential Variety . . . . چندگونای دیفرانسیلی
Differential Zero . . . . صفر دیفرانسیلی
Differential Homomorphism . . . . همریختی دیفرانسیلی
Differential Ideal . . . . ایده‌آل دیفرانسیلی
Differential Overring . . . . زبرحلقه دیفرانسیلی
Differential Primitive Element Theoreme . . . . قضیه عنصر اولیه دیفرانسیلی
Differential Ring . . . . حلقه دیفرانسیلی
Differential Subvariety . . . . زیرچندگونای دیفرانسیلی
Differential Subring . . . . زیرحلقه دیفرانسیلی
Differentially Algebrically Dependent . . . . وابسته جبری دیفرانسیلی
Differentially Closed Field . . . . میدان بسته دیفرانسیلی
Differentially Dependent . . . . وابسته دیفرانسیلی
Division Algorithm . . . . الگوریتم تقسیم

E

Euclidean Domain . . . . دامنه اقلیدسی
Elementary Extensions . . . . توسیع‌های ابتدایی
Elimination Ideal . . . . ایده‌آل حذفی
Elimination Ranking . . . . رتبه‌بندی حذفی
Elimination Theorem . . . . قضیه حذفی
Embedding . . . . جانشانی

F

Field . . . . میدان
Field Extension Degree . . . . درجه توسیع میدان

Field of Fractions . . . . میدان کسرها
Field's Characteristic . . . . مشخصه میدان
Finitely Generated . . . . متناهی مولد

G

Generated Space . . . . فضای تولید شده
Generating Set . . . . مجموعه مولد
Generic Zero . . . . صفر عام
Generic Point . . . . نقطه عام
Gröbner basis . . . . پایه گربنر

H

Hilbert Basis Theorem . . . . قضیه پایه‌ای هیلبرت
Hilbert Function . . . . تابع هیلبرت (همگن)
Hilbert Polynomial . . . . چندجمله‌ای هیلبرت
Homogeneous Ideal . . . . ایده‌آل همگن
Homogeneous Polynomial . . . . چندجمله‌ای همگن

I

Initial . . . . بنیان
Integral Domain . . . . دامنه صحیح
Irreducilble Component . . . . مؤلفه تحویل‌ناپذیر
Irreducilble Decomposition . . . . تجزیه تحویل‌ناپذیر
Irreducilble Variety . . . . چندگونای تحویل‌ناپذیر
Irredundant Decomposition . . . . تجزیه نافزون
Irredundant Irreducilble Decomposition . . . . تجزیه تحویل‌ناپذیر نافزون

K

Kepler’s Laws . . . . قوانین کپلر
Kolchin Theorem . . . . قضیه کلچین
Krull Dimension . . . . بعد کرول

L

Lasker-Noether Theorem . . . . قضیه لاسکر-نوتر
Leading Term Ideal . . . . ایده‌آل جمله پیشرو
Lexicographical Ordering . . . . ترتیب الفبایی
Liouville’s Theorem . . . . قضیه لیوویل

M

Maximal Ideal . . . . ایده‌آل ماکزیمال
Multivariable Polynomial Ring . . . . حلقه چندجمله‌ای‌های چند متغیره
Minimal Polynomial . . . . چندجمله‌ای مینیمال
Module . . . . مدول
Monomial . . . . تک جمله‌ای
Monomial Ordering . . . . ترتیب تک‌جمله‌ای

N

Newton’s Law of Gravitation . . . . قانون گرانش نیوتن
Newton’s Law of Motion . . . . قوانین حرکت نیوتن
Noetherian Ring . . . . حلقه نوتری
Normal Polynomial . . . . چندجمله‌ای نرمال

O

Orderly Ranking . . . . رتبه‌بندی مرتب

P

Partial Reminder . . . . باقیمانده جزئی
Polynomial Class . . . . کلاس چندجمله‌ای‌ها
Polynomial Class Degree . . . . درجه کلاس چندجمله‌ای‌ها
Polynomial Ordering . . . . ترتیب چندجمله‌ای
Primary Decomposition . . . . تجزیه اولیه
Primary Ideal . . . . ایده‌آل اولیه
Prime Component . . . . مؤلفه اول
Prime Ideal . . . . ایده‌آل اول
Proper Ideal . . . . ایده‌آل سره
Pseduo-Division Algorithm . . . . الگوریتم شبه تقسیم

Q

Quotient Ideal . . . . ایده‌آل خارج قسمتی
Quotient Ring . . . . حلقه خارج قسمتی

R

Radical Ideal . . . . ایده‌آل رادیکال
Ring . . . . حلقه
Ring Homomorphism . . . . همریختی حلقه‌ای
Ring Isomomorphism . . . . یکریختی حلقه‌ای
Ring of Constants . . . . حلقه ثوابت
Ring of Differential Polynomials . . . . حلقه چندجمله‌ای‌های دیفرانسیلی
Ring’s Constant . . . . ثابت حلقه
Ritt Algebra . . . . جبر ریت
Ritt-Noetherian Ring . . . . حلقه ریت–نوتری
Ritt-Raudenbush Theorem . . . . قضیه ریت–رادنباش

S

Saturated Ideal . . . . ایده‌آل اشباع شده
Separant . . . . جداساز
Succesive Pseduo-Division . . . . شبه تقسیم متوالی
Special Polynomial . . . . چندجمله‌ای ویژه
Strong Differential Nullstellensatz . . . . قضیه قوی صفرساز دیفرانسیلی
Strong Hilbert’s Nullestellensatz . . . . قضیه قوی صفرساز هیلبرت

T

Traingular Form of Polynomials . . . . فرم مثلثی چندجمله‌ای‌ها
Transcendence Degree . . . . درجه تعالی

U

Univariate Polynomial Ring . . . . حلقه چندجمله‌ای‌های تک متغیره

V

Vector Space . . . . فضای برداری

W

Weak Basic Set . . . . مجموعه پایه ضعیف
Weak Differential Nullstellensatz . . . . قضیه ضعیف صفرساز دیفرانسیلی
Weak Hilbert’s Nullestellensatz . . . . قضیه ضعیف صفرساز هیلبرت
Well-Ordering Principle . . . . اصل خوش‌ترتیبی

Z

Zero Divisor . . . . مقسوم علیه صفر

Abstract

Differential algebra is one of the emerging branches in mathematics that deals with system of differential equations from an algebraic point of view. Although this branch of mathematics is purely based on abstract concepts in mathematics, especially the foundations of classical algebra; It will clearly have significant applications in other sciences and especially the engineering science. The ultimate goal of this branch of mathematics is the study and investigation of differential equations and this guarantees a strong relation with other branches of mathematics and basic science such as physics.

Keywords Differential Ring, Differential Field, Differential Ideal,Ritt Algebra,Gröbner basis, Pseudo Division

Isfahan University of Technology
Department of Mathematical Sciences
Faculty of Pure Mathematics
Algorithms and Computation

An Introduction to Computational Differential Algebra

Bachelor of Science Thesis in Mathematics

By:

Seyed Mehryar Alavi

Supervisor:

Amir Hashemi

December 2024