



دانشگاه صنعتی اصفهان
دانشکده علوم ریاضی

مقدمه‌ای بر نظریه کاشی‌کاری

پایان‌نامه پروژه کارشناسی ریاضیات و کاربردها

ماناگردانی

استاد راهنما

دکتر امیر هاشمی

۱۴۰۳

فهرست مطالب

هفت	فهرست مطالب
نه	۱ پیشگفتار
۱	۲ تعاریف و مفاهیم مقدماتی
۱	۱۰۰۲ یادآوری مفاهیم اولیه
۲	۲۰۰۲ مجموعه شمارا و ناممارا
۴	۳۰۰۲ مبانی هندسه
۶	۴۰۰۲ آنالیز ریاضی و توپولوژی
۹	۵۰۰۲ مبانی جبر
۱۰	۶۰۰۲ کاشی‌کاری چیست؟
۱۷	۷۰۰۲ ایزومتری‌ها
۲۳	۸۰۰۲ تقارن‌ها در کاشی
۲۷	۹۰۰۲ تقارن‌ها در کاشی‌کاری‌ها
۳۶	۱۰۰۰۲ گروه‌های متقارن امکان‌پذیر از کاشی‌کاری‌ها
۵۰	۱۱۰۰۲ چه تعداد کاشی‌کاری؟
۵۹	۳ انواع کاشی‌کاری
۵۹	۱۰۳ کاشی‌کاری‌های یکنواخت
۶۸	۱۰۱۰۳ کاشی‌کاری‌های دارای رئوس منظم
۷۳	۲۰۱۰۳ کاشی‌کاری‌هایی که یال به یال نیستند
۸۰	۲۰۳ کاشی‌کاری متشکل از وصله‌ها
۹۳	۳۰۳ کاشی‌کاری‌های تصادفی
۱۰۳	۴۰۳ قضیه توسیع

۱۱۲ ۵.۳ کاشی‌کاری متناوب

۱۲۰ ۴ فضاهای انتقال

۱۲۰ ۱.۰.۴ انتقال‌های کامل

۱۲۳ ۲.۰.۴ فضاهای انتقال

۱۲۴ ۳.۰.۴ محدودیت نوع متناهی

۱۲۵ ۴.۰.۴ تهی یا غیرتهی؟

۱۲۷ ۵.۰.۴ انتقال‌های دو بعدی

۱۲۸ ۱.۴ نظریه محاسبات

۱۲۸ ۱.۱.۴ ماشین تورینگ

۱۲۹ ۲.۱.۴ کاشی‌کاری محاسبه‌پذیر

۱۳۳ کتاب‌نامه

فصل ۱

پیشگفتار

کاشی‌کاری یکی از هنرهای باستانی است که در طول تاریخ در معماری و تزئینات داخلی ساختمان‌ها نقش مهمی ایفا کرده است. در واقع، کاشی‌کاری، تقاطع جذابی از هنر و ریاضیات است که در آن اشکال هندسی برای پوشش یک صفحه بدون هم‌پوشانی یا فاصله استفاده می‌شوند. از موزاییک‌های ساده تا کاشی‌کاری‌های پیچیده اسلامی، همه و همه نشان‌دهنده کاربردهای گسترده ریاضیات در این هنر هستند. این هنر نه تنها از نظر زیبایی‌شناسی بلکه از دیدگاه ریاضی نیز بسیار جذاب و پیچیده است. به طور کلی، هدف از این پایان‌نامه، ارائه مقدمه‌ای جامع بر دنیای جذاب کاشی‌کاری است و بررسی پوشش صفحه با استفاده از اشکال هندسی از نظر شاخه‌های مختلف ریاضی از جمله ریاضیات گسسته، مبانی جبر، مبانی هندسه و توپولوژی است.

فصل اول را با تعاریف پایه‌ای از کاشی‌کاری، ایزومتری‌ها و تقارن‌ها آغاز می‌کنیم. ایزومتری‌ها به دو دسته مستقیم و غیرمستقیم تقسیم می‌شوند. دوران و انتقال، ایزومتری‌های مستقیم هستند و بازتاب و لغزه که ترکیبی از یک انتقال و بازتاب است در دسته ایزومتری‌های غیرمستقیم قرار می‌گیرند. سپس به تقارن‌های کاشی‌ها می‌پردازیم و گروه‌های دوری و دووجهی را معرفی می‌کنیم و در ادامه گروه‌های تقارنی امکان‌پذیر از کاشی‌کاری‌ها و مفاهیم و قضیه‌های اصلی آن را مطرح می‌کنیم. در این فصل به دو گروه از تقارن‌های کاشی‌کاری می‌پردازیم. گروه اول، تقارن‌های انتقالی‌ای هستند که موازی‌اند و شامل هفت گروه تقارنی فریز می‌شوند و گروه دوم گروه‌های تقارنی شامل انتقال‌های تقارنی غیرموازی‌اند و ۱۷ گروه کاغذدیواری را تولید می‌کنند. در ادامه به معرفی نمادگذاری اربیفولد برای این گروه‌های تقارنی می‌پردازیم و با بحث در مورد کاشی‌های خاصی که می‌توانند کاشی‌کاری‌های منحصر به فردی ایجاد کنند، فصل را به پایان می‌رسانیم.

سپس در فصل دوم به مفهوم گونه‌ها و تایپ‌های مختلف رئوس کاشی‌ها و در ادامه به معرفی کاشی‌کاری‌های یکنواخت که به یک کاشی‌کاری یال به یال تولید شده توسط چندضلعی‌های منظم با رئوس دارای تایپ یکسان گفته می‌شود، می‌پردازیم. مثال‌های ساده از کاشی‌کاری‌های یکنواخت، کاشی‌کاری‌های منظم هستند و یازده حالت ممکن از این کاشی‌کاری‌ها وجود خواهد داشت که در این بخش به نمایش هر یک از این حالات می‌پردازیم. به اضافه کردن شروط برای ایجاد کاشی‌کاری‌های متفاوت ادامه می‌دهیم و حال رئوس را منظم در نظر می‌گیریم. اگر یک رأس منظم باشد، در این صورت به هر رأس، n یال با زاویه $\frac{2\pi}{n}$ وصل است که به این کاشی‌کاری‌های تولید شده از رئوس منظم، کاشی‌کاری‌های لاوس گویم و به نحوه نمایش آن و انطباق متفاوت از دو نوع این کاشی‌کاری‌ها اشاره خواهیم کرد. سپس این بار شروط جدیدی اضافه می‌کنیم و کاشی‌کاری‌های غیر یال به یال و کاشی‌کاری‌های متشکل از یک وصله را معرفی کرده و قضیه توسعه که بسیار مهم و اساسی است را مطرح می‌کنیم. در نهایت، این فصل را با معرفی کاشی‌کاری‌های متناوب و تعاریف و قضایای مرتبط با آن به پایان می‌رسانیم.

فصل سوم یک مفهوم جدید در سیستم‌های دینامیکی نمادین به نام انتقال‌ها را معرفی می‌کند. این فصل، با مطرح کردن مفاهیم اصلی از انتقال‌های کامل، فضا‌های انتقال و انتقال‌های از نوع محدود آغاز می‌شود. سپس ماشین تورینگ که یک مدل ریاضی از محاسبه است و می‌تواند هر الگوریتم محاسباتی را شبیه‌سازی کند را معرفی کرده و نحوه کار و اهمیت آن را در نظریه محاسبات توضیح می‌دهد. در نهایت، امکان شبیه‌سازی یک ماشین تورینگ با استفاده از الگوهای کاشی‌کاری را بررسی می‌کند و یک پل ارتباطی بین دینامیک نمادین و کاشی‌کاری ریاضی ایجاد می‌کند.

مراجع اصلی این پایان‌نامه، کتاب‌های [۱] و [۲] هستند.

فصل ۲

تعاریف و مفاهیم مقدماتی

۱.۰.۲ یادآوری مفاهیم اولیه

نظریه مجموعه‌ها

به هر گردایه‌ای از اشیاء، به نام عضو^۱، یک مجموعه می‌گوییم. اگر x یک عضو از X باشد، می‌نویسیم $x \in X$. اگر همه عضوهای مجموعه Y در مجموعه X قرار داشته باشند، می‌نویسیم $Y \subset X$ و می‌گوییم Y یک زیرمجموعه از مجموعه X است. اگر عضوهای مجموعه Y در مجموعه X وجود نداشته باشند، می‌نویسیم $X \setminus Y$ آن زیرمجموعه از X مکمل^۲ Y خواهد بود.

مجموعه شاخص^۳ I ، مجموعه‌ای است که اعضا مجموعه X را نمایه می‌کند به گونه‌ای که اگر $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ آنگاه مجموعه شاخص آن $I = 1, 2, \dots, n$ خواهد بود. می‌توانیم بنویسیم $X = \{x_i\}_{i \in I}$. در اکثر مواقع I یک مجموعه از اعداد صحیح متناهی و نامتناهی است اما می‌تواند اعداد حقیقی یا هر مجموعه دیگری نیز باشد.

تعریف ۱-۲. یک رابطه هم‌ارزی^۴ روی مجموعه X ، آن را به زیرمجموعه‌های ناسازگار افراز می‌کند که به این زیرمجموعه‌ها کلاس‌های هم‌ارزی^۵ می‌گوییم.

^۴relation equivalence

^۲complement

^۱element

^۳index set

^۵equivalence classes

توجه کنید که هیچ عضوی نمی‌تواند در دو کلاس هم‌ارزی متفاوت یا بیشتر باشد. برای مثال مجموعه اعداد صحیح را در نظر می‌گیریم. می‌توانیم این مجموعه را به اعداد صحیح مثبت، اعداد صحیح منفی و مجموعه $\{0\}$ افراز کنیم.

دو عضو x و y در رابطه هستند اگر از یک کلاس هم‌ارزی باشند که به صورت $x \sim y$ نشان می‌دهیم و سه خاصیت بازتابی، تقارنی و تعدی باید برای \sim برقرار باشد. فرض کنید A و B دو مجموعه باشند. تابع $f: A \rightarrow B$ هر عضو از A را به یک عضو یکتا از B مرتبط می‌کند. تابع f یک‌به‌یک^۶ است اگر $f(a_1) = f(a_2)$ آنگاه $a_1 = a_2$. تابع f پوشا^۷ خواهد بود اگر به ازای هر $b \in B$ ، یک نقطه مانند $a \in A$ وجود داشته باشد که $f(a) = b$. یک تابع دوسویه^۸ است اگر هم یک به یک و هم پوشا باشد.

برای مثال اگر $A = \{6, 7, 8, 9\}$ و $B = \{15, 16, 17, 18\}$ آنگاه تابع $f: A \rightarrow B$ با ضابطه $f(x) = x + 9$ یک تابع دوسویه است.

اصل لانه کبوتری^۹: اگر n کبوتر در m لانه جایگذاری شده باشند به طوری که $n > m$ باشد، در این صورت لانه‌ای با حداقل $\lceil n/m \rceil$ کبوتر وجود خواهد داشت که $\lceil x \rceil$ به معنی اولین عدد صحیح بزرگ‌تر مساوی x است. همچنین می‌توانیم اصل لانه کبوتری را به گردایه نامتناهی از اشیاء تعمیم دهیم. اگر یک مجموعه نامتناهی از کبوتر را بین تعداد متناهی لانه توزیع کنیم، آنگاه حداقل یک لانه وجود دارد که شامل تعداد نامتناهی از کبوترها می‌شود.

برای مثال اگر گردایه‌ای نامتناهی از ارقام $0, 1, \dots, 9$ وجود داشته باشد، آنگاه حداقل یک رقم به تعداد نامتناهی بار تکرار می‌شود.

۲.۰.۲ مجموعه شمارا و ناشمارا

تعریف ۲-۲. مجموعه X شمارا^{۱۰} است اگر شامل تعداد متناهی عضو باشد یا یک رابطه دوسویه بین X و اعداد صحیح مثبت وجود داشته باشد.

هر مجموعه شمارا عضوهایش را به مجموعه $\{1, 2, \dots\}$ نظیر می‌کند.

اعداد صحیح $\{2, 4, 6, \dots\}$ شمارا هستند چون می‌توانیم یک تابع دوسویه با ضابطه $f(x) = x/2$ بین این مجموعه و اعداد صحیح مثبت بیابیم. \mathbb{Z} نیز شمارا است چون می‌توانیم یک تابع دوسویه $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}^+$ را

countable^{۱۰}

bijjective^۸

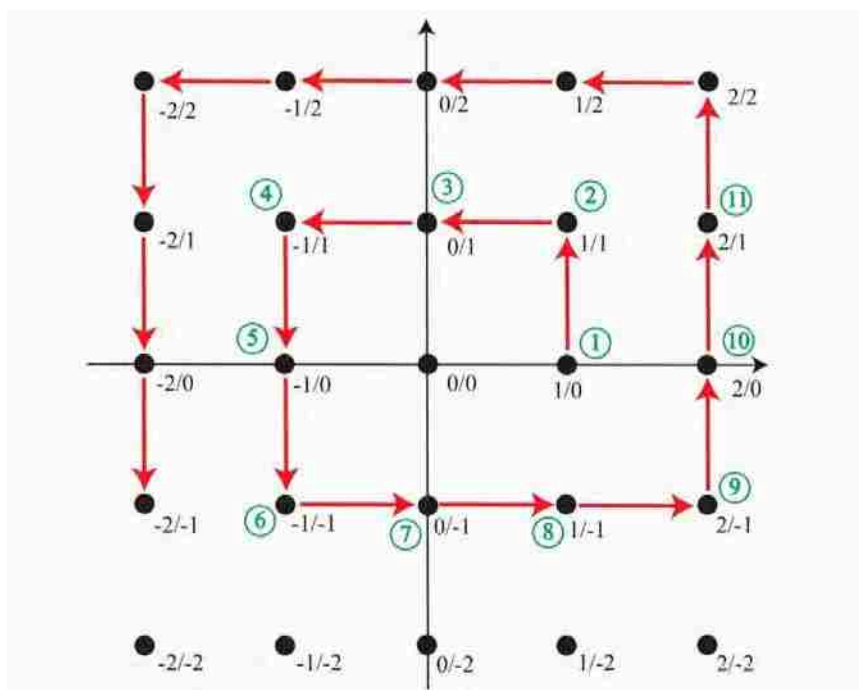
injective^۶
surjective^۷

^۹pigeonhole principle

با ضابطه

$$\begin{cases} 2x + 1 & x \geq 0 \\ -(2x) & x < 0 \end{cases}$$

تعریف کنیم. توجه کنید اگر در تابع پوشا $f : X \rightarrow Y$ ، X یک مجموعه شمارا باشد آنگاه مجموعه Y ، به عنوان مجموعه کوچک‌تر، نیز شمارا خواهد بود. ما از این نکته استفاده می‌کنیم تا اثبات کنیم اعداد گویا نیز شمارا هستند. برای این کار، اعداد گویا را در صفحه مطابق شکل زیر معرفی می‌کنیم.



هر نقطه (x, y) از صفحه $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ ، متناظر با عدد گویا x/y است. در این روش هر عدد گویا (حتی اعداد غیرگویا مانند 0) بیشتر از یک بار فهرست می‌شود ولی قطعاً شامل همه اعداد گویا خواهد شد. پس یک فهرست مرتب از همه این اعداد ایجاد می‌کنیم که از نقطه $(0, 1)$ شروع و به صورت مارپیچ حول مبدأ و در جهت پادساعتگرد حرکت می‌کنیم. اطمینان پیدا می‌کنیم که از همه نقاط صحیح موجود در فهرست عبور می‌کنیم. در نهایت یک تابع پوشا از \mathbb{Z}^+ به \mathbb{Q} تولید می‌شود. با اینکه این تابع دوسویه نیست و شامل بعضی از اعداد غیرگویا و اعداد تکراری می‌شود ولی نشان می‌دهد که اعداد گویا شمارا هستند. از آن جایی که زیرمجموعه یک مجموعه شمارا، شمارا است، حاصل ضرب $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ که شامل زوج‌های مرتب (x, y) است که در آن $x \in \mathbb{Q}$ و $y \in \mathbb{Q}$ شمارا هستند، نیز شمارا خواهد بود. از طرفی، مجموعه‌هایی هستند که با این روش نمی‌توانند فهرست شوند. برای مثال، بازه اعداد حقیقی در $[0, 1]$ را در نظر می‌گیریم. از استدلال قطری استفاده می‌کنیم تا نشان دهیم $[0, 1]$ ناشمارا است. یک مجموعه اگر شمارا نباشد، ناشمارا خواهد بود.

قضیه ۳-۲. بازه $[0, 1]$ ناشمارا است.

اثبات. فرض می‌کنیم، گردایه اعداد حقیقی بین 0 و 1 ، یک مجموعه شمارا باشد. سپس برای هر عدد صحیح مثبت، می‌توانیم عدد حقیقی متناظر با آن را فهرست کنیم. وقتی که لیست کامل شود، همه اعداد حقیقی بین 0 و 1 در نظر گرفته شده است و ما لیست زیر را خواهیم داشت:

۱. $0.3124\dots$

۲. $0.94165\dots$

۳. $0.443125\dots$

۴. $0.59664\dots$

۵. $0.651193\dots$

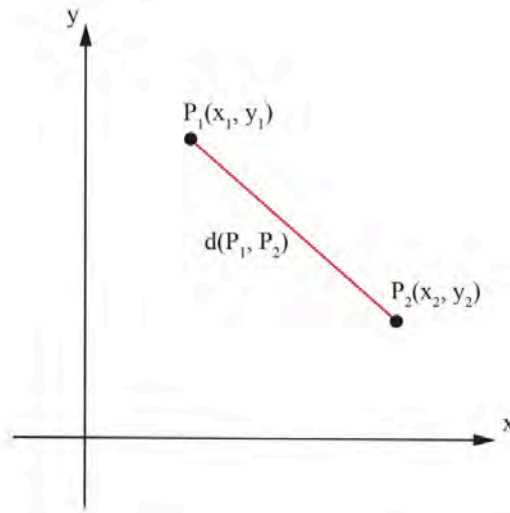
۶.

ولی می‌توانیم یک عدد حقیقی جدید مانند x بسازیم به صورتی که ارقام x شامل اولین رقم با معنا عدد اول لیست، دومین رقم با معنا عدد دوم لیست و به همین ترتیب ادامه داشته باشد. در نتیجه، $x = 0.34369\dots$. حال می‌توانیم عدد حقیقی جدید دیگری مثل x' بسازیم که دارای ارقام با معنا متفاوت از x باشد. هر رقم با معنا از x را یک واحد بالاتر می‌بریم به غیر از عدد ۹ که با ۸ جایگذاری می‌کنیم تا ملموس باشد. پس $x' = 0.45478\dots$ این عدد جدید نمی‌تواند در فهرست تمام اعداد ظاهر شود چون اولین رقم با معنا آن با اولین رقم با معنا عدد اول مغایرت دارد. این مسئله برای تمام ارقام x' صدق می‌کند. در نتیجه، ما یک فهرست کامل از اعداد حقیقی بین 0 و 1 خواهیم داشت و با ادعا ما تناقض ایجاد می‌کند. پس اعداد حقیقی، ناشمارا هستند. \square

به طور مشابه می‌توانیم اثبات کنیم که گردایه‌ای از تمام دنباله‌های شامل صفر و یک باید یک مجموعه ناشمارا باشد. توجه کنید که هر زیرمجموعه از یک مجموعه شمارا، شمارا و هر مجموعه شامل یک مجموعه ناشمارا، ناشمارا خواهد بود.

۳.۰.۲ مبانی هندسه

تعریف ۴-۲. بسیاری از کاشی‌کاری‌هایی که ما در نظر می‌گیریم، کاشی‌کاری‌های صفحه اقلیدسی یا یک زیرمجموعه‌ای از صفحه اقلیدسی هستند. حال به مفاهیمی از مبانی هندسه می‌پردازیم. صفحه اقلیدسی \mathbb{E}^2 ، $\mathbb{E}^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2\}$ تعریف می‌شود با اندازه فاصله بین دو نقطه $p_1 = (x_1, y_1)$ و $p_2 = (x_2, y_2)$ که به صورت $d(p_1, p_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ نوشته می‌شود. به اندازه این فاصله، متر اقلیدسی گفته می‌شود.



شکل ۱-۲: فاصله در صفحه اقلیدسی

در هر هندسه‌ای، کوتاه‌ترین مسیر بین دو نقطه، ژئودزیک نام دارد. در صفحه اقلیدسی چون کوتاه‌ترین مسیر بین دو نقطه، پاره‌خط مستقیم موجود بین آن دو نقطه است، پس خط‌های مستقیم ژئودزیک هستند. توجه داشته باشید نقطه در صفحه در بعضی مواقع با مختصات مانند (x, y) و در بعضی مواقع با یک حرف مانند p نشان داده می‌شود.

تعریف ۵-۲. نامعادله نامساوی مثلث برای هر سه نقطه مثل p, q, r در صفحه، $d(p, q) + d(q, r) \geq d(p, r)$ است و در شرایطی مساوی است اگر و تنها اگر q روی یک پاره‌خط مستقیم بین دو نقطه p و r قرار داشته باشد.

نامساوی مثلث بیانگر بزرگ‌تر یا مساوی بودن جمع طول دو ضلع مثلث از طول ضلع دیگر است حتی در شرایطی که مثلث تباهیده باشد که یعنی هر سه رأس آن روی یک خط قرار بگیرند.

تعریف ۶-۲. یک زیرمجموعه مانند A از صفحه اقلیدسی، محدب است اگر هر پاره‌خط مسقیم بین دو نقطه در A نیز داخل A قرار بگیرد.

برای مثال مستطیل محدب است اما هلال ماه غیرمحدب است.

تعریف ۷-۲. اگر دو زیرمجموعه X و Y از صفحه اقلیدسی \mathbb{E}^2 داشته باشیم، آنگاه یک ایزومتري از X به Y نگاشت طولی‌ای $\sigma : X \rightarrow Y$ است که پوشا نیز باشد. یعنی اگر p و q نقاطی در \mathbb{E}^2 باشند، آنگاه $d(\sigma(p), \sigma(q)) = d(p, q)$ وقتی چنین ایزومتري‌ای وجود داشته باشد، می‌گوییم X و Y یکرخت هستند.

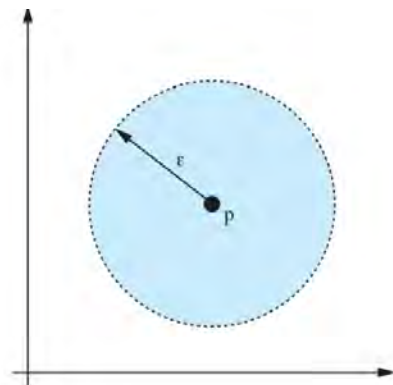
تذکر ۸-۲. توجه کنید که چون σ طولپا است، پس یک‌به‌یک خواهد بود به این دلیل که اگر $\sigma(p) = \sigma(q)$ ، آنگاه $d(\sigma(p), \sigma(q)) = d(p, q) = 0$ و در نتیجه $p = q$. پس σ یک تابع دوسویه از X به Y است.

ایزومتری‌ها از صفحه \mathbb{E}^2 به \mathbb{E}^2 ، شامل انتقال یک صفحه در جهت خاص، دوران توسط یک زاویه حول یک نقطه یا بازتاب نسبت به یک خط در صفحه می‌شود. ترکیب دو ایزومتری σ_1 و σ_2 که با $\sigma_2 \circ \sigma_1$ نشان می‌دهیم، یک ایزومتری را نتیجه می‌دهد که به آن ضرب ایزومتری می‌گوییم. دو زیرمجموعه از \mathbb{E}^2 ، متجانس هستند اگر یک ایزومتری از یک زیرمجموعه به زیرمجموعه دیگر وجود داشته باشد.

۴.۰.۲ آنالیز ریاضی و توپولوژی

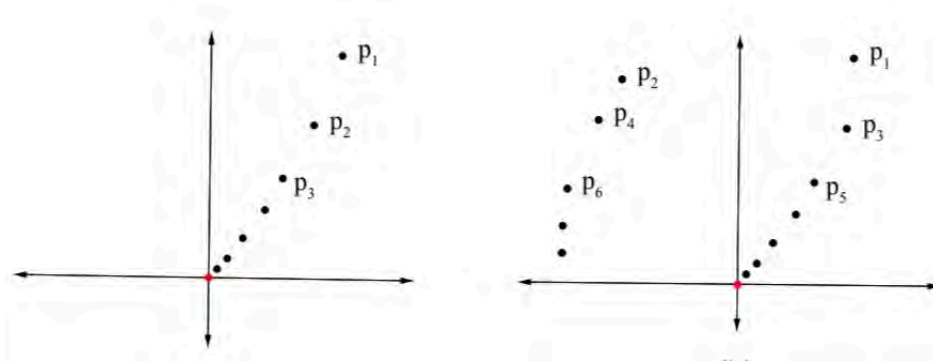
برای مبحث کاشی‌کاری‌ها، به پیشینه ساده‌ای از نالیز ریاضی و توپولوژی احتیاج داریم.

تعریف ۹-۲. یک دیسک در \mathbb{E}^2 به شعاع R و مرکز نقطه p به صورت $D(p, R)$ نشان می‌دهیم، همه نقاط درون دیسک تا حداکثر شعاع R از نقطه p است. به عبارت دیگر $D(p, R) = \{q \in \mathbb{E}^2 : d(p, q) \leq R\}$. توجه کنید که یک دیسک شامل مرکز یک دایره نیز هست. دیسک باز به شعاع ϵ و مرکز p $\dot{D}(p, \epsilon) = \{q \in \mathbb{E}^2 : d(p, q) < \epsilon\}$ تعریف می‌شود. دیسک باز شامل مرکز خود نمی‌شود.



تعریف ۱۰-۲. اگر دنباله نامتناهی از نقاط متمایز $S = \{p_1, p_2, \dots\}$ در \mathbb{E}^2 داشته باشیم، می‌گوییم S به یک نقطه مانند $p \in \mathbb{E}^2$ میل می‌کند اگر $\dot{D}(p, \epsilon)$ شامل همه نقاط به جز تعداد متناهی برای هر شعاع $\epsilon > 0$ باشد.

برای مثال در شکل سمت چپ، دنباله‌ای را مشاهده می‌کنید که به مبدأ میل می‌کند و هر دیسک شامل مبدأ، شامل همه نقاط به جز تعداد متناهی موجود در دنباله است ولی در شکل سمت راست، دنباله‌ای می‌بینیم



که با اینکه در شرایطی است که هر ϵ -دیسک باز حول مبدأ شامل نامتناهی نقطه است، اما به مبدأ میل نمی‌کند. توجه کنید که در این مثال، زبردنباله‌ای از نقاط وجود دارد که به مبدأ میل خواهد کرد.

تعریف ۲-۱۱. زیرمجموعه A از صفحه چگال است اگر برای هر نقطه $p \in \mathbb{E}^2$ و $\epsilon > 0$ ، شامل حداقل یک نقطه در A باشد.

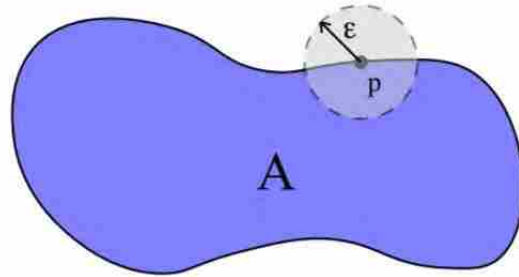
مجموعه شامل همه نقاط با مختصات گویا، یک زیرمجموعه چگال از صفحه است.

تعریف ۲-۱۲. مجموعه داخلی زیرمجموعه A از صفحه که با $int(A)$ یا $\overset{\circ}{A}$ نشان می‌دهیم، اجتماع همه دیسک‌های باز به شعاع ϵ است که در A وجود دارند به طوری که $\epsilon > 0$.

تعریف ۲-۱۳. یک زیرمجموعه A از صفحه باز است اگر $A = \overset{\circ}{A}$. اگر $A = \mathbb{E}^2 - A$ باز باشد، آنگاه A بسته خواهد بود.

به طور مشابه یک مجموعه از صفحه باز است اگر اجتماعی از دیسک‌های باز باشد. شکل

تعریف ۲-۱۴. نقطه p از یک مجموعه A حدی است اگر هر دیسک باز به شعاع ϵ و مرکز p ، A را در نقطه‌ای به غیر از p قطع کند.



شکل ۲-۲: نقطه حدی

مکمل یک مجموعه باز در صفحه با هر فضای توپولوژیک دیگر، بسته و مکمل یک مجموعه بسته، باز خواهد بود.

تعریف ۲-۱۵. زیرمجموعه A از صفحه کراندار است اگر A در یک دیسک محدود شود. زیرمجموعه A از صفحه فشرده است اگر A هم بسته و هم کراندار باشد.

در نهایت فرض کنیم X و Y زیرمجموعه‌هایی از صفحه باشند. نگاشت $f: X \rightarrow Y$ یک همئومورفیزم است اگر f یک نگاشت دوسویه بی‌بسته با وارون پیوسته باشد. اگر چنین نگاشتی وجود داشته باشد، می‌گوییم X همئومورفیک یا به صورت توپولوژیک با Y هم‌ارز است. ما در مبحث کاشی‌کاری از زیرمجموعه‌های \mathbb{Q} از صفحه که با دیسک واحد $D(p, 1) = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$ به صورت توپولوژیک هم‌ارز باشند استفاده می‌کنیم. این به این معناست که می‌توانیم \mathbb{Q} را به یک دیسک واحد بی‌آنکه از شکل کلی اضافه یا کم کنیم، تغییر شکل بدهیم.



شکل ۲-۳: این دو شکل همئومورفیک نیستند

تعریف ۱۶-۲. فرض کنید A یک زیرمجموعه‌ای از صفحه، همئومورفیک با یک دیسک واحد باشد. کران A که با ∂A نشان می‌دهیم، یک زیرمجموعه از A است که توسط همئومورفیسم به کران یا مرز دیسک واحد فرستاده می‌شود. در نتیجه ∂A یک حصار است که A را از بقیه صفحه جدا می‌کند.

تعریف ۱۷-۲. یک چندضلعی، یک زیرمجموعه از صفحه است که با دیسک واحد همئومورفیک هست به طوری که مرز آن از تعداد متناهی خطوط مستقیم تشکیل شده است. انتهای این خطوط مستقیم به هم چسبیده هستند. یک چندضلعی منظم، چندضلعی است که طول تمام اضلاع و اندازه تمام زوایا آن با هم برابر باشد.

۵.۰.۲ مبانی جبر

برای درک بهتر کاشی‌کاری‌ها، به یک سری از مفاهیم از نظریه گروه‌ها احتیاج داریم.

تعریف ۱۸-۲. اگر G مجموعه ناتهی و $*$ عمل دوتایی روی G باشد، آنگاه $(G, *)$ را یک گروه می‌نامیم هرگاه

شرایط زیر برقرار باشند: ۱. برای هر $a, b \in G$ ، $a * b \in G$ (بسته بودن)

۲. برای هر $a, b, c \in G$ ، $(a * b) * c = a * (b * c)$ (شرکت‌پذیری)

۳. برای هر $a \in G$ یک $e \in G$

وجود داشته باشد که $e * a = a * e$ (عضو همانی)

۴. برای هر $a \in G$ یک $a^{-1} \in G$ وجود داشته باشد که $a^{-1} * a = a * a^{-1}$ (عضو وارون)

برای مثال $(\mathbb{Z}, +)$ و $(\mathbb{R}/\circ, \cdot)$ دو گروه هستند. هم‌چنین $\mathbb{Z}_p = \{0, 1, \dots, p-1\}$ و عمل جمع نیز تشکیل گروه می‌دهند.

تعریف ۱۹-۲. گروه G را آبدلی گوئیم هرگاه برای هر $a, b \in G$ ، $a * b = b * a$.

$(\mathbb{Z}, +)$ یک گروه آبدلی است.

تعریف ۲۰-۲. تعداد عضوهای یک گروه را مرتبه آن گروه می‌نامیم.

\mathbb{Z}_p دارای مرتبه p است و \mathbb{Z} دارای مرتبه ∞ است.

تعریف ۲۱-۲. مجموعه ناتهی H را زیرگروه G تحت عمل دوتایی $*$ گوئیم هرگاه H تحت عمل دوتایی $*$ خود تشکیل یک گروه بدهد.

برای مثال زیرگروه‌های \mathbb{Z} برای هر عدد صحیح n همه به فرم $n\mathbb{Z}$ خواهند بود.

همچنین طبق قضیه لاگرانژ، مرتبه یک زیرگروه، باید مرتبه گروه را عاد کند. برای مثال زیرمجموعه

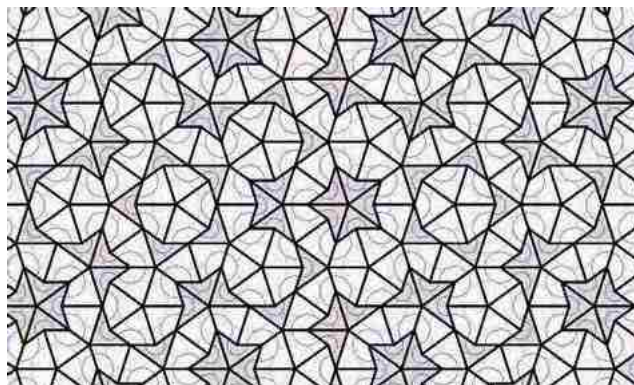
$\{0, 3, 6, 9, 12\}$ یک زیرگروه از \mathbb{Z}_{15} است. این مجموعه زیرگروه با مرتبه ۵ را تشکیل می‌دهد که مرتبه آن ۱۵ را عاد می‌کند.

تعریف ۲-۲۲. اگر G یک گروه و $A = \{g_1, g_2, \dots\}$ یک گردایه‌ای از عضوهای متمایز G باشد، گوییم A مجموعه مولد برای G است اگر هر عضو از G یک محصولی از عناصر A یا وارون عضوهای آن باشند. گروه $(\mathbb{Z}, +)$ می‌تواند با تک عضو عدد یک تولید شود چون هر عضو یا صفر است که برابر می‌شود با $1 + (-1)$ و یا $1 + 1 + \dots$ و $(-1) + (-1) + (-1) + \dots$ تولید می‌شود.

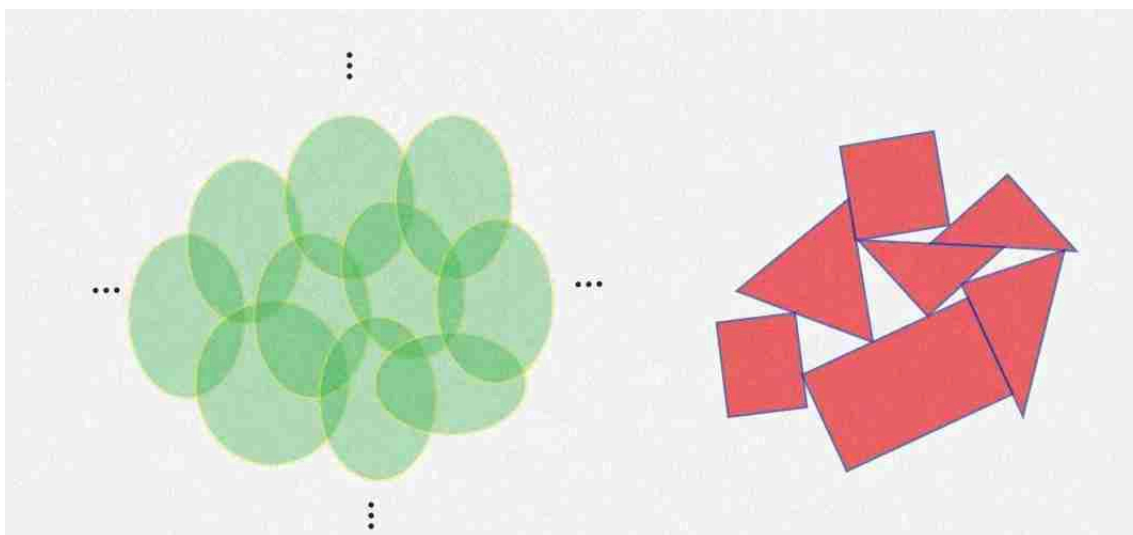
تعریف ۲-۲۳. گروه‌های G و H ایزومورفیک هستند اگر یک تابع دوسویه $\phi : G \rightarrow H$ باشد که عمل‌های دوتایی روی دو گروه را حفظ کند. یعنی اگر $\phi(g.h) = \phi(g).\phi(h)$ آنگاه می‌گوییم ϕ یک ایزومورفیسم از گروه‌ها است.

۶.۰.۲ کاشی‌کاری چیست؟

کاشی‌کاری در ریاضی یکی از شاخه‌های هنری و پوشش یک سطح، اغلب یک صفحه، با استفاده از یک یا چند شکل هندسی به نام کاشی، بدون همپوشانی جز در مرزها و بدون شکاف و حفره است. در این بخش به تعریف مفاهیم پایه و ویژگی‌های کاشی‌کاری در صفحه اقلیدسی E^2 می‌پردازیم.



تعریف ۲-۲۴. فرض کنید C یک مجموعه‌ای از زیرمجموعه‌های یک صفحه باشد. C یک پوشش ^{۱۱} از صفحه E^2 است اگر $E^2 = \bigcup_{C \in C} C$.
 C یک بسته‌بندی ^{۱۲} از E^2 است اگر هر جفت از زیرمجموعه‌ها در مجموعه C در فضاهای داخلی خود، یکدیگر را قطع نکنند.



شکل ۴-۲: در سمت چپ یک پوشش و در سمت راست یک بسته‌بندی دیده می‌شود.

تعریف ۲-۲۵. یک کاشی‌کاری τ از صفحه E^2 با مجموعه اولیه ρ یک گردایه τ از مجموعه‌های بسته در صفحه است، که به این مجموعه‌های بسته، کاشی گوئیم و یک گردایه متناهی ρ از مجموعه‌های بسته در صفحه، که هر کدام یک کاشی اولیه نام دارد، است به طوری که شروط زیر برقرار باشند:

۱. هر کاشی اولیه به صورت توپولوژیک با یک دیسک هم ارز باشد.

۲. هر کاشی با یک کاشی اولیه یکتا، متجانس باشد.

۳. $E^2 = \bigcup_{T \in \tau} T$ (یک پوشش است).

۴. $\dot{T}_i \cap \dot{T}_j = \emptyset$ برای هر $i \neq j$ (یک بسته‌بندی است).

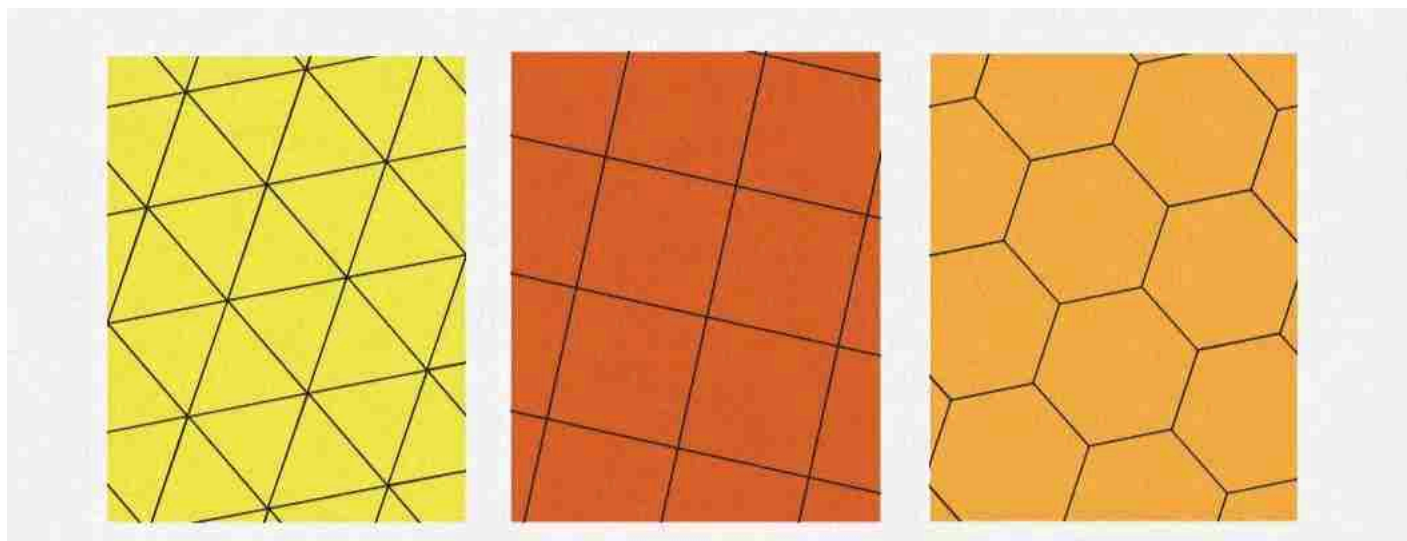
یک مجموعه اولیه کاشی‌کاری τ را تولید می‌کند اگر یک کاشی‌کاری τ از صفحه مطابق با آن مجموعه اولیه وجود داشته باشد.

شرط اول، برای اجتناب از کاشی‌های ناهمبند، دارای حفره و کاشی‌هایی است که با حذف تعداد متناهی از نقاط، باعث ناهمبند شدن کاشی خواهند شد و دوری از کاشی‌های دارای سطح صفر مانند حفره‌ها است.

شرط دوم، تعداد شکل‌های کاشی‌ها را به گردایه متناهی از کاشی‌های اولیه، محدود می‌کند. به یاد داشته باشید که تجانس بین یک کاشی از کاشی‌کاری و کاشی اولیه متناظر، میتواند شامل بازتاب باشد.

شرط سوم و چهارم هم برای اطمینان از پوشش کامل صفحه توسط کاشی‌ها است و همچنین ویژگی همپوشانی آن‌ها فقط در مرزهای کاشی است.

کاشی‌کاری‌هایی که صفحه را بدون قطع کردن فضاهاى داخلی کاشی‌هایشان، می‌پوشانند و هر کاشی به طور توپولوژیک با یک دیسک هم‌ارز باشد، کاشی‌کاری منظم از یک صفحه نامیده می‌شوند چون تنها کاشی اولیه، چندضلعی‌های منظم هستند.



شکل ۵-۲:

تعریف ۲۶-۲. کاشی‌کاری \mathcal{T} تک‌وجهی^{۱۴} است اگر هر کاشی در \mathcal{T} فقط با یک کاشی، متجانس باشد. به عبارت دیگر تنها یک کاشی اولیه در مجموعه اولیه ρ وجود دارد که \mathcal{T} را تولید می‌کند. به طور کلی، یک کاشی‌کاری \mathcal{T} n -وجهی است^{۱۵} اگر n کاشی اولیه در مجموعه اولیه ρ باشند که \mathcal{T} را تولید می‌کنند.

برای مثال کاشی‌کاری‌های منظم همه تک‌وجهی هستند.

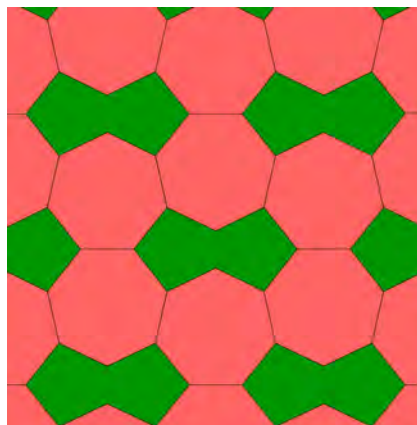
تعریف ۲۷-۲. یک رأس،^{۱۶} نقطه‌ای در یک کاشی‌کاری است که در آن نقطه سه کاشی یا بیشتر، متقاطع باشند. یک یال^{۱۷} از یک کاشی‌کاری، یک زیرمجموعه همبند از مرز یک کاشی است که هیچ رأسی در فضای داخلی آن نباشد و توسط دو رأس محدود شده باشد.

تذکر ۲۸-۲. اگر یک کاشی در یک کاشی‌کاری چندضلعی باشد، ممکن است هر رأس از چندضلعی، رأسی از کاشی‌کاری نباشد. پس در کاشی‌های چندضلعی، از اصطلاح گوشه و کنار استفاده می‌کنیم تا با رأس و یال کاشی‌کاری اشتباه نشود.

edge^{۱۷}

vertex^{۱۶}

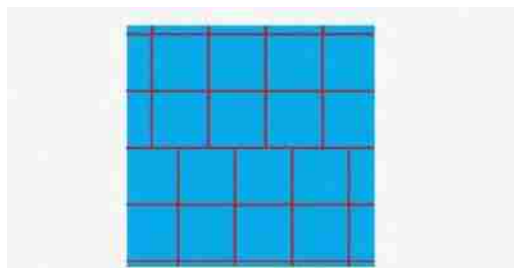
monohedral^{۱۴}
n-hedral^{۱۵}



شکل ۶-۲: کاشی‌های سبز رنگ، چندضلعی‌هایی هستند که دارای گوشه و کنار می‌باشند.

تعریف ۲۹-۲. در شرایطی که کاشی‌کاری توسط چندضلعی‌ها به گونه‌ای باشد که گوشه و کنارهای چندضلعی با رئوس و یال‌ها منطبق باشند، گوییم کاشی‌کاری یال به یال است.

تذکر ۳۰-۲. در صورتی که کاشی‌کاری را به کاشی‌کاری‌های یال به یال محدود نکنیم، حتی اگر یک کاشی‌کاری تک‌وجهی ساده تولید شده توسط مربع باشد، می‌توانیم بینهایت کاشی‌کاری‌های متمایز بسازیم.



تعریف ۳۱-۲. 18 درجه هر رأس، تعداد یال‌هایی است که به آن رأس وصل هستند. یک کاشی‌کاری z -درجه 18 است اگر هر رأس دارای درجه z باشد.

پس کاشی‌کاری منظم تولید شده توسط مربع، 4 -درجه است.

تعریف ۳۲-۲. دو کاشی مجاور هستند اگر در یک لبه مشترک باشند. دو کاشی همسایه هستند اگر متقاطع باشند. همسایگی کاشی T که با $N(T)$ نشان می‌دهیم، اجتماع T با تمام همسایه‌هایش است.

^{۱۹}j-valent

^{۱۸}valency

تعریف ۲-۳۳. یک یال با یک رأس در تلاقی است اگر آن رأس یکی از نقاط انتهایی باشد. یک کاشی با یک یال در تلاقی است اگر آن یال روی مرز کاشی قرار بگیرد.

تذکر ۲-۳۴. اگر همه ی کاشی‌های اولیه در مجموعه اولیه، چندضلعی‌های محدب باشند، دو کاشی می‌توانند در تنها یک رأس یا یک یال متقاطع باشند. هر چند اگر همه چندضلعی‌ها محدب نباشند دیگر این نکته برقرار نخواهد بود و مانند شکل، می‌توانند در مجموعه‌های ناهمبند متقاطع باشند.

لم ۲-۳۵. هر دیسک در صفحه می‌تواند تنها با تعداد متناهی کاشی در یک کاشی‌کاری متقاطع باشد.

اثبات. قطر یک کاشی را بزرگترین فاصله بین هر دو نقطه در کاشی تعریف می‌کنیم. از آن جایی که فقط تعداد متناهی کاشی اولیه در مجموعه اولیه p داریم، پس یک کران بالایی d_p روی قطر کاشی‌های اولیه وجود خواهد داشت و در نتیجه روی قطر هر کاشی در کاشی‌کاری نیز خواهد بود. همچنین یک کران پایینی α_p در مساحت هر کاشی اولیه وجود دارد و از آن جایی که تعداد متناهی از آن‌ها وجود دارد، پس α_p کران پایینی برای همه کاشی‌ها در کاشی‌کاری خواهد بود. اگر ما دیسک D به شعاع R را داشته باشیم، هر کاشی که دیسک D را قطع کند، به طور کامل در گوی D' به همان مرکز و شعاع $R + d_p$ قرار می‌گیرد. هر کاشی که در D' قرار داشته باشد دارای مساحت حداقل α_p است و هیچ یک از سطوح از مرز عبور نمی‌کنند. ولی مساحت کل D' برابر $\pi(R + d_p)^2$ است که یعنی متناهی است. پس در گوی D' فضای خالی برای تعداد متناهی کاشی وجود خواهد داشت. پس دیسک D تنها تعداد متناهی کاشی را قطع می‌کند.

□

نتیجه ۲-۳۶. یک کاشی T در یک کاشی‌کاری می‌تواند تنها با تعداد متناهی از کاشی‌های دیگر در تماس باشد.

اثبات. کاشی T را در دیسک D به شعاع d_p و به مرکز هر نقطه ای در کاشی T محصور می‌کنیم، آنگاه هر کاشی که با T در تماس باشد با D نیز در تماس است اما بنا بر لم ۱-۱، تنها تعداد متناهی کاشی با D در تماس هستند و در نتیجه تنها تعداد متناهی کاشی با T نیز در تماس خواهند بود.

□

قضیه ۲-۳۷. (قضیه خم ژردان^{۲۰}) یک خم بسته ساده در صفحه، صفحه را به یک فضای داخلی و یک فضای بیرونی تقسیم می‌کند.

²⁰Jordan curve theorem

این به این معنی است که هر مسیری از یک نقطه در فضای داخلی به یک نقطه در فضای بیرونی باید از روی خم عبور کند.

حال واضح است که سه کاشی می‌توانند در یک رأس مشترک باشند. طبق شکل ۷-۲، این مسئله برای دو رأس نیز صدق می‌کند اما آیا برای بیشتر از دو رأس نیز برقرار خواهد بود؟

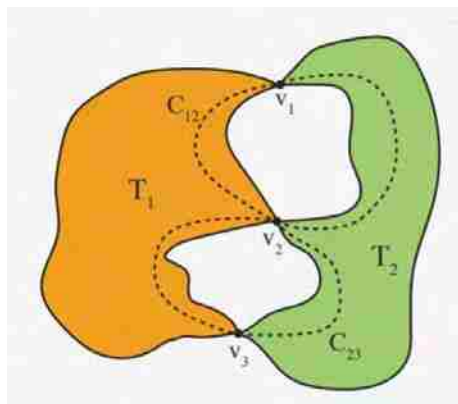


شکل ۷-۲: اشتراک سه کاشی زرد، آبی و سبز در دو رأس.

لم ۳۸-۲. سه کاشی در یک کاشی‌کاری نمی‌توانند سه رأس مشترک یا بیشتر از آن داشته باشند.

اثبات. فرض کنیم سه کاشی T_1 و T_2 و T_3 در سه رأس v_1 و v_2 و v_3 مشترک باشند. رئوس را مانند شکل انتخاب کرده تا رأس v_2 رأس وسط مشترک روی مرز هر کدام از کاشی‌ها باشد. یک خم در فضای داخلی T_1 انتخاب می‌کنیم که توسط نقاط v_1 و v_2 محدود و یک خم در فضای داخلی T_2 انتخاب کرده که در نقاط v_1 و v_2 محدود شود. اجتماع آن‌ها یک خم بسته C_{12} است که با T_3 در نقاط v_1 و v_2 تماس دارد. طبق قضیه خم ژردان، \dot{T}_3 یا در فضای داخلی یا فضای بیرونی از C_{12} قرار خواهد داشت. اگر در فضای داخلی باشد آنگاه T_3 با v_3 تماس نخواهد داشت که یک تناقض خواهد بود. پس T_3 در فضای بیرونی است. به طور مشابه خم بسته C_{23} را داریم که از اجتماع دو خم در کاشی T_1 و T_2 تشکیل شده است که دو سر خم‌ها در رئوس v_2 و v_3 به انتها می‌رسند. برای اینکه T_3 با رأس v_1 تماس داشته باشد، باید در فضای بیرونی C_{23} قرار داشته باشد. اما \dot{T}_3 هم باید بیرون از $T_1 \cup T_2$ و دو سطح محدود شده توسط C_{12} و C_{23} باشد اما در آن صورت نمی‌تواند با رأس v_2 در تماس باشد. پس فرض خلف باطل و حکم ثابت است. \square

لم ۳۹-۲. یک کاشی در یک کاشی‌کاری دارای تعداد متناهی رأس و در نتیجه تعداد متناهی یال است.



شکل ۸-۲: شکل مربوط به لم ۱-۳۸

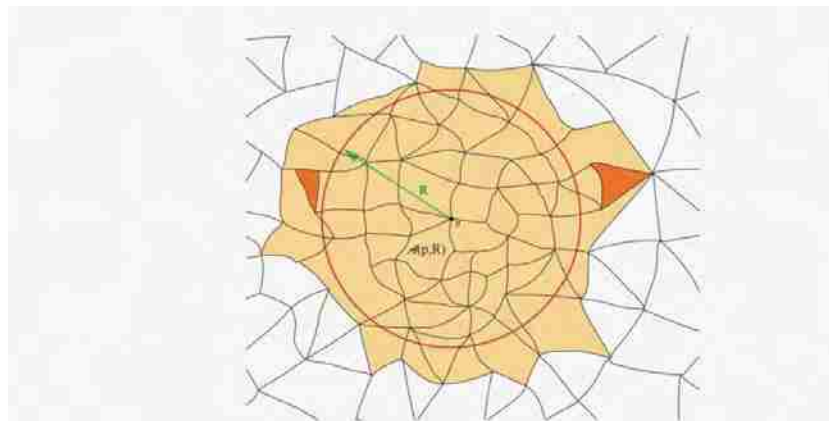
اثبات. فرض می‌کنیم چنین نباشد. کاشی T_1 در کاشی‌کاری τ را طوری در نظر می‌گیریم که T_1 تعداد نامتناهی رأس داشته باشد. طبق نتیجه، حداقل یک کاشی T_2 وجود دارد که طبق اصل لانه کبوتری به تعداد نامتناهی بار با T_1 در تماس است تا تعداد نامتناهی رأس تولید کند. در این صورت کاشی دیگری مانند T_2 باید نیز به تعداد نامتناهی با رئوس مشترک T_1 و T_2 تماس داشته باشد به طوری که هر رأس در $T_1 \cap T_2$ با حداقل یک کاشی دیگر در تماس باشد و تنها متناهی کاشی وجود داشته باشد. پس ما سه کاشی خواهیم داشت که در سه رأس یا بیشتر، مشترک هستند که در این صورت تعداد نامتناهی رأس خواهیم داشت که طبق لم قبل تناقض خواهد داشت. چون یک کاشی به طور توپولوژیک با یک دیسک هم‌ارز است، مرز آن نیز به صورت توپولوژیک دایره خواهد بود و چون تعداد متناهی رأس داریم، مجموعه n رأس، مرز را به دقیقاً n یال تقسیم می‌کند و در نتیجه تعداد متناهی یال نیز خواهد داشت. \square

لم ۴۰-۲. مجموعه کاشی‌ها در یک کاشی‌کاری τ یک مجموعه شمارا است.

تعریف ۴۱-۲. کاشی‌کاری τ_1 و τ_2 متجانس هستند اگر یک ایزومتری از صفحه وجود داشته باشد که τ_1 را به τ_2 ببرد. این ایزومتری می‌تواند شامل بازتاب، انتقال و دوران باشد. دو کاشی‌کاری با هم برابرند اگر یک مضرب بالاتر یا پایین‌تر از τ_1 ، آن را با τ_2 متجانس سازد.

تعریف ۴۲-۲. یک وصله 1 از یک کاشی‌کاری τ ، مجموعه‌ای از کاشی‌ها در τ است، به طوری که اجتماع کاشی‌ها یک دیسک توپولوژیک باشد. وصله متناظر با دیسک $D(p, R)$ به رأس p و شعاع R را با $A(p, R)$ نشان می‌دهیم که شامل اجتماع همه کاشی‌های متقاطع با دیسک و کاشی‌هایی است که حفره‌های ایجاد شده توسط این اجتماع را پر می‌کنند.

پس برای هر زیرمجموعه S از \mathcal{T} ، وصله $A(s)$ متناظر با آن زیرمجموعه، شامل اجتماع همه کاشی‌هایی است که S را قطع می‌کنند و به علاوه کاشی‌هایی که حفره‌های ایجاد شده توسط این اجتماع را پر می‌کنند، است.



شکل ۹-۲:

۷.۰.۲ ایزومتری‌ها

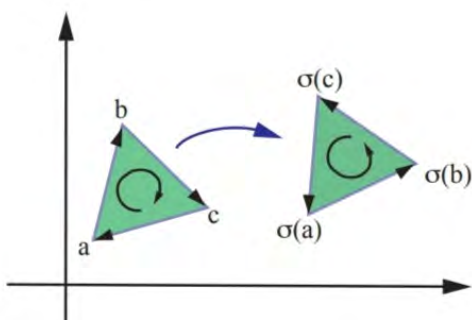
در این بخش به مفاهیمی درباره ایزومتری‌ها می‌پردازیم که نقش بسیار مهمی در نظریه کاشی‌کاری دارند. در ابتدا ایزومتری‌ها را به دو دسته تقسیم می‌کنیم.

تعریف ۲-۴۳. یک ایزومتری مستقیم یا حافظ جهت‌گیری نامیده می‌شود اگر یک مثلث با اضلاع جهت‌یافته ساعتگرد را به یک مثلث دیگر با اضلاع جهت‌یافته ساعتگرد ببرد و یک ایزومتری غیرمستقیم یا جهت‌گیری معکوس دارد اگر یک مثلث با اضلاع جهت‌یافته ساعتگرد به یک مثلث با اضلاع جهت‌یافته پادساعتگرد ببرد.

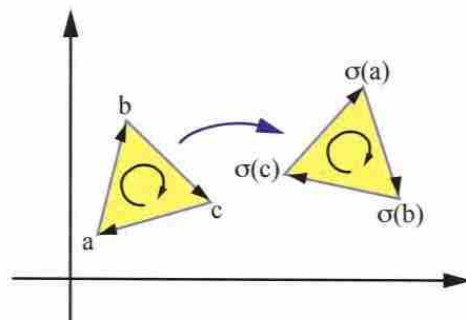
اگر یک ایزومتری جهت‌یافته اضلاع یک مثلث را معکوس کند، برای همه مثلث‌های صفحه این اتفاق خواهد افتاد.

تعریف ۲-۴۴. ایزومتری همانی، که آن را با I نشان می‌دهیم، ایزومتری‌ای است که هیچ نقطه‌ای از صفحه را جابه‌جا نکند.

پس ایزومتری همانی یک ایزومتری مستقیم است.
حال به معرفی چهار شکل از ایزومتری‌های غیرهمانی می‌پردازیم.



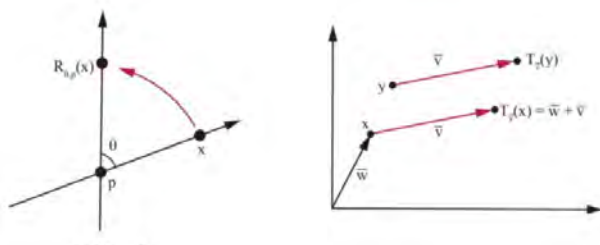
شکل ۱۱-۲: ایزومتری غیرمستقیم



شکل ۱۰-۲: ایزومتری مستقیم

۱. دوران حول یک نقطه ثابت در صفحه، نقطه‌ای مانند p را ثابت نگه می‌دارد و تمام صفحه را حول o با یک زاویه ساعتگرد θ ، دوران می‌دهد. در جهت پادساعتگرد، زاویه θ را منفی باید در نظر گرفت. این ایزومتری مستقیم را با $R_{\theta, p}$ نشان می‌دهیم که $R_{\theta, p} = R_{2\pi+\theta, p} = R_{-2\pi-\theta, p}$.

۲. انتقال در جهت بردار \vec{v} که آن را با $T_{\vec{v}}$ نشان می‌دهیم؛ با در نظر گرفتن نقطه‌ای مانند q در صفحه به عنوان بردار \vec{w} با مبدأ $(0, 0)$ ، $T_{\vec{v}(q)} = \vec{w} + \vec{v}$ را نتیجه می‌دهد. در این ایزومتری نقاط ثابت نیستند و $T_{\vec{v}} \circ T_{\vec{w}} = T_{\vec{v}+\vec{w}}$.

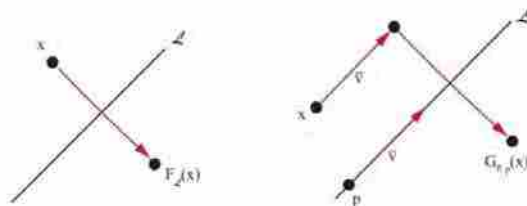


شکل ۱۲-۲: سمت چپ دوران و سمت راست انتقال یک نقطه از صفحه را نشان می‌دهد

۳. بازتاب نسبت به خط L تمام نقاط روی این خط را ثابت نگه داشته و هر نقطه دیگری را به نقطه مخالف آن، با همان فاصله نسبت به خط L ، جابه‌جا می‌کند و با F_L نشان داده می‌شود. توجه کنید که F_L^2 ایزومتری همانی است.

۴. لغزه، یک ایزومتری غیرمستقیم نسبت به خط L است که شامل مرحله اول، انتقال توسط یک بردار

در راستای خط L و مرحله دوم، بازتاب نسبت به همان خط است که با $G_{\vec{v}, p}$ نشان می‌دهیم. این ایزومتري به وضوح نقاط را در صفحه ثابت نگه نمی‌دارد.



شکل ۱۳-۲: در سمت چپ، ایزومتري غيرمستقيم بازتاب و در سمت راست، ایزومتري غيرمستقيم لغزه دیده می‌شود

قضیه ۴۵-۲. هر ایزومتري غيرهمانی از صفحه، قطعا شامل بازتاب، انتقال، دوران یا لغزه می‌شود.

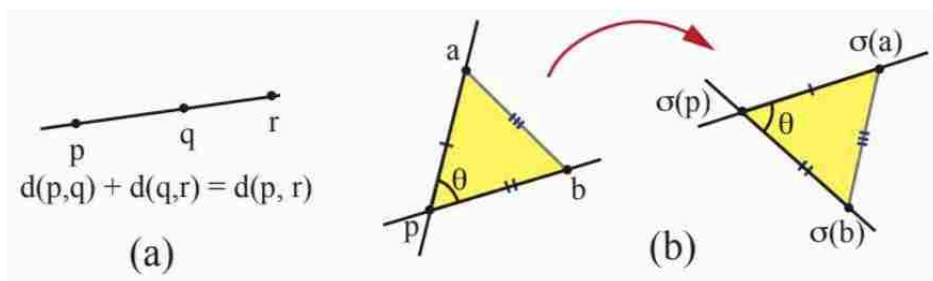
این قضیه را توسط تعدادی لم اثبات می‌کنیم.

لم ۴۶-۲. هر ایزومتري، یک خط را به یک خط می‌فرستد.

اثبات. فرض کنید سه نقطه p ، q و r را در صفحه داشته باشیم، می‌دانیم که نامساوی مثلث $d(p, q) + d(q, r) \geq d(p, r)$ برای آن‌ها برقرار خواهد بود و در صورتی این نامساوی به مساوی تبدیل می‌شود که q روی خط مستقیم بین p و r قرار داشته باشد. حال فرض کنید σ یک ایزومتري باشد که می‌خواهد نتیجه خط توسط این ایزومتري نیز یک خط باشد. کافی است نشان دهیم که نتیجه ایزومتري سه نقطه خطی، سه نقطه خطی دیگر خواهد بود (منظور از نقاط خطی، نقاط واقع بر روی یک خط است). پس اگر p ، q و r نقاط خطی‌ای باشند که q بین p و r باشد، پس $d(p, q) + d(q, r) = d(p, r)$. چون σ طولپایا است (فاصله بین دو نقطه را حفظ می‌کند)، پس $d(\sigma(p), \sigma(q)) + d(\sigma(q), \sigma(r)) = d(\sigma(p), \sigma(r))$. در نتیجه سه نقطه $\sigma(p)$ ، $\sigma(q)$ و $\sigma(r)$ بر روی همان خط واقع خواهند بود. \square

لم ۴۷-۲. یک ایزومتري، زوایا بین خطوط را حفظ می‌کند.

اثبات. چون یک ایزومتري فاصله‌ها و طبق لم قبل، خطوط را حفظ می‌کند، پس محصول هر مثلث توسط آن، یک مثلث متجانس خواهد بود. پس قطعا زوایای این مثلث را نیز حفظ می‌کند. اما اگر زاویه‌ای بین دو خطی که یکدیگر را قطع کرده‌اند در نظر بگیریم، می‌توانیم با انتخاب نقطه تلاقی این دو خط و یک نقطه روی هر دو خط، رئوس یک مثلث را تشکیل دهیم. طبق شکل زیر، چون زوایا یک مثلث توسط ایزومتري‌ها حفظ می‌شوند، در نتیجه زاویه بین دو خط نیز باید حفظ شود. \square



شکل ۱۴-۲: در شکل سمت راست، نمایی از نقاط خطی و در شکل سمت چپ، حفظ شدن زاویه بین دو خط، نشان داده شده است.

لم ۴۸-۲. یک ایزومتري σ ، توسط نحوه عمل خود بر روی هر سه نقطه غیرخطی مشخص می‌شود.

اثبات. اگر سه نقطه غیرخطی a ، b و c را در نظر بگیریم، نتیجه مثلی که این سه نقطه تولید می‌کنند، توسط یک ایزومتري، مثلث متجانس با آن با رئوس $\sigma(a)$ ، $\sigma(b)$ و $\sigma(c)$ خواهد بود. اگر یک نقطه مانند x از صفحه را در نظر بگیریم، فاصله ثابت $d(x, a)$ و $d(x, b)$ از هر دو نقطه خواهد داشت. پس $\sigma(x)$ باید فاصله یکسانی با $\sigma(a)$ و $\sigma(b)$ داشته باشد اما حداکثر، دو نقطه در صفحه دارای چنین ویژگی هستند که فقط یکی از آن‌ها فاصله موردنظر را تا $\sigma(c)$ خواهد داشت. پس σ توسط نحوه عمل خود بر روی هر سه نقطه غیرخطی مشخص می‌شود.

□

نتیجه ۴۹-۲. در صورتی که ماهیت ایزومتري (غیرمستقیم یا مستقیم) برای ما واضح باشد، آن ایزومتري با نحوه عمل خود بر هر دو نقطه از صفحه مشخص خواهد شد.

لم ۵۰-۲. هر ایزومتري از صفحه اقلیدسی، نتیجه صفر، یک، دو یا سه بازتاب است.

اثبات. فرض می‌کنیم σ یک ایزومتري از صفحه باشد. طبق لم قبل، می‌دانیم یک ایزومتري با نحوه عمل خود بر روی سه نقطه غیرخطی مشخص می‌شود. فرض کنیم سه نقطه p_1 ، p_2 و p_3 غیرخطی باشند و $\sigma(p_1) = q_1$ ، $\sigma(p_2) = q_2$ و $\sigma(p_3) = q_3$ باشند. پس مثلث W را با رئوس p_1 ، p_2 و p_3 ، به مثلث Q با رئوس q_1 ، q_2 و q_3 می‌برد. توجه داشته باشید که نتیجه صفر بازتاب، ایزومتري همانی خواهد بود. σ را طی مراحل زیر به دست می‌آوریم. در مرحله اول فرض می‌کنیم $p_1 \neq q_1$ و خط L_1 عمودمنصف پاره‌خط فرضی بین دو نقطه p_1 و q_1 باشد. سپس F_{L_1} را بازتاب نسبت به خط L_1 در نظر می‌گیریم که $F_{L_1}(p_1) = q_1$. مثلی که با اعمال F_{L_1} به W به دست می‌آید را W' می‌نامیم. W' در یک رأس با هم مشترک خواهند بود. در مرحله دوم فرض می‌کنیم $q_2 \neq F_{L_1}(p_2)$ و طبق شکل، خط L_2 عمودمنصف پاره‌خط فرضی بین دو نقطه $F_{L_1}(p_2)$ و q_2 باشد.

سپس F_{L_2} را بازتاب نسبت به خط L_2 در نظر می‌گیریم که F_{L_2} ، $F_{L_1}(p_2)$ را به q_2 می‌برد. توجه کنید چون $F_{L_1}(p_2)$ و q_2 نسبت به q_1 فاصله یکسانی دارند و L_2 عمودمنصف است پس q_1 روی خط L_2 قرار خواهد داشت. پس F_{L_2} ، q_1 را جابه‌جا نمی‌کند. مثلی که با اعمال F_{L_2} بر W' به دست می‌آید را W'' می‌نامیم. W'' و Q در یک رأس با هم مشترک خواهند بود. در مرحله آخر فرض می‌کنیم $q_3 \neq F_{L_2} \circ F_{L_1}(p_3)$ و خط L_3 عمودمنصف پاره‌خط فرضی بین دو نقطه $F_{L_2} \circ F_{L_1}(p_3)$ و q_3 باشد. سپس F_{L_3} را بازتاب نسبت به خط L_3 در نظر می‌گیریم که $F_{L_3} \circ F_{L_2} \circ F_{L_1}(p_3)$ را به q_3 می‌برد. طبق شکل، q_1 و q_2 روی خط L_3 قرار خواهد داشت. پس F_{L_3} این نقاط را جابه‌جا نمی‌کند. طبق لم ۱۰-۱، $\sigma = F_{L_3} \circ F_{L_2} \circ F_{L_1}$. توجه کنید که در صورت حصول نتیجه دلخواه، هر کدام از مراحل قابل حذف است. پس σ نتیجه صفر، یک، دو یا سه بازتاب خواهد بود.

□

حال با دانستن این موضوع، می‌توانیم به انواع ایزومتري‌هایی که توسط بازتاب تولید می‌شوند، بپردازیم.

لم ۵۱-۲. اگر خطوط بازتاب موازی باشند، دو بازتاب، انتقال را نتیجه می‌دهد و اگر خطوط بازتاب یگدیگر را قطع کرده باشند، دو بازتاب، دوران را نتیجه می‌دهد.

اثبات. چون هر بازتاب یک ایزومتري مستقیم است، نتیجه دو بازتاب نیز ایزومتري مستقیم خواهد بود. دو حالت زیر را در نظر می‌گیریم: در حالت اول، فرض می‌کنیم L_1 و L_2 دو خط بازتاب موازی باشند و w فاصله بین این دو خط باشد. دو نقطه a و b روی خط L_1 و نقطه c را روی خط L_2 در نظر می‌گیریم که عمودمنصف خط L_2 از نقطه a می‌گذرد و $d(a, c) = w$. حال همه نقاط را نسبت به خط L_1 بازتاب می‌کنیم. نقاط a و b جابه‌جا نمی‌شوند ولی نقطه c به اندازه $2w$ به سمت چپ جابه‌جا می‌شود. سپس با بازتاب این سه نقطه نسبت به خط L_2 ، a و b به اندازه $2w$ و نقطه c به اندازه $4w$ به سمت راست جابه‌جا می‌شود. پس همه نقاط با اندازه $2w$ به سمت راست جابه‌جا می‌شوند و چون یک ایزومتري با نحوه عمل خود بر روی سه نقطه غیرخطی مشخص می‌شود، $\sigma = F_{L_2} \circ F_{L_1}$ با انتقال به اندازه $2w$ خواهد بود.

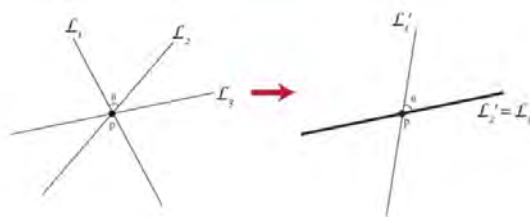
در حالت دوم، فرض می‌کنیم L_1 و L_2 دو خط بازتاب متقاطع باشند. p نقطه تقاطع آن‌ها و زاویه θ ، زاویه بین L_1 و L_2 را در نظر می‌گیریم. طبق شکل زیر، نقاط a و b را به غیر از p ، به ترتیب روی خط L_1 و L_2 در نظر می‌گیریم. با بازتاب همه نقاط نسبت به خط L_1 ، a دوران پیدا نمی‌کند ولی b با زاویه 2θ دوران می‌یابد. سپس با بازتاب نقاط نسبت به خط L_2 ، نقطه a با زاویه 2θ و b با زاویه 4θ طبق شکل دوران پیدا می‌کند که در نهایت نقطه b به اندازه 2θ دوران پیدا کرده است. پس $\sigma = F_{L_2} \circ F_{L_1}$ ، مثلث تعریف شده توسط نقاط a ، b و p حول نقطه p و با زاویه 2θ دوران پیدا می‌کند و چون یک ایزومتري با نحوه عمل خود بر سه نقطه غیرخطی معین می‌شود، پس σ ، دوران خواهد بود.

□

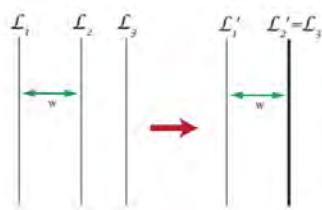
پس هر انتقال، ترکیبی از دو بازتاب با خطوط بازتاب عمود بر بردار جهت \vec{v} با فاصله $\frac{|\vec{v}|}{2}$ است و هر دوران، ترکیبی از دو بازتاب با خطوط بازتاب گذرنده از نقطه p با زاویه θ است.

لم ۵۲-۲. نتیجه سه بازتاب، بازتاب یا لغزه خواهد بود.

اثبات. خطوط بازتاب L_1 ، L_2 و L_3 را در نظر می‌گیریم که در نقطه p مشترک باشند و σ نتیجه بازتاب‌ها باشد. طبق لم قبل، می‌دانیم نتیجه دو بازتاب، دورانی با زاویه 2θ است که θ زاویه بین دو خط بازتاب L_1 و L_2 در نظر گرفته می‌شود. چون دوران می‌تواند نتیجه بازتاب هر دو خط در صفحه حول نقطه p با زاویه θ باشد، خطوط L_1 و L_2 را با L'_1 و L'_2 جایگذاری می‌کنیم به طوری که این دو خط نیز در نقطه p مشترک، زاویه بین آن‌ها θ و $L'_2 = L_3$. پس طبق شکل زیر، $I \circ F_{L'_1} = F_{L'_1} = F_{L_1} \circ F_{L_2} \circ F_{L_3} = F_{L_1} \circ F_{L_2} \circ F_{L_3} = \sigma$ بازتابی نسبت به خط L'_1 خواهد بود. حال فرض می‌کنیم خطوط L_1 ، L_2 و L_3 در هیچ نقطه‌ای، یکدیگر را قطع نکنند.

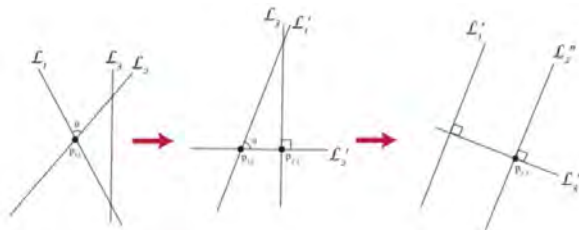


اگر این خطوط با یکدیگر موازی باشند، طبق لم قبل، می‌دانیم نتیجه بازتاب دو خط L_1 و L_2 ، انتقالی با اندازه $2w$ است که w فاصله بین این دو خط در نظر گرفته شده است. از آن جایی که انتقال می‌تواند نتیجه بازتاب هر دو خط در صفحه با اندازه w باشد، خطوط L_1 و L_2 را با L'_1 و L'_2 جایگذاری می‌کنیم به طوری که این دو خط دارای فاصله w و $L'_2 = L_3$. پس $I \circ F_{L'_1} = F_{L'_1} = F_{L_1} \circ F_{L_2} \circ F_{L_3} = F_{L_1} \circ F_{L_2} \circ F_{L_3} = \sigma$. به عبارت دیگر، بازتابی نسبت به خط L'_1 خواهیم داشت. حال فرض کنیم این سه خط موازی نباشند و دوبه‌دو یکدیگر را



قطع کنند. می‌دانیم نتیجه دو بازتاب نسبت به خطوط L_1 و L_2 ، دورانی حول نقطه مشترک p_{12} خواهد بود و چون دوران وابسته به خطوط نیست پس هر دو خط دیگری که در p_{12} مشترک باشند نیز، دوران خواهند بود. پس طبق شکل L_1 و L_2 را با L'_1 و L'_2 ، به طوری که L'_2 بر L_3 عمود باشد، جایگذاری می‌کنیم. حال نتیجه بازتاب خط L'_1 و L_3 ، دورانی با زاویه 180° درجه حول نقطه p_{23} خواهد بود. چون دوران به خطوط وابسته نیست، این بار L''_1 و L''_2 را به جای L'_1 و L'_2 قرار می‌دهیم که نسبت به هم عمود هستند و از نقطه p_{23} بگذرند به طوری که L''_1 بر L'_1 عمود باشد. چون L'_1 موازی هستند، نتیجه بازتاب آن‌ها انتقالی است در جهت

موازی با خط L'' . نتیجه بازتاب سوم، لغزه خواهد بود. به طور مشابه، می‌توان این موضوع را برای زمانی که دو خط از این سه خط موازی باشند نیز اثبات کرد. □



اثبات. (قضیه ۴۵-۱) از لم‌های بالا نتیجه می‌شود که همه ایزومتري‌های غیر همانی یا دوران یا انتقال یا بازتاب و یا لغزه خواهند بود. □

توجه داشته باشید می‌توانیم نوع ایزومتري را با اطلاع از مجموعه نقاط ثابت و اینکه مستقیم یا غیرمستقیم است، نشان بدهیم. اگر همه نقاط ثابت باشند، ایزومتري همانی است. در صورتی که یک نقطه ثابت باشد، نوع ایزومتري دوران و اگر خطی از نقاط ثابت داشته باشیم، نوع ایزومتري بازتاب خواهد بود. در صورتی که هیچ نقطه‌ای ثابت نباشد، اگر ایزومتري مستقیم، از نوع دوران و اگر ایزومتري غیرمستقیم باشد، از نوع لغزه خواهد بود.

حال می‌توانیم از این دسته‌بندی برای اثبات نتیجه زیر استفاده کنیم.

نتیجه ۵۳-۲. مجموعه همه ایزومتري‌ها در صفحه، یک گروه با عمل دوتایی ترکیب خواهد بود.

اثبات. به وضوح ترکیب دو ایزومتري، ایزومتري دیگری است و این عمل دوتایی دارای خاصیت شرکت‌پذیری خواهد بود. هم‌چنین ایزومتري همانی، به عنوان عضو خنثی در گروه عمل می‌کند. برای هر انتقال $T_{-\vec{v}}$ و ارون $T_{\vec{v}}$ ، برای هر دوران $R_{-\theta,p}$ و ارون $R_{\theta,p}$ ، برای هر لغزه $G_{-\vec{v},p}$ و ارون $G_{\vec{v},p}$ و ارون هر بازتاب خود بازتاب خواهد بود. □

۸.۰.۲ تقارن‌ها در کاشی

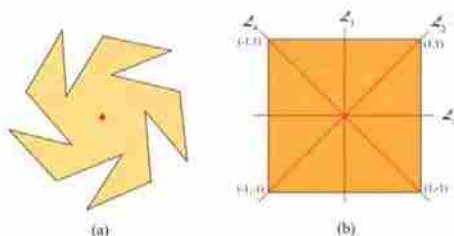
تقارن‌ها نقش حیاتی در نظریه کاشی‌کاری ایفا می‌کنند.

تعریف ۵۴-۲. اگر شکل Q را از صفحه داشته باشیم، ایزومتري σ که Q را بر روی خودش برمی‌گرداند، تقارن Q نامیده می‌شود.

به وضوح، ایزومتری همانی یک تقارن برای هر شکلی از صفحه خواهد بود. هم چنین توجه کنید که ترکیب دو تقارن از شکل Q ، تقارن دیگری از Q را نتیجه خواهد داد و برای هر تقارن، وارون آن با استفاده از وارون آن ایزومتری به دست می آید. پس مجموعه تقارن های شکل Q تشکیل یک گروه می دهند که به آن گروه متقارن شکل Q می گوئیم و آن را با $S(Q)$ نمایش می دهیم. در این مبحث بیشتر از گروه متقارن $S(Q)$ استفاده می کنیم که در آن شکل Q یک کاشی است.

اگر کاشی شکل زیر را در نظر بگیریم، تقارن ها از دوران حول نقطه مرکزی با زوایای $\frac{2\pi}{5}$, $\frac{4\pi}{5}$, $\frac{6\pi}{5}$, $\frac{8\pi}{5}$ به دست می آید؛ به عبارت دیگر، همه ایزومتری ها به ازای هر $n = 0, 1, 2, 3, 4$ به صورت $R_{\frac{2n\pi}{5}, p}$ ظاهر شده اند. به این گروه خاص ایزومتری ها، گروه دوری از مرتبه ۵ می گوئیم که با دوران $R_{\frac{2\pi}{5}, p}$ تولید می شوند.

تعریف ۲-۵۵. برای هر عدد صحیح $n \geq 1$ ، گروه ایزومتری هایی که توسط دوران $R_{\frac{2\pi}{n}, p}$ تولید می شوند را گروه دوری 2^n از مرتبه n گوئیم و با C_n نشان می دهیم.



شکل ۱۵-۲: تقارن های دوری و دووجهی

گروه همانی که فقط شامل ایزومتری همانی I است، گروه C_1 خواهد بود. از طرفی دیگر اگر یک مربع را طبق شکل در نظر بگیریم، گروه دوری C_4 یک زیرگروه از گروه متقارن ها خواهد بود. اما طبق شکل بازتاب هایی در جهت عمودی، افقی و قطری هم خواهیم داشت. هم چنین می توانیم این تقارن ها را ترکیب کنیم؛ یعنی اول به اندازه $\frac{\pi}{4}$ در جهت پادساعتگرد دوران داشته باشیم و بعد نسبت به خط بازتاب L_1 شکل را بازتاب کنیم. توجه کنید، ایزومتری که نتیجه می دهد باید هم غیرمستقیم باشد و هم نقطه مرکزی را ثابت نگهدارد. چون لغزه حائز این شرایط نیست پس قطعاً این ایزومتری بازتاب خواهد بود. اگر نحوه عمل ایزومتری را برنقطه $(0, 1)$ در نظر بگیریم، خواهیم دید که یک بازتاب نسبت به خط L_4 در جهت شمال غربی و جنوب شرقی خواهیم داشت. پس گردایه چهار دوران (یکی از آن ها ایزومتری همانی) و چهار بازتاب تشکیل یک گروه از تقارن های مربع می دهند که به آن گروه دووجهی از مرتبه ۸ می گوئیم و با D_4 نشان می دهیم.

تعریف ۵۶-۲. به گروهی از تقارن‌ها که شامل دوران $R_{\frac{\gamma\pi}{n},p}^i$ برای هر $i = 0, 1, \dots, n-1$ و بازتاب‌هایی نسبت به n خط با فاصله برابر باشد که از نقطه مرکزی p بگذرند، گروه دوجویی \mathcal{C}_n از مرتبه $2n$ می‌نامیم و آن را با D_n نشان می‌دهیم. می‌توانیم این گروه را هم‌ارز با گروه متقارن از n -ضلعی منظم تعریف کنیم.

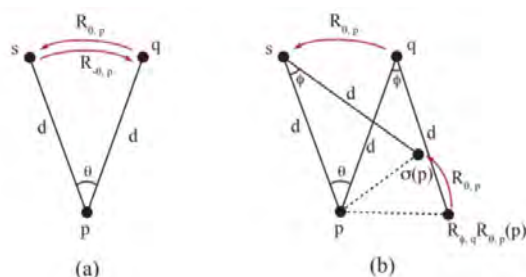
در واقع ما می‌توانیم تنها با دوران $R_{\frac{\gamma\pi}{n},p}$ و بازتاب F_L نسبت به یک خط، D_n را تولید کنیم و بقیه بازتاب‌ها به فرم $R_{\frac{\gamma\pi}{n},p}^i \circ F_L$ داشته باشیم. یک گروه از دو ایزومتري با ایزومتري همانی و بازتاب نسبت به یک خط متناظر خواهد بود.

طبق شکل، چرخ‌ها مثال خوبی برای تقارن اشیاء در صفحه هستند. توجه کنید که گروه متقارن به شکل C_n یا D_n خواهد بود که با استفاده از لم زیر به این نتیجه خواهیم رسید.

لم ۵۷-۲. تنها گروه‌های متناهی ایزومتري‌ها از صفحه که نقطه مرکزی p را ثابت نگه‌می‌دارند، C_n و D_n هستند. اثبات. فرض کنید G گروهی با چنین خواصی باشد. حالت اولی که همه ایزومتري‌ها در G مستقیم باشند را در نظر می‌گیریم. از آنجایی که انتقال نقطه مرکزی p را ثابت نگه‌نمی‌دارد پس همه این ایزومتري‌ها دورانی حول نقطه p خواهند بود. ϕ را کوچکترین زاویه دوران برای هر عضو از گروه G در نظر می‌گیریم. ادعا می‌کنیم که هر عضو از G باید به فرم $R_{\phi,p}^i$ باشد. فرض می‌کنیم که چنین نباشد آنگاه دوران $R_{\alpha,p}$ از G را خواهیم داشت که برای هر عدد صحیح i توانی از $R_{\phi,p}^i$ نباشد. پس برای هر $i = 0, 1, \dots, n-1$ ، $\alpha \neq i\phi$. پس باید یک j وجود داشته باشد که برای هر $j = 0, 1, \dots, n-1$ ، $j\phi < \alpha < (j+1)\phi$ ولی $R_{\alpha,p} \circ R_{j\phi,p}^{-1}$ یک دوران با زاویه کوچکتر از ϕ در G خواهد بود. پس با فرض ϕ به عنوان کوچکترین زاویه دوران در تناقض است و همه عضوهای گروه G به فرم $R_{\phi,p}^i$ خواهند بود. از آنجایی که این گروه متناهی است، باید یک n وجود داشته باشد که $R_{\phi,p}^n = R_{0,p} = I$. پس $\phi = \frac{\gamma\pi}{n}$ و طبق تعریف، C_n گروه دوری G خواهد بود.

حال فرض کنید که همه ایزومتري‌ها در G غیرمستقیم باشند. از آنجایی که لغزها هیچ نقطه‌ای را ثابت نگه‌نمی‌دارند، پس باید حداقل یک بازتاب F_L وجود داشته باشد. اگر این بازتاب تنها عضو غیرهمانی از گروه باشد، این گروه به شکل D_1 خواهد بود. فرض کنید H یک مجموعه از همه دوران‌ها در G باشد. توجه کنید که H یک زیرگروه از G و طبق چیزی که اثبات کردیم، گروه دوری C_n خواهد بود. حال اگر تک بازتاب F_L را به این گروه اضافه کنیم، زیرگروه D_n از G را نتیجه خواهد داد. اگر این زیرگروه تمام G را پوشش ندهد، باید یک بازتاب دیگری مانند $F_{L'}$ وجود داشته باشد که در D_n قرار نگیرد ولی طبق لمی که داشتیم، $F_{L'} \circ F_L$ یک دوران خواهد بود و همه دوران‌ها در C_n قرار دارند. پس برای هر i ، $F_{L'} \circ F_L = R_{\frac{\gamma\pi}{n},p}^i$. در نتیجه $F_{L'} = R_{\frac{\gamma\pi}{n},p}^i \circ F_L$. \square که این یعنی یک عضوی از D_n خواهد بود و با فرض ما در تناقض خواهد بود.

حال می‌خواهیم تمام امکانات برای گروه‌های متقارن متناهی کاشی‌ها را مشخص کنیم اما در ابتدا با استفاده از لم زیر به این سوال می‌پردازیم که ترکیب چند دوران، یکی پس از دیگری، چه خواهد بود.



لم ۵۸-۲. اگر $R_{\phi, q}$ و $R_{\theta, p}$ دوران‌هایی باشند که $p \neq q$ آنگاه $\sigma = R_{\theta, p} \circ R_{\phi, q} \circ R_{-\theta, p}$ یک دوران حول نقطه $s = R_{\theta, p}(q)$ با زاویه ϕ خواهد بود.

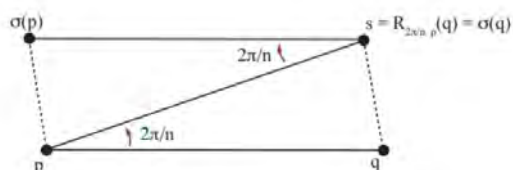
اثبات. فرض می‌کنیم d فاصله بین p و q باشد. از آنجایی که دوران‌ها ایزومتري مستقیم هستند، σ نیز مستقیم خواهد بود و در نتیجه نحوه عمل σ بر روی دو نقطه کافی خواهد بود. طبق شکل زیر، نحوه عمل σ را بر s در نظر می‌گیریم؛ $\sigma(s) = R_{\theta, p} \circ R_{\phi, q} \circ R_{-\theta, p}(s) = R_{\theta, p} \circ R_{\phi, q}(q) = R_{\theta, p}(q) = s$ به عبارت دیگر، s را ثابت نگه می‌دارد. پس σ یا یک دوران است یا ایزومتري همانی. حال نحوه عمل σ را بر p در نظر می‌گیریم؛ $\sigma(p) = R_{\theta, p} \circ R_{\phi, q} \circ R_{-\theta, p}(p) = R_{\theta, p} \circ R_{\phi, q}(p)$ طبق شکل، $R_{\phi, q}$ نقطه p را حول q با زاویه ϕ دوران می‌دهد. سپس $R_{\theta, p}$ نقطه q را به s دوران می‌دهد و در نتیجه $R_{\phi, q}(p)$ را به نقطه‌ای که p دورانی حول s با زاویه ϕ باشد، دوران می‌دهد. پس σ یک دوران حول نقطه s با زاویه ϕ خواهد بود. \square

این لم کاربرد بسیاری در مشخص کردن گروه‌های متقارن کاشی‌ها دارد، هرچند، از آنجایی که کاشی‌ها به صورت توپولوژیک، دیسک هستند که نتیجتاً فشرده (بسته و کراندار) نیز خواهند بود، به اثبات قضیه زیر می‌پردازیم.

قضیه ۵۹-۲. اگر Q یک مجموعه فشرده با گروه متقارن متناهی در صفحه باشد آنگاه گروه متقارن $S(Q)$ به ازای هر $n \geq 1$ یا C_n یا D_n خواهد بود.

اثبات. توجه کنید، هیچ انتقال و لغزه‌ای در $S(Q)$ ، به دلیل نامتناهی کردن گروه، وجود ندارد. پس تنها ایزومتري‌های ممکن در $S(Q)$ دوران‌ها و بازتاب‌ها خواهند بود. در ابتدا دوران‌ها را در نظر می‌گیریم و نشان می‌دهیم همه دوران‌ها در $S(Q)$ در نقاطی که حفظ می‌شوند، مشترک هستند. فرض می‌کنیم که چنین نباشد و $R_{\frac{\gamma\pi}{n}, q}$ و $R_{\frac{\gamma\pi}{n}, p}$ دو دورانی باشند که $p \neq q$. طبق لم قبل، با ترکیب این دو دوران به تقارن دورانی $R_{\frac{\gamma\pi}{n}, s}$ دست یابیم که $s = R_{\frac{\gamma\pi}{n}, p}(q) \neq p$ ولی تقارن $R_{\frac{\gamma\pi}{n}, s} \circ R_{\frac{\gamma\pi}{n}, p}$ طبق شکل، یک انتقال خواهد بود که با فرض در تناقض است. در نتیجه همه دوران‌ها در نقاطی که حفظ می‌شوند، مشترک خواهند بود و طبق لم ۱-۵۷، برای هر $n \geq 1$ گروه دوری C_n از مرتبه n را تولید می‌کند. حال بازتاب‌ها را در نظر می‌گیریم. اگر یک مرکز دوران وجود داشته باشد، هر بازتابی باید از آن عبور کند، زیرا در غیر این صورت، دو مرکز دوران وجود دارد،

بنابراین گروه دووجهی D_n را ایجاد می‌کنیم. اگر هیچ دورانی نداشته باشیم، از آنجایی که متقاطع بودن خطوط بازتاب، دوران را نتیجه می‌دهد، هر بازتابی باید خطوط به صورت موازی باشند ولی چنین خطوطی یک انتقال را نتیجه می‌دهد که ما به دلیل متناهی بودن گروه از آن خودداری می‌کنیم. در نتیجه حداکثر یک بازتاب وجود دارد که گروه D_1 را تولید می‌کند. \square



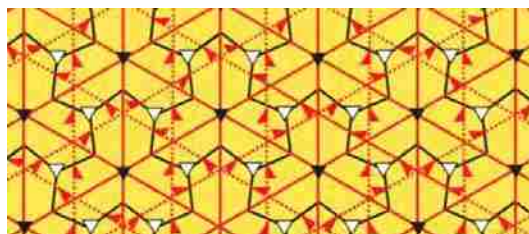
کل بحث ما یک گروه تقارن متناهی را در نظر گرفته است. اما توجه داشته باشید که اگر Q یک دیسک به مرکز p باشد آنگاه یک دوران با هر زاویه‌ای یک تقارن از Q خواهد بود. در نتیجه، ما یک گردایه نامشمار از دوران‌ها در $S(Q)$ خواهیم داشت. به طور مشابه، هر بازتاب با هر خط بازتابی گذرنده از نقطه p یک تقارن از Q خواهد بود. به گروهی که دارای چنین تقارن‌هایی باشد، گروه دووجهی از مرتبه نامشمار نامتناهی گوئیم و آن را با D_∞ نشان می‌دهیم.

۹.۰.۲ تقارن‌ها در کاشی‌کاری‌ها

تا الان محور بحث ما حول تقارن کاشی‌ها چرخیده است و حال می‌خواهیم تقارن کاشی‌کاری‌ها را نیز در نظر بگیریم.

تعریف ۶۰-۲. یک تقارن از یک کاشی‌کاری τ ، ایزومتری σ از صفحه است که هر کاشی از کاشی‌کاری τ را به یک کاشی متجانس از τ می‌برد. گروه متقارن کاشی‌کاری را با $S(\tau)$ نشان می‌دهیم.

مجموعه تقارن‌های $S(\tau)$ از کاشی‌کاری τ مشابه گروه متقارن شکل Q ، تشکیل گروه می‌دهند. برای هر تقارن در گروه، وارون تقارن مانند وارون هر عضو از یک گروه عمل می‌کند.

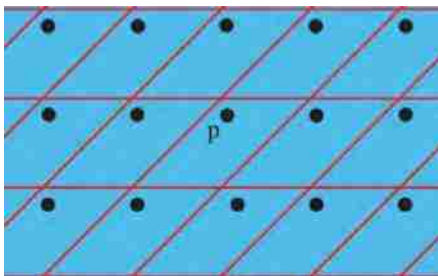


برای مثال، کاشی‌کاری تک‌وجهی در شکل زیر، تقارن‌های متفاوتی از جمله دوران‌ها، انتقال‌ها، بازتاب‌ها و لغزه‌ها را دارا است. مرکزهای دوران از مرتبه ۳ با مثلث‌های کوچکی نشان داده شده است که اگر متناظر با زیرگروه متقارن D_3 باشد که نقطه را حفظ می‌کند، این مثلث‌ها توپر و اگر متناظر با زیرگروه متقارن C_3 باشد، توخالی نشان داده شده است. بازتاب‌ها با خطوط قرمز بدون علامت و لغزه‌ها با خطوط قرمز نقطه‌چین و با فلش روی این خطوط نشان داده شده است.

می‌خواهیم امکانات گروه‌های متقارن کاشی‌کاری‌ها را بررسی کنیم. این کار را با نشان دادن خوش‌رفتاری آن‌ها آغاز می‌کنیم.

تعریف ۲-۶۱. اگر مجموعه H از ایزومتری‌ها و نقطه p را داشته باشیم، مدار p ، مجموعه همه تصاویر p تحت ایزومتری‌ها در H است که آن را با $orb_H(p)$ نشان می‌دهیم؛ به عبارت دیگر $orb_H(p) = \{\sigma(p) | \sigma \in H\}$

مثلاً، زیرگروه H که شامل انتقال‌ها در گروه متقارن کاشی‌کاری و نقطه p است را در شکل زیر، در نظر بگیرید. $orb_H(p)$ شامل نقطه p در هر کاشی خواهد بود. برای گروه‌های متقارن کاشی‌کاری‌ها، نشان می‌دهیم که مدارها نمی‌توانند نقاط حدی داشته باشند.

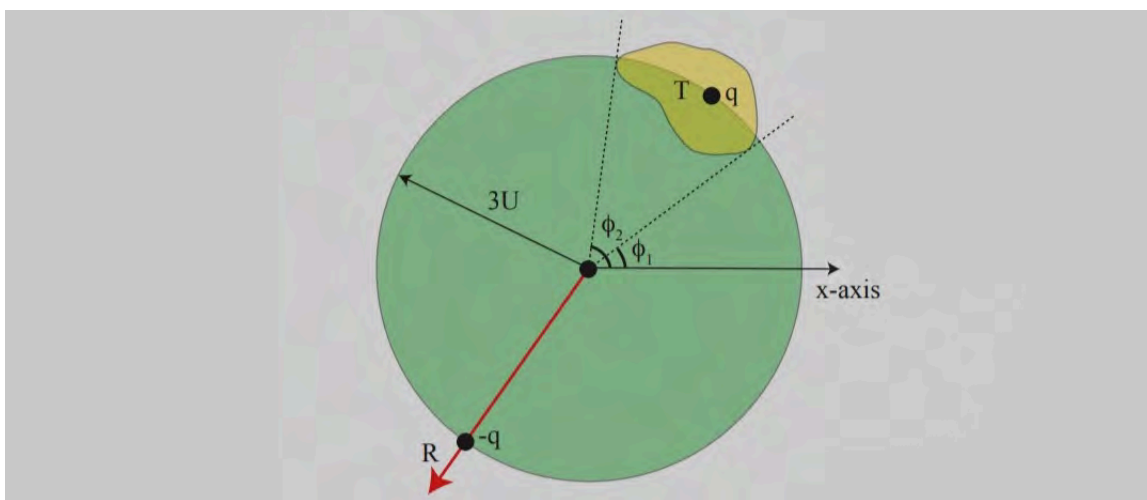


تعریف ۲-۶۲. یک مجموعه ایزومتری‌ها مانند H گسسته است اگر $orb_H(p)$ به ازای هر $p \in E^2$ دارای نقاط حدی نباشد.

برای مثال، اگر مجموعه ایزومتری‌ها را $H = \{R_{\frac{v}{n}, p} : n = 1, 2, \dots\}$ در نظر بگیریم آنگاه گسسته نخواهد بود. طبق شکل اگر نقطه $p = (1, 0)$ را در نظر بگیریم آنگاه $orb_H(p)$ دارای نقاطی است که به p میل می‌کنند. به طور مشابه اگر فرض کنیم \vec{v} بردار $\langle 1, 0 \rangle$ باشد آنگاه گردایه $J = \{T_{\frac{\vec{v}}{n}} | n = 1, 2, \dots\}$ ، گسسته نخواهد بود چون p یک نقطه حدی برای $orb_J(p)$ است.

لم ۲-۶۳. زیرگروه تقارن‌های یک کاشی‌کاری τ که نقطه‌ای مانند p را ثابت نگه‌می‌دارد، به ازای هر C_n یا D_n ، $n = 1, 2, \dots$ خواهد بود.

اثبات. طبق لمی که قبلاً اثبات کردیم، تنها گروه‌های منتهای از صفحه که نقطه مرکزی p را ثابت نگه می‌دارند، C_n و D_n هستند، کافی است نشان دهیم مجموعه تقارن‌هایی که نقطه p را ثابت نگه می‌دارند نامنتاهی نیستند. به برهان خلف فرض می‌کنیم که تعداد نامنتاهی از این تقارن‌ها وجود داشته باشد. از آن جایی که تنها ایزومتري‌هایی که نقطه p را ثابت نگه می‌دارند، دوران‌ها نسبت به نقطه p و بازتاب‌ها نسبت به خطی که از p می‌گذرد هستند، طبق اصل لانه کبوتری یکی از این دو مجموعه نامنتاهی خواهد بود اما نامنتاهی بازتاب، نامنتاهی دوران تولید می‌کند. پس می‌توانیم فرض کنیم نامنتاهی دوران R_1, R_2, \dots وجود دارند که هر کدام نقطه p را ثابت نگه می‌دارند. برای راحتی، نقطه p را مبدأ مختصات در نظر می‌گیریم. فرض کنید ρ مجموعه اولیه برای کاشی‌کاری τ و d_ρ ماکسیمم قطر برای هر کاشی اولیه در ρ باشد. دیسک D به مرکز صفر و شعاع $3d_\rho$ را در نظر بگیرید. طبق شکل، فرض کنید T کاشی‌ای باشد که دایره $C = \partial D$ را قطع می‌کند و q یک نقطه در $T \cap C$ باشد. چون T قطری بیشتر از d_ρ نخواهد داشت، نمی‌تواند شامل مبدأ باشد. حال فرض کنید R یک بردار از مبدأ باشد که از نقطه $-q$ عبور می‌کند. از آن جایی که هر نقطه در T به فاصله d_ρ از q است و همه نقاط R با فاصله حداقل $3d_\rho$ از q هستند، کاشی T, R را قطع نمی‌کند. در نتیجه، زوایای ϕ_1 و ϕ_2 باید وجود داشته باشند که همه نقاط در T دارای زاویه در بازه زوایای $[\phi_1, \phi_2]$ باشند و هیچ بازه زاویه کوچک‌تری شامل T نباشد آنگاه هر دوران غیرهمانی متقارنی بر روی T ، بازه زاویه را تغییر می‌دهد و در نتیجه T بر روی کاشی جدیدی جابه‌جا می‌شود ولی در این صورت دیسک D نامنتاهی کاشی را قطع خواهد کرد که این با فرض مسئله در تناقض است. \square

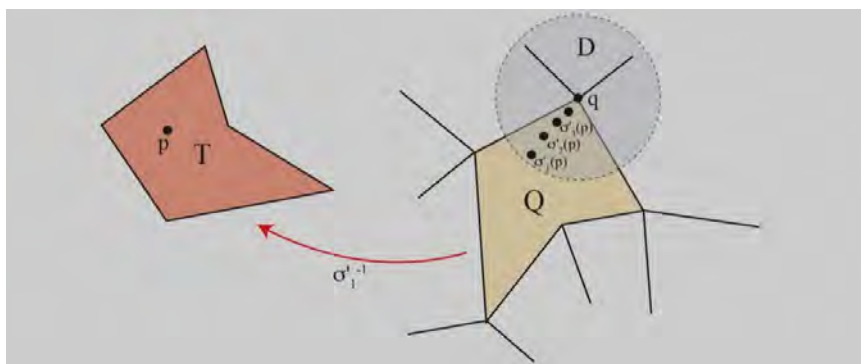


شکل ۱۶-۲: بازه زوایای متناظر با کاشی T

با استفاده از این لم، می‌توانیم اثبات کنیم که گروه‌های متقارن کاشی‌کاری‌ها به طور معقولی خوش‌رفتار هستند.

قضیه ۶۴-۲. گروه متقارن $S(\tau)$ از یک کاشی‌کاری τ ، گسسته است.

اثبات. فرض می‌کنیم که چنین نباشد. پس یک کاشی‌کاری τ وجود دارد به طوری که $S(\tau)$ گسسته نباشد. برای یک نقطه مانند p مدار $orb_{S(\tau)}(p)$ دارای نقطه حدی q می‌باشد. در نتیجه باید تعداد نامتناهی دنباله از نقاط $(\sigma_1(p), \sigma_2(p), \dots)$ در مدار $orb_{S(\tau)}(p)$ وجود داشته باشد که به q میل می‌کند. فرض کنید T یک کاشی شامل p باشد. عدد ثابت $\epsilon > 0$ را انتخاب می‌کنیم. ϵ -دیسک باز D به مرکز q باید شامل همه نقاط و به تعداد متناهی از آن‌ها باشد و برای هر نقطه مثل $\sigma_i, \sigma_i(p)$ باید T را به یکی از تعداد متناهی کاشی‌هایی که D را قطع می‌کنند بفرستد. طبق اصل لانه کبوتری، کاشی Q وجود دارد که تعداد نامتناهی تقارن‌های σ_i, σ_i T را به Q می‌فرستد. پس فرض کنید $(\sigma'_1, \sigma'_2, \dots)$ زیردنباله‌ای باشد که T را به Q می‌فرستد. از آن جایی که همه کاشی‌ها بسته هستند، q هم باید در Q قرار بگیرد. می‌خواهیم این زیردنباله را با دنباله‌ای از تقارن‌ها که Q را به Q می‌فرستد، جابه‌جا کنیم ولی σ'_1 T را به Q می‌فرستد. پس σ_1^{-1} Q را به T خواهد فرستاد. در نتیجه، دنباله تقارن‌های $(\sigma'_1, \sigma'_2, \dots)$ را با $(\gamma_1, \gamma_2, \dots)$ جایگزین می‌کنیم که در آن $\gamma_i = \sigma'_i \circ \sigma_1^{-1}$. این دنباله یک مجموعه نامتناهی از تقارن‌های متمایز است که هر کدام Q را به Q می‌فرستند ولی چنین تقارنی باید رأس‌های Q را جایگشت کند. چون تعداد متناهی جایگشت از این رئوس وجود دارد، طبق اصل لانه کبوتری، تعداد نامتناهی از تقارن‌ها هم همین عمل را بر روی رئوس خود خواهند داشت. چون حداقل دو رأس موجود می‌باشد و هر تقارن یا مستقیم است یا غیرمستقیم، تعداد نامتناهی تقارن وجود دارد که در حداقل دو نقطه (دو رأس) مشترک هستند که یا همه مستقیم و یا همه غیرمستقیم هستند. چون اگر ماهیت ایزومتري (غیرمستقیم یا مستقیم) برای ما واضح باشد، آن ایزومتري با نحوه عمل خود بر هر دو نقطه از صفحه مشخص خواهد شد، همه این تقارن‌ها باید یکسان باشند که در تناقض با نامتناهی بودن مجموعه خواهد بود. \square



فرض کنید T یک کاشی از کاشی‌کاری τ باشد. هر تقارن σ از τ باید T را به یک کاشی بفرستد. اگر σ را بر روی خودش برگرداند آنگاه σ یک تقارن از T خواهد بود هر چند هر تقارن از T در $S(T)$ لزوماً به یک

تقارن از کاشی‌کاری τ گسترش پیدا نمی‌کند. پس تقارن‌های τ که T را بر روی خودش برمی‌گرداند، یک زیرگروه از همه گروه تقارن‌های T تولید می‌کند.

تعریف ۲-۶۵. زیرگروه تثبیت‌کننده^{۲۶} از T در τ ، زیرگروهی از $S(\tau)$ شامل تقارن‌های τ است که کاشی T را بر روی خود برمی‌گرداند و آن را با $S(\tau|T)$ نشان می‌دهیم.

برای مثال، در کاشی‌کاری مربع، هر کاشی T دارای گروه متقارن $D_4 = S(T)$ است که همچنین یک تقارن برای همه کاشی‌کاری نیز خواهد بود. پس $S(\tau|T) = D_4$ در شکل زیر، کاشی‌کاری‌ای دیده می‌شود که برای هر کاشی T ، $S(T) = D_4$ ، چون این کاشی یک تقارن بازتابی دارد. هر چند این تقارن به تقارن کاشی‌کاری گسترش پیدا نمی‌کند، پس $S(\tau|T)$ یک گروه همانی است.



حال به این می‌پردازیم که کدام کاشی‌ها با تقارن‌های کاشی‌کاری شناسایی می‌شوند.

تعریف ۲-۶۶. دو کاشی T_1 و T_2 از کاشی‌کاری τ هم‌ارز هستند اگر یک تقارن σ در $S(\tau)$ وجود داشته باشد که $\sigma(T_1) = T_2$. مجموعه همه کاشی‌ها که هم‌ارز با کاشی T هستند را کلاس تعدی^{۲۷} T گوئیم.

برای مثال، کاشی‌کاری‌های منظم دارای یک کلاس تعدی هستند و همه کاشی‌ها با یکدیگر هم‌ارز هستند. کاشی‌کاری موجود در شکل بالا نیز دارای چنین ویژگی‌ای است.

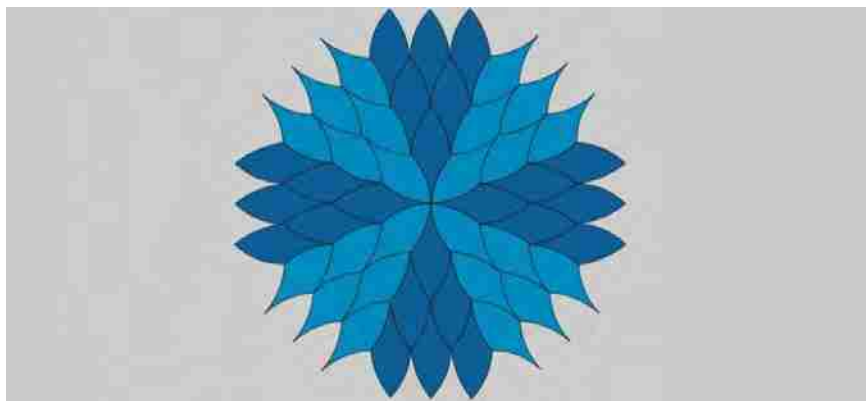
تعریف ۲-۶۷. به کاشی‌کاری دارای تنها یک کلاس تعدی، هم‌وجهی یا کاشی-متعدی گوئیم. اگر یک کاشی‌کاری دارای k کلاس تعدی باشد، k -هم‌وجهی نام خواهد داشت.

توجه داشته باشید، اگر یک کاشی‌کاری هم‌وجهی باشد، تک‌وجهی نیز خواهد بود ولی بسیار از کاشی‌کاری‌ها مانند شکل زیر تک‌وجهی‌اند، اما هم‌وجهی نیستند. همچنین، کاشی‌کاری‌های هم‌وجهی کمیاب‌تر از تک‌وجهی‌ها

^{۲۷}transivity class

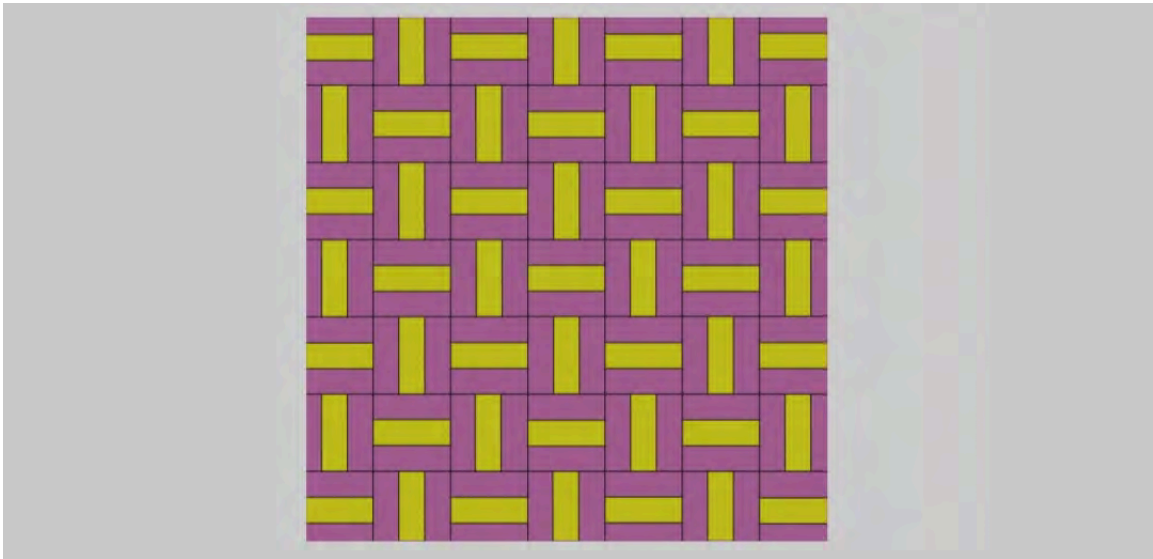
^{۲۶}stabilizer subgroup

هستند به طوری که در ۸۱ نوع طبقه‌بندی شده‌اند اما تک‌وجهی‌ها دارای طبقه‌بندی نیستند.

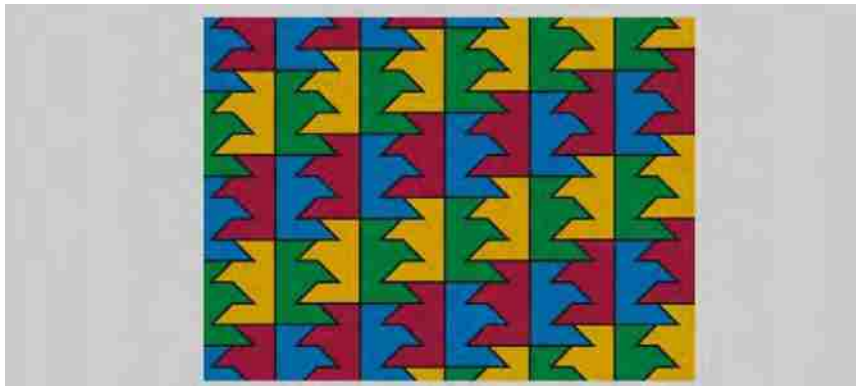


شکل ۱۷-۲: یک کاشی‌کاری تک‌وجهی که هم‌وجهی نیست (در واقع برای برای هیچ $k, -k$ هم‌وجهی نیست)

کاشی‌کاری شکل زیر نیز تک‌وجهی است. در واقع ۲-هم‌وجهی هم است. این کاشی‌کاری دارای تک مستطیل به عنوان کاشی اولیه است که طول آن سه برابر عرض آن است. این کاشی‌کاری با استفاده از مربع‌هایی تولید شده است که از سه کاشی مستطیل شکل تشکیل شده‌اند و بعد با جایگزینی این کاشی‌های مربع جدید به یک کاشی‌کاری مربع منظم دست یافته‌ایم که با دوران 90° درجه‌ای هر مربع جدید به وجود آمده است. کاشی‌های مستطیل شکل که در وسط هر کاشی مربع با رنگ زرد نشان داده شده‌اند، تشکیل یک کلاس تعدی می‌دهند و مستطیل‌های بنفش در یک کلاس تعدی دوم قرار می‌گیرند.

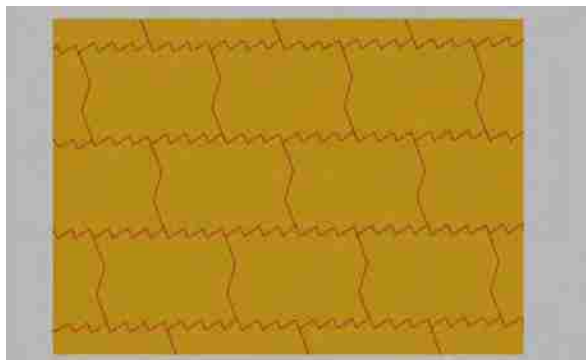


در سال ۱۹۰۰ میلادی، دیوید هیلبرت که فهرست معروف ۲۳ عدد از مهم‌ترین مسائل ریاضیات را مطرح کرده بود، سوالی در حوزه کاشی‌کاری مبنی بر اینکه آیا کاشی‌ای وجود دارد که یک کاشی‌کاری تک‌وجهی در فضای سه بعدی تولید کند به طوری که هیچ یک هم‌وجهی نباشند. به این کاشی غیرهم‌وجهی می‌گوییم. او بر این باور بود که در فضای دو بعدی چنین کاشی‌ای وجود ندارد اما در سال ۱۹۳۵ میلادی، هیش چنین کاشی‌ای در صفحه یافت. در کاشی‌کاری شکل زیر، کاشی‌های آبی و سبز در کلاس تعدی یکسان و کاشی‌های قرمز و زرد نیز در کلاس‌های تعدی یکسان دیگری قرار دارند که باعث می‌شوند کاشی‌کاری، ۲-هم‌وجهی باشد.



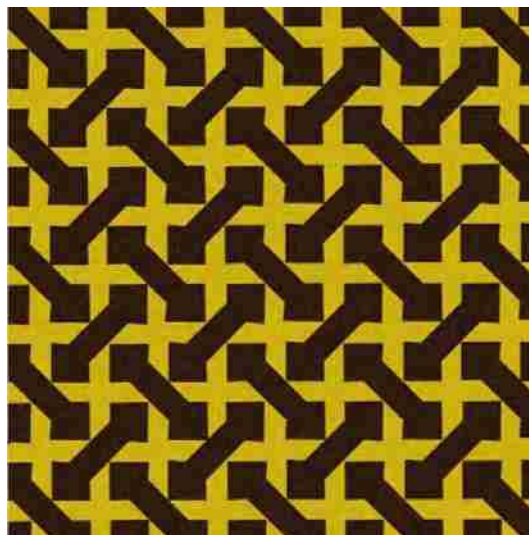
در شکل زیر، کاشی دندان‌اره‌ای را مشاهده می‌کنید که به نحوی طراحی شده است تا هشت کاشی‌کاری متمایز هم‌وجهی را نشان دهد. زمانی که ما ردیف اول این کاشی‌ها را تشکیل می‌دهیم، کپی دوم از این ردیف می‌تواند به هشت حالت مختلف در زیر ردیف اول بچسبد. حال، چون می‌خواهیم کاشی‌کاری هم‌وجهی باشد،

حضور ردیف‌های بعدی تحمیل می‌شود. پس هر تعداد کاشی دندان‌اره‌ای به ما اجازه می‌دهد تا به کاشی‌های اولیه‌ای دست یابیم که برای هر n عدد صحیح مثبت دقیقاً n کاشی‌کاری هم‌وجهی تولید کنیم. می‌توانیم به جای کلاس تعدی کاشی‌ها، کلاس تعدی رئوس و یال‌ها را در نظر بگیریم.



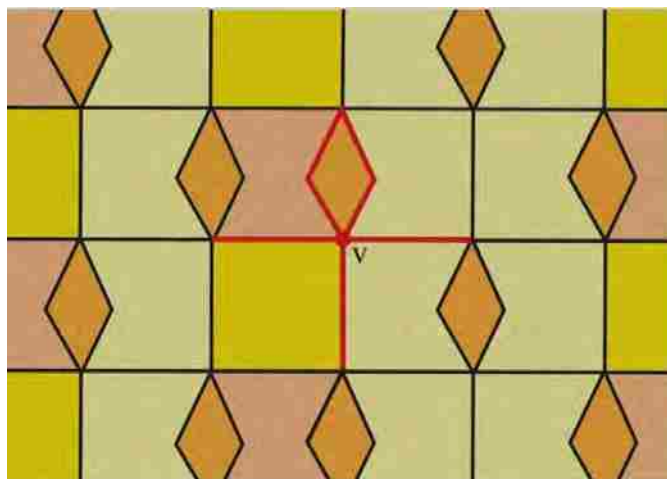
تعریف ۶۸-۲. کاشی‌کاری τ ، هم‌رأس^{۲۸} است اگر برای هر جفت رأس v_1 و v_2 از τ ، تقارن σ از $S(\tau)$ وجود داشته باشد به طوری که $\sigma(v_1) = v_2$. به عبارت دیگر، تنها یک کلاس تعدی از رئوس وجود خواهد داشت. کاشی‌کاری τ ، هم‌یال^{۲۹} است اگر برای هر جفت یال e_1 و e_2 از τ ، تقارن σ از $S(\tau)$ وجود داشته باشد به طوری که $\sigma(e_1) = e_2$. به عبارت دیگر، تنها یک کلاس تعدی از یال‌ها وجود خواهد داشت.

در شکل ۹۰۰۲، یک کاشی‌کاری دووجهی را مشاهده می‌کنیم که هم‌رأس و هم‌یال است. هر رأس با رئوس دیگر به وسیله تقارنی از کاشی‌کاری هم‌ارز است (صرف‌نظر از گوشه‌ها) و همین شرایط برای یال‌ها نیز صدق می‌کند. هر چند، به دلیل وجود دو شکل متمایز از کاشی‌ها و در ادامه آن قرار نگرفتن در یک کلاس تعدی یکسان، کاشی‌کاری هم‌وجهی نخواهد بود. از طرف دیگر، کاشی‌کاری شکل ۹۰۰۲، نه هم‌یال و نه هم‌رأس است. هم‌چنین ساختار مکانی نزدیک یک رأس نیز برای ما قابل توجه است.



تعریف ۲-۶۹. کاشی‌کاری τ رأس متشابه است اگر برای هر دو رأس v_1 و v_2 ، اجتماع رأس v_1 و یال‌هایی که به آن متصل هستند با رأس v_2 و یال‌هایی که به این رأس متصل هستند، متجانس باشد.

توجه داشته باشید، برخلاف تعاریف اخیر، این تجانس از طریق تقارن کاشی‌کاری به دست نمی‌آید. برای مثال، کاشی‌کاری موجود در شکل ۲-۹۰، رأس متشابه است ولی هم‌رأس، هم‌یال و هم‌وجه نمی‌باشد.

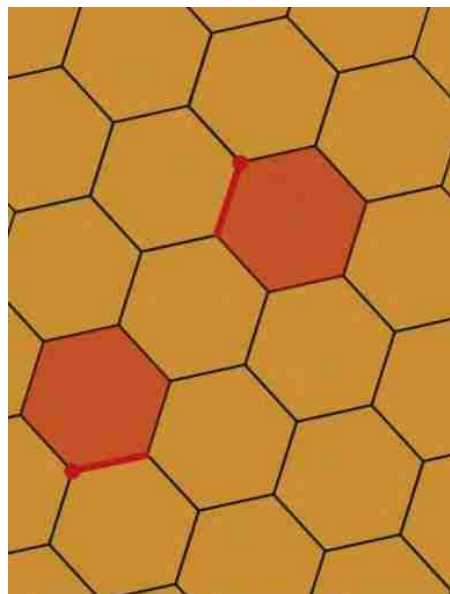
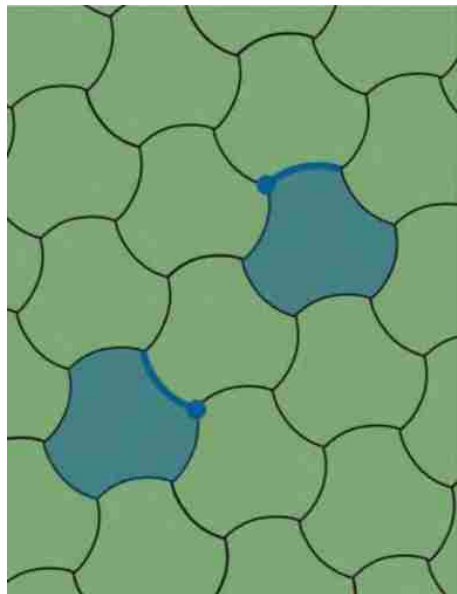


یک تفسیر قوی‌تر از تعدی با توجه به مفهوم پرچم‌ها به وجود می‌آید.

تعریف ۲-۷۰. در کاشی‌کاری τ ، یک پرچم، سه‌گانه (V, E, T) است که شامل یک رأس $(Vertex)$ ، یک یال $(Edge)$ که شامل این رأس و و یک کاشی $(Tile)$ است که شامل این یال باشد. کاشی‌کاری τ منظم است اگر

پرچم-متعدی باشد؛ یعنی هر پرچمی می‌تواند توسط یک تقارن از کاشی‌کاری به پرچمی دیگر فرستاده شود. پس این تقارن باید رأس، یال و کاشی پرچم اول را به رأس، یال و کاشی پرچم دوم ببرد.

در شکل سمت چپ، تقارنی وجود دارد که پرچمی را به پرچم دیگری می‌برد ولی در شکل سمت راست چنین تقارنی وجود ندارد. همانطور که معلوم است، این تعریف از کاشی‌کاری منظم با تعریف اصلی کاشی‌کاری منظم در صفحه، مغایرتی ندارد.



۱۰.۰.۲ گروه‌های متقارن امکان‌پذیر از کاشی‌کاری‌ها

همانطور که در بخش قبلی مشاهده کردیم، گروه‌های متقارن از کاشی‌ها محدود هستند. این شرایط برای گروه‌های متقارن از کاشی‌کاری‌ها نیز صدق می‌کند و ما قصد داریم تمام گروه‌های متقارن امکان‌پذیر از کاشی‌کاری‌ها را ترسیم کنیم.

در ابتدا، مسئله تعیین گروه‌های متقارن توسط شیمی‌دان‌ها مطرح شد. آن‌ها در سبب دانستن گروه‌های متقارن امکان‌پذیر از بلورهای سه بعدی بودند. این طبقه‌بندی از گروه‌های کریستالوگرافی، به مسئله مهمی در ریاضیات تبدیل شد.

در سال ۱۸۹۱ میلادی، یوگراف فیودورو، گروه کریستالوگرافی دو بعدی که در ادامه به آن گروه‌های کاغذدیواری می‌گوییم را معین کرد و اثبات کرد که دقیقاً ۱۷ نوع گروه کاغذدیواری موجود است. فیودورو قبل از این، به دلیل قابل اجرا بودن این موضوع بر روی بلورها در فضای سه بعدی، وجود ۲۳۰ گروه کریستالوگرافی را اثبات کرد.

در فهرست هیلبرت، سوالی مبنی بر اینکه آیا تعداد متناهی گروه‌های کریستالوگرافی در همه ابعاد وجود دارند نیز مطرح گردید که در سال ۱۹۷۳، با کمک کامپیوتر در فضای چهار بعدی، ۴۷۸۳ گروه کریستالوگرافی و در سال ۲۰۰۰، در فضای پنج بعدی ۲۲۲۰۱۸ و در سال ۲۰۱۲، در فضای شش بعدی، ۲۸۹۲۷۹۲۲ گروه کریستالوگرافی قابل نمایش یافت شده است.

ما در این بخش تنها با گروه‌های موجود در فضای دو بعدی کار می‌کنیم. در ابتدا نمادی برای تقارن‌هایی که در کاشی‌کاری‌ای از صفحه رخ می‌دهند، فراهم می‌کنیم. توجه داشته باشید ما تنها مرکز دوران‌های دوگانه، سه‌گانه، چهارگانه و شش‌گانه را فهرست می‌کنیم و در ادامه خواهیم دید که برای هر تقارن انتقالی کفایت می‌کنند.

تعریف ۲-۷۱. یک گروه نما برای گروه متقارن $S(\tau)$ از کاشی‌کاری τ یک مجموعه از نمادهایی است که روی کاشی‌کاری ظاهر می‌شوند که تقارن‌های $S(\tau)$ را نشان می‌دهد.

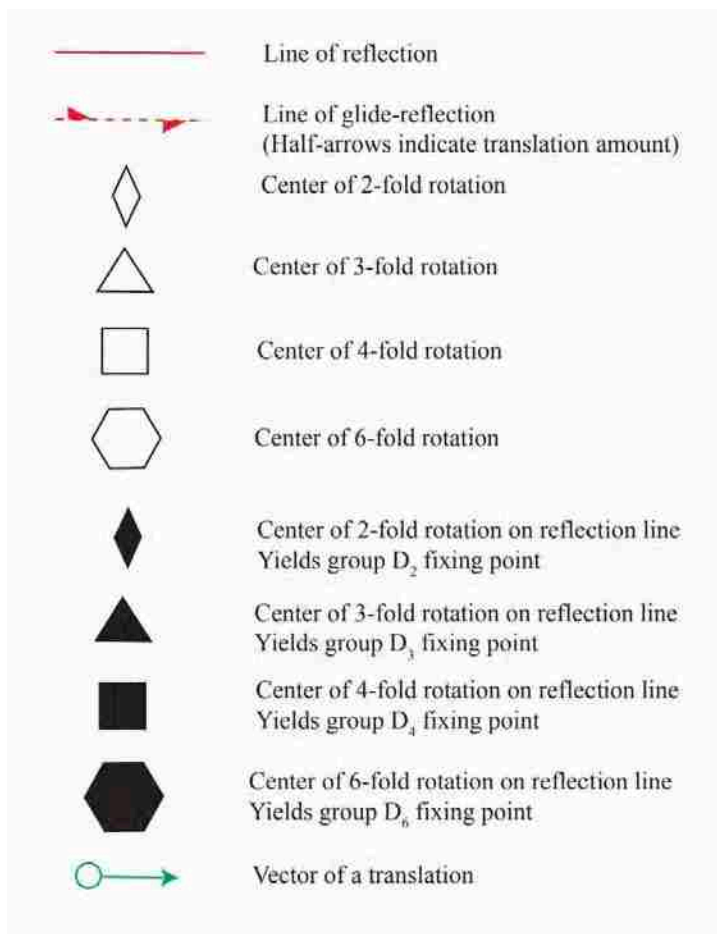
توجه کنید، گروه نما از کاشی‌کاری τ توسط هر تقارنی از کاشی‌کاری باید حفظ شود. اگر یک نماد تقارن s در نقطه p در صفحه داشته باشیم آنگاه تقارن σ ، τ را به τ می‌فرستد و چون یک ایزومتری است، پس نقطه حاصل $\sigma(p)$ باید تقارن‌های یکسان داشته باشد و در نتیجه دارای نمادهای تقارن یکسان نیز خواهد بود.

تعریف ۲-۷۲. گروه نماهای گروه‌های متقارن $S(\tau_1)$ و $S(\tau_2)$ از کاشی‌کاری‌های τ_1 و τ_2 گروه نماهای هم‌نهشت هستند اگر یک تبدیل آفین وجود داشته باشد که گروه نما τ_1 را به گروه نما τ_2 ببرد. زمانی که دو گروه نما هم‌نهشت باشند، می‌گوییم این دو کاشی‌کاری از یک نوع تقارن می‌باشند.

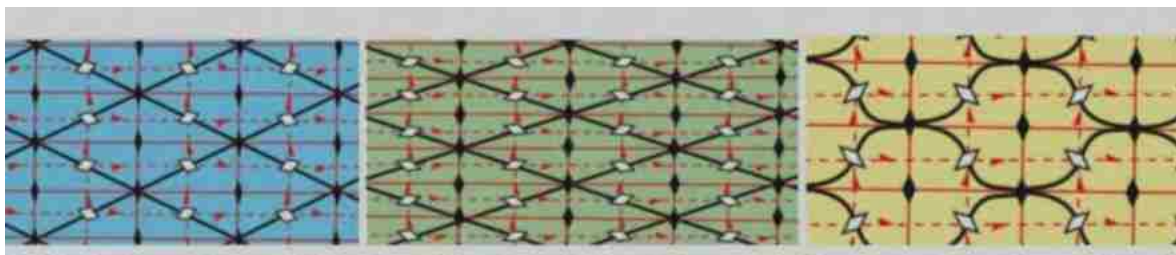
منظور از یک تبدیل آفین، یک تبدیل خطی است که به دنبال یک انتقال امکان‌پذیر تولید شده باشد. می‌توانیم چنین تبدیلی را به گونه‌ای بنویسیم که نقطه $p = (x, y)$ را به $q = (x', y')$ توسط

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$$

بفرستد و دترمینان آن $ad - bc \neq 0$ باشد.



در شکل ۱۰.۰.۲، سه کاشی‌کاری مشاهده می‌شود که توسط یک تبدیل آفین، هر گروه نما را به گروه نمایی دیگر می‌برد. برای مثال، تبدیل آفین از کاشی‌کاری اول به دوم در واقع شکل فشرده شده‌ای از کاشی‌کاری اول را ارائه می‌دهد و چون اساساً تمایزی بین سه گروه نما وجود ندارد، پس ایزومورفیک هستند. توجه داشته باشید، تبدیل آفین کافی است تنها گروه نمایی را به گروه نمایی دیگر ببرد.



حال آماده ترسیم گروه نماهای امکان‌پذیر از گروه‌های متقارن کاشی‌کاری‌ها هستیم. سه حالت را برای $S(\tau)$ در نظر می‌گیریم. در حالت اول، هیچ‌گونه انتقالی در $S(\tau)$ وجود ندارد. در حالت دوم، $S(\tau)$ شامل انتقال هست ولی این انتقال‌ها موازی هستند و در حالت سوم که مهم‌ترین حالت است، $S(\tau)$ شامل انتقال‌های غیرموازی خواهد بود.

گروه‌های متقارن فاقد تقارن انتقالی

لم ۷۳-۲. اگر هیچ انتقالی در $S(\tau)$ وجود نداشته باشد آنگاه گروه متقارن از کاشی‌کاری به ازای هر $n = 1, 2, \dots$ باید C_n یا D_n باشد.

اثبات. این اثبات مشابه اثبات قضیه (1-59) است که طبق آن، گروه متقارن متناهی از یک مجموعه فشرده در یک صفحه یا به صورت C_n است یا D_n . طبق چیزی که مشاهده کردیم، اگر بیشتر از یک مرکز دوران مانند p وجود داشته باشد، با اعمال دو دوران یکی پس از دیگری نیاز داریم تا یک انتقال داشته باشیم و چون انتقال باعث می‌شود که گروه متقارن نامتناهی شود به تناقض می‌رسیم. علاوه بر این، یک خط بازتاب که نقطه p را قطع نکند، دوران دومی را نتیجه می‌دهد. در نتیجه، باید حالتی را در نظر بگیریم که همه خطوط بازتاب از مرکز دوران p بگذرند و طبق لم، زیرگروه تقارن‌های یک کاشی‌کاری τ که نقطه‌ای مانند p را ثابت نگه می‌دارد، به ازای هر $n = 1, 2, \dots$ یا C_n یا D_n خواهد بود.

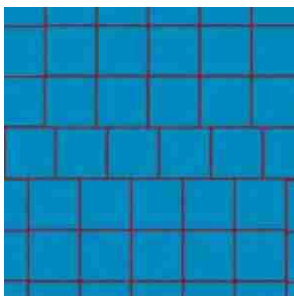
□

گروه‌های متقارن شامل تقارن انتقالی موازی

تعریف ۷۴-۲. به یک گروه متقارن از یک کاشی‌کاری شامل تقارن‌های انتقالی که همگی موازی هستند، گروه فریز^{۳۰} می‌گوییم.

یک مثال از یک کاشی‌کاری با چنین گروه تقارنی در شکل ۱۰۰۰۲، وجود دارد. این کاشی‌کاری منحصر به فرد فقط شامل تقارن‌های انتقالی در جهت افقی است.

^{۳۰}frieze



علتی که به این گروه‌های متقارن، گروه‌های فریز می‌گویند از این جهت است که گروه‌های متقارن امکان‌پذیر از الگوهای فریز هستند که مانند شکل ۱۸-۲، بیشتر به صورت حاشیه‌ای در بالای یک بنا ظاهر می‌شوند.



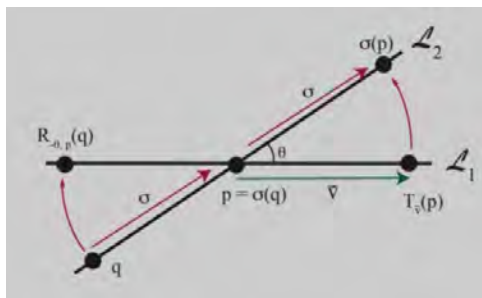
شکل ۱۹-۲: الگوهای فریز روی بنای تاریخی



شکل ۱۸-۲: الگوهای فریز

لم ۷۵-۲. ترکیب یک انتقال و دوران غیرهمانی با زاویه θ ، یک انتقال به همان اندازه طول با زاویه θ از جهت اصلی انتقال خواهد بود.

اثبات. فرض کنید $T_{\vec{v}}$ یک انتقال و $R_{\theta,p}$ یک دوران غیرهمانی باشد. نشان می‌دهیم $\sigma = R_{\theta,p} \circ T_{\vec{v}} \circ R_{-\theta,p}$ انتقالی با زاویه θ از مبدأ باشد. فرض کنید L_1 خطی باشد که از p در جهت \vec{v} بگذرد. فرض کنید مانند شکل زیر، L_2 خطی با زاویه θ از L_1 باشد. در این صورت $R_{\theta,p}$ ، L_1 را به L_2 می‌فرستد. عمل σ را بر روی نقطه p در نظر می‌گیریم. دوران $R_{-\theta,p}$ باعث جابه‌جایی p نمی‌شود ولی بعد $T_{\vec{v}}$ به فاصله $|\vec{v}|$ ، نقطه p را بر روی L_1 می‌لغزاند و سپس $R_{\theta,p}$ آن را به نقطه‌ای بر روی L_2 به فاصله $|\vec{v}|$ از p می‌فرستد. فرض کنید q نقطه‌ای بر روی L_2 باشد که به فاصله $|\vec{v}|$ از طرف دیگر نقطه p قرار گرفته باشد. $R_{-\theta,p}$ نقطه q را به اندازه $|\vec{v}|$ از p بر روی L_1 می‌فرستد، $T_{\vec{v}}$ به اندازه $|\vec{v}|$ به سمت p روی L_1 می‌لغزاند و $R_{\theta,p}$ جابه‌جایش نمی‌کند. پس $\sigma(q) = p$. در نتیجه، σ یک ایزومتری مستقیم است که به شکل یک انتقال در جهت برداری نقش ایفا می‌کند که از دوران \vec{v} با زاویه θ به دست می‌آید. پس $\sigma = R_{\theta,p} \circ T_{\vec{v}} \circ R_{-\theta,p}$. \square

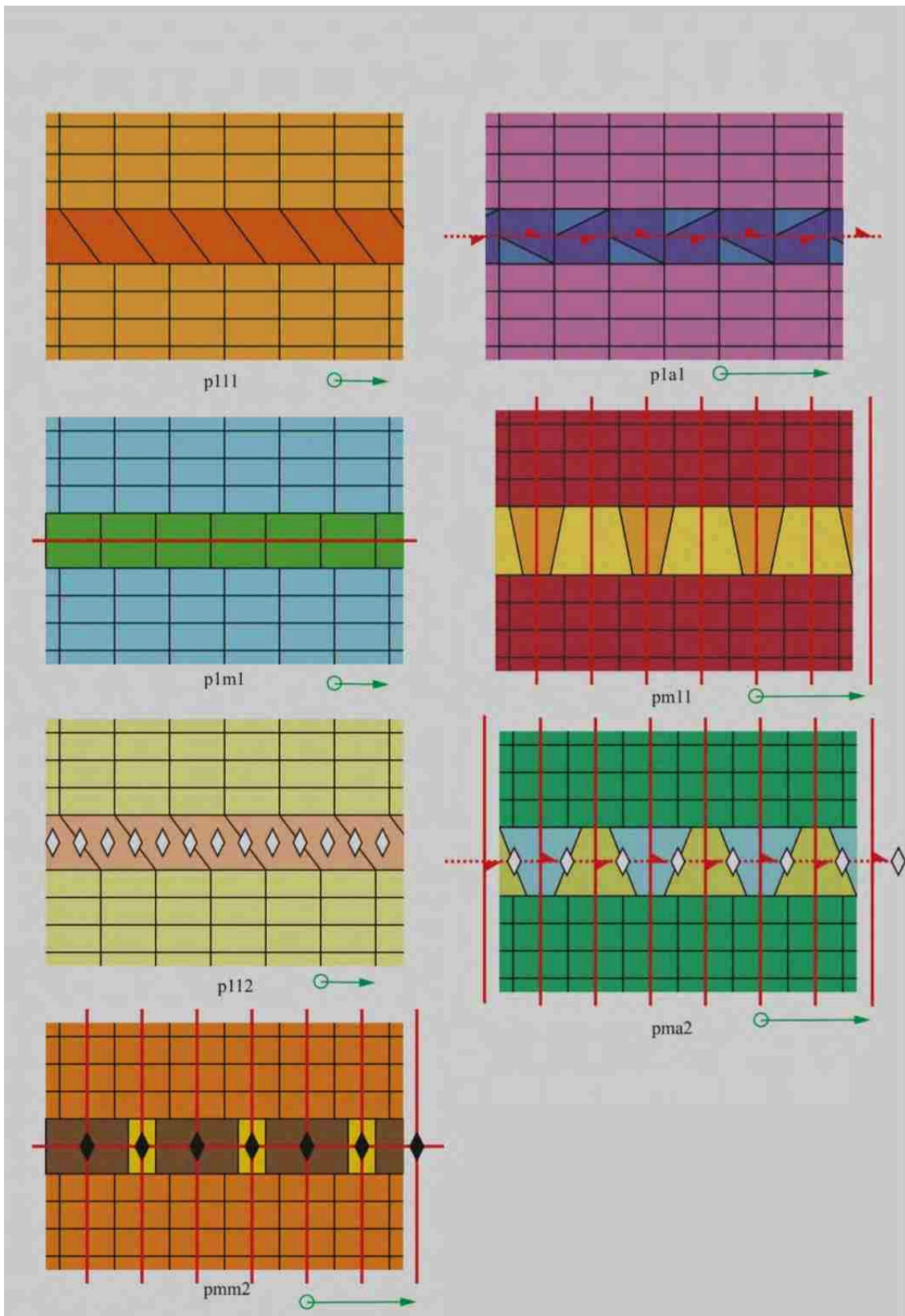


حال احتمالات ممکن برای گروه‌های فریز را بررسی می‌کنیم. چون همه انتقال‌ها باید موازی باشند، طبق لم قبل، هیچ دورانی با زاویه به غیر از π نباید داشته باشیم. پس تنها زیرگروه‌هایی که یک نقطه را ثابت نگه می‌دارند، C_2 و D_1 یا D_2 هستند. هر خط بازتاب باید با جهت حرکت انتقال یا موازی باشد یا عمود بر جهت حرکت باشد تا انتقال غیرموازی تولید نکند. هم‌چنین باید تنها یک خط بازتاب موازی با جهت حرکت وجود داشته باشد. هر لغزه نیز باید در جهت حرکت باشد تا مربع آن، که یک انتقال است، در جهت درست قرار بگیرد. به علاوه، باید اطمینان حاصل کرد که لغزه موازی نباشد چون باعث می‌شود نتیجه آن انتقالی در جهت غیریکسان شود. همه مرکز دوران‌ها نیز باید بر روی خطی موازی با جهت حرکت قرار بگیرد.

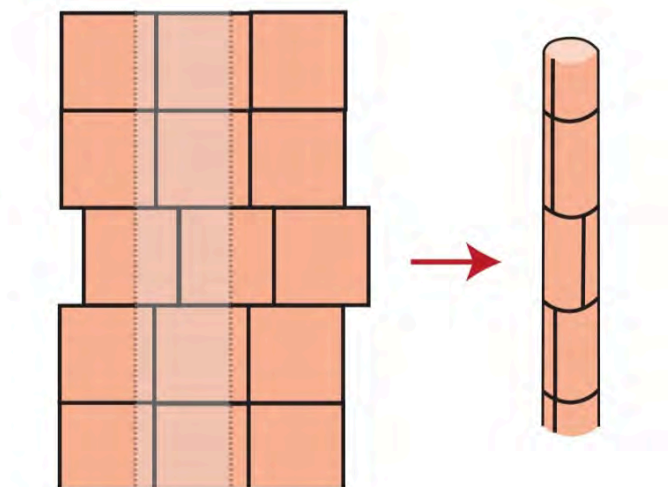
چون هر گروه متقارن گسسته است، می‌دانیم کوتاه‌ترین انتقالی وجود دارد که توان‌های آن بقیه انتقال‌ها را در گروه متقارن، تولید می‌کند. پس برای هر گروه فریز، چهار انتخاب وجود خواهد داشت: یک بازتاب در راستای خط افقی، یک لغزه در جهت افقی، بازتاب‌ها در راستای عمودی و دو دوران نسبت به مرکز دوران‌هایی واقع بر خطی افقی. با در نظر گرفتن ترکیب‌های قابل وقوع، طبق شکل ۲-۲۰، هفت گروه فریز ممکن به دست می‌آید.

در همه حالت‌ها، این الگو در نوارهای عمودی‌ای که کنار هم کپی شده‌اند تکرار شده است که باعث اعمال انتقال‌ها بر یک نوار عمودی می‌شود. اگر ما بدانیم کاشی‌کاری موجود در یک نوار به چه شکلی است، از شکل کاشی‌کاری در تمام صفحه مطلع خواهیم بود.

انتقال‌های تولیدشونده از گروه‌های متقارن، مرز چپ نوار را از مرز راست شناسایی می‌کند ولی قادر به شناسایی هیچ یک از نقاط دیگر نوار نخواهند بود. می‌توانیم طبق شکل ۱۰۰۰۲، مرز چپ نوار را به مرز راست آن بچسبانیم تا به یک سیلندر افقی نامتناهی دست پیدا کنیم.



شکل ۲۰-۲: هفت گروه فریز ممکن



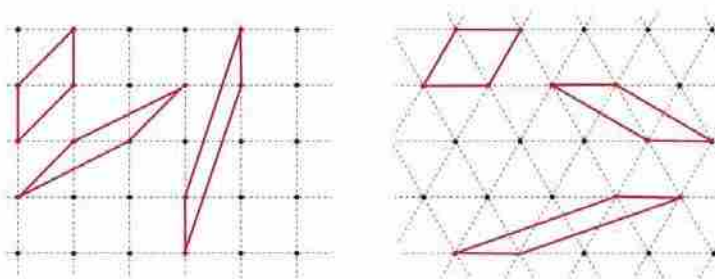
گروه‌های متقارن شامل تقارن انتقالی غیرموازی

تعریف ۲-۷۶. یک کاشی‌کاری τ یک کاشی‌کاری تناوبی τ^1 است اگر گروه تقارن آن دارای حداقل دو انتقال غیرموازی باشد.

در یک کاشی‌کاری تناوبی τ ، فرض کنید F گردایه‌ای از همه انتقال‌ها در $S(\tau)$ باشد آنگاه از آن جایی که ترکیب دو انتقال یک انتقال و وارون انتقال $T_{\vec{v}}$ انتقال $T_{-\vec{v}}$ خواهد بود که نیز یک تقارن است، آنگاه F یک زیرگروه از $S(\tau)$ خواهد بود.

تعریف ۲-۷۷. یک نقطه از صفحه را انتخاب کنید. برای راحتی، ما مبدأ مختصات را در نظر می‌گیریم. مدار $orb(\circ)_F$ از \circ ، تحت F را شبکه τ^2 متناظر با F می‌نامیم.

در شکل ۱۰.۰.۲، شبکه متناظر با تقارن‌های انتقالی کاشی‌کاری مربع و متساوی‌الاضلاع نشان داده شده است.



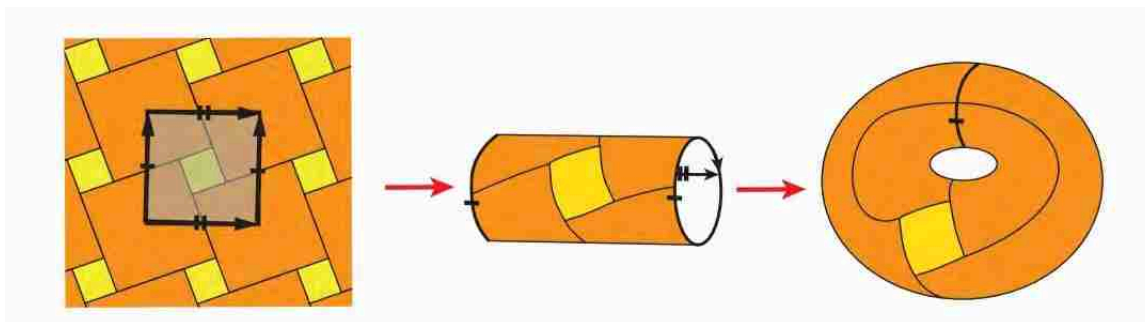
شکل ۲-۲۱: شبکه‌های مربع‌های واحد و مثلث‌های متساوی‌الاضلاع با متوازی‌الاضلاع‌های متناوب ممکن در رنگ قرمز

می‌توانیم دو انتقال غیرموازی $T_{\vec{v}}$ و $T_{\vec{w}}$ را که همه زیرگروه از انتقال‌های F را تولید می‌کنند، انتخاب کنیم و $F = \{T_{\vec{v}}^m \circ T_{\vec{w}}^n : n, m \in \mathbb{Z}\}$ را بنویسیم. توجه داشته باشید که $T_{\vec{v}}^m \circ T_{\vec{w}}^n = T_{m\vec{v}} + T_{n\vec{w}}$. برای مثال، ما فرض می‌کنیم $T_{\vec{v}}$ کوتاه‌ترین انتقال و $T_{\vec{w}}$ نیز کوتاه‌ترین انتقالی باشد که با $T_{\vec{v}}$ موازی نیست. دلیل وجود کوتاه‌ترین انتقال، گروه متقارن گسسته است. توجه داشته باشید که برای بعضی از گروه‌های متقارن، کوتاه‌ترین انتقال‌های غیرموازی و انتخاب‌های بیشتری برای تولیدکننده‌ها موجود خواهد بود.

تعریف ۲-۷۸. انتقال‌های غیرموازی $T_{\vec{v}}$ و $T_{\vec{w}}$ که F را تولید می‌کنند در نظر بگیرید. متوازی‌الاضلاع متناوب متناظر $P_{\vec{v}, \vec{w}}$ را متوازی‌الاضلاع پدید آمده توسط \vec{v} و \vec{w} با رأس‌های موجود در شبکه پدید آمده توسط \vec{v} و \vec{w} تعریف می‌کنیم.

وقتی $P_{\vec{v}, \vec{w}}$ را با انتقال‌های موجود در F برای ایجاد کپی‌ها متجانس انتقال می‌دهیم، نتیجه آن گردایه‌ای از کاشی متوازی‌الاضلاع‌های صفحه است. هر شبکه دارای انتخاب‌های متفاوت از $T_{\vec{v}}$ و $T_{\vec{w}}$ و در نتیجه متوازی‌الاضلاع‌های متناوب متفاوت است که هر یک از آن‌ها صفحه را تحت F کاشی می‌کند. در شکل، هر متوازی‌الاضلاع در شبکه داده شده دارای مساحت یکسان است و هیچ‌کدام شامل یک نقطه از شبکه در ناحیه داخلی و یا روی مرز مگر گوشه‌ها نمی‌توانند باشند.

زمانی که یک متوازی‌الاضلاع متناوب P را انتخاب کردیم، کافی است گروه نمای P را مشخص کنیم و بقیه کاشی‌کاری، نمادها را به وسیله انتقال نمادها که در P ظاهر می‌شوند، به ارث خواهند برد. در یک کاشی‌کاری متناوب، می‌توانیم کاشی‌کاری را به یک چنبره تبدیل کنیم؛ سطح بیرون از یک شکلی که شبیه به دونات است. برای این کار، متوازی‌الاضلاع متناوب $P_{\vec{v}, \vec{w}}$ که توسط $T_{\vec{v}}$ و $T_{\vec{w}}$ تولید شده است در نظر می‌گیریم و یال بالا و پایین آن را با $T_{\vec{v}}$ به هم می‌چسبانیم که به شکل یک سیلندر تبدیل شود. سپس، دایره مرزی سمت چپ سیلندر را به دایره مرزی سمت راست می‌چسبانیم و به یک چنبره دست می‌یابیم.

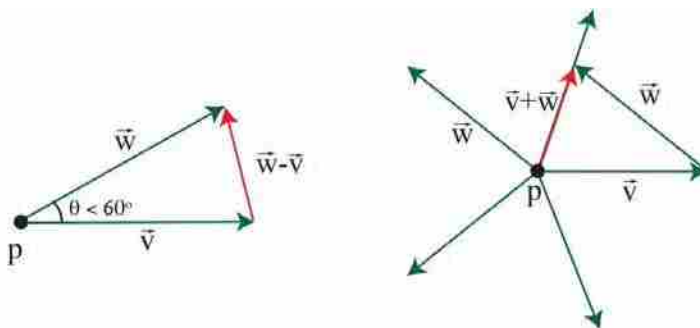


حال می‌خواهیم اثبات کنیم زمانی که τ تناوبی است، زیرگروه‌های $S(\tau)$ که یک نقطه را ثابت نگه می‌دارند، بسیار محدود هستند.

لم ۷۹-۲. اگر τ متناوب باشد، تنها زیرگروه‌ها از $S(\tau)$ که نقطه‌ای را ثابت نگه می‌دارند، به ازای D_n و C_n ، $n = 1, 2, 3, 4, 6$ هستند.

اثبات. فرض کنید نقطه ثابت با گروه متقارن C_n و D_n برای $n \geq 7$ موجود باشد آنگاه دوران‌هایی با زاویه $\frac{\pi}{n} < 60^\circ$ خواهیم داشت. حال فرض کنید، $T_{\vec{v}}$ کوتاه‌ترین انتقال از گروه متقارن باشد. می‌دانیم چون $S(\tau)$ گسسته است پس کوتاه‌ترین انتقال‌ها را دارا می‌باشد. اگر $T_{\vec{v}}$ را با $R_{\frac{\pi}{n}, p}$ ترکیب کنیم، طبق لم قبل، انتقال $T_{\vec{w}}$ حاصل می‌شود که \vec{w} دارای زاویه $\frac{\pi}{n}$ با \vec{v} است. طبق شکل، انتقال $T_{\vec{w}-\vec{v}}$ را نتیجه می‌دهد که کوتاه‌تر از $T_{\vec{v}}$ است که در تناقض است. حال $n = 5$ را در نظر می‌گیریم که \vec{v} بردار انتقال با طول مینیمال است. طبق شکل، ما پنج بردار انتقال حول نقطه p با زاویه $\frac{\pi}{5} = 72^\circ$ بین آن‌ها خواهیم داشت. اگر جمع اولی و سومی را در نظر بگیریم، به بردار انتقالی دست می‌یابیم که از \vec{v} کوتاه‌تر است که در تناقض خواهد بود. در نتیجه، تنها مقادیر ممکن برای $n = 1, 2, 3, 4, 6$.

□



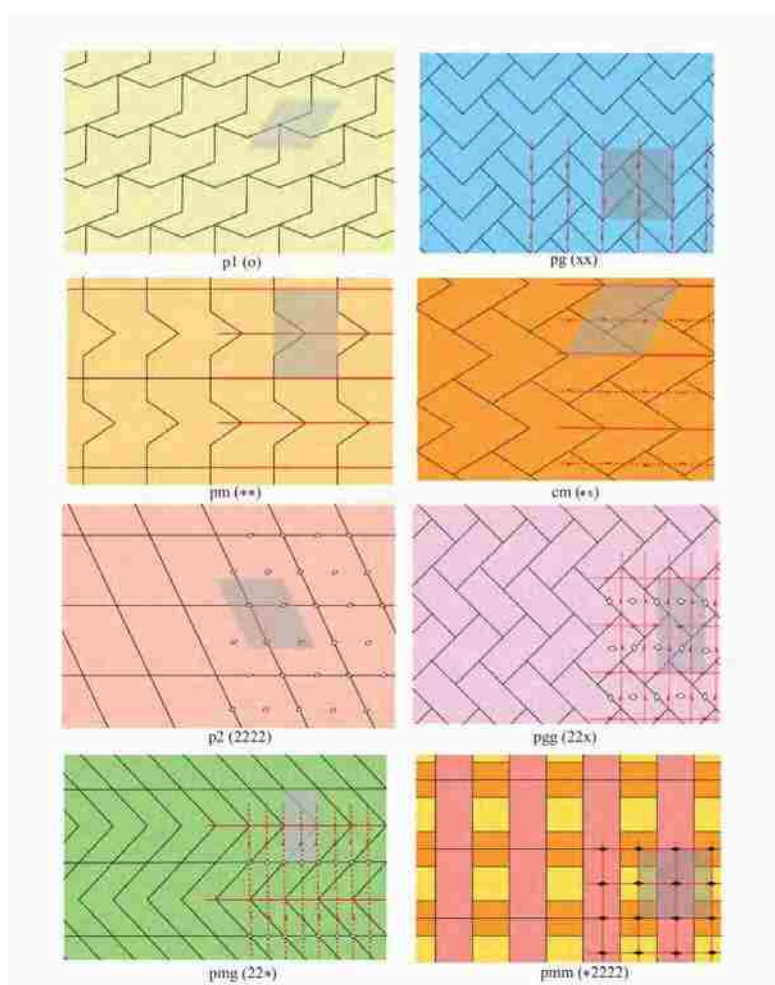
شکل ۲۲-۲: زیرگروه ایزومتري‌هایی که یک نقطه را ثابت نگه می‌دارند، محدود هستند

در ادامه خواهیم دید که همه این مقادیر ممکن برای کاشی‌کاری تنها در بعضی از ترکیب‌ها رخ می‌دهد.

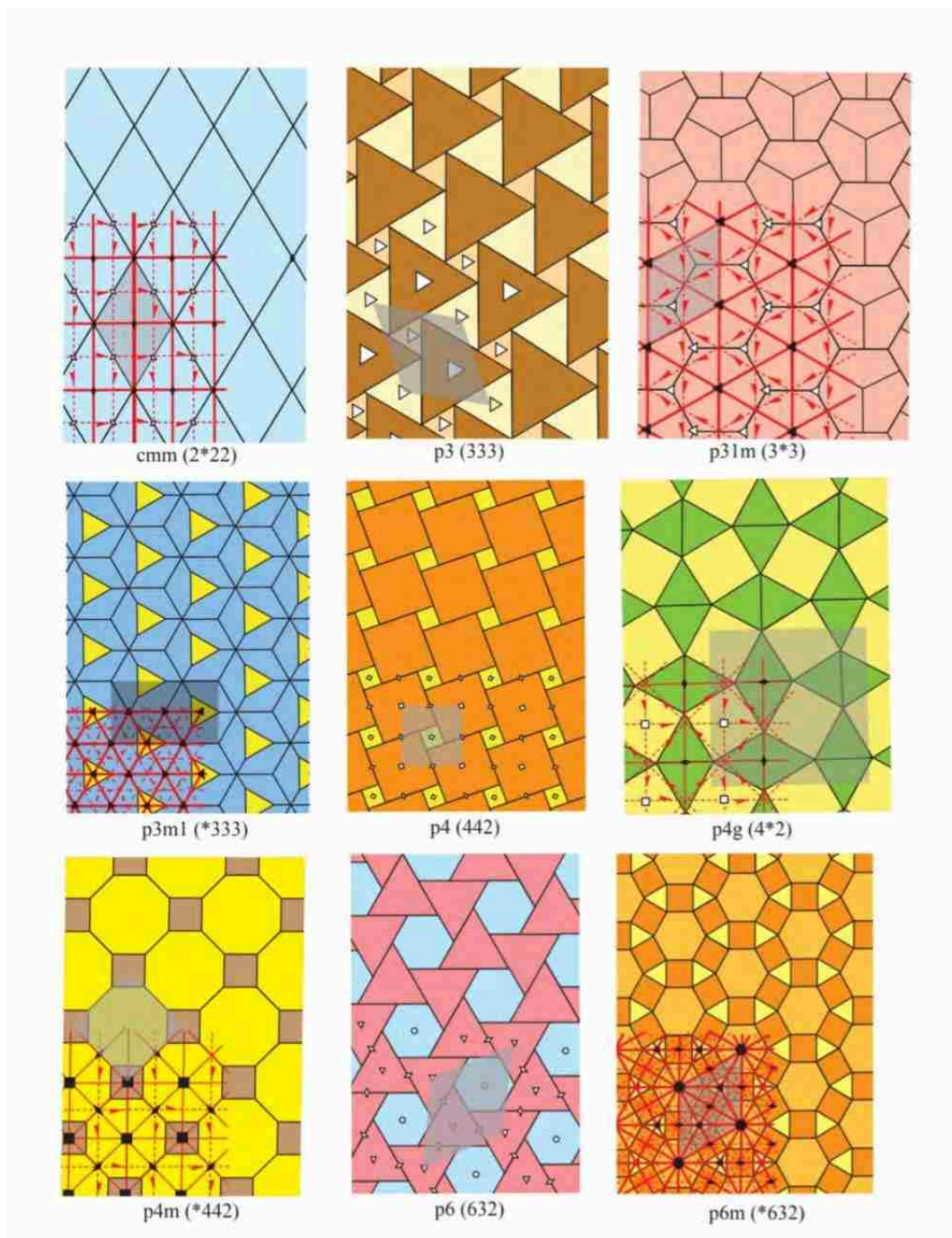
قضیه ۸۰-۲. ۱۷ گروه متقارن کاشی با انتقال غیر موازی وجود دارد.

برای اثبات این قضیه به نمادگذاری اوربیتل می‌پردازیم.

تعریف ۸۱-۲. به ۱۷ گروه متقارن از کاشی‌کاری‌های تناوبی، گروه‌های کاغذدیواری^{۳۳} می‌گوییم.



شکل ۲۳-۲: مثال‌هایی از کاشی‌کاری‌هایی با ۸ گروه کاغذدیواری



شکل ۲۴-۲: مثال‌هایی از کاشی‌کاری‌ها با ۹ گروه کاغذدیواری باقی‌مانده

در شکل ۲۳-۲ و ۲۴-۲، تمام حالت‌های ممکن مشاهده می‌شود و گروه نمای آن در یک بخش از کاشی‌کاری نشان داده شده است. اگر چه در شکل، مثال‌های خاصی مطرح شده است اما دو گروه کاغذدیواری $p1$ و $p2$

دارای متوازی‌الاضلاع‌ها با هیچ محدودیتی بر روی زاویه‌ها و طول‌های نسبی یال هستند. مابقی، زوایای واقع بر روی متوازی‌الاضلاع‌ها مشخص هستند؛ یا همگی زاویه قائمه یا 60° یا 120° خواهند بود. در حالتی که متوازی‌الاضلاع‌های مستطیل شکل هستند، طول‌های نسبی از یال‌های افقی و عمودی بدون محدودیت هستند ولی در متوازی‌الاضلاع‌های مربع شکل، آزادی عمل وجود ندارد و برای این گروه‌های متقارن، یال‌های متوازی‌الاضلاع‌های متناوب باید به همان طول باقی بمانند. اگر کمی دقت کنیم، می‌توانیم ۱۷ گروه کاغذیواری در کاشی‌کاری‌ها و الگوهای زینتی بیابیم. بسیاری از آن‌ها بر روی کاشی‌های کاخ آلامبرا در اسپانیا دیده می‌شوند.



نمادگذاری اوربیفلد برای گروه‌های متقارن

نماد اول برای هر گروه متقارن در گروه‌های کاغذیواری، نماد ملی از *IUCr* است. نماد دوم (در پرانتز) بر اساس قضیه‌ای از اوربیفلدها است. نمادگذاری اوربیفلد هم برای گروه‌های متقارن کاغذیواری و هم گروه‌های متقارن فریز صدق می‌کند.

برای یافتن نماد اوربیفلد یک گروه کاغذیواری، در ابتدا مراکز دوران و مراکز دوجهی متمایز تا شناسایی توسط گروه‌های متقارن را مشخص می‌کنیم. پس اگر مرکز دورانی به مرکز دوران دیگری توسط تقارن شناسایی شود آنگاه به عنوان یک مرکز دوران شناسایی می‌شود. همین شرط برای مراکز گروه‌های دوجهی نیز برقرار است. ما هم مرکز دوران C_n و هم مرکز دوران D_n را با عدد صحیح n نشان می‌دهیم. هم‌چنین از سه نماد \circ ، $*$ و x استفاده خواهیم کرد. دایره، تقارن‌های انتقالی را نشان می‌دهد. اگر بازتابی موجود باشد، از $*$ استفاده می‌کنیم. اگر مراکز دوران و دوجهی موجود باشند، اعداد صحیح دوران‌ها را از بزرگ به کوچک در سمت چپ $*$ و اعداد صحیح دوجهی را از بزرگ به کوچک در سمت راست $*$ فهرست می‌کنیم. اگر هیچ یک از این مراکز

موجود نباشد ولی دو خط بازتاب موجود باشند که دومی توسط تقارن‌ها به روی اولی شناسایی نشود، از ** استفاده می‌کنیم. اگر هیچ خط بازتابی نباشد، مراکز دوجهی نیز وجود نخواهند داشت و مراکز دوران را بدون هیچ علامتی نشان می‌دهیم. اگر لغزهای موجود باشد که هر نقطه را به یک نقطه جدیدی که توسط خط بازتابی از نقطه اول جدا نشده باشد ببرد، x را در انتهای فهرست نمادگذاری اوربیفلد قرار می‌دهیم و اگر هیچ مرکز دوران و دوجهی‌ای نباشد ولی لغزهای موجود باشد که به روی لغزه دیگری توسط تقارن‌ها شناسایی نشده باشد، از xx استفاده می‌کنیم.

برای هر نماد در نمادگذاری، یک ارزش گویای مشخصی نسبت می‌دهیم.

symbol	\circ	*	cyclic n	dihedral n	x
value	2	1	$\frac{n-1}{n}$	$\frac{n-1}{2n}$	1

از آن جایی که تنها دوران‌های ممکن در یک گروه کاغذیواری با مرتبه ۲، ۳، ۴ و ۶ هستند، لازم است تنها ارزش‌های جدول زیر را در نظر بگیریم.

n	2	3	4	6
cyclic	1/2	2/3	3/4	5/6
dihedral	1/4	1/3	3/8	5/12

قضیه ۸۲-۲. یک نمادگذاری اوربیفلد با یک گروه متقارن از صفحه اقلیدسی با انتقال‌ها متناظر خواهد بود اگر و تنها اگر جمع ارزش‌های نمادهای آن ۲ شود.

$$\text{برای مثال گروه } 442 * \text{ دارای } 2 = \frac{1}{4} + \frac{3}{8} + \frac{3}{8} + 1.$$

برای گروه‌های فریز، کافی است یک نماد دیگر اضافه کنیم. نقطه ∞^+ را به عنوان بالاترین نقطه در گروه نما بر روی محور مثبت y و ∞^- را به عنوان پایین‌ترین نقطه در گروه نما بر روی محور منفی y تعریف شده است. اگر تقارنی موجود باشد که توسط بازتاب یا لغزه نسبت به یک خط افقی یا یک دوران به اندازه π به روی خود شناسایی شود آنگاه دو نقطه ∞^+ و ∞^- هم‌ارز خواهند بود. اگر خطوط بازتاب عمودی باشند، نقاط ∞ را قطع خواهند کرد و این باعث تولید یک یا دو نقطه دوجهی در بی‌نهایت با مقدار $\frac{1}{2} = \frac{\infty-1}{2\infty} = \frac{n-1}{2n}$ می‌شود. اگر بازتاب عمودی نداشته باشیم آنگاه نقاط در بی‌نهایت را به عنوان نقاط دوران با ارزش $1 = \frac{\infty-1}{\infty} = \frac{n-1}{n}$ در نظر می‌گیریم. اگر ∞^+ و ∞^- به عنوان یک تقارن شناسایی شوند، ∞ را یک نماد در نظر می‌گیریم و

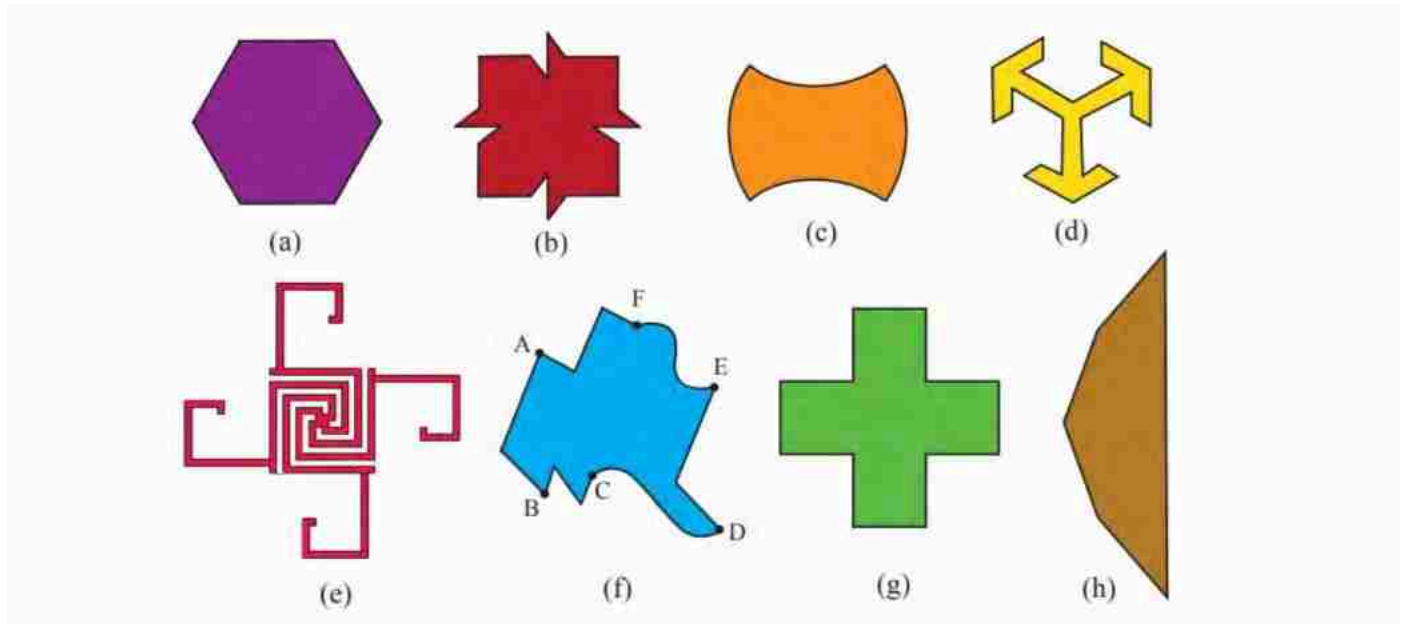
اگر شناسایی نشوند با $\infty\infty$ نشان می‌دهیم. توجه داشته باشید که هر گروه فریز دارای حداقل یک نماد ∞ در نمادگذاری اوربیفلد خود است.

۱۱.۰.۲ چه تعداد کاشی‌کاری؟

همانطور که قبلاً ذکر شد، اگر یک مجموعه اولیه خاص داشته باشیم، آنگاه سوال اساسی‌ای که پیش می‌آید این است که آیا کاشی‌کاری‌ای را می‌پذیرد یا خیر. در این بخش، ما این سوال مرتبط را نیز مطرح می‌کنیم که چه تعداد کاشی‌کاری غیرهم‌ارز می‌تواند ایجاد کند.

تعریف ۲-۸۳. مجموعه اولیه p تک‌شکلی است اگر یک کاشی‌کاری خاص که از همه کاشی‌های اولیه استفاده می‌کند را تولید کند. مجموعه اولیه r -شکلی است اگر دقیقاً r کاشی‌کاری غیرهم‌ارز که از همه کاشی‌های اولیه استفاده می‌کند را تولید کند.

در شکل ۲-۲۵، انواعی از کاشی‌ها تک‌شکلی را مشاهده می‌کنیم.

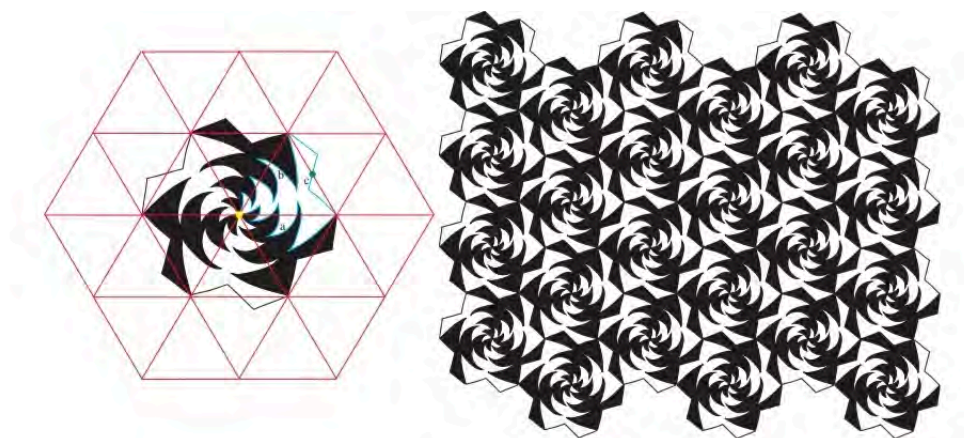


شکل ۲-۲۵: کاشی‌های تک‌شکلی

در شکل (a) ۲-۲۵، کاشی‌کاری‌ای که از شش ضلعی منظم تولید می‌شود باید یال به یال باشد چون در غیر این صورت، رأسی تولید خواهد شد که نیاز به زاویه $\frac{\pi}{3}$ خواهد داشت در صورتی که گوشه‌های شش ضلعی دارای

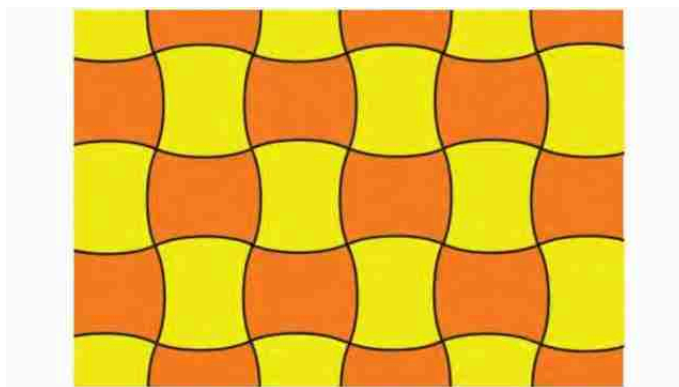
زاویه $\frac{2\pi}{3}$ هستند. طبق تقارن شش ضلعی‌ها، تنها در یک حالت می‌توانیم آن‌ها را یال به یال به هم بچسبانیم. در نتیجه تنها یک راه برای ساخت کاشی وجود خواهد داشت که کاشی‌کاری شش ضلعی منظم را نتیجه می‌دهد. توجه داشته باشید که مربع و مثلث متساوی‌الاضلاع تک‌شکلی نیستند چون می‌توانند بسیاری از کاشی‌کاری‌هایی که یال به یال نیستند را تولید کنند.

در شکل (b) ۲-۲۵، مربع تغییر یافته‌ای مشاهده می‌شود. برای جلوگیری از ایجاد کاشی‌کاری بی‌نهایت، یک طرح زیگ‌زاگ به هر یال اضافه شده است که باعث ایجاد یک بیست ضلعی نامحدب می‌شود. حالا تنها یک راه برای تولید یک کاشی‌کاری با این کاشی اولیه موجود خواهد بود. تغییر شکل یال‌های کاشی در بحث کاشی‌کاری بسیار مفید است. در شکل ۲-۳۷، طرحی از یک مثلث متساوی‌الاضلاع با یالی که تغییر شکل یافته است مشاهده می‌شود. تغییر شکل ایجاد شده توسط کمان آبی a کپی شده است و سپس با زاویه 60° در جهت پادتقارن حول رأس زرد دوران داده می‌شود تا تغییر شکل b حاصل شود. تغییر شکل داده شده توسط کمان c به صورت تقارن دورانی انتخاب شده است. این به این معنا است که یال مثلث را در نقطه سبز رنگ که نقطه میانی است، قطع می‌کند و با دوران 180° به روی خود برمی‌گرداند. م.س. اش، طراح گرافیک، در طرح‌هایش این روش را به کار گرفته است.



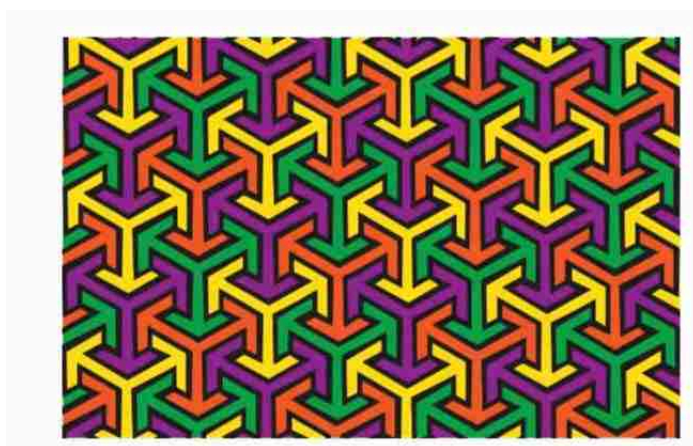
شکل ۲-۲۶: جایگزینی یال‌های مثلث متساوی‌الاضلاع با کمان‌ها یک کاشی‌کاری را نتیجه می‌دهد.

کاشی موجود در شکل (c) ۲-۲۵، دارای کاشی‌هایی با یال‌های خمیده به سمت بیرون و درون است. می‌توانیم این شکل را به عنوان تغییر یافته شکل مربع در نظر بگیریم و واضح است که کاشی‌کاری حاصل از این کاشی که در شکل ۱۱۰۰۲ مشاهده می‌کنیم، یال به یال خواهد بود و تنها یک راه برای تولید آن وجود خواهد داشت.

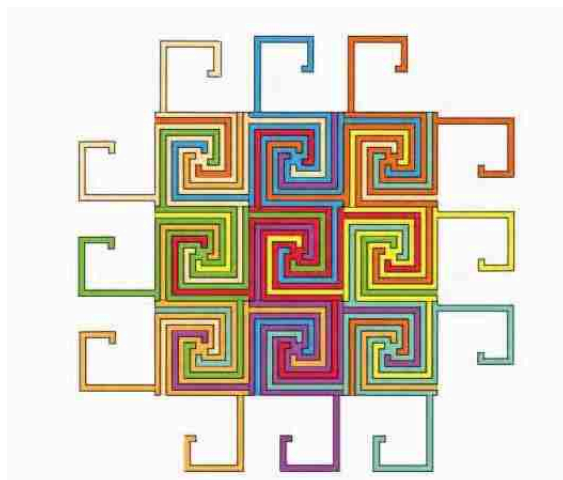


شکل ۲-۲۷: کاشی‌کاری منحصر به فرد تولید شده توسط کاشی اولیه مربع با ضلع‌های خمیده

در شکل (d) ۲-۲۵ و (e) کاشی‌های اولیه‌ای هستند که بخاطر شکل پیچیده آن‌ها، تنها یک راه برای تولید کاشی‌کاری آن‌ها موجود خواهد بود که در شکل‌های ۱۱۰۰۰۲ و ۱۱۰۰۰۲ دیده می‌شود.

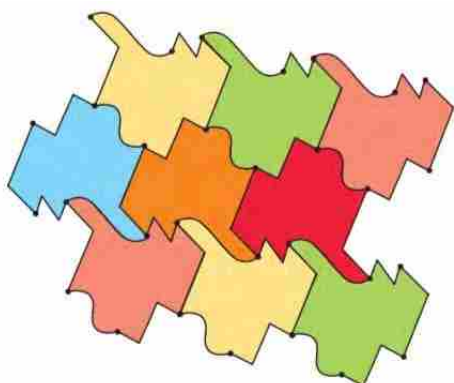


شکل ۲-۲۸: یک طرح اسلامی

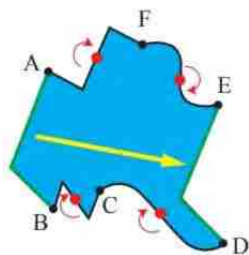


شکل ۲۹-۲: کاشی‌کاری منحصر به فرد تولید شده توسط تغییر یافته شکل مربع

شکل (f) ۲۵-۲، یک از کاشی‌های با ظاهر عجیب است ولی در واقع شبیه کاشی‌های شکل ۲-۳ است. مرزهای آن از ۶ کمان تشکیل شده است. طبق شکل ۱۱۰۰۲، کمانی که بین دو گوشه A و B قرار دارد، یک انتقال از کمان بین E و D است. هر کمان بین B و C ، C و D ، E و F و F و A یک تقارن دورانی است از آن جهت که اگر نقطه میانی بین دو نقطه انتهایی را در نظر بگیریم، می‌توانیم کمان را به اندازه 180° دوران بدهیم و کمان به روی خودش منطبق می‌شود. با دوران کاشی‌ها حول مرکز کمان‌ها و ایجاد یک کپی از آن و سپس با اعمال انتقال می‌توانیم کاشی‌کاری مربوط به این کاشی اولیه را تولید کنیم. مجموعه محدودیت‌های ذکر شده در بالا بر روی اشکال شش کمان تشکیل دهنده مرز توسط جان کانوی تولید و به عنوان معیار کانوی شناخته می‌شود. توجه داشته باشید برای اینکه این روند بر روی کاشی نیز صدق کند، نیازی نیست که همه کمان‌ها دارای طول غیرصفر باشند. از آن جایی که هر جفت نقطه توسط یک انتقال بر هم منطبق می‌شوند، می‌توانیم دو کمانی که به وسیله انتقال بر روی یکدیگر منطبق می‌شوند را تا جایی فشرده کنیم که به نقاط تبدیل شوند و چهار کمان باقی بماند که دارای تقارن دورانی باشند و یا می‌توانیم چندین کمان که دارای تقارن دورانی هستند را فشرده کنیم چون نقاط نیز دارای تقارن دورانی خواهند بود ولی حداقل سه کمان باید باقی بمانند تا کاشی معتبر باشد. پس معیار کانوی تنها برای کاشی‌ها دارای ۳، ۴، ۵ یا ۶ ضلع درست خواهد بود. در این کاشی خاص، چون هیچ‌کدام از کمان‌ها به غیر از دو کمانی که انتقالی از یکدیگر هستند متجانس نیستند، کاشی‌کاری کاملاً مشخص و این کاشی تک‌شکلی است.



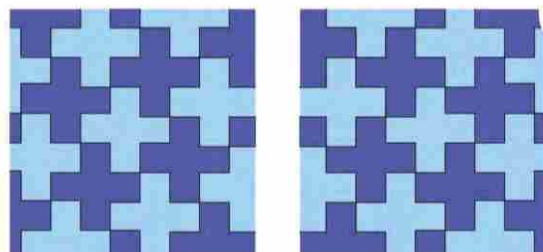
شکل ۳۰-۲: یک کاشی کاری تک‌شکلی که از معیار کانوی استفاده شده است.



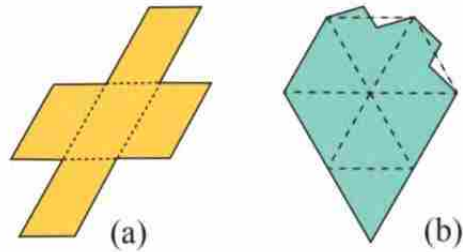
کاشی شکل (g) ۲۵-۲ که صلیب یونانی نامیده می‌شود، اگرچه تک‌شکلی است، به این دلیل که هر کاشی کاری‌ای که تولید می‌کند با هر کاشی کاری دیگری از خود یک‌ریخت است، اما دو کاشی کاری تولید می‌کند که به بازتاب برای اثبات هم‌ارزی احتیاج خواهد داشت.

تعریف ۸۴-۲. به دو کاشی زوج پادهمسانه گوئیم هرگاه یکی از آنها توسط بازتابی با دیگری هم‌ارز باشد.

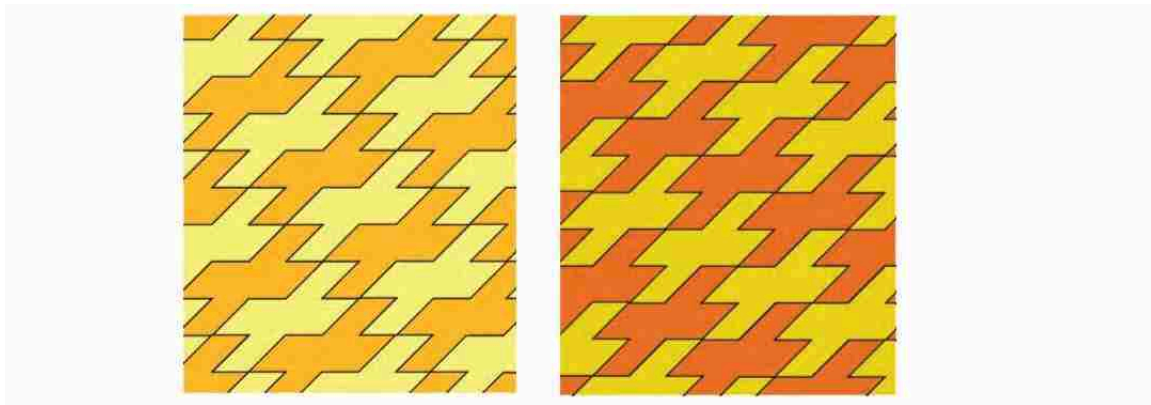
پس صلیب یونانی، یک زوج پادهمسانه تولید می‌کند در حالی که بقیه کاشی‌ها حتی بازتاب وجود نداشته باشد، کاشی کاری‌های منحصر به فرد تولید می‌کنند.



روش‌های متنوعی برای به دست آوردن کاشی‌های دوشکلی وجود دارد. برای مثال اگر کاشی صلیب یونانی را کمی کج کنیم، دو کاشی که زوج پادهمسانه بودند دیگر هم‌ارز نخواهند بود.

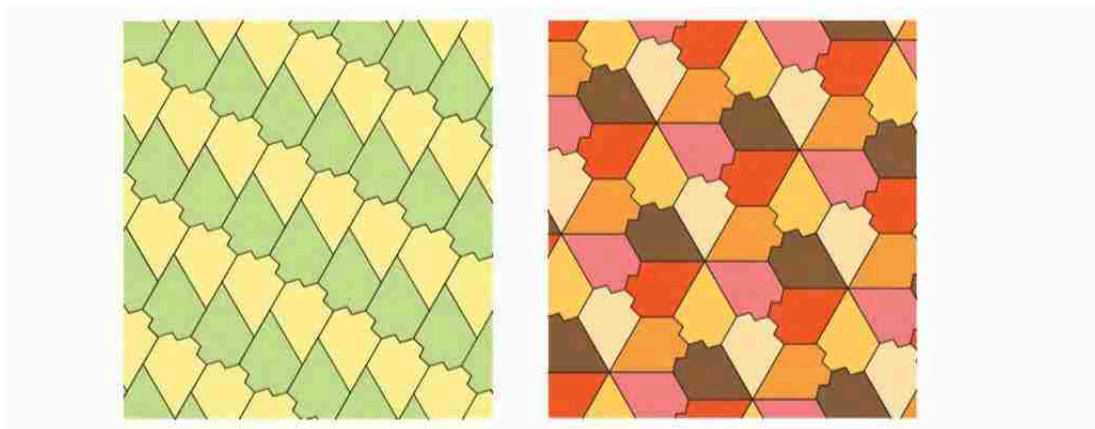


شکل ۲-۳۱: دو کاشی دوشکلی

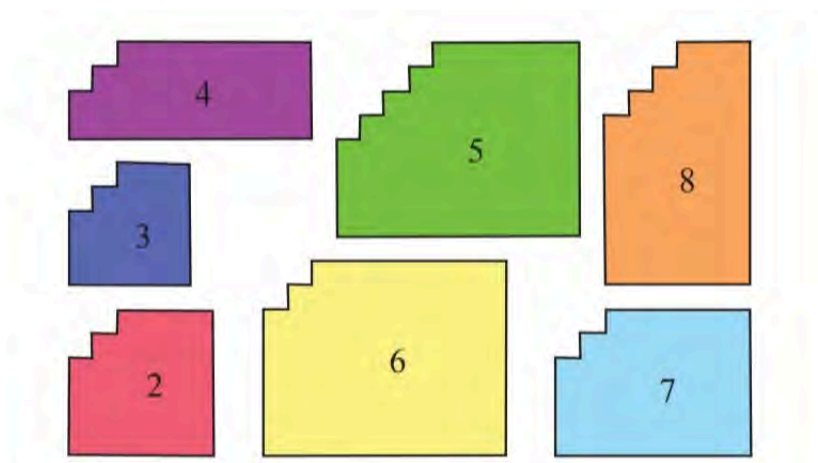


شکل ۲-۳۲: در شکل سمت چپ، صلیب‌های نارنجی در رأس بیرون‌زدگی سمت چپ با هم مشترک هستند و کاشی‌های نارنجی پررنگ در شکل سمت راست، در رأس بیرون‌زدگی سمت راست با هم اشتراک دارند.

کاشی‌کاری شکل (b) ۲-۳۱، دوشکلی است هرچند کاشی‌کاری‌هایی که در شکل ۱۱۰۰۲ تولید می‌کند، متفاوت هستند.

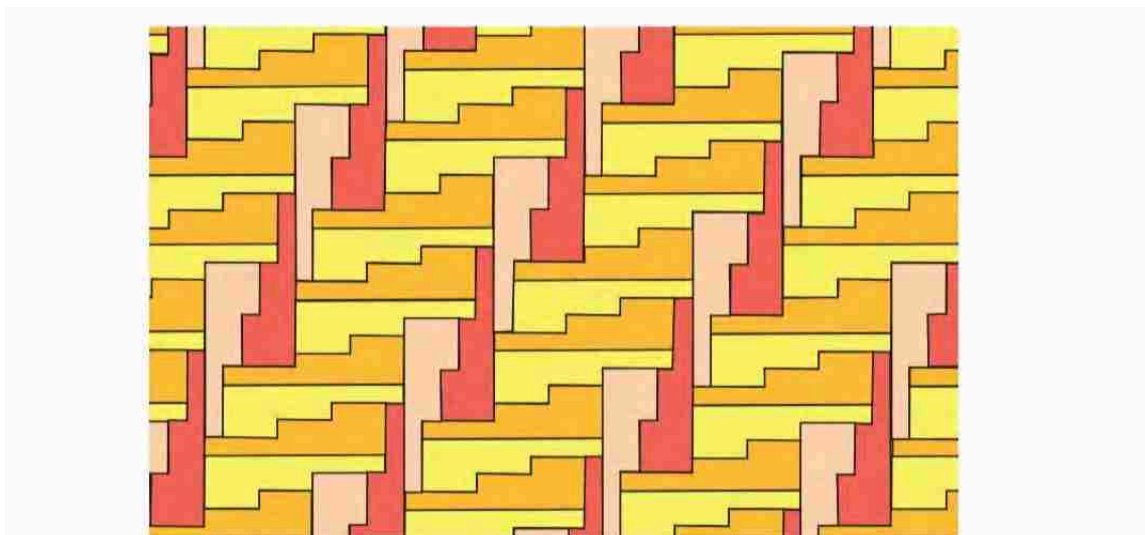


در یک سری از مقالات، جورج مارتین و آن فونتن مثالی از کاشی‌های r -شکلی تا $r = 10$ یافتند که ما در شکل ۲-۳۳، کاشی‌هایی برای $r = 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ مشاهده می‌کنیم. تمام کاشی‌های اولیه به شکل اجتماعی از مربع‌ها در کاشی‌کاری مربع حالت داده شده است.



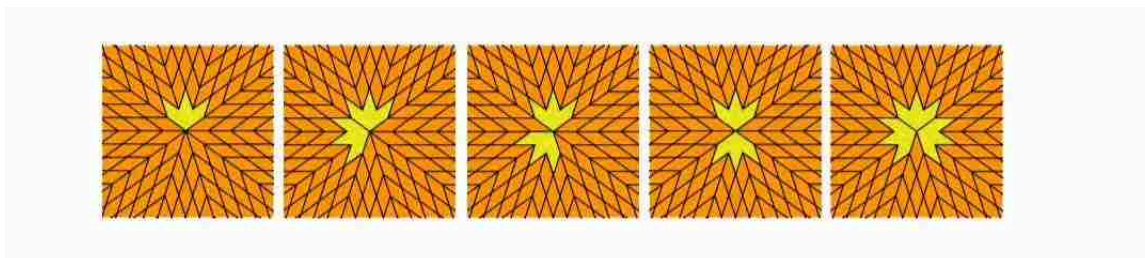
شکل ۲-۳۳: کاشی‌های r -شکلی

در سال ۲۰۰۳، جوزف مایریک کاشی ۱۱-شکلی را یافت که در شکل ۲-۳۴، یکی از ۱۱ کاشی‌کاری آن را مشاهده می‌کنیم.



شکل ۳۴-۲: کاشی ۱۱-شکلی

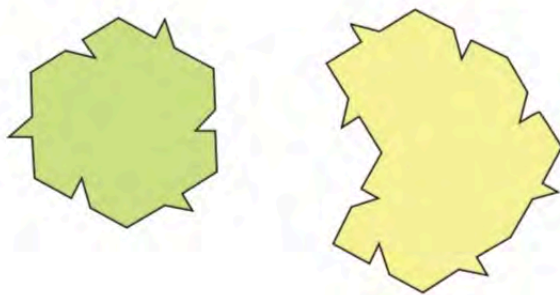
اگر بیشتر از یک کاشی اولیه داشته باشیم و فقط کاشی‌کاری‌هایی را در نظر بگیریم که از همه کاشی‌های اولیه استفاده می‌کند آنگاه می‌توانیم به ازای هر $r \geq 1$ مجموعه اولیه‌های r -شکلی بیابیم. در شکل ۳۵-۲، پنج کاشی‌کاری که توسط دو کاشی اولیه که یکی لوزی با زوایای $\frac{2\pi}{10}$ و $\frac{8\pi}{10}$ و دیگری که با چسباندن سه لوزی که در یک رأس مشترک هستند به وجود می‌آید، تولید شده‌اند. توجه داشته باشید که طبق تعریف r -شکلی‌ها باید از تمام کاشی‌های اولیه استفاده شود چون در غیر این صورت برای مثال در شکل ۳۵-۲، می‌توانیم تنها از لوزی برای تولید تعداد بی‌نهایت کاشی‌کاری استفاده کنیم.



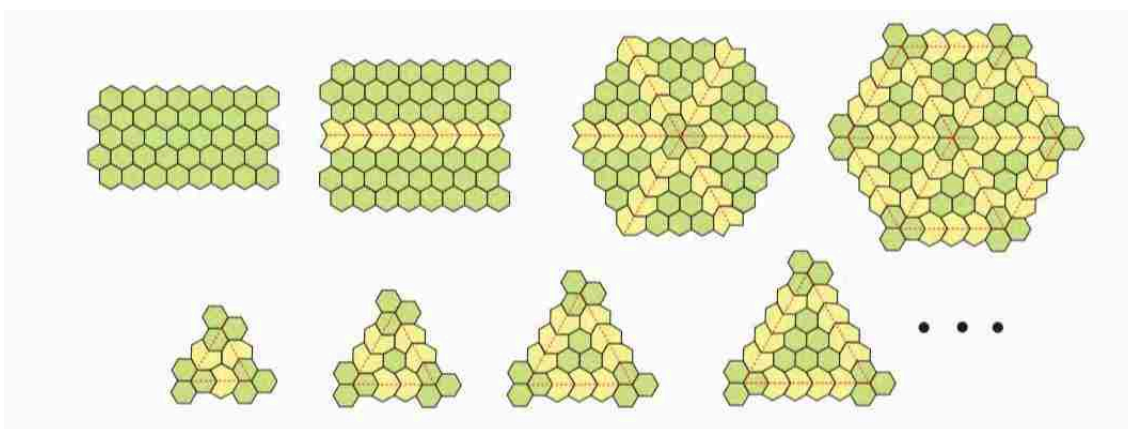
شکل ۳۵-۲: پنج کاشی‌کاری متفاوت از مجموعه اولیه دو کاشی

ما مثال‌های زیادی از کاشی‌های اولیه‌ای را دیدیم که ناشمارای بی‌نهایت کاشی‌کاری می‌پذیرند. از آنجایی که با کاشی اولیه مربع، می‌توانیم کاشی‌کاری منظم تولید شده توسط آن را با برش یال‌ها در هر خط افقی و قسمت

پایینی کاشی‌کاری با فاصله x نسبت به قسمت بالایی بلغزانیم، این کاشی مثالی از کاشی‌های اولیه با ویژگی پذیرفتن ناشمارای بی‌نهایت کاشی‌کاری خواهد بود. حال سؤالی که به وجود می‌آید این است که آیا مثال‌هایی برای کاشی‌های اولیه وجود دارد که فقط می‌توانند شمارای بی‌نهایت کاشی‌کاری تولید کنند؟ ما به این کاشی‌های اولیه، کاشی‌های اولیه σ -شکلی گوییم. در سال ۱۹۸۶ و ۱۹۸۷، پیتر اشمیت نشان داد که برای هر $n \geq 2$ یک کاشی اولیه از n کاشی که σ -شکلی هستند، وجود دارد. در شکل ۲-۳۶، یک مجموعه‌ای از دو کاشی که σ -شکلی هستند را مشاهده می‌کنیم و کاشی‌کارهایی که تولید می‌کنند را در شکل ۲-۳۷ می‌بینیم. در ردیف اول، کاشی‌کاری منظم شش‌ضلعی و دو کاشی‌کاری غیرتناوبی دیده می‌شود. در ردیف آخر، یک دنباله شمارا از وصله‌ها را می‌بینیم که هر کدام یک کاشی‌کاری منحصر به فرد تولید می‌کنند. وصله سوم کاشی‌کاری موجود در قسمت بالا و سمت راست را تولید و به طور مشابه بقیه نیز کاشی‌کاری‌های خود را تولید خواهند کرد.



شکل ۲-۳۶: یک مجموعه اولیه از دو کاشی که یک کاشی‌کاری شمارای بی‌نهایت تولید می‌کند



شکل ۲-۳۷: کاشی‌کاری تولید شده توسط کاشی‌های اولیه اشمیت.

فصل ۳

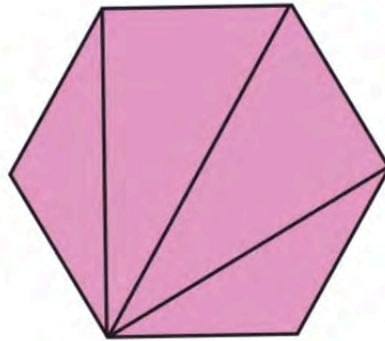
انواع کاشی‌کاری

در این فصل، کاشی‌کاری‌ها به کاشی‌کاری‌های خوش رفتار محدود می‌شوند. منظور ما از کاشی‌کاری‌ها با کاشی‌های اولیه چندضلعی و با محدودیت‌های مختلف دیگر است که انتخاب حالت‌های ممکن را محدود می‌کند.

۱.۳ کاشی‌کاری‌های یکنواخت

در ابتدا، چندضلعی‌های منظم را در نظر می‌گیریم. می‌دانیم که اگر کاشی‌کاری فقط یال به یال و تنها یک چندضلعی منظم به عنوان کاشی اولیه انتخاب شده باشد، تنها به سه کاشی‌کاری منظمی که توسط مثلث متساوی‌الاضلاع، مربع و شش‌ضلعی منظم دست خواهیم یافت ولی اگر بیشتر از یک کاشی اولیه استفاده کنیم چه اتفاقی خواهد افتاد؟

در این قسمت یک n -ضلعی منظم را با $\{n\}$ نشان خواهیم داد. طبق شکل، هر n ضلعی منظم را می‌توان با اضافه کردن قطرهای نامرتب، به $n - 2$ مثلث تقسیم کرد. در نتیجه، مجموع زوایای آن $(n - 2)\pi$ است که باید با مجموع زوایای $n - 2$ مثلث برابر باشد و چون هر زاویه با زاویه دیگر برابر است، باید یک زاویه به اندازه $\frac{(n-2)\pi}{n}$ در هر گوشه وجود داشته باشد.



اگر n_1, n_2, \dots, n_r ضلعی داشته باشیم که رئوس یکدیگر را در رأس v قطع کنند، مجموع زوایای گوشه‌هایشان 2π خواهد بود. در نتیجه، با تقسیم بر π ، معادله محدودیت رأسی

$$\frac{n_1 - 2}{n_1} + \frac{n_2 - 2}{n_2} + \dots + \frac{n_r - 2}{n_r} = 2 \quad (1)$$

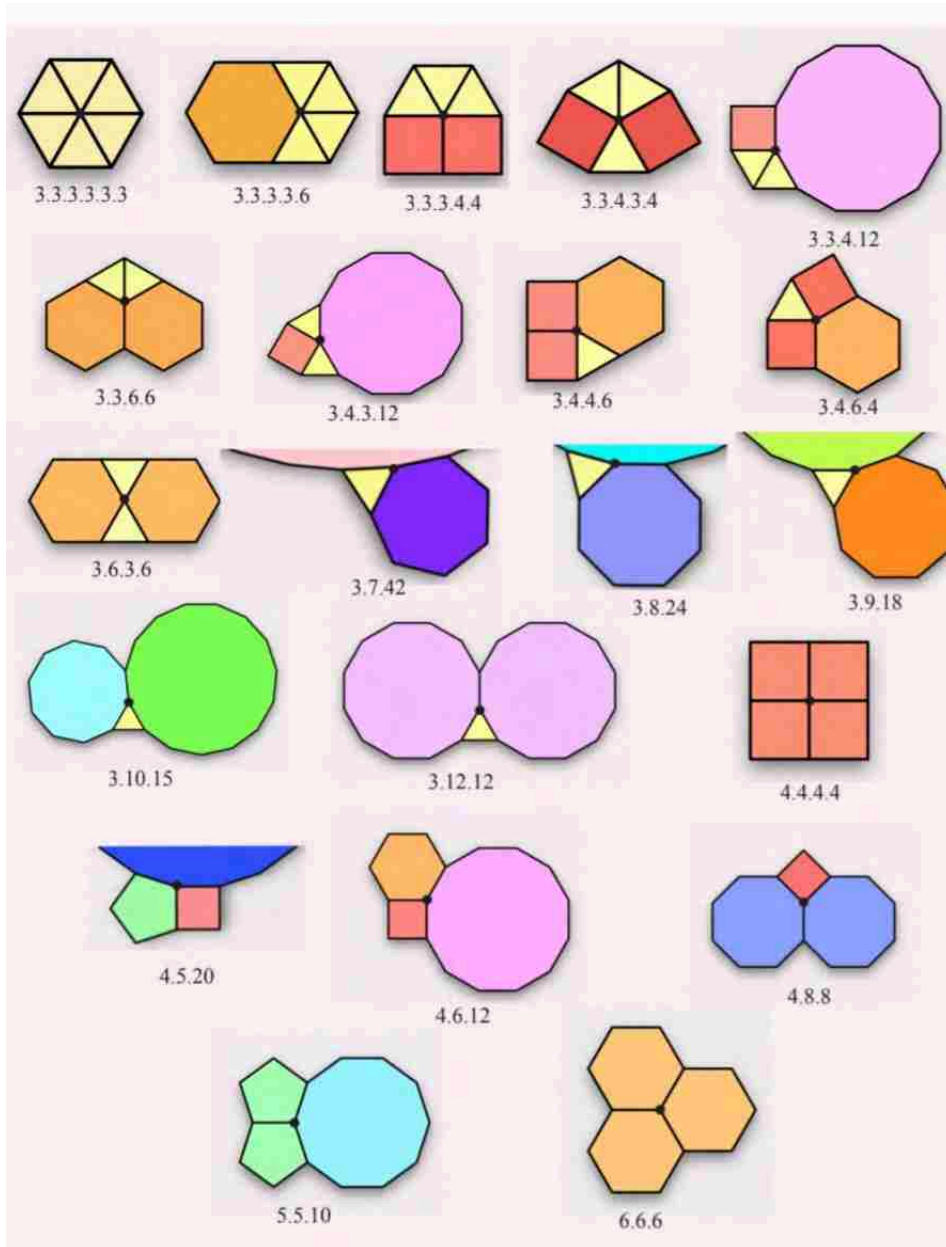
را خواهیم داشت. اگر دقت کنید، تنها ۱۷ انتخاب ممکن برای هر عدد صحیح مثبت n_1, n_2, \dots, n_r خواهیم داشت که در این معادله صدق خواهند کرد. برای چهار عدد از این انتخاب‌ها، دو راه متفاوت برای جایگذاری چندضلعی متناظر حول رأس مشخص، بدون در نظر گرفتن بازتاب در آن رأس، وجود خواهد داشت که در مجموع، ۲۱ الگو از آن چندضلعی در آن رأس تولید خواهد شد.

Species number	1	2	3	4	5	6
Type	3.3.3.3.3.3	3.3.3.3.6	3.3.3.4.4 3.3.4.3.4	3.3.4.12* 3.4.3.12*	3.3.6.6* 3.6.3.6	3.4.4.6* 3.4.6.4
7	8	9	10	11	12	13
3.7.42**	3.8.24**	3.9.18**	3.10.15**	3.12.12	4.4.4.4	4.5.20**
14	15	16	17			
4.6.12	4.8.8	5.5.10**	6.6.6			

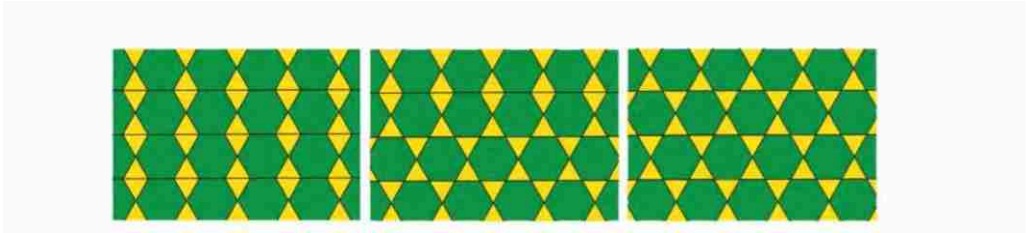
تعریف ۱-۳. یک گونه از یک رأس، مجموعه اعداد صحیح مثبت است که در معادله محدودیت رأسی صدق می‌کنند و آن را با n_1, n_2, \dots, n_r نشان می‌دهیم. یک تایپ از یک رأس، انتخاب یک ترتیبی از چندضلعی‌ها است که یک رأس را از یک گونه داده شده، احاطه می‌کند. برای چندضلعی‌های مواجهه در ترتیب دوری حول رأس $\{n_1\}, \{n_2\}, \dots, \{n_r\}$ ، تایپ آن‌ها را با $n_1.n_2.\dots.n_r$ نشان می‌دهیم.

برای مثال، تایپ‌های رئوس برای کاشی‌کاری‌های منظم، $۳.۳.۳.۳.۳.۳$ ، $۴.۴.۴.۴$ و $۶.۶.۶$ است که تنها کاشی‌کاری‌هایی هستند که برای همه رئوس یک تایپ رأس با تنها یک عدد صحیح که در آن تایپ ظاهر می‌شود، وجود خواهد داشت. برای راحتی، یک عدد صحیح c که به طور متوالی به تعداد n بار در یک تایپ رأسی تکرار می‌شود را با c^n نشان می‌دهیم. پس تایپ‌های رئوس کاشی‌کاری‌های منظم را با $۴^۴$ ، $۳^۶$ و $۶^۳$ نشان می‌دهیم و برای نشان دادن تایپ یک رأس، نماینده‌ای را انتخاب می‌کنیم که دارای کم‌ترین تعداد اضلاع است و سپس جهت حرکتی را انتخاب می‌کند که همسایه آن تعداد اضلاع کمتری دارد. برای مثال از $۴.۶.۴.۳$ به جای $۳.۴.۶.۴.۳$ و مثال‌های دیگر استفاده می‌کنیم. می‌توانیم برای دیدن فهرست کامل به جدول شکل، مراجعه کنید. توجه کنید که تایپ‌ها زمانی که با گونه‌های مشابه مرتبط باشند، در یک گروه قرار می‌گیرند. همان‌طور که مشاهده می‌کنید، تایپ‌های رأسی که شامل a^* و a^{**} باشند، نمی‌توانند به عنوان تایپ رأس در یک کاشی‌کاری قرار بگیرند.

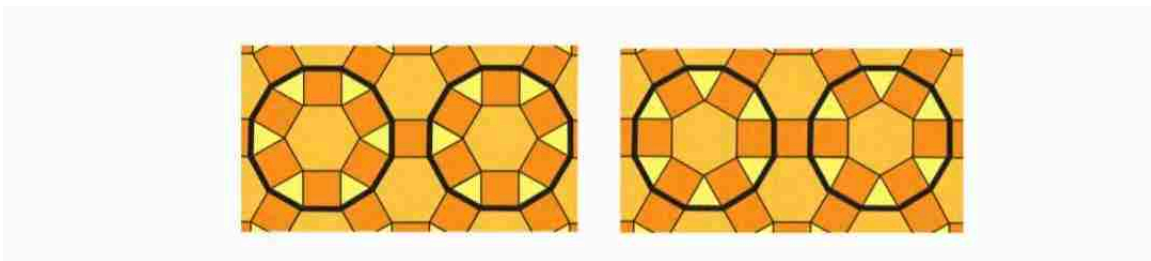
در شکل ۱-۳، تصویر تمام حالت‌های ممکن برای تایپ‌های رئوس با توجه به در نظر گرفتن بازتاب یک تصویر با تایپ رأس مشابه را مشاهده می‌کنیم. شاید تصور کنید که محدودیت استفاده از یک گونه به طور چشمگیری تعداد کاشی‌کاری‌های ممکن را محدود می‌سازد ولی طبق شکل ۲-۳، اگر گونه‌های پنجم $۳, ۶, ۳, ۶$ متناظر با دو مثلث و دو شش ضلعی را محدود کنیم آنگاه می‌توانیم ردیفی از کاشی‌ها را بلغزانیم به طوری که در ردیف‌های مجاور یا یال‌های مثلث‌ها با یال‌های مثلث‌های دیگر و یا یال‌های مثلث‌ها با یال‌های شش ضلعی‌ها جفت شود. اگر حالت ممکن اول را با \circ و حالت ممکن دوم را با \bullet نشان دهیم، دنباله‌ای از هر دو طرف نامتناهی از این حالات خواهیم داشت که نشان‌دهنده چنین کاشی‌کاری‌ای خواهد بود.



شکل ۱-۳: تاپ‌های رأسی



شکل ۲-۳: تعداد بی‌نهایت کاشی‌کاری با رئوسی از گونه‌های مطرح شده



شکل ۳-۳: مثالی دیگر از تعداد بی‌نهایت کاشی‌کاری با رئوسی از گونه‌های مطرح شده

تعریف ۲-۳. به یک کاشی‌کاری یال به یال تولید شده توسط چندضلعی‌های منظم، کاشی‌کاری یکنواخت گوئیم اگر همه رئوس دارای تایپ یکسان باشند. به این کاشی‌کاری‌ها ارشمیدی یا نیمه منظم نیز گفته می‌شود. چنین کاشی‌کاری‌ای با رئوس از تایپ $a.b.c\dots$ ، با $(a.b.c\dots)$ نشان داده می‌شود.

الزام اینکه همه رئوس دارای تایپ یکسان باشند هم‌ارز با لزوم متشابه رأسی بودن کاشی‌کاری خواهد بود. مجموعه دوری مرتب از چندضلعی‌های منظم در هر رأس، آن رأس و یال واقع بر آن را تا تجانس و برعکس آن را مشخص می‌کند. مثال‌های ساده از کاشی‌کاری‌های یکنواخت، کاشی‌کاری‌های منظم هستند. به طور کلی، از آن جایی که کاشی‌کاری‌های یکنواخت یال به یال هستند، کاشی‌های اولیه آن‌ها باید گردایه متناهی از چندضلعی‌های منظم، همه با طول یال‌های یکسان، باشند. با این محدودیت‌ها، حالت‌های ممکن کمتر می‌شوند.

قضیه ۳-۳. یازده حالت

$(۳^۶)$, $(۴ \cdot ۶)$, $(۴^۴)$, $(۳ \cdot ۱۲^۲)$, $(۳ \cdot ۶ \cdot ۳ \cdot ۶)$, $(۳ \cdot ۴ \cdot ۶ \cdot ۴)$, $(۳^۲ \cdot ۴ \cdot ۳ \cdot ۴)$, $(۳^۳ \cdot ۴^۲)$, $(۳^۴ \cdot ۶)$, $(۳^۶)$

$(۶^۳)$, $(۴ \cdot ۸^۲)$, (۱۲)

برای کاشی‌کاری یکنواخت وجود دارد.

تمام حالت‌های ممکن به غیر از (۳۴.۰۶) در شکل، دیده می‌شود. هر کدام از این حالت‌ها شکل منحصر به فرد خود را دارند. در حالت (۳۴.۰۶)، دو کاشی کاری متناظر از طریق بازتاب وجود دارد که یک جفت کاشیکاری پادهمسانه را ایجاد می‌کند. شمارش کاشی‌کاری‌های یکنواخت در ابتدا توسط ریاضیدان و منجم آلمانی، یوهانس کیپلر، در سال ۱۶۱۹ میلادی منتشر شد.

اثبات. در ابتدا ده تایپ از رئوس که در حکم قضیه صدق نمی‌کنند را با نشان دادن این که اگر با یک رأس از آن تایپ شروع کنیم، نمی‌توانیم به یک کاشی‌کاری یکنواخت از صفحه، آن را گسترش بدهیم، حذف می‌کنیم (آن‌هایی که در جدول، دارای a^* و a^{**} هستند). کافی است نحوه چیدمان کاشی‌ها حول یک چندضلعی با تعداد ضلع‌های فرد را نظر بگیریم. برای مثال، تایپ رأسی ۱۲.۴.۳.۳ را در نظر بگیرید. فرض کنید v_1 یک رأس از شکل، باشد. مثلث T_1 را نظر بگیرید که در یک یال با دوازده-ضلعی مشترک باشد. رأس دوم v_2 که باید در آن اشتراک داشته باشد باید از تایپ مشابه باشند پس توسط مثلث دیگر T_2 و یک مربع اشتراک خواهد داشت ولی مثلث جدید T_2 باید در یک یال با مثلث اول مشترک باشد. پس رأس سوم v_3 از T_1 با سه مثلث متمایز که باعث می‌شود آن رأس از تایپ ۱۲.۴.۳.۳ نباشد، مشترک خواهد بود و به طور مشابه نه عدد دیگر نیز متناظر با کاشی‌کاری‌ها نخواهد بود.

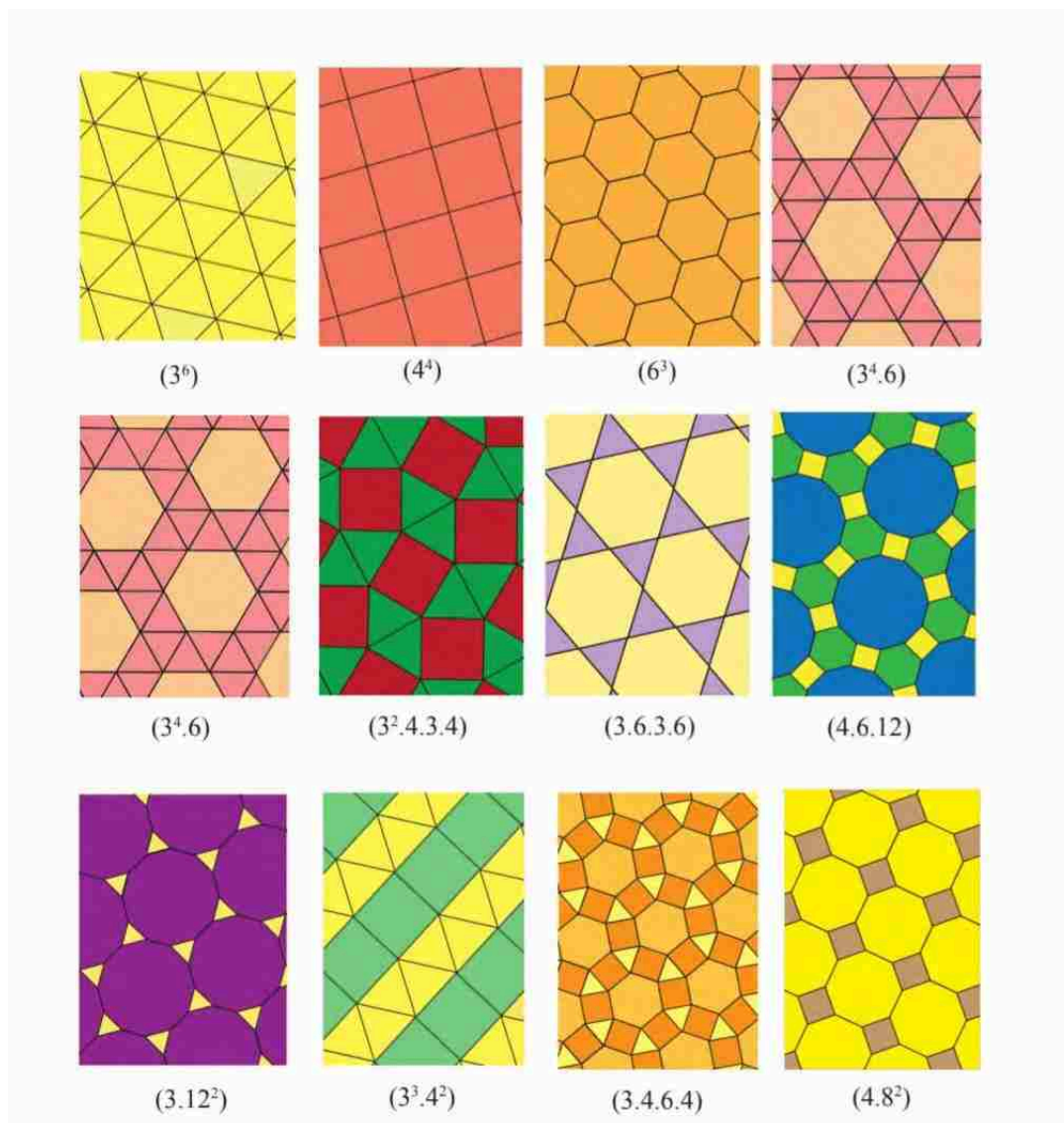
حال یازده حالت ممکن از تایپ‌های رأسی برای کاشی‌کاری‌های یکنواخت باقی می‌ماند ولی باید هنوز نشان دهیم که کاشی‌کاری‌هایی برای هر کدام از آن‌ها موجود است. اگر چه در شکل، کاشی‌کاری‌ای برای هر کدام مشاهده می‌شود اما به یک تصویر بسنده نمی‌کنیم چون ممکن است بتوانیم آن را رسم کنیم ولی از دید ریاضی دقیق نباشد. در حالت‌های (۴۴)، (۳۶) و (۶۳) کاشی‌کاری‌های منظمی هستند که می‌دانیم صفحه را کاشی می‌کنند. دو مورد اول از مجموعه‌های خطوط موازی و مورد سوم از آمیختن مثلث‌ها در مورد اول حاصل می‌شود. دو کاشی‌کاری (۳۴.۰۶) و (۳.۰۶.۳.۰۶) از (۳۶) به دست می‌آیند که شامل مجموعه‌ای از شش مثلث چسبیده به یکدیگر برای تولید یک شش‌ضلعی است و در نتیجه به وضوح این کاشی‌کاری‌ها معتبر هستند. کاشی‌کاری (۳۳.۰۴۲) با نوارهایی از مربع‌ها و نوارهایی از مثلث‌های متساوی‌الاضلاع که به یکدیگر به صورت متوالی چسبیده هستند، تولید شده است که این نوارها زیرمجموعه‌ای از (۳۶) و (۴۴) هستند و این کاشی‌کاری نیز معتبر خواهد بود. برای کاشی‌کاری (۳.۰۱۲۲) با شروع از کاشی‌کاری شش‌ضلعی (۶۳) و در هر رأس v ، با تولید مثلث متساوی‌الاضلاع کوچک با سه رأس واقع بر سه یال گذرنده از رأس v در شش‌ضلعی و سپس مثلث‌ها با چنین ویژگی‌ای را در رئوس به طور هم‌زمان می‌گسترانیم تا جایی که طول یال آن‌ها دقیقاً برابر با طول یال کاشی‌کاری اصلی، بیرون از مثلث‌های متساوی‌الاضلاع و بین رئوس آن‌ها، به این کاشی‌کاری دست می‌یابیم. با استدلال مشابه می‌توان نشان داد که مابقی کاشی‌کاری‌ها نیز معتبر خواهند بود. □

ما تا کنون کاشی‌کاری‌های یکنواخت را آن دسته از کاشی‌کاری‌هایی تعریف کردیم که شامل چندضلعی‌های منظمی باشد که تنها شامل یک تایپ از رئوس باشد که هم‌ارز با این است که متشابه رأسی باشد. با این حال،

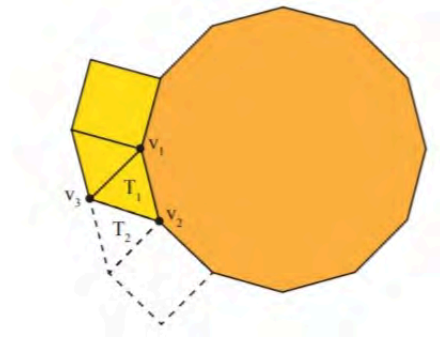
بررسی اینکه در واقع، هر یک از آنها شرایط قوی‌تری یعنی هم‌رأسی آن را نیز برآورده می‌کند، که به عبارتی رأس متعددی باشد نیز مطرح خواهد بود. پس می‌توانستیم یک کاشی‌کاری یکنواختی که توسط چندضلعی‌های منظم هم‌رأس، یال به یال باشند را تعریف کنیم و به همان مجموعه از کاشی‌کاری‌ها دست یابیم.

تعریف ۳-۴. یک کاشی‌کاری k -یکنواخت است اگر کاشی‌کاری یال به یالی باشد که از چندضلعی‌های منظمی که دارای k کلاس تعدی از رئوس باشند، تولید شده باشد.

توجه داشته باشید که یک کاشی‌کاری k -یکنواخت می‌تواند دارای تعداد k متمایز تایپ رأسی باشد ولی می‌تواند شامل کمتر از آن نیز باشد. کاشی‌کاری‌های k -یکنواخت را با قرار دادن k متمایز تایپ رأسی به ترتیب در یک پراوتر نشان می‌دهیم.



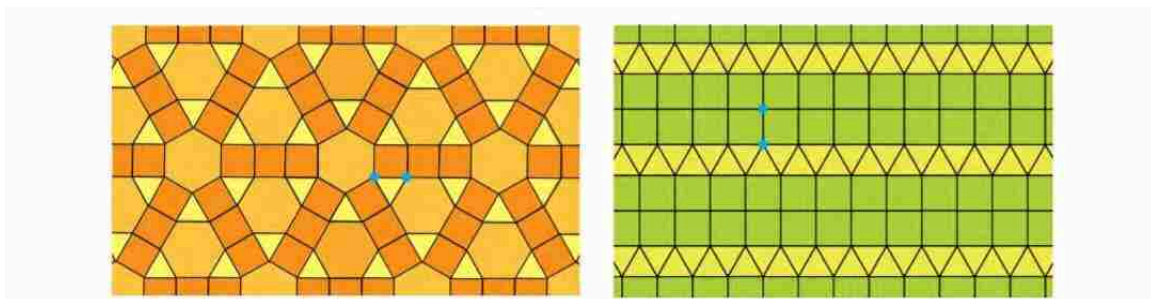
شکل ۳-۴: کاشی‌کاری‌های یکنواخت



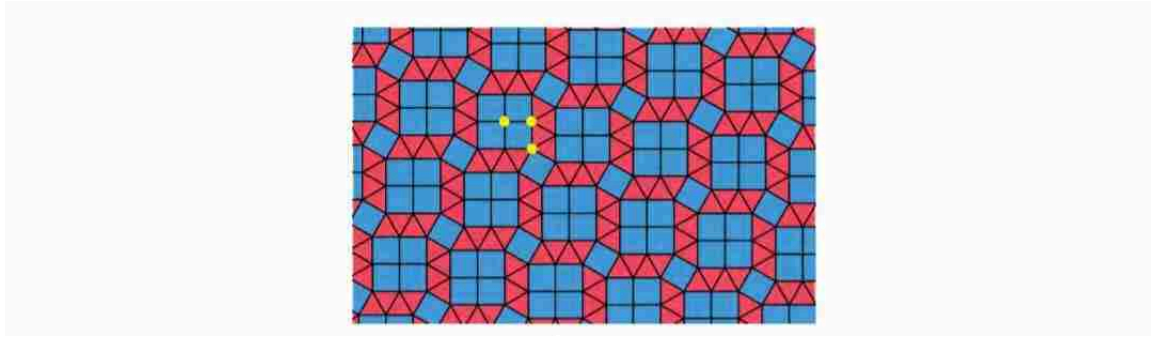
شکل ۳-۵: عدم وجود تایپ ۱۲. ۴۰. ۳۰. ۳۰

قضیه ۳-۵. دقیقاً بیست کاشی‌کاری ۲-یکنواخت یال به یال وجود دارد.

اثبات این قضیه مشابه اثبات وجود یازده کاشی‌کاری یکنواخت است ولی جزئیات آن کمی پیچیده‌تر خواهد بود. نمونه‌ای از کاشی‌کاری ۲-یکنواخت در شکل ۳-۶، مشاهده می‌شود. هر نقطه توپر متناظر با یک رأس از هر کلاس رأس متعددی خواهد بود و در شکل ۳-۷، یک کاشی‌کاری ۳-یکنواخت دیده می‌شود.

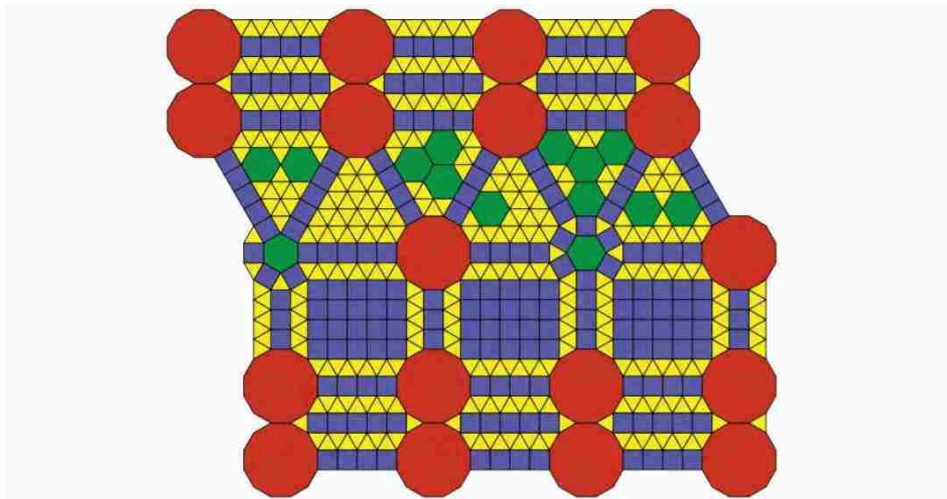


شکل ۳-۶: کاشی‌کاری ۲-یکنواخت



شکل ۷-۳: کاشی‌کاری ۳-یکنواخت

همچنین می‌توانیم کاشی‌کاری‌هایی که دارای تایپ‌های رأسی متفاوت هستند را در نظر بگیریم. در شکل ۸-۳، کاشی‌کاری‌ای با ۱۴ تایپ رأسی دیده می‌شود.



شکل ۸-۳: کاشی‌کاری‌ای با ۱۴ تایپ رأسی

۱.۱.۳ کاشی‌کاری‌های دارای رئوس منظم

حال در عوض الزام وجود کاشی‌های چندضلعی منظم، می‌توانیم هر چندضلعی را به عنوان کاشی‌ای در نظر بگیریم که هر رأس به نحوه متناسبی بر روی کاشی قرار داشته باشد.

تعریف ۶-۳. یک رأس در کاشی‌کاری چندضلعی τ منظم است اگر n یال در یک رأس مشترک باشند و زاویه

بین یال‌های مجاور $\frac{2\pi}{n}$ باشد. به یک کاشی‌کاری تک‌وجهی که تمام رئوس آن منظم باشند، کاشی‌کاری لاوس می‌گوییم.

به وضوح چنین کاشی‌کاری‌ای باید یال به یال باشد. اگر بخواهیم تمام کاشی‌کاری‌های لاوس ممکن را مشخص کنیم، کاشی اولیه T را در نظر می‌گیریم که یک r -ضلعی باشد. فرض کنید v_1, v_2, \dots, v_r گوشه T باشند و n_i ظرفیت v_i ‌ها در کاشی‌کاری باشد آنگاه زاویه T در v_i باید $\frac{2\pi}{n_i}$ باشد. طبق آن چه که گفته شد، یک r -ضلعی را می‌توان به $r - 2$ مثلث تقسیم کرد. پس جمع زوایا در گوشه‌های آن $\pi(r - 2)$ خواهد بود. در نتیجه:

$$\frac{2\pi}{n_1} + \frac{2\pi}{n_2} + \dots + \frac{2\pi}{n_r} = \pi(r - 2) \quad (2)$$

$$\left(-\frac{2}{n_1}\right) + \left(-\frac{2}{n_2}\right) + \dots + \left(-\frac{2}{n_r}\right) = -r + 2 \quad (3)$$

$$\left(1 - \frac{2}{n_1}\right) + \left(1 - \frac{2}{n_2}\right) + \dots + \left(1 - \frac{2}{n_r}\right) = 2 \quad (4)$$

$$\left(\frac{n_1 - 2}{n_1}\right) + \left(\frac{n_2 - 2}{n_2}\right) + \dots + \left(\frac{n_r - 2}{n_r}\right) = 2 \quad (5)$$

که به معادله آخر به دست آمده، معادله محدودیت ظرفیت گفته می‌شود. ممکن است تعجب‌آور باشد که معادله به دست آمده شبیه به معادله محدودیت رأسی است با این تفاوت که n_1, n_2, \dots, n_r معرف ظرفیت رئوس است. توجه کنید که مجموعه ۱۷ راه‌حل برای محدودیت رأسی دقیقاً برای معادله محدودیت ظرفیت نیز صدق می‌کند و به طور مشابه دارای مرتبه دوری ۲۱ نیز خواهد بود.

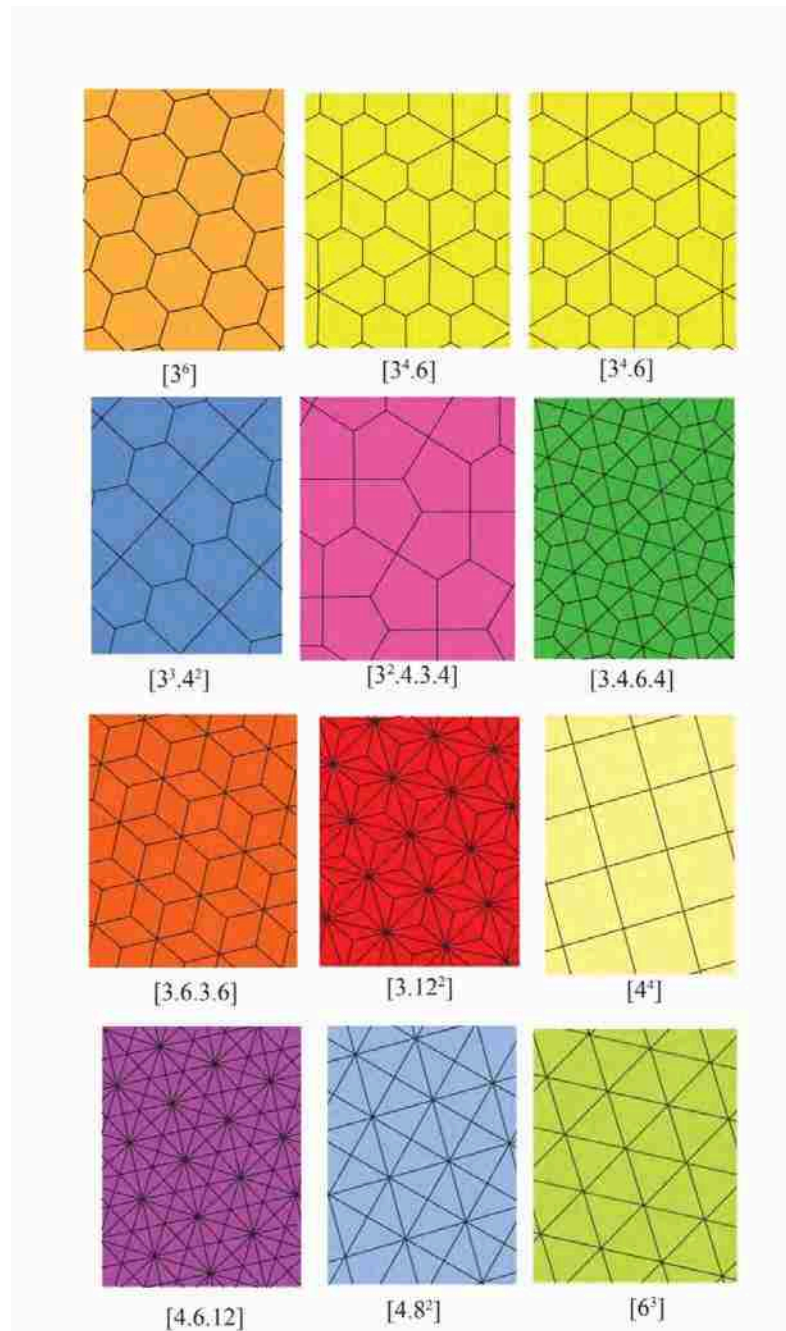
قضیه ۷-۳. یازده حالت

[۶۳], [۴۰۸], [۴۰۶۰۱۲], [۴۴], [۳۰۱۲۲], [۳۰۶۰۳۰۶], [۳۰۴۰۶۰۴], [۳۰۴۰۳۰۴], [۳۲۰۴۰۳۰۴], [۳۳۰۴۲], [۳۴۰۶], [۳۶]

برای کاشی‌کاری‌های لاوس وجود دارد.

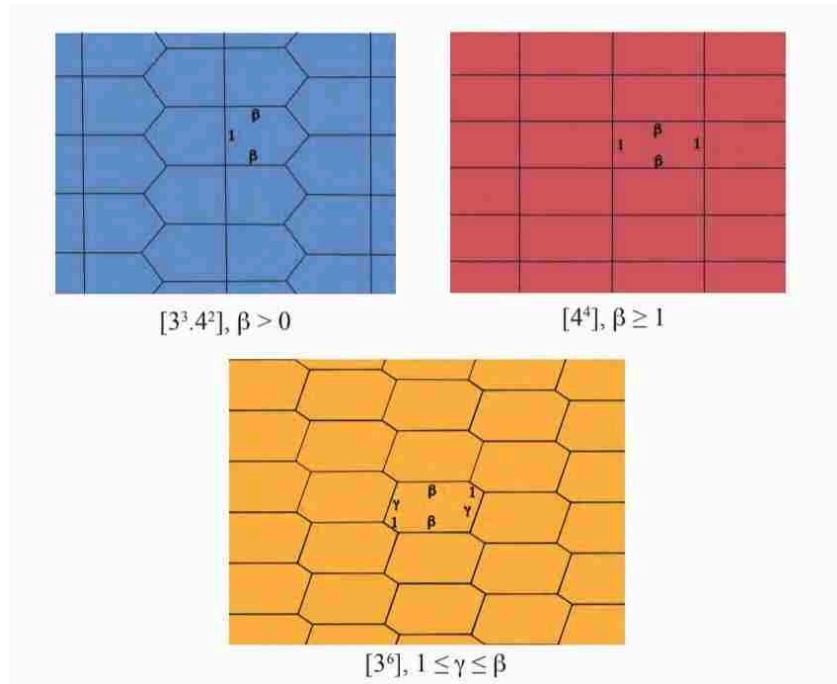
در شکل، این یازده حالت دیده می‌شود. مانند کاشی‌کاری‌های یکنواخت، کاشی‌کاری به صورت دو فرم پادهمسانه ایجاد می‌شود. اثبات این قضیه شبیه به اثبات فرم کاشی‌کاری‌های یکنواخت است. در ابتدا باید دنباله‌های ظرفیت برای چندضلعی‌هایی که در جدول، ستاره‌دار هستند، حذف شوند و نشان می‌دهیم حالات ممکن باقی‌مانده از کاشی‌کاری‌ها، مناسب هستند. برای مثال، اگر بخواهیم $3 \cdot 3 \cdot 6 \cdot 6$ را به عنوان یک حالت ممکن از کاشی‌کاری‌های لاوس حذف کنیم، باید نشان دهیم که چندضلعی با گوشه‌های دوری با زاویه $\frac{\pi}{3}$ ، $\frac{\pi}{3}$ ، شروع کرده و در رأس A ، کاشی T_2 را در مجاورت کاشی T_1 قرار می‌دهیم. توجه کنید اگر حتی کاشی اولیه‌ای

انتخاب کنیم که هر سه یال آن دارای طول یکسان باشند آنگاه تنها یک راه برای چسبیدن T_1 و T_2 در راستای یال عمودی به طوری که هر دو رأس منظم باشند، وجود دارد. سپس کاشی T_3 باید به نحوی قرار بگیرد که در نقاط A و B دارای رئوس منظم باشد اما C یک رأس منظم نیست و در نتیجه تناقض ایجاد می‌شود.



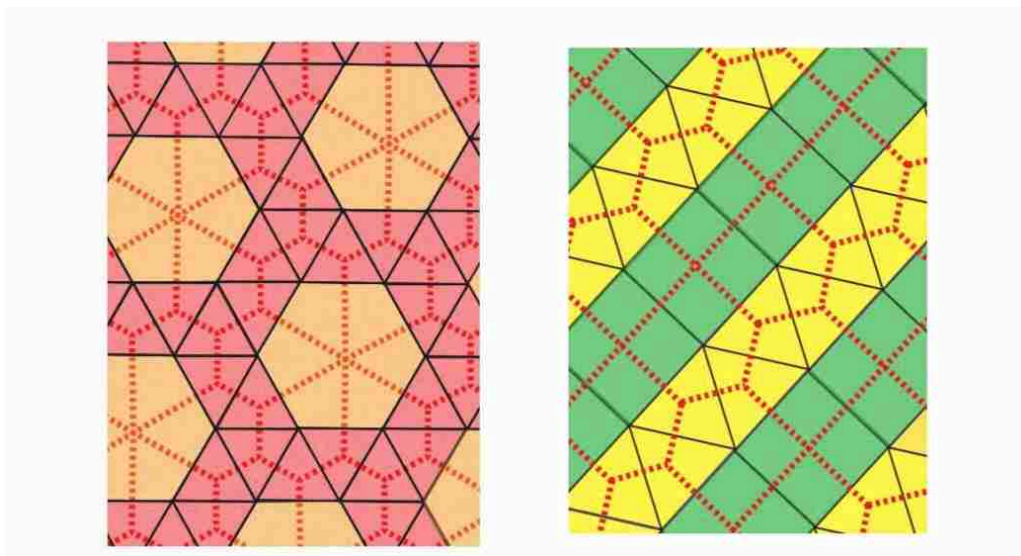
شکل ۹-۳: کاشی‌کاری‌های لاوس

برخلاف کاشی‌کاری‌های یکنواخت، سه کاشی‌کاری لاوس دارای یک یا دو درجه آزادی هستند. به خصوص در کاشی‌کاری‌های $[3^3 \cdot 4^2]$ و $[4^4]$ ، می‌توانیم کاشی‌کاری‌ها را در یک جهت بکشیم تا یک کاشی‌کاری ناشمارا تولید کنیم. در حالت $[3^6]$ ، با استفاده از دو پارامتر، می‌توانیم طول دو مجموعه متفاوت موازی از یال‌ها را تا جایی بکشیم که به کاشی‌های ناشمارای بی‌نهایت دست یابیم. توجه داشته باشید، در کاشی‌کاری لاوس $[3^3 \cdot 4^2]$ ، هر کاشی دارای بیست و یک همسایه است.

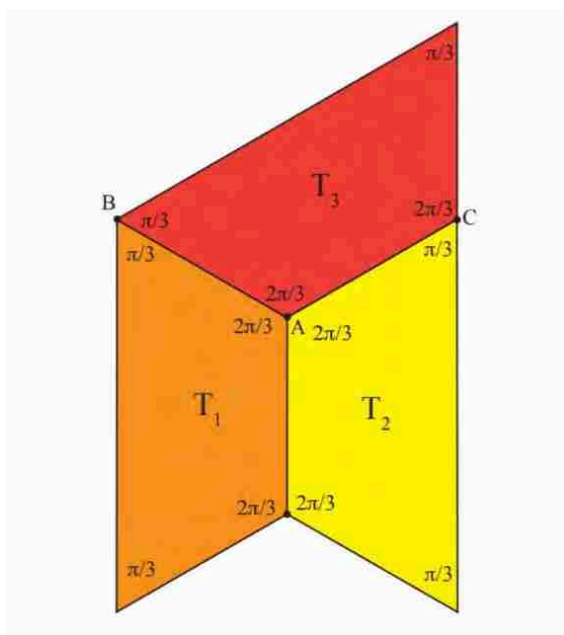


شکل ۱۰-۳: اگر طول کاشی‌های $[3^3 \cdot 4^2]$ ، $[4^4]$ و $[3^6]$ را بکشیم، می‌توانیم بی‌نهایت کاشی‌کاری تولید کنیم.

مانند کاشی‌کاری‌های یکنواخت که هم‌رأس بودند، کاشی‌کاری‌های لاوس هم‌وجهی خواهند بود. توازی بین کاشی‌کاری‌های لاوس و یکنواخت اتفاقی نیست و از دوگانگی بین این دو نوع کاشی‌کاری نتیجه می‌شود. در ابتدا، برای کاشی‌کاری‌های $[3^3 \cdot 4^2]$ ، $[4^4]$ و $[3^6]$ که دارای پارامترهایی متنوع هستند، مانند شکل، نماینده‌ای انتخاب می‌کنیم. سپس کاشی‌کاری $[n_1 \cdot n_2 \cdot \dots \cdot n_r]$ را بر روی کاشی‌کاری $(n_1 \cdot n_2 \cdot \dots \cdot n_r)$ قرار می‌دهیم. می‌توانیم این کار را به شیوه‌ای انجام دهیم که هر رأس از $[n_1 \cdot n_2 \cdot \dots \cdot n_r]$ بر روی مرکز یک کاشی خاص از $(n_1 \cdot n_2 \cdot \dots \cdot n_r)$ قرار بگیرد و هر یال از $[n_1 \cdot n_2 \cdot \dots \cdot n_r]$ یک یال خاص از $(n_1 \cdot n_2 \cdot \dots \cdot n_r)$ را با یک زاویه مناسب قطع کند. این دوگانگی هندسی اثبات می‌کند که همه کاشی‌کاری‌های لاوس، کاشی‌کاری‌های مناسب و در نتیجه کاشی‌کاری‌های یکنواخت نیز کاشی‌کاری‌های مناسب خواهند بود.



شکل ۱۱-۳: انطباق هر کاشی‌کاری لاوس بر روی کاشی‌کاری متناظر، نشان می‌دهد که این دو کاشی‌کاری دوگان هستند.



شکل ۱۲-۳: هیچ کاشی‌کاری‌ای از نوع لاوس متناظر با ۶.۶.۳.۳ وجود ندارد.

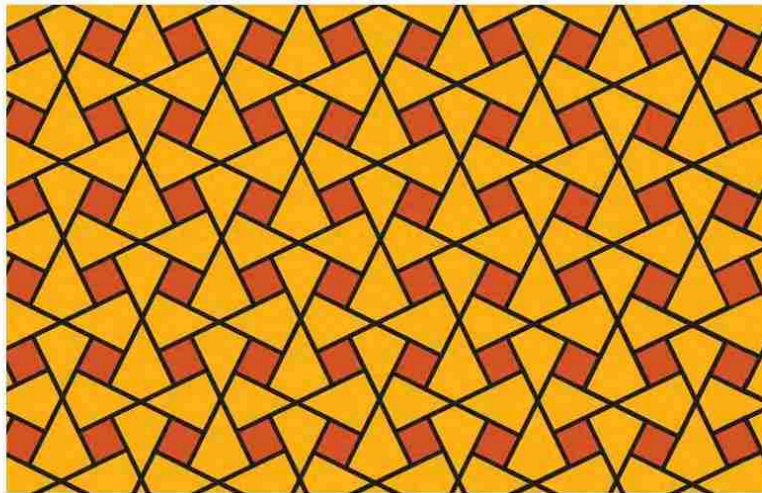
تعریف ۸-۳. فرض کنید τ یک کاشی‌کاری باشد. اگر دو کاشی متجانس توسط انتقال بر هم منطبق شوند،

گوییم دارای منظر^۱ مشابه هستند. نیازی نیست که انتقال، یک تقارنی از τ باشد. اگر کاشی‌ها توسط یک انتقال بر هم منطبق نشوند، دارای منظرهای متفاوت هستند.

طبق تعریف منظر، مجموعه کاشی‌های متجانس به کلاس‌های هم‌ارز تقسیم می‌شوند که هر کدام شامل کاشی‌هایی است که دارای منظر یکسان هستند. توجه کنید دو کاشی دارای منظر متفاوت هستند اگر بعد از انتقال، دوران یافته وابسته به یکدیگر، بازتاب یافته وابسته به یکدیگر و یا هر دوی این حالت‌ها باشند. برای مثال، کاشی‌های کاشی‌کاری لاوس [۳۶] دارای یک منظر هستند در صورتی که کاشی‌های کاشی‌کاری لاوس [۳۴.۶] دارای شش منظر است.

۲.۱.۳ کاشی‌کاری‌هایی که یال به یال نیستند

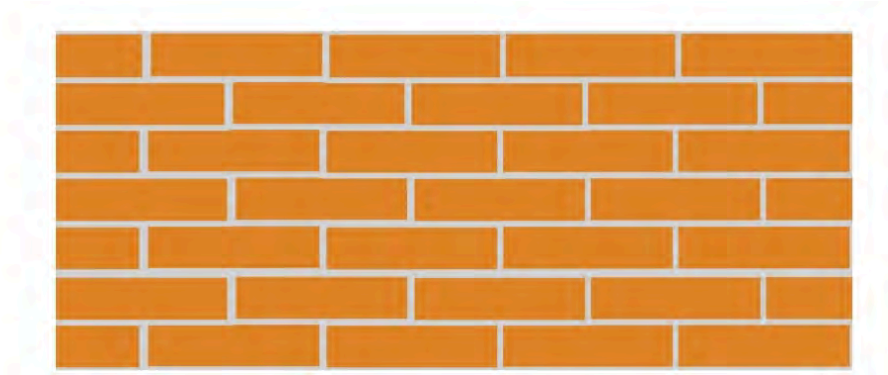
تا به اینجا، ما کاشی‌کاری‌های چندضلعی یال به یال را در نظر گرفتیم اما بسیاری از کاشی‌کاری‌های زیبای دیگر اگر تنها به کاشی‌های یال به یال محدود نشویم نیز تولید خواهند شد. برای مثال، در شکل ۱۳-۳، کاشی‌کاری‌ای می‌بینیم که یال به یال نیست.



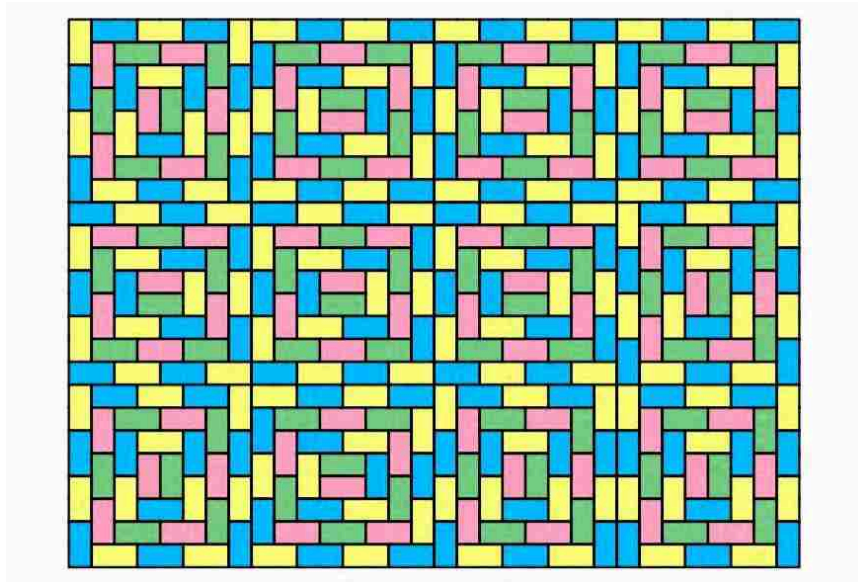
شکل ۱۳-۳: یک کاشی‌کاری دوجوهی که یال به یال نیست.

بعضی از کاربردی‌ترین کاشی‌کاری‌ها غیر یال به یال هستند. مثلاً در شکل ۱۴-۳، کاشی‌کاری‌های آجرکاری معمولاً یال به یال نیستند یا در شکل ۱۵-۳، کاشی‌کاری متشکل از دومینوهای ۱×۲ که با قرار دادن یک مربع و سپس ایجاد کپی‌های دیگر از آن، صفحه را پوشانده است نیز یال به یال نیستند.

^۱ aspect



شکل ۱۴-۳: آجرکاری معمولاً غیر یال به یال است.



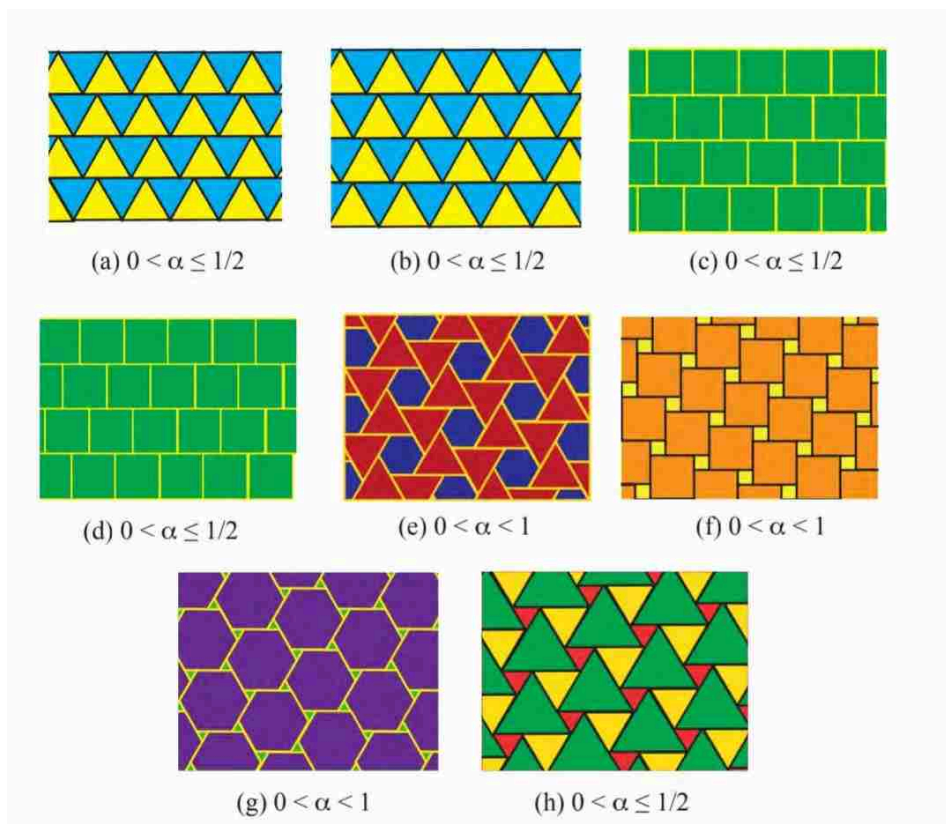
شکل ۱۵-۳: کاشی‌کاری تولید شده توسط دومینوها

آزادی کاشی از شرط یال به یال بودن، به طور چشمگیری حالات ممکن را افزایش می‌دهد. برای مثال، در حالت کاشی‌کاری‌های منظم متشکل از مثلث‌های متساوی‌الاضلاع یا مربع‌ها، می‌توانیم ردیف‌های وابسته به یکدیگر را بلغزانیم و تعداد ناشمارایی کاشی‌کاری تولید کنیم ولی در واقع تنها از این روش می‌توان استفاده کرد. هر کاشی‌کاری تک‌وجهی متشکل از مثلث‌های متساوی‌الاضلاع یا مربع‌ها از این روش تولید می‌شود. از طرف دیگر، تنها یک راه برای تولید کاشی‌کاری شش‌ضلعی‌ها وجود خواهد داشت و نمی‌توانیم ردیفی بر روی ردیفی دیگر بلغزانیم. زمانی که به یک کاشی اولیه محدود نباشیم، تعداد کاشی‌کاری‌های ممکن به قدری زیاد می‌شود

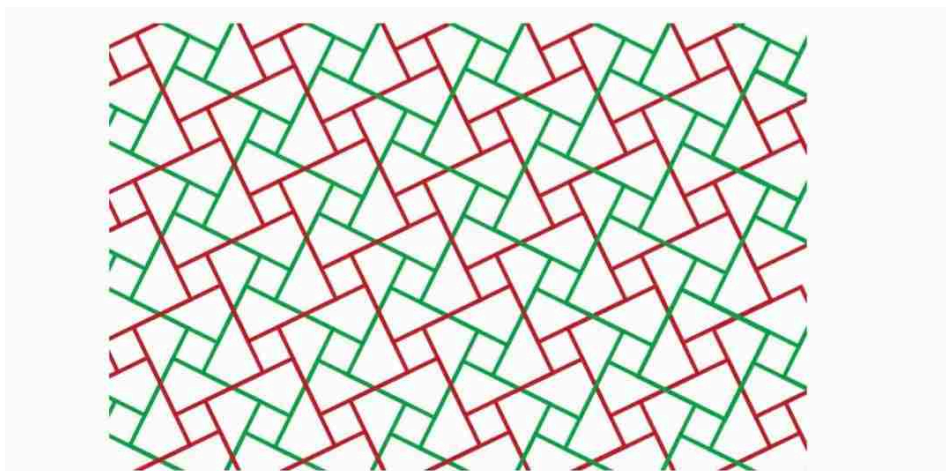
که در نهایت مجبور به اجرای بعضی از محدودیت‌ها می‌شویم. برای مثال، می‌توانیم به کاشی‌کاری‌های یکنواخت محدود شویم. منظور از یکنواخت، کاشی‌کاری‌های تولید شده توسط چندضلعی‌های منظم که هم‌رأس هستند، است.

قضیه ۳-۹. هشت خانواده از کاشی‌کاری‌های یکنواخت شامل چندضلعی‌های منظم که یال به یال نیستند وجود دارد که هر کدام وابسته به یک پارامتر حقیقی هستند.

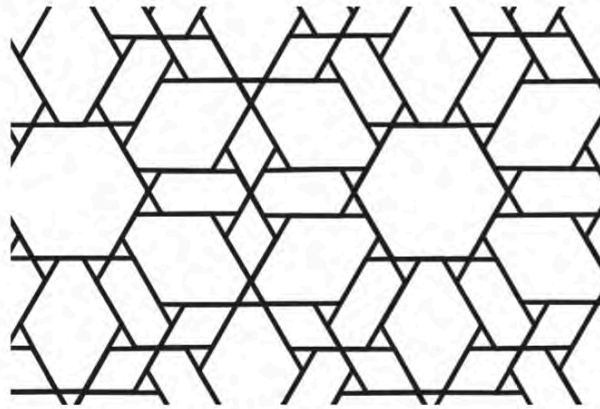
در شکل ۲۰-۳، نماینده‌ای از هر خانواده دیده می‌شود. چهار کاشی‌کاری اول منظم از لغزش ردیف‌های مثلث‌های متساوی‌الاضلاع و مربع‌ها به اندازه α به وجود آمده‌اند. سه کاشی‌کاری بعدی همگی دووجهی هستند و پارامتر α نسبت طول یال‌های کاشی اولیه کوچک‌تر به کاشی اولیه بزرگ‌تر است. در نهایت، در حالت آخر، سه مثلث با اندازه‌های متفاوت وجود دارند که α نسبت طول یال‌های کاشی اولیه کوچک‌تر به کاشی اولیه بزرگ‌تر است که طول یال مثلث متوسط را مشخص می‌کنند. توجه داشته باشید کاشی‌کاری شکل ۱۳-۳، انطباقی از کاشی‌کاری تولید شده توسط دو مربع شکل ۱۶-۳ (f)، قرار گرفته در زاویه‌ای در صفحه با یک بازتاب از کاشی‌کاری نسبت به خط بازتاب عمودی طبق شکل ۱۷-۳، است. همین شیوه برای دستیابی به شبکه‌سازی پیچیده کاشی‌کاری‌های دیگر مؤثر خواهد بود. برای مثال، در شکل، کاشی‌کاری‌ای می‌بینیم که با روش مشابهی که به کاشی‌کاری شکل اعمال شده است، دست می‌یابیم. هم‌چنین می‌توانیم کاشی‌کاری‌ها را به یک کلاس تعدی برای هر کاشی اولیه محدود کنیم.



شکل ۱۶-۳: خانواده‌های کاشی‌کاری‌های یکنواخت که غیر یال به یال هستند.



شکل ۱۷-۳: انطباق دو کپی از ششمین کاشی‌کاری یکنواخت، نقش اسلامی شکل را تولید می‌کند.

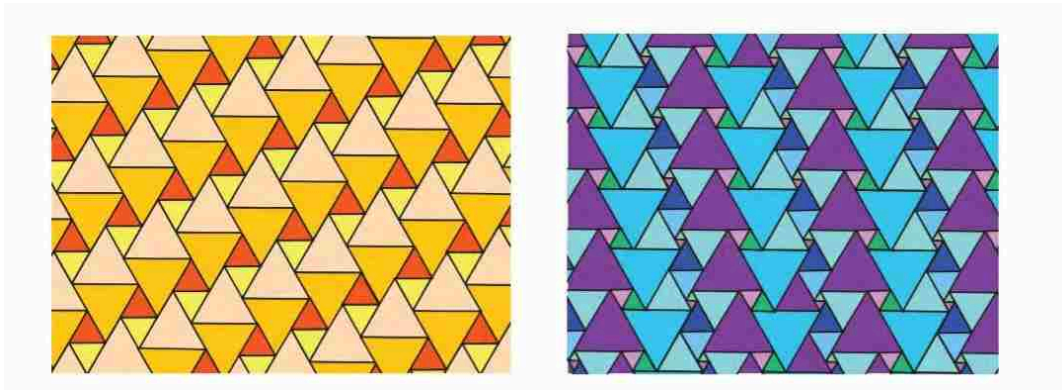


شکل ۱۸-۳: انطباق دو کپی از هفتمین کاشی‌کاری یکنواخت.

تعریف ۱۰-۳. یک چندضلعی متوازن^۲ است اگر همه کاشی‌ها متجانس در یک کلاس تعدی قرار داشته باشند.

در نتیجه، در حالتی که کاشی‌کاری تک‌وجهی است، توازن هم‌ارز با هم‌وجهی خواهد بود ولی اگر چند کاشی اولیه در مجموعه اولیه داشته باشیم، هر کدام متناظر با یک کلاس متعدی خاص از کاشی‌ها خواهد بود. توازن، کاشی‌کاری‌ها را به نحو مؤثری محدود می‌کند. یک کاشی‌کاری متوازن متناوب از چندضلعی‌های محدب می‌تواند شامل ۶۶-ضلعی باشد ولی شامل n -ضلعی‌هایی که $n > 66$ نیست. هنوز هم طیف وسیعی از کاشی‌کاری‌های متوازن حتی با محدودیت چندضلعی‌های منظم وجود خواهد داشت. پس در ادامه به همه کاشی‌های اولیه‌ای که به ازای هر n یکسان، n -ضلعی هستند، محدود می‌شویم. برای مثال، می‌توانیم تنها از مثلث‌های متساوی‌الاضلاع یا مربع‌ها در مجموعه اولیه استفاده کنیم. در شکل ۱۹-۳، کاشی‌کاری‌های متوازن متشکل از دو یا پنج اندازه متفاوت از مثلث‌های متساوی‌الاضلاع را مشاهده می‌کنیم ولی چون حالت‌های ممکن زیادی را دارا می‌باشد مجبور به اجرای بعضی از محدودیت‌ها هستیم.

^۲equitransitive

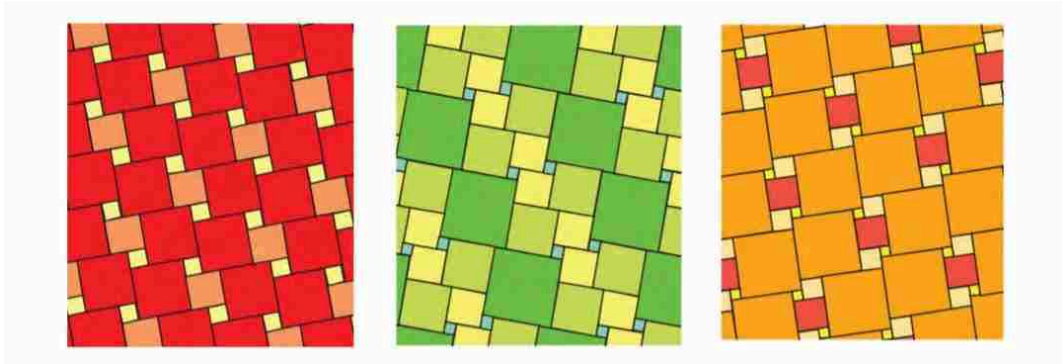


شکل ۱۹-۳: نمونه‌ای از کاشی‌کاری‌های غیر یال به یال

تعریف ۱۱-۳. به یک کاشی‌کاری متشکل از چندضلعی‌های منظم که یال به یال نیستند، تک‌سویه^۳ گوئیم اگر هر یال از کاشی‌کاری حداکثر یک ضلع از چندضلعی باشد. این به این معنی است که این یال باید یک زیرمجموعه مناسب از ضلع حداقل یکی از دو کاشی باشد که در این یال مشترک هستند.

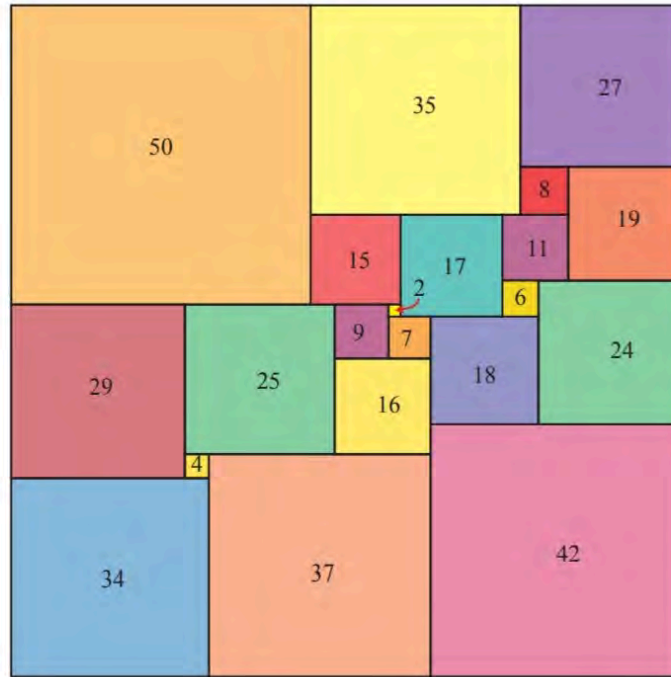
توجه داشته باشید که هیچکدام از کاشی‌کاری‌های متشکل از مثلث‌ها در شکل ۱۹-۳، تک‌سویه نیستند چون کوچک‌ترین مثلث با تمام یال‌های کپی‌های خود اشتراک دارد ولی در کاشی‌کاری متشکل از مثلث‌های شکل ، یک کاشی‌کاری متوازن تک‌سویه است. در واقع، در سال ۲۰۱۷، شکل ۱۶-۳، به عنوان نماینده‌ی همه حالات ممکن کاشی‌کاری‌های متوازن تک‌سویه متشکل از مثلث‌های متساوی‌الاضلاع و با توجه به دو مثلث کوچک‌تر که می‌توانند به همان اندازه باشند، اثبات شد. پس می‌توانیم دو یا سه اندازه از مثلث‌ها داشته باشیم. در شکل ۲۰-۳، سه مثال از کاشی‌کاری‌های متوازن تک‌سویه را مشاهده می‌کنید. در کاشی‌کاری اول، که دارای سه اندازه متفاوت از مربع است، همیشه به حالتی است که طول هر ضلع از بزرگ‌ترین مربع، مجموع طول اضلاع دو مربع کوچک‌تر است. در واقع می‌توانیم اثبات کنیم که هر زمانی که مجموعه اولیه شامل مربع‌هایی با سه اندازه متفاوت باشد، همیشه به این حالت خواهد بود. دوریس شاتشاید در سال ۲۰۰۰ اثبات کرد که دقیقاً هشت خانواده از کاشی‌کاری‌های متوازن تک‌سویه با مربع‌هایی در سه اندازه متفاوت وجود دارد.

^۳unilateral



شکل ۲۰-۳: کاشی‌کاری‌های متوازن تک‌سویه تولید شده توسط مربع‌هایی در سه و چهار اندازه متفاوت.

یک روش برای یافتن مجموعه‌های مناسب از طول اضلاع، یافتن تجزیه‌های یک مربع بزرگ یا یک مستطیل به کاشی‌های مربع با این اندازه است. بعد از آن می‌توانیم تمام صفحه را با استفاده از کپی‌های این کاشی بزرگ کاشی کنیم و کاشی‌کاری مربع با این اندازه‌ها را تولید کنیم. به تجزیه یک مربع به مربع‌های کوچک‌تر مسئله مربع مربع شده، می‌گویند. در شکل ۲۱-۳، مربعی متشکل از ۲۱ مربع کوچک‌تر مشاهده می‌شود. این یک مثالی از مربع مربع شده ایده‌آل که در آن همه مربع‌های کوچک‌تر دارای طول اضلاع متفاوت هستند که شماره‌های روی مربع‌ها در هر کاشی هستند. این مثال، حداقل تعداد ممکن از مربع‌های موجود در مربع مربع شده ایده‌آل است.



شکل ۲۱-۳: تقسیم کردن مربع به مربع‌های کوچک‌تر.

۲.۳ کاشی‌کاری متشکل از وصله‌ها

یک روش برای ساخت یک کاشی‌کاری، شروع از یک گردایه کاشی‌های مناسب یکدیگر برای کاشی‌کاری یک ناحیه متناهی و بعد اضافه کردن کاشی‌های دیگر به آن ناحیه با هدف پوشاندن کل آن است ولی برای درک بهتر این موضوع، نیاز داریم که به تعریف گسترده‌تری از وصله بپردازیم.

تعریف ۱۲-۳. فرض کنید ρ یک مجموعه اولیه باشد. وصله A تولید شده توسط ρ یک گردایه متناهی از کاشی‌های T_1, T_2, \dots, T_n در صفحه است به طوری که:

۱. هر کاشی متجانس با یک کاشی موجود در مجموعه اولیه است.

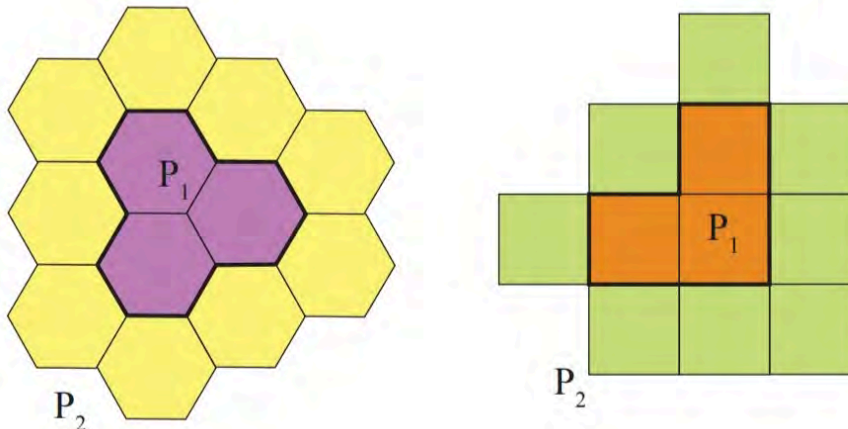
۲. برای هر $i \neq j$ $int(T_i) \cap int(T_j) = \emptyset$

۳. $\bigcup_{i=1}^n T_i$ یک دیسک توپولوژیک است.

توجه داشته باشید که در تعریف قبلی، ما فرض کردیم که وصله قسمتی از کاشی‌کاری در صفحه است ولی الان به این تعریف احتیاج نداریم. اگر وصله دارای شرایط تعریف قبلی باشد، تعریف بالا را نیز نتیجه خواهد داد.

تعریف ۱۳-۳. وصله A' وصله A را گسترش می‌دهد اگر A' از اضافه شدن کاشی‌ها به A تولید شود. وصله A به یک کاشی‌کاری در صفحه امتداد پیدا می‌کند اگر A در یک کاشی‌کاری از صفحه ظاهر شود. وصله A' وصله A را غرق می‌کند اگر A, A' را به گونه‌ای گسترش دهد که مرز A' با مرز A در تماس نباشد.

برای مثال، در شکل چپ، وصله P_2 وصله P_1 را در خود غرق می‌کند و در شکل راست، P_2 گسترش پیدا می‌کند ولی P_1 را غرق نمی‌کند.



شکل ۲۲-۳: در شکل سمت چپ، وصله‌ای دیده می‌شود که وصله دیگر را غرق می‌کند و در شکل سمت راست، وصله‌هایی که یکدیگر را غرق نمی‌کنند مشاهده می‌شود.

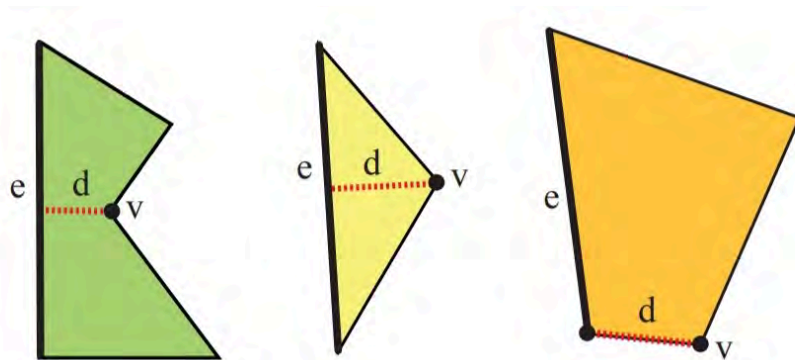
لم ۱۴-۳. فرض کنید ρ یک مجموعه اولیه از کاشی‌های اولیه متشکل از چندضلعی‌ها باشد. فرض کنید A یک وصله تولید شده توسط ρ باشد و به ازای هر $i = 1, 2, \dots$ وصله A_i تولید شده توسط ρ که A_{i-1} را غرق می‌کند، وجود داشته باشد. در این صورت A_i $\bigcup_{i=0}^{\infty} A_i$ یک کاشی‌کاری از صفحه را نتیجه خواهد داد.

اثبات. یک نقطه از ناحیه داخلی وصله اولیه A انتخاب می‌کنیم که به عنوان مبدأ مختصات در صفحه عمل کند. یک دیسک D با شعاع r به مرکز مبدأ مختصات که در A نیز قرار بگیرد، وجود دارد. می‌خواهیم نشان بدهیم که با غرق کردن وصله A_i توسط وصله A_{i+1} ، دیسک D_{i+1} به شعاع r_{i+1} و به مرکز مبدأ مختصات که در A_{i+1} شامل می‌شود به طوری که r_{i+1} حداقل یک مقدار ثابت بزرگتر از r_i است، وجود خواهد داشت. با

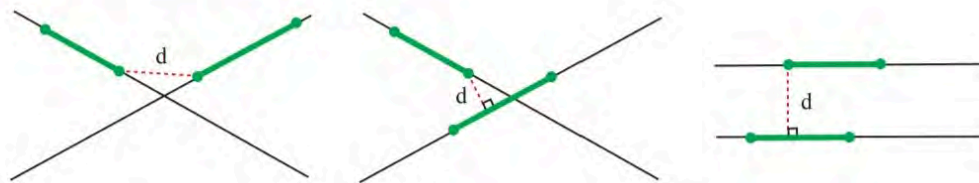
تکرار این فرآیند، دیسک‌ها به طور دلخواه بزرگ می‌شوند. سپس برای هر نقطه در صفحه، می‌توانیم یک مقدار برای i به طوری که این نقطه در D_i قرار بگیرد، انتخاب کنیم و در وصله A_i نیز شامل باشد. در نتیجه، می‌توانیم کاشی‌ای که شامل این نقطه است را مشخص کنیم و کاشی‌کاری‌ای از تمام صفحه داشته باشیم.

از آنجایی که تعداد متناهی کاشی اولیه داریم، برای هر کاشی با چنین ویژگی‌ای می‌توانیم کوتاه‌ترین فاصله بین هر ضلع و گوشه‌ای که بر روی آن ضلع واقع نیست را طبق شکل، بیابیم. چون هر کاشی اولیه به صورت توپولوژیک با یک دیسک هم‌ارز است، این باید یک مقدار ثابت باشد.

توجه داشته باشید برای هر دو پاره‌خط در صفحه که همدیگر را قطع نمی‌کنند، کوتاه‌ترین فاصله d بین آن‌ها زمانی رخ می‌دهد که طبق شکل ۲۳-۳، ما از یک نقطه انتهایی آن‌ها اندازه‌گیری می‌کنیم. پس فاصله‌ای که اندازه می‌گیریم، کوتاه‌ترین فاصله بین هر دو ضلع غیر مجاور نیز خواهد بود. فرض کنید δ مینیمم مقدار طول بر روی تمامی کاشی‌های اولیه باشد.

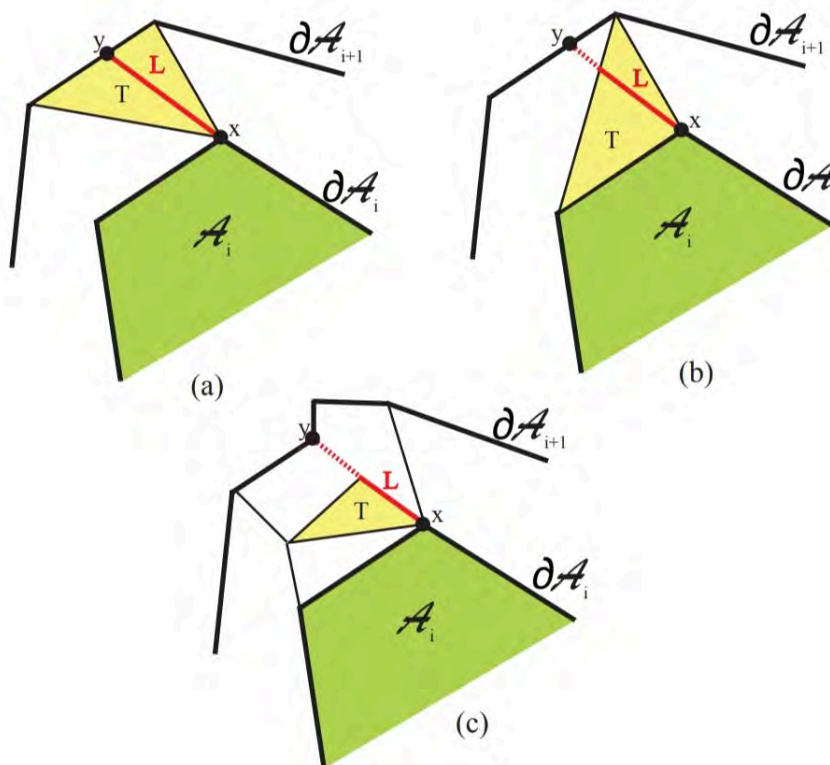


شکل ۲۳-۳: یافتن مینیمم مقدار طول بین یک ضلع و یک گوشه غیرمجاور

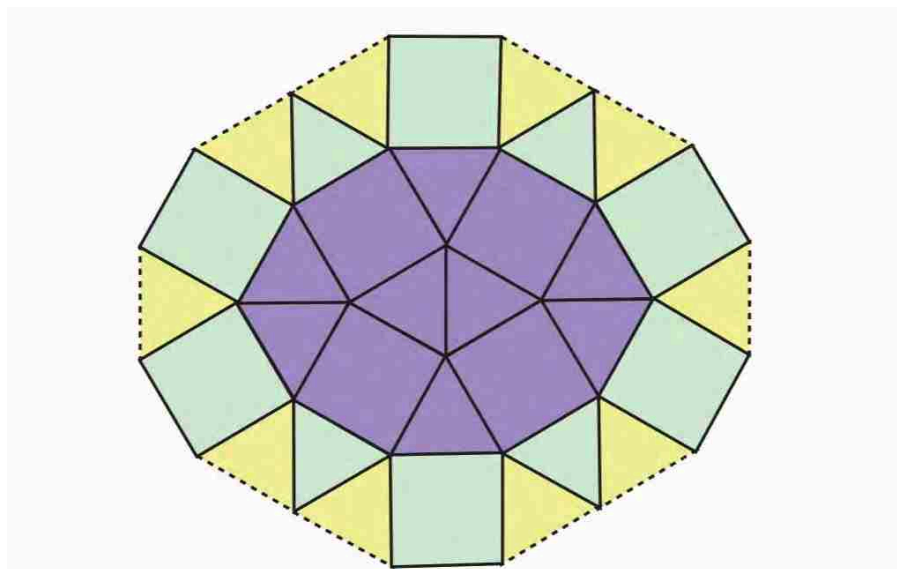


اگر وصله A_i با دیسک D_i به مرکز مبدأ مختصات داشته باشیم، وصله متعاقب یعنی A_{i+1} ، با اضافه شدن کاشی‌ها به وصله اصلی به دست می‌آید. از آنجایی که مرزهای دو وصله مجزا هستند، باید هرکدام از گردایه‌ای از یال‌های مجزا از هم تشکیل شده باشد. ادعا می‌کنیم کوتاه‌ترین فاصله بین نقاط x و y در دو مرز حداقل δ

است. طبق بحثی که در بالا داشتیم، می‌توانیم فرض کنیم x یا y در گوشه هر کاشی قرار دارند. برای راحتی، ما x را انتخاب می‌کنیم. طبق شکل، فرض کنید L پاره‌خط بین x و y باشد و T یک کاشی در $A_{i+1} \setminus A_i$ باشد که شامل x است و پاره‌خط L را در قسمت ابتدایی‌ای که شامل x است قطع کند. اگر T به طور یکتا مشخص شود، طبق شکل ۱۱-۳، و L مرز T را در یک ضلع غیرمجاور قطع می‌کند. این به این معنی است که طول $L \cap T$ حداقل δ خواهد بود و در نتیجه طول L نیز حداقل δ است. اما اگر طبق شکل زیر، قسمت ابتدایی L بر راستای یکی از ضلع‌های T قرار بگیرد آنگاه این قسمت ابتدایی در دو کاشی قرار گرفته و یکی از آن‌ها در گوشه‌ای به غیر از x کاشی را قطع می‌کند. پس قسمت ابتدایی L به طول δ و فاصله بین x و y حداقل δ خواهد بود. در نتیجه، اگر A_i شامل دیسک $D(o, r_0)$ باشد، A_{i+1} شامل دیسک $D(o, r_0 + i\delta)$ خواهد بود. پس می‌توانیم کاشی‌کاری را به کل صفحه گسترش بدهیم. \square

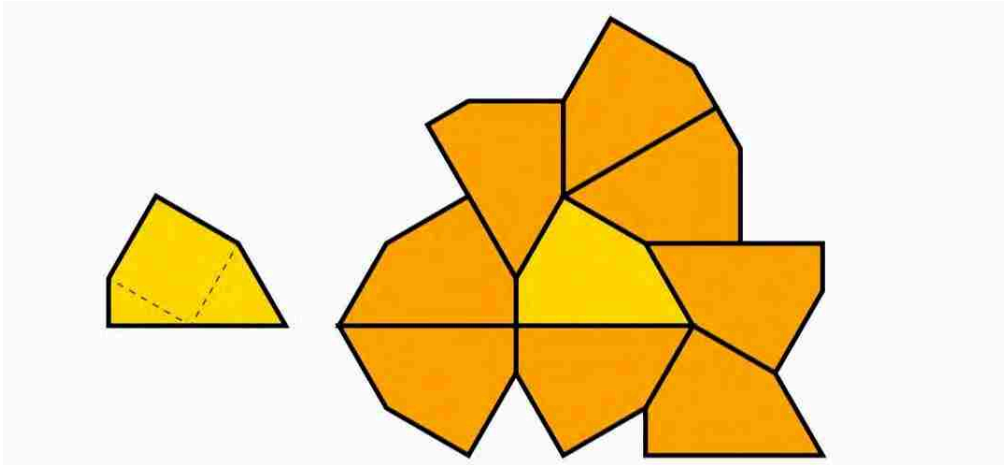


برای مثال، می‌توانیم از این لم برای ساخت کاشی‌کاری‌هایی با رأس‌هایی از گونه سه که شامل تایپ‌های $3 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 4$ و $3 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 4$ است، استفاده کنیم. این فرآیند را با وصله نشان داده شده در رنگ بنفش در شکل ۲۴-۳، آغاز می‌کنیم.



شکل ۲۴-۳: اضافه کردن کاشی‌ها به یک گونه

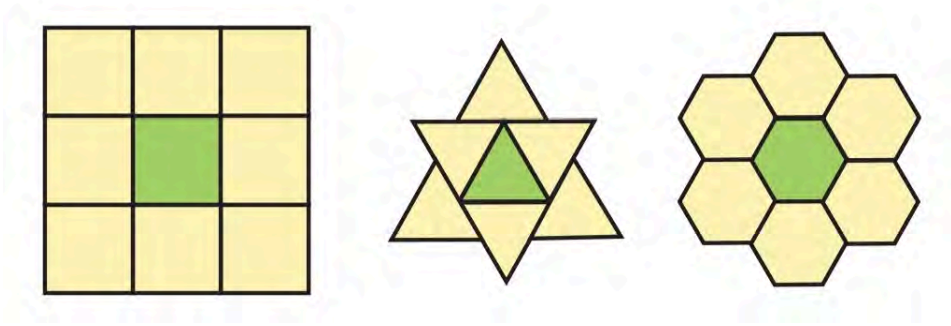
هر دفعه که یک لایه جدید به وصله اضافه می‌کنیم، یک مربع را به هر یال مثلث در مرز و یک مثلث را به هر یال مربع روی مرز می‌چسبانیم که هر دو با رنگ سبز نشان داده شده‌اند. سپس هر شکاف باقی‌مانده را با مثلث‌های زرد پر می‌کنیم که باعث ایجاد یک وصله جدید می‌شود و همین روند را برای ایجاد یک لایه جدید تکرار می‌کنیم. توجه داشته باشید که به هر رأس واقع بر مرز وصله یا سه مثلث یا یک مثلث و یک مربع متصل است. در مرحله بعدی، اگر یک رأس روی مرز به سه مثلث وصل باشد، دو مربع به آن می‌چسبانیم که باعث ایجاد تایپ ۴-۳-۳ می‌شود. اگر یک رأس روی مرز به یک مثلث و یک مربع وصل باشد، یک مثلث و یک مربع می‌چسبانیم و سپس با یک مثلث دیگر شکاف موجود در رأس را پر می‌کنیم و تایپ ۴-۳-۳ را ایجاد می‌کنیم. در نتیجه، دنباله‌ای از وصله‌ها خواهیم داشت که یکدیگر را غرق می‌کنند و طبق لم، کاشی‌کاری‌ای از صفحه را به دست می‌آوریم. شرایط مشابه برای هر گونه سه وصله محدب که هموار باشد صدق می‌کند؛ یعنی همه گوشه‌های واقع بر مرز با بیشتر از یک کاشی اشتراک داشته باشد و اگر این شرایط برقرار نباشد، وصله‌هایی خواهیم یافت که به گونه‌های سه از کاشی‌کاری‌ها گسترش پیدا نخواهند کرد. حتی اگر یک کاشی نتواند برای تولید کاشی‌کاری تک‌وجهی استفاده شود، ممکن است در حالتی قرار بگیرد که بتوانیم یک وصله بزرگ وابسته به یکدیگر با استفاده از کپی‌های آن کاشی، تولید کنیم. برای مثال، در شکل ۲۵-۳، کاشی‌ای مشاهده می‌شود که می‌تواند توسط کپی‌های خود کاملاً احاطه شود اما نمی‌توان این وصله اولیه را به یک کاشی‌کاری از صفحه گسترش داد.



شکل ۲۵-۳: کاشی‌ای که به طور کامل توسط کپی‌های خود پوشیده شده است.

تعریف ۱۵-۳. اگر مجموعه اولیه ρ و وصله A تولید شده توسط ρ را داشته باشیم، یک هاله برای A گردایه‌ای از کاشی‌های اضافی $\{T_1, \dots, T_n\}$ است به طوری که هر کاشی T_i ، A را قطع کند و $A' = A \cup (T_1 \cup T_2 \cup \dots)$ وصله‌ای باشد که A را غرق می‌کند. اگر یک تک کاشی داشته باشیم، به آن هاله صفرم گوییم. به یک هاله برای وصله‌ای که شامل آن تک کاشی باشد، در صورت وجود، هاله اول آن کاشی گوییم. اگر یک وصله A_n از کاشی ابتدایی و n هاله حول آن، تشکیل داده باشیم، به هاله آن وصله، در صورت وجود، n امین هاله آن کاشی می‌گوییم.

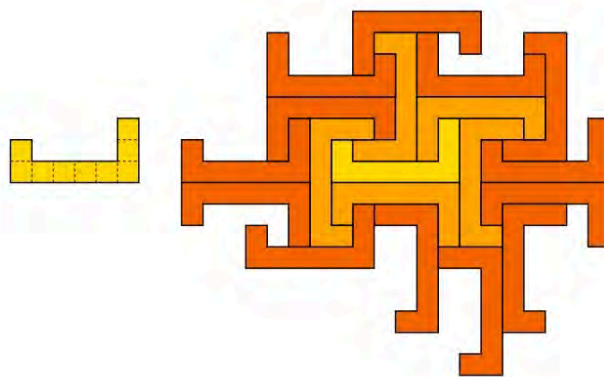
به عبارت دیگر، اجتماع هاله و وصله‌ای که احاطه می‌کند، وصله جدیدی است که وصله قبلی را غرق می‌کند. علاوه بر این، هر کاشی جدید باید با وصله قبلی در تماس باشد. در شکل ۲۶-۳، مثال‌هایی از هاله اول حول یک کاشی را مشاهده می‌کنیم. اگر بعد از شروع با یک تک کاشی، بتوانیم یکی پس از دیگری هاله بسازیم، طبق لم، به کاشی‌کاری‌ای از صفحه دست می‌یابیم ولی ممکن است حالتی وجود داشته باشد که برای هر کاشی، فرآیند ایجاد هاله جدید به طور نامحدود ادامه نداشته باشد.



شکل ۲۶-۳: هاله‌های اطراف کاشی‌های متفاوت.

تعریف ۱۶-۳. عدد هیش $H(T)$ از یک کاشی T ، حداکثر تعداد دفعاتی است که می‌توانیم به طور مداوم هاله اضافه کنیم. این کار را با تک‌کپی از کاشی آغاز می‌کنیم.

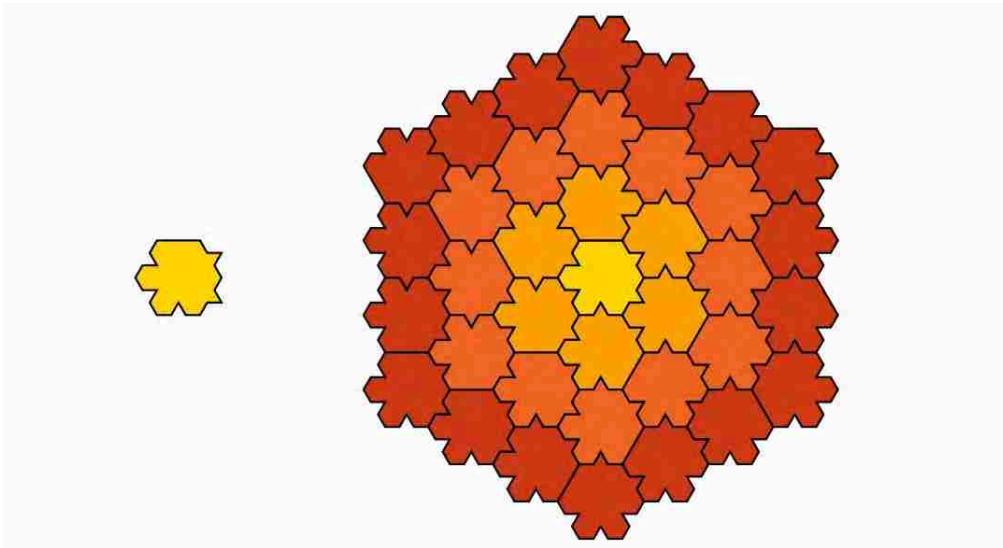
پس برای کاشی شکل ۲۵-۳، عدد هیش آن برابر یک خواهد بود. از آن جایی که شش ضلعی منظم تمام صفحه را کاشی می‌کند، عدد هیش آن بی‌نهایت خواهد بود. از طرف دیگر، چون پنج ضلعی منظم نمی‌تواند توسط کپی‌های خود احاطه شود، عدد هیش آن صفر است. سوالی که مطرح می‌شود این است که آیا هر عدد صحیح به عنوان یک عدد هیش برای یک شکل از کاشی می‌تواند به شمار بیاید یا خیر. در شکل ۲۸-۳، کاشی‌ای با عدد هیش ۲ مشاهده می‌کنیم و در شکل ۲۷-۳، کاشی تشکیل شده از جایگذاری سه فرورفتگی بر روی سه یال متوالی یک شش ضلعی و جایگذاری دو بیرون‌زدگی بر روی دو یال مجاور باقی‌مانده مشاهده می‌شود. به راحتی دیده می‌شود که می‌توان وصله‌ای ساخت که شامل سه هاله باشد.



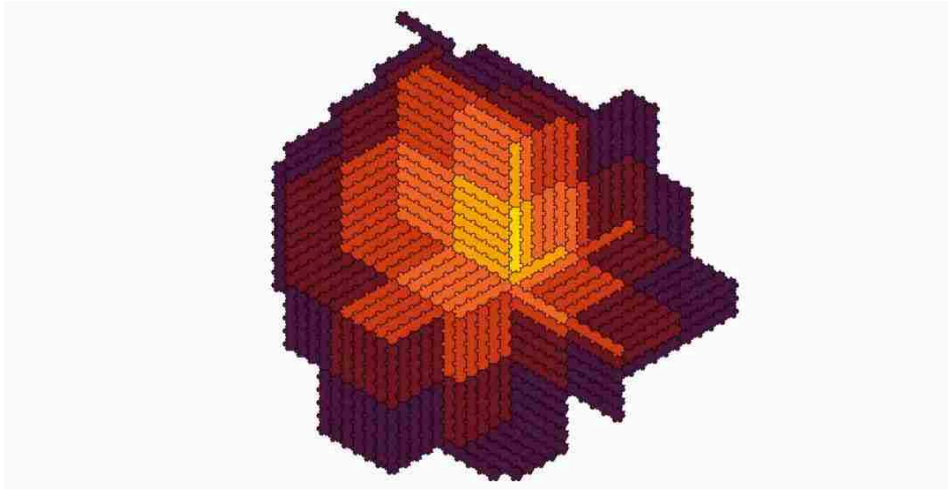
شکل ۲۷-۳: کاشی‌ای با عدد هیش ۲.

در این حالت، می‌خواهیم اثبات کنیم که این وصله نمی‌تواند به ۴ هاله گسترش پیدا کند. اگر تلاش کنیم

این کار را انجام دهیم، تعداد کاشی‌های اضافی ۲۴ عدد و تعداد کل کاشی‌ها در وصله ۶۱ خواهد بود. در نتیجه تعداد کل همه بیرون‌زدگی‌ها روی تمام آن ۶۱ شش‌ضلعی ۱۲۲ عدد و کل فرورفتگی‌ها ۱۸۳ عدد خواهد بود. از آن جایی که هر بیرون‌زدگی داخلی باید یک فرورفتگی داخلی را پر کند، باید حداقل ۶۱ فرورفتگی روی مرز وصله وجود داشته باشد ولی حداکثر یک فرورفتگی به ازای هر ضلع شش‌ضلعی و دقیقاً ۵۱ ضلع شش‌ضلعی روی مرز وجود دارد که منشأ گرفته از دو ضلع از ۱۸ عدد کاشی روی مرز و سه ضلع از ۶ کاشی باقی‌مانده روی مرز است. پس حداقل ۱۰ فرورفتگی پر نشده در داخل وصله است که وصله را نامناسب می‌سازد.

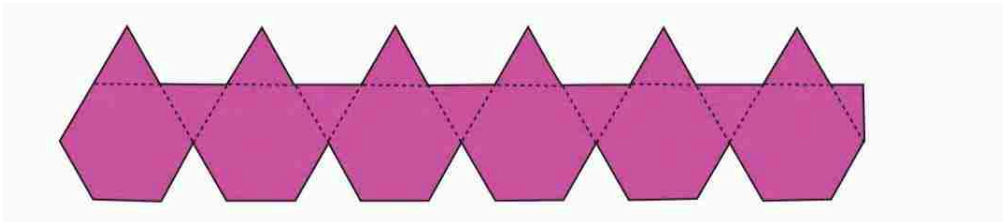


شکل ۲۸-۳: کاشی‌ای با عدد هیش ۳.



شکل ۲۹-۳: کاشی‌ای با عدد هیش ۵.

در شکل ۲۹-۳، مثالی از کاشی‌ای می‌بینیم که توسط کیسی مان در سال ۲۰۰۱ کشف شد که دارای عدد هیش ۵ است و بعد از آن بوجان بازیک کاشی شکل ۳۰-۳، کاشی‌ای با عدد هیش ۶ را کشف کرد که بر پایه کاشی‌کاری یکنواخت ۳۰۶۰۳۰۶ است که برداشتن اجتماع کاشی‌ها در یک وصله از مثلث‌ها و شش‌ضلعی‌ها با نصف یک مثلث ایجاد شده است.



شکل ۳۰-۳: کاشی‌ای با عدد هیش ۶.

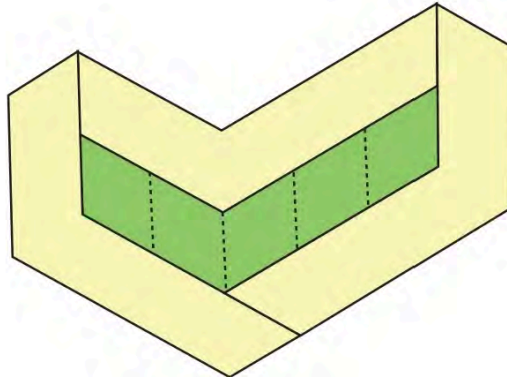
اگر کاشی اولیه اضافی را اضافه کنیم، آنگاه بازیک در سال ۲۰۱۵ اثبات کرد که برای هر $n \geq 1$ و $k \geq 3$ ، یک مجموعه اولیه از k کاشی‌های اولیه وجود دارد که یک تک کاشی دارای دقیقاً n هاله است.

تعریف ۱۷-۳. اگر کاشی T با یک هاله اول داشته باشیم، عدد فراگیر، حداقل تعداد کاشی‌هایی است که برای ساخت هاله اول نیاز خواهیم داشت.

ساختن یک کاشی با عدد فراگیر ۴ آسان است و در شکل ۳، کاشی با عدد فراگیر ۳ مشاهده می‌شود. حدس

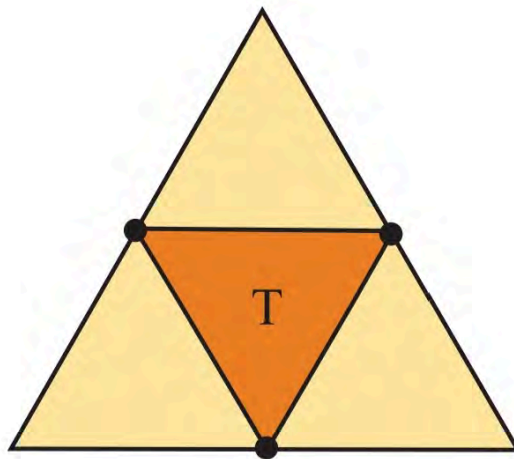
زده می‌شد که هیچ کاشی‌ای یا عدد فراگیر ۲ وجود ندارد اما کیسی مان در سال ۲۰۰۲، مثالی از این کاشی ساخت که بر پایه ساختار ولدربگ در سال ۱۹۳۶ بود.

تعریف ۳-۱۸. می‌گوییم یک گردایه‌ای از کاشی‌های چندضلعی یک کاشی چندضلعی T را در بر می‌گیرد اگر اجتماع T و کاشی‌های یک وصله A طوری باشد که گوشه‌های T بر روی ∂A باشند ولی نقاط داخلی اضلاع T با ∂A تماس نداشته باشند.



شکل ۳-۳۱: کاشی‌ای با عدد هیش ۳.

پس نیازی نیست A کاشی T را غرق کند. برای مثال در شکل ۳-۳۲، کاشی مثلث T توسط سه کپی از مثلث، دربرگرفته شده است.

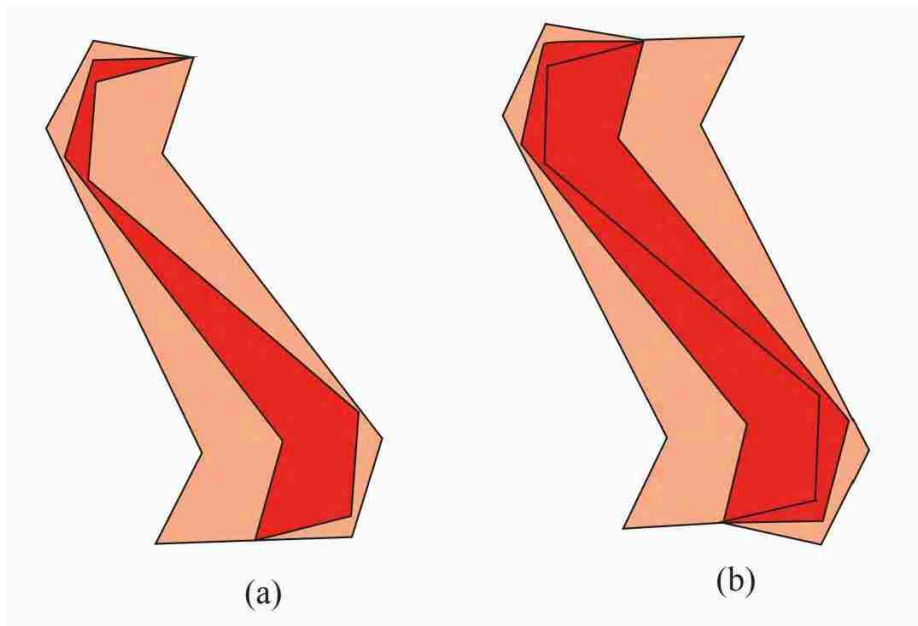


شکل ۳-۳۲: یک کاشی مثلث که توسط سه کپی از خود در بر گرفته شده است.

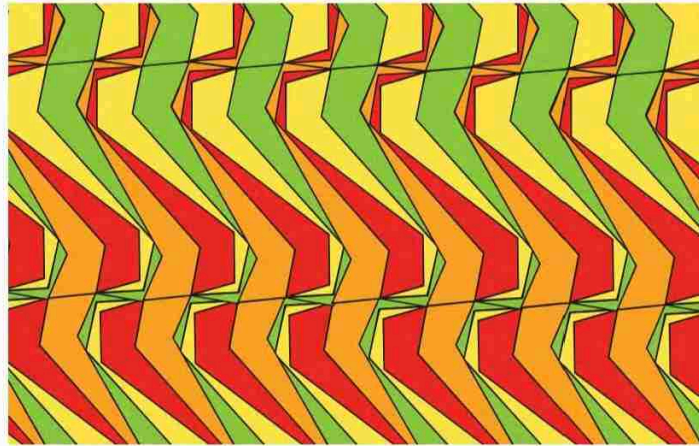
حدس زده می‌شود که برای اینکه یک کاشی توسط کپی‌های خودش در بر گرفته شود، به حداقل سه کپی نیاز خواهیم داشت ولی طبق شکل ۳-۳۳، کاشی‌ای مشاهده می‌شود که توسط دو کپی از خود در بر گرفته می‌شود. این کاشی حیرت‌انگیز نیز می‌تواند دو کپی از خود، طبق شکل، را در بر بگیرد. طبق شکل ۳-۳۴، این کاشی یک کاشی‌کاری تک‌وجهی متناوب و همچنین کاشی‌کاری‌ای به شکل مارپیچ را طبق شکل ۳-۳۴ نیز، تولید می‌کند.

طبق شکل، این ساختار توسط گلدبرگ تعمیم داده شد تا ثابت کند که می‌توانیم کاشی‌ای بسازیم که n کپی از آن کاشی توسط دو کپی از آن در بر گرفته می‌شود. از آنجایی که ناحیه‌ای که توسط دو کاشی احاطه شده است باید n برابر ناحیه کاشی اصلی باشد، تناقض ایجاد می‌کند. پس به نظر می‌رسد که با افزایش n این دو کاشی نباید در این ناحیه به یکدیگر نزدیک شوند. هر چند، در این ساختار، با افزایش n ، کاشی‌ها باریک‌تر می‌شوند و در نتیجه نواحی آنان نیز فشرده‌تر شده و باعث می‌شود این ساختار به نتیجه برسد.

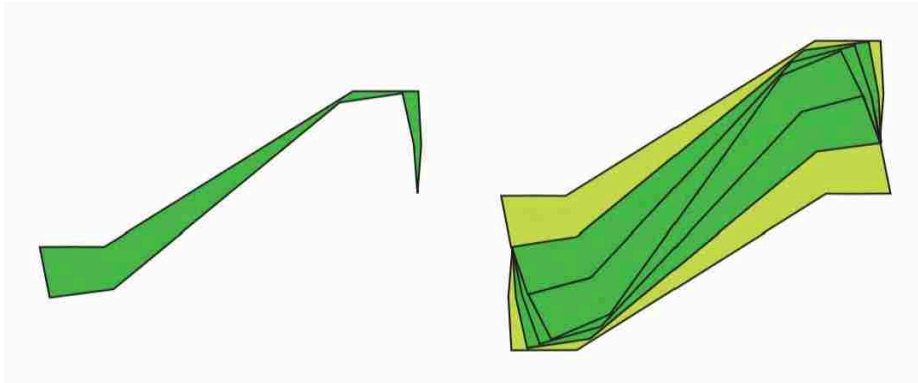
این کاشی همچنین نمونه‌ای متضاد برای این حدس قدیمی که برای هر کاشی در یک کاشی‌کاری تک‌وجهی، همسایگی آن یک وصله است، که توسط کیسی مان و دانشجویان خود کشف شده بود، ارائه می‌دهد. در شکل ۳-۳۶، کاشی‌کاری مارپیچی با یک تک کاشی سیاه مشاهده می‌شود. کاشی‌های کم‌رنگ‌تر همسایگی‌های آن را تشکیل می‌دهند ولی برای اینکه کوچک‌ترین وصله شامل آن همسایگی را بیابیم، باید سه کاشی پررنگ‌تر اضافه کنیم.



شکل ۳-۳۳: کاشی‌ای که توسط دو کپی از خود در بر گرفته شده است.

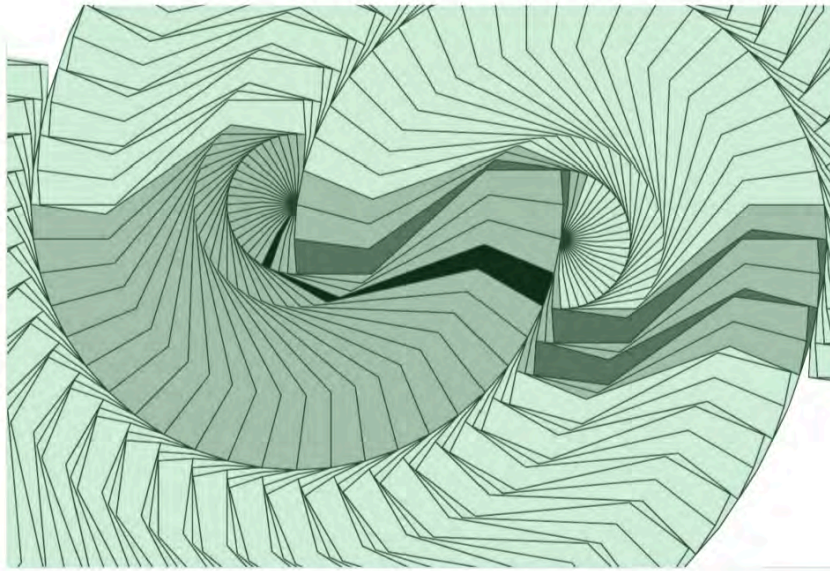


شکل ۳-۳۴: کاشی‌کاری تولید شده توسط کاشی ولدبرگ.

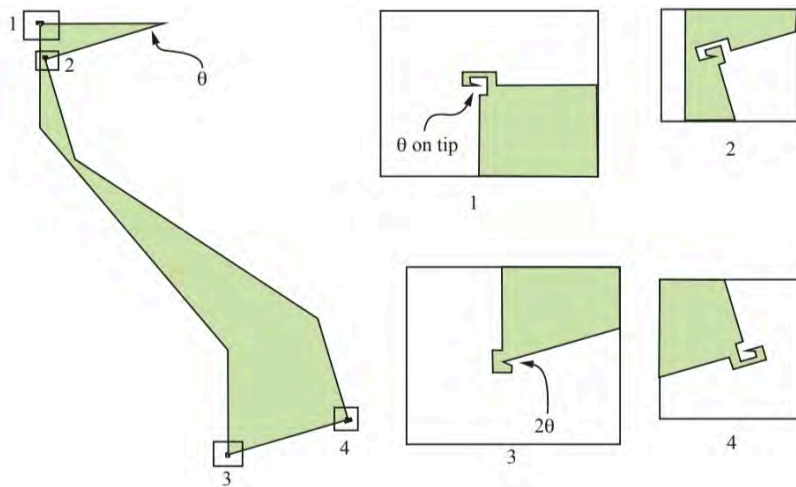


شکل ۳-۳۵: کاشی‌ای که می‌تواند توسط n کپی از خود با تنها دو کپی در بر گرفته شود.

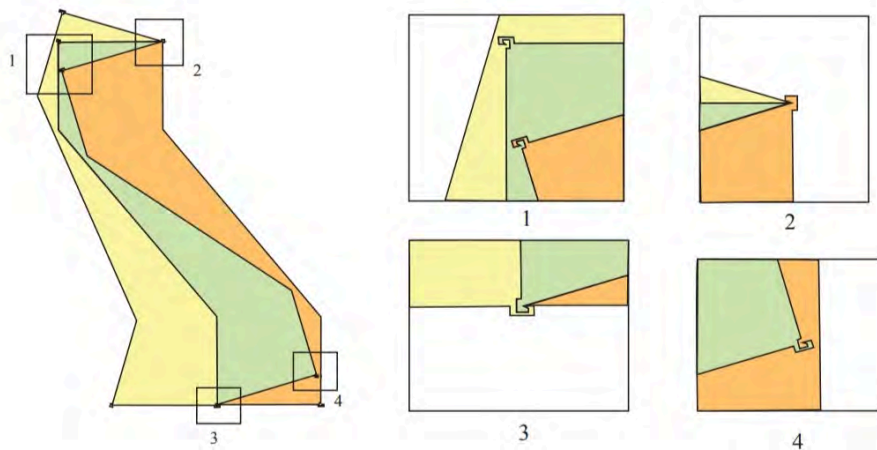
همانطور که مشاهده شد، در حالت کاشی اصلی ولدبرگ، هر کاشی توسط دو کپی از خود دربر گرفته شده است. حال ما کاشی‌ای می‌خواهیم که علاوه بر اینکه تنها توسط کپی‌های خود دربر گرفته شده باشد، توسط این دو کاشی نیز غرق شود. مان طبق شکل ۳-۳۷، این کاشی را تغییر می‌دهد. سپس طبق شکل ۳-۳۸، به یک کاشی که دارای اولین هاله و شامل تنها دو کاشی است دست می‌یابد. والتر ترامپ نیز این کاشی را طبق شکل ؟؟، تغییر می‌دهد و ساده‌سازی می‌کند تا به کاشی‌ای دست یابد که دو کپی توسط دو کپی دیگر غرق می‌شوند و صفحه را با این کاشی که دارای بیست یال است، می‌پوشاند.



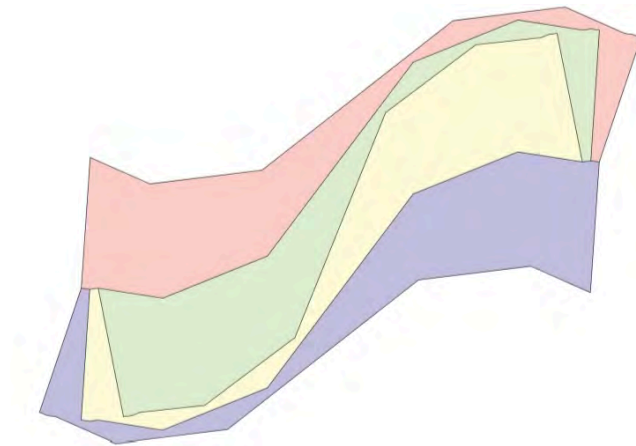
شکل ۳۶-۳: یک کاشی‌کاری تک‌وجهی به طوری که همسایگی کاشی سیاه یک وصله نیستند.



شکل ۳۷-۳: تغییر شکل کاشی ولدبرگ برای دست‌یابی به یک کاشی با عدد هیش ۲.



شکل ۳-۳۸: یک کاشی با دو کپی از خود در اولین هاله.



شکل ۳-۳۹: کاشی‌ای که دو کپی‌آبی و صورتی از خود توسط دو کپی زرد و سبز دیگر از خود احاطه شده است.

۳.۳ کاشی‌کاری‌های تصادفی

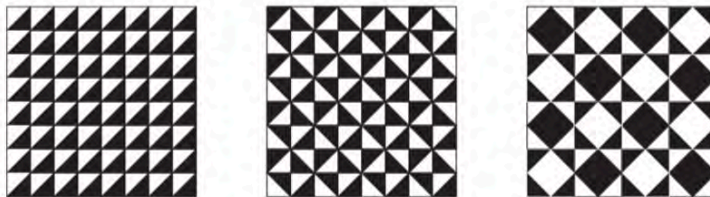
در این بخش به ویژگی‌های کاشی‌کاری‌های تصادفی می‌پردازیم. منظور از کاشی‌کاری تصادفی، کاشی‌کاری‌ای است که انتخاب هر کاشی آن به صورت احتمالی مشخص شده است. از چنین کاشی‌کاری‌هایی برای مدل‌سازی پدیده‌های فیزیکی استفاده می‌شود و به اشکال مختلف در مکانیک آماری ظاهر می‌شوند. کاشی‌کاری‌های تروشه که برپایه کاشی‌کاری‌های مربع در صفحه هستند، مثال‌های خوبی از کاشی‌کاری‌های

تصادفی هستند. با کاشی‌تزیین شده مربع که با حفظ دوران‌های خود، غیر متقارن است این روند را آغاز می‌کنیم. برای مثال، می‌توانیم مربع را در امتداد قطر به دو قسمت مساوی تقسیم کنیم و یکی از دو مثلث تولید شده را به رنگ سیاه و دیگری را به رنگ سفید در بیاوریم. در این صورت چهار حالت ممکن برای جایگذاری این کاشی در هر شکاف خاص از شبکه اعداد صحیح روی صفحه وجود خواهد داشت. طبق شکل، زاویه راست مثلث سیاه، می‌تواند در هر کدام از گوشه‌ها قرار بگیرد.



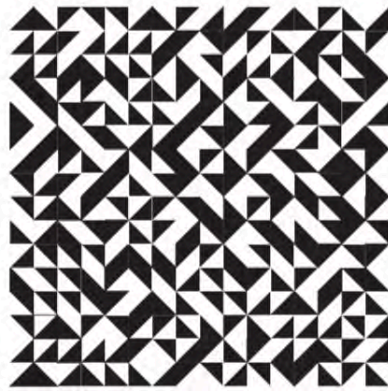
شکل ۳-۴۰: نماهای کاشی‌های تروشه.

کاشی‌کاری‌هایی که براساس این کاشی‌ها هستند در ابتدا توسط کشیش فرانسوی دومینیکن، سباستین تروشه، در یادداشت‌های سال ۱۷۰۴، معرفی شده‌اند.



شکل ۳-۴۱: الگوهای تکراری تولید شده توسط کاشی‌های تروشه.

هر چند، اگر نماهای این کاشی را به صورت تصادفی در نظر بگیریم، به کاشی‌کاری‌های شکل ۳-۴۲ دست می‌یابیم. اگر بخواهیم از تشخیص مثلث‌ها توسط رنگ‌ها اجتناب کنیم، می‌توانیم یک بیرون‌زدگی کوچک به وتر مثلث سیاه و یک فرورفتگی کوچک به وتر مثلث سفید اضافه کنیم. در این صورت بدون نیاز به رنگ‌آمیزی، در هر کاشی‌کاری با یک مجموعه اولیه از این دو کاشی، این دو وتر باید همیشه به یکدیگر چسبیده باشند ولی از جذابیت تصاویر آن‌ها کم می‌شود.



شکل ۴۲-۳: یک الگوی رندوم تولید شده توسط کاشی‌های تروشه.



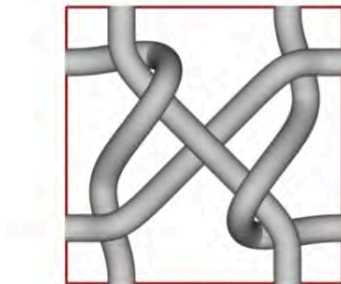
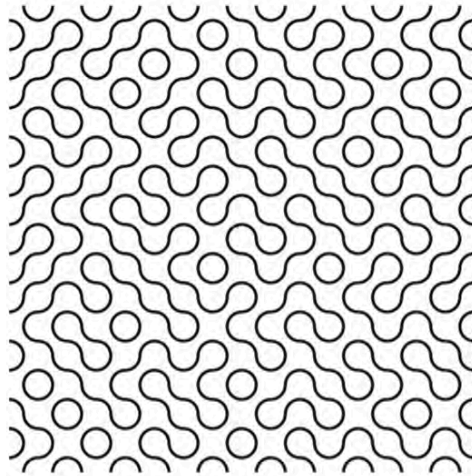
شکل ۴۳-۳: دو نما از یک مربع تزیین شده توسط دو کمان.

اگر به جای مثلث‌های سیاه و سفید راست، هر کاشی مربع را با دو کمان ناهمبند که نقاط انتهایی هر کدام بر ضلع‌های مجاور مربع قرار می‌گیرند، طبق شکل ۴۳-۳، تزیین کنیم، آنگاه دو نمای متفاوت برای این کاشی وجود خواهد داشت. زمانی که به صورت تصادفی چنین کاشی‌هایی را در شبکه مربع جا بدهیم، به تصاویر شکل با منحنی مارپیچ تولید شده در صفحه، دست می‌یابیم. سوال جالبی که به وجود می‌آید این است که هر چند وقت یک بار یک منحنی بسته نتیجه خواهد داد؟ می‌توان این را به عنوان مدلی برای تشکیل مولکول خطی تصور کرد. می‌توانیم تزیینات متنوع دیگری برای کاشی‌ها انتخاب کنیم. برای مثال، در شکل، الگویی از یک گره جایگذاری شده در یک مربع توسط پاول بورک مشاهده می‌شود. توجه داشته باشید که این گره با یک دوران 180° متقارن است ولی با یک دوران 90° متقارن نخواهد بود. یک مثال از کاشی‌کاری تصادفی متشکل از این نوع کاشی‌ها در شکل زیر، نشان داده شده است.

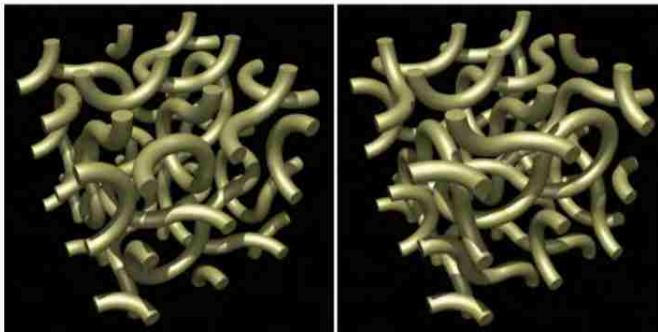
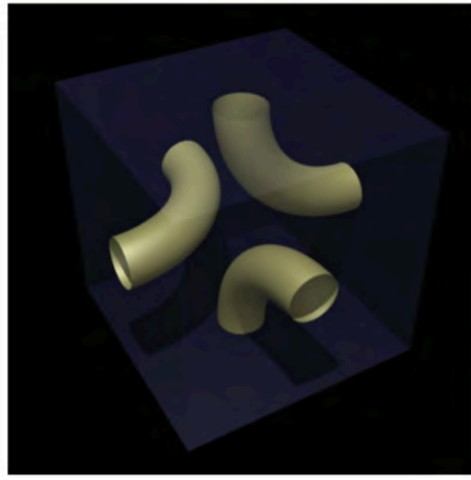
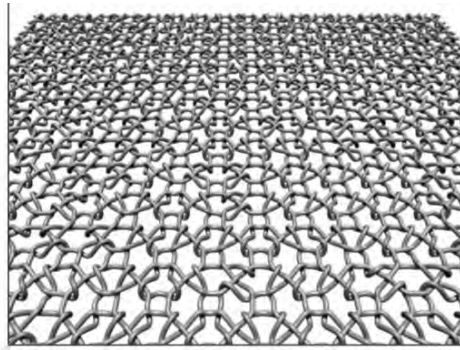
اگر این الگو را با دو کمان درون مربع به سه لوله درون مکعب، طبق شکل‌ها، تعمیم بدهیم، که هر کدام به دو صفحه متفاوت متصل شده‌اند، طبق شکل‌ها، به کاشی‌کاری‌های تصادفی از شبکه مکعبی در فضای سه

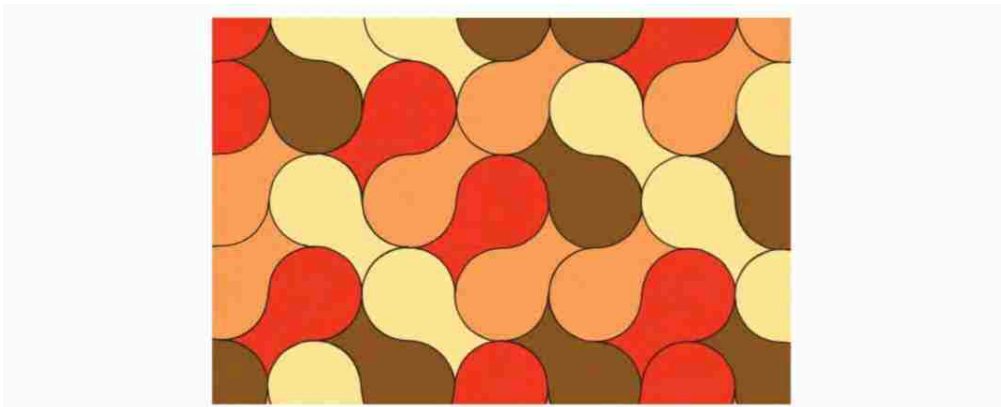
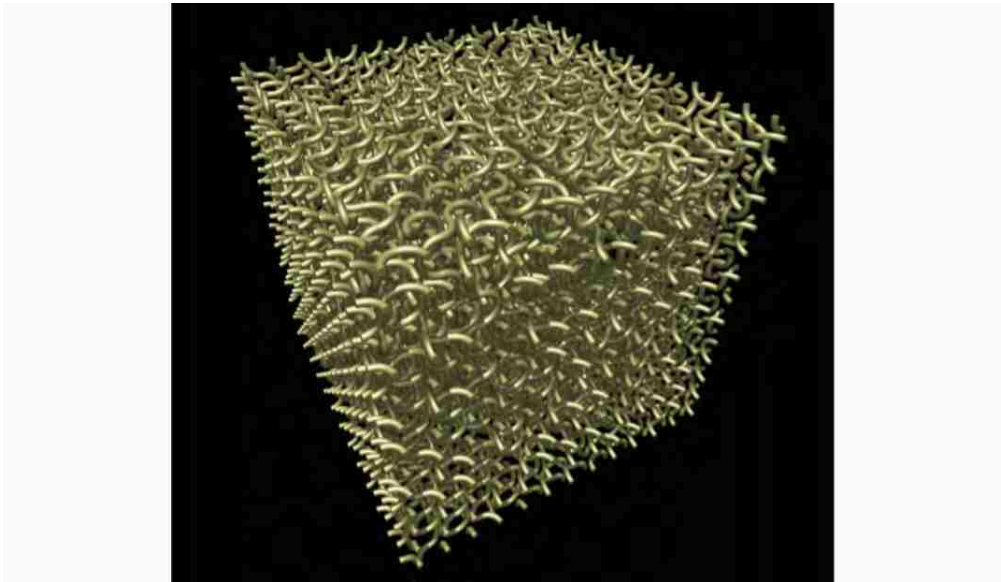
بعدی‌ای که لوله‌های مارپیچ در هم تنیده تولید می‌کنند، دست می‌یابیم. در شکل‌ها، نتیجه را در مقیاس بزرگ‌تری می‌بینیم.

یک نوع دیگر از کاشی‌کاری تصادفی که می‌توانیم بسازیم از جایگذاری یک دایره به شعاع 0.5 ، به مرکز هر رأس در کاشی‌کاری مربع واحد به دست خواهد آمد. سپس برای هر دیسک محدود شده توسط یک دایره، قسمت فرورفته مربع را به هر رأس که بیرون از همه دیسک‌ها است می‌چسبانیم. این کاشی‌کاری‌های متنوع زیادی در صفحه تولید می‌کند.



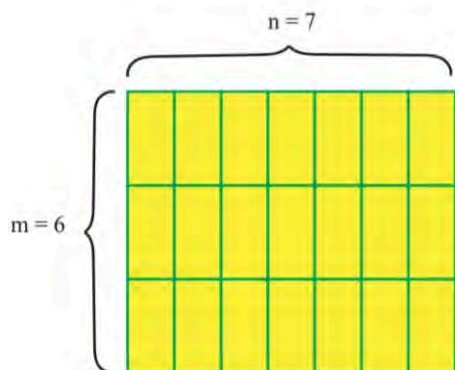
یک نوع معروف از کاشی‌کاری تصادفی زمانی که صفحه را با دومینوها به طوری که شبکه مربع را با مستطیل‌های 1×2 بپوشاند، رخ خواهد داد. طبق شکل، هر دومینو می‌تواند به صورت عمودی و افقی چرخیده شود. با توجه به طرح کلی یک وصله، می‌توانیم این سوال را مطرح کنیم که آیا یک کاشی‌کاری از وصله متشکل از دومینوها وجود دارد و اگر چنین است، چند کاشی‌کاری متفاوت از یک وصله وجود خواهد داشت. برای مثال، می‌توانیم وصله‌های مستطیل شکل $m \times n$ را در نظر بگیریم و این سوال را بپرسیم که چه زمانی توسط دومینوها می‌توانند کاشی شوند. جواب این سوال ساده است.





در ابتدا صفحه شطرنجی شبکه مستطیل شکل را به مربع‌های سیاه و سفید رنگ می‌کنیم به طوری که هیچ‌کدام از یک رنگ داده شده، یک یال مشترک نداشته باشند. در این صورت، یک تک دومینو بر روی صفحه شطرنجی باید یک مربع سیاه و یک مربع سفید را بپوشاند. در نتیجه، هر ناحیه پوشیده شده توسط دومینوها باید دقیقاً شامل تعداد مربع‌های سیاه و مربع‌های سفید برابر باشد. به عبارت دیگر، تعداد کل مربع‌ها باید زوج باشد. بالا فاصله درمی‌یابیم که نمی‌توانیم یک مستطیل $m \times n$ اگر m و n فرد باشند را کاشی کنیم. از طرفی، اگر m زوج باشد آنگاه طبق شکل، می‌توانیم n ستون از دومینوهای افقی برای دستیابی به یک کاشی‌کاری، تولید کنیم. به طور مشابه، اگر n فرد باشد، می‌توانیم m ردیف از دومینوهای عمودی تولید کنیم تا به یک کاشی‌کاری دست یابیم و در نتیجه به پاسخ سوال می‌رسیم. توجه داشته باشید که هر کدام از این وصله‌ها می‌تواند به یک کاشی‌کاری از صفحه گسترش یابد. برای مثال، اگر در یک صفحه شطرنجی $2m \times 2n$ ، دو مربع هم‌رنگ را

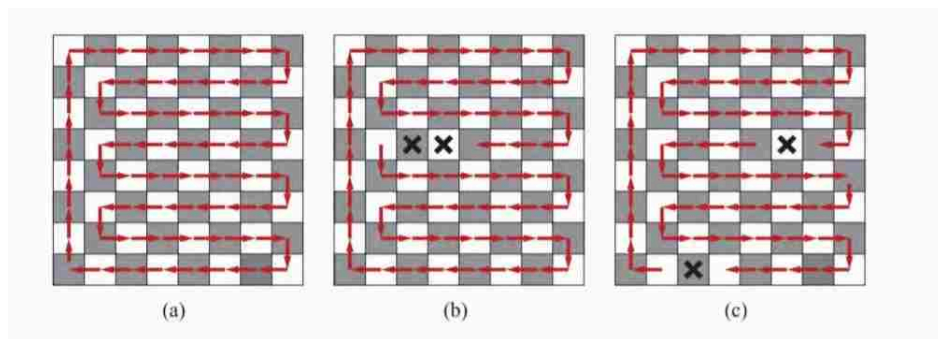
حذف کنیم، نمی‌توانیم آن را با دومینوها کاشی کنیم چون تعداد مربع‌های سفید و سیاه با هم برابر نیستند.



شکل ۳-۴۴: کاشی‌کاری تولید شده توسط دومینوها

قضیه ۳-۱۹. ناحیه باقی‌مانده از حذف دو کاشی با رنگ متفاوت از یک صفحه شطرنجی $2m \times 2n$ ، توسط دومینوها کاشی می‌شود.

اثبات. برای راحتی، در حالتی که صفحه شطرنجی 8×8 آن را اثبات می‌کنیم ولی دقیقاً همین اثبات در حالت کلی نیز برقرار خواهد بود. در ابتدا یک زنجیر از مربع‌های صفحه شطرنج قبل از حذف دو کاشی، که یک مسیر درون همه ۶۴ مربع است و همیشه از یک مربع به مربع مجاور می‌رود در نقطه‌ای که شروع کردیم به پایان می‌رسد، شکل می‌دهیم. در شکل زیر، یک حالت ممکن مشاهده می‌شود ولی تعداد بسیار دیگری نیز وجود دارند. به چنین مسیری، چرخه همیلتونی گفته می‌شود.



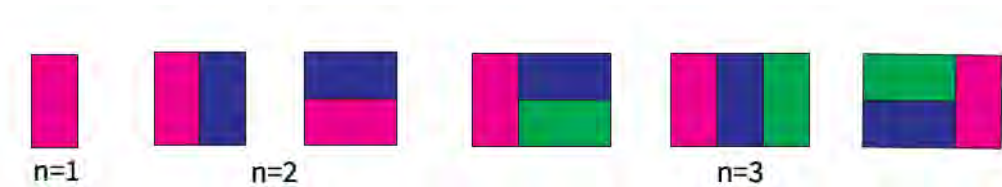
شکل ۳-۴۵: یک چرخه همیلتونی در یک صفحه شطرنجی

توجه داشته باشید که قبل از حذف دو کاشی، می‌توانیم از این زنجیر برای ساخت یک کاشی‌کاری خاص

از صفحه شطرنج با دومینوها با شروع از کاشی سیاه در سمت چپ پایین و جایگذاری دومینوها یکی پس از دیگری در طول زنجیر ایجاد کنیم. اگر دو مربع متوالی داشته باشیم، همیشه می‌توانیم آن‌ها را با یک دومینو بپوشانیم. بنابراین زمانی که کار ما به انتها برسد، یک کاشی‌کاری از تمام صفحه شطرنج تولید کرده‌ایم. از آنجایی که حق انتخاب برای زنجیرها داریم، دو حالت برای کاشی‌هایی که از صفحه شطرنجی حذف شده‌اند وجود خواهد داشت. در ابتدا، مربع‌های متوالی حق وجود در زنجیر را خواهند داشت. سپس دقیقا ۶۲ مربع در زنجیر باقی می‌مانند. می‌توانیم دومینوها را در امتداد بقیه زنجیر به هم بچسبانیم. این کار را با شروع از یکی از مربع‌های کنار مربع‌های حذف شده آغاز کرده و در این روند کاملا آن را کاشی کرده و در نتیجه کل ناحیه را کاشی خواهد کرد.

در قدم دوم، اگر این دو کاشی‌ای که حذف می‌شوند در این زنجیر متوالی نباشند آنگاه چون خود زنجیر یک صفحه شطرنجی است و چون این دو کاشی رنگ‌های متفاوت دارند، کاشی‌هایی که حذف شدند باید زنجیر را به دو مسیر با طول‌های یکسان تقسیم کنند. چون هر کدام از آن‌ها می‌توانند توسط یک زنجیر از دومینوها کاشی شوند پس تمام ناحیه را نیز می‌توانند کاشی کنند. □

می‌توانیم بیشتر پیش برویم و سعی کنیم مشخص کنیم که یک مستطیل معین چند کاشی دارد. فرض کنید $N(m, n)$ تعداد کاشی‌کاری‌های متمایز ممکن در مستطیل $m \times n$ هستند. قبلا نشان دادیم که اگر m و n هر دو فرد باشند، $N(m, n) = 0$ خواهد بود. پس می‌توانیم فرض کنیم که حداقل یا m یا n زوج هستند. برای شروع، مستطیل‌های $2 \times n$ را نظر بگیرید. به وضوح، یک مستطیل 2×1 دارای یک کاشی‌کاری است. پس $N(2, 1) = 1$. یک مستطیل 2×2 دارای دو کاشی‌کاری است پس $N(2, 2) = 2$. در واقع، هر کدام از این مستطیل‌های کوچک یک دومینو است که از دو مربع صفحه شطرنج تشکیل شده است که هیچ یکاز مربع‌ها با رنگ مشابه نباید کنار هم قرار بگیرند. پس N تعداد حالاتی است که این دومینوها کنار هم می‌توانند قرار بگیرند. در شکل زیر، تمام این حالات تا $n = 3$ نشان داده شده است.



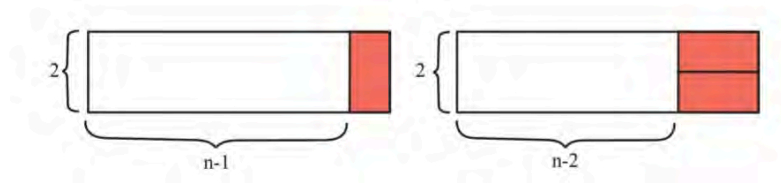
پس یک رابطه بازگشتی وجود دارد تا $T(2, n)$ را برای ارزش‌های بالاتر n مشخص کنیم.

$$\text{لم } 20-3. N(2, n) = N(2, n-1) + N(2, n-2)$$

اثبات. واضح است. اگر یک کاشی عمودی در ستون آخر یک کاشی‌کار مستطیل $2 \times n$ باشد آنگاه دقیقا $N(2, n-1)$ راه وجود دارد که می‌توانیم بقیه مستطیل را با یک کاشی‌کاری مناسب، طبق شکل، پر کنیم. اگر

یک کاشی عمودی در ستون آخر موجود نباشد، آنگاه یک جفت از کاشی‌های افقی وجود دارند که دو ستون آخر را پر می‌کنند. پس دقیقاً $N(2, n-2)$ راه برای پر کردن بقیه کاشی‌کاری وجود خواهد داشت. در نتیجه، تعداد کل کاشی‌کاری‌ها، $N(2, n)$ است که مجموع $N(2, n-1) + N(2, n-2)$ خواهد بود.

□



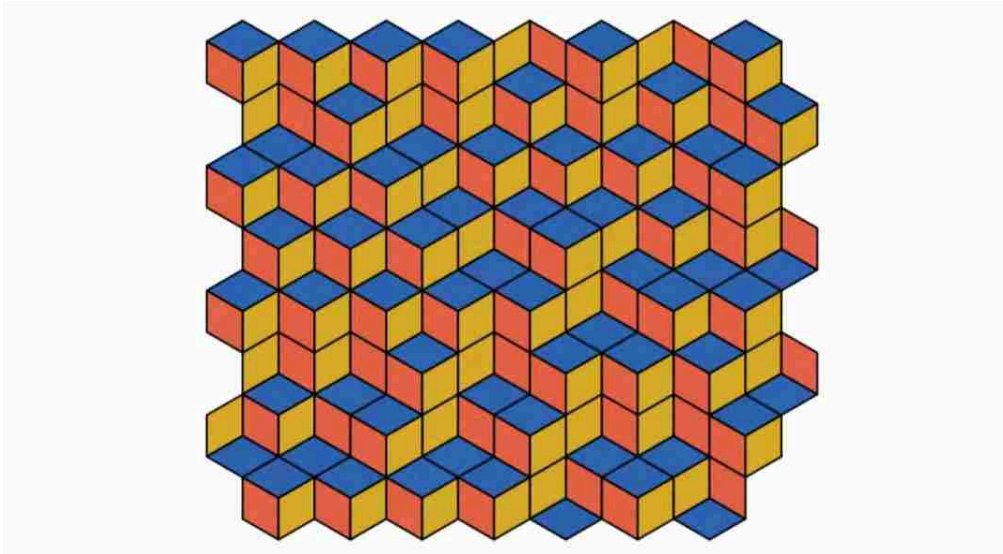
شکل ۳-۴۶: یافتن یک رابطه بازگشتی.

با شروع از $N(2, 1) = 1$ و $N(2, 2) = 2$ این رابطه بازگشتی یک فهرست از تعداد کاشی‌کاری‌ها که $1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \dots$ هست، تولید می‌کند که به دنباله فیبوناچی معروف است. متأسفانه، این استدلال ساده به تعداد کاشی‌کاری‌های مستطیل $m \times n$ به راحتی گسترش پیدا نمی‌کند. در طی مقالاتی، یک عبارت برای تعداد کاشی‌کاری‌ها در حالتی که هر دو طول اضلاع آن برابر باشند یافته‌اند.

$$\text{قضیه ۳-۲۱. } N(2m, 2n) = \prod_{j=1}^m \prod_{k=1}^n \left(4 \cos^2\left(\frac{j\pi}{2m+1}\right) + 4 \cos^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right) \right)$$

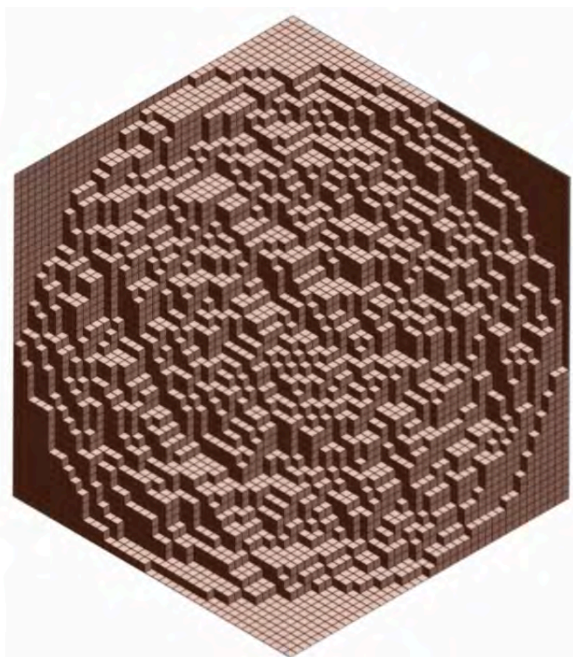
برای مثال، اگر $m = n = 1$ باشد، آنگاه یک عبارت در محصول وجود دارد و $N(2, 2) = 4 \cos^2\left(\frac{\pi}{2}\right) + 4 \cos^2\left(\frac{\pi}{2}\right) = 4\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) = 2$ همان گونه که انتظار داشتیم نتیجه می‌دهد. یکی از ویژگی‌های جالب توجه این فرمول این است که چون مربوط به شمارش کاشی‌کاری‌ها است، جواب‌های آن همیشه عددی صحیح است. این که این حاصل از مجموع عبارت‌های عمدتاً غیرمنطقی همیشه با یک عدد صحیح جمع می‌شود، یک پدیده شگفت‌انگیز است.

یک نوع دیگر از کاشی‌کاری‌های تصادفی در شکل زیر، ظاهر شده است. در این حالت، شبکه مثلث متساوی‌الساقین توسط لوزی‌هایی با زاویه 60° و 120° کاشی شده‌اند. زمانی که این کاشی‌ها در شبکه جایگذاری می‌شوند، سه نمای متفاوت ممکن برای این کاشی‌ها وجود خواهد داشت که هر کدام از آن‌ها برای تشخیص بهتر، به یک رنگ هستند. به چنین کاشی‌ای، کاشی‌کاری لوزی شکل می‌گوییم.



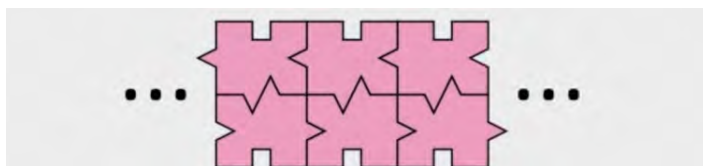
شکل ۴۷-۳: یک کاشی‌کاری رندوم

این کاشی‌کاری‌ها دارای سه بعد متفاوت تاثیر بصری هستند، به گونه‌ای که گویا به اجتماعی از مکعب‌ها نگاه می‌کنیم. این خطای دید بعد از گذشت مدتی برطرف شده و شاهد لوزی‌ها خواهیم بود. واضح است که کاشی‌کاری لوزی شکل برای تمام صفحه وجود خواهد داشت. برای مثال، می‌توانیم تمام کاشی‌ها را با یک نما در نظر بگیریم. همچنین به وضوح، تعداد نامتناهی کاشی‌کاری لوزی شکل وجود دارد. همانطور که قبلاً دیدیم، کاشی‌کاری‌ای با کاشی‌های داده شده در یک ردیف که بین دو خط افقی و همه نماهای یکسان قرار دارند، می‌سازیم که باعث تولید دو نوع ردیف، یکی با شیب سمت چپ نسبت به لوزی‌ها و یکی با شیب راست خواهد بود. سپس چون برای هر ردیف در چنین کاشی‌کاری‌ای، دو انتخاب وجود دارد، تعداد نامتناهی کاشی‌کاری ممکن وجود خواهد داشت ولی کاشی‌کاری‌های ناشمارا تصادفی نیستند. کاشی‌کاری‌های لوزی شکل تصادفی به طور ویژه‌ای برای فیزیکدان‌ها به خصوص در حوزه مکانیک آماری، حائز اهمیت است. در شکل زیر، یک کاشی‌کاری تصادفی پر جزئیات مشاهده می‌شود که توسط لوزی‌های در یک ناحیه شش ضلعی در صفحه تولید شده است. به رفتار الگوی لوزی‌ها زمانی که به مرز نزدیک می‌شویم، توجه کنید. چنین شرطی برای مرز برای آنالیز رفتار بسیار مهم هستند.



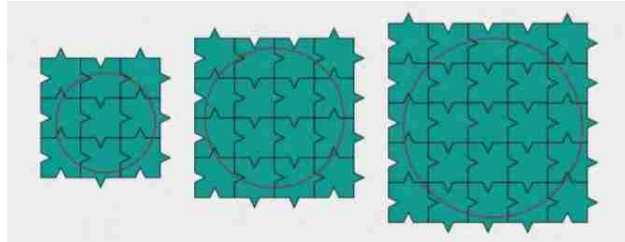
۴.۳ قضیه توسیع

در این بخش، لمی که در بخش قبلی مبنی بر این که تا زمانی که یک گردایه نامتناهی از وصله‌ها را داشته باشیم که هر وصله، وصله قبلی را غرق کند آنگاه اجتماع وصله‌ها یک کاشی‌کاری از صفحه را تولید می‌کند را مطرح کردیم را قوی‌تر می‌کنیم. در این لم، مهم این است که وصله‌های بعدی یکدیگر را غرق کنند و افزایش تعداد کاشی‌ها در وصله‌ها دیگر کافی نخواهد بود. برای مثال، در شکل ۴.۳، کاشی‌ای مشاهده می‌شود که می‌تواند وصله‌هایی شامل تعداد دلخواهی کاشی تولید کند به طوری که هر وصله شامل وصله قبلی باشد ولی به وضوح این کاشی نمی‌تواند یک کاشی‌کاری از صفحه تولید کند.



طبق شکل ۴.۳، موقعیتی که یک دنباله از وصله‌های شامل دیسک‌های بزرگ دلخواه که هیچ یک از این وصله‌ها شامل یکدیگر نباشند، می‌تواند در دسترس ما باشد. وصله‌ها به گونه‌ای ساخته شده‌اند که کاشی‌ها در هر ستون طبق الگوی $UDU, UDDU, UDDDU, \dots$ دارای یک تیزی به سمت بالا یا پایین هستند. در

نتیجه، از قرار گرفتن وصله‌ها در یکدیگر جلوگیری می‌کند. اگر چه این درست است که کاشی اولیه متناظر یک کاشی کاری تولید می‌کند ولی از لم مطرح شده برای اعمال آن به این وصله‌ها همیشه استفاده کرد.



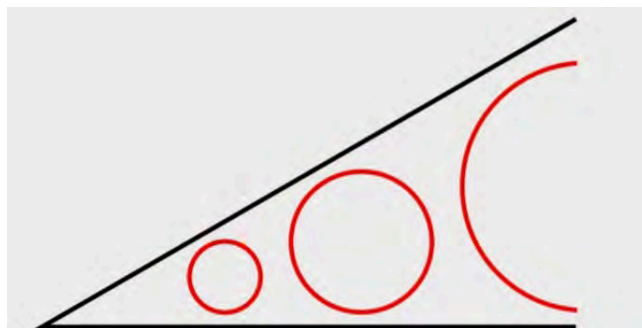
تعریف ۳-۲۲. فرض کنید ρ یک مجموعه از کاشی‌های اولیه و D یک دیسک در صفحه باشد. می‌گوییم ρ بر روی D کاشی می‌شود اگر یک وصله از کپی‌های کاشی‌ها در یک مجموعه اولیه شامل دیسک D بسازیم.

قضیه ۳-۲۳ (قضیه توسیع). فرض کنید ρ یک مجموعه اولیه متناهی باشد. اگر ρ بر روی دیسک‌های بزرگ دلخواه کاشی شود آنگاه ρ یک کاشی کاری از صفحه تولید می‌کند.

این نتیجه کمی تعجب‌آور است چون داشتن وصله‌های نامربوط شامل دیسک‌های بزرگ دلخواه که منجر به یک کاشی کاری می‌شوند، واضح نیست. قبل از اثبات این قضیه به بررسی یک سری از مفاهیم می‌پردازیم.

نتیجه ۳-۲۴. اگر یک مجموعه اولیه متناهی بتواند بر روی یک ناحیه دلخواه از صفحه کاشی شود، آنگاه می‌تواند یک کاشی کاری از تمام صفحه تولید کند.

اثبات. طبق شکل ۴.۳، چون هر ناحیه دلخواه از صفحه شامل وصله‌هایی است که بر روی دیسک‌های بزرگ دلخواه کاشی می‌شود، اثبات واضح خواهد بود. □



در بخش؟؟ مشاهده کردیم که با افزودن چند کاشی اضافی (برخلاف کاشی‌های اولیه) می‌توانیم به طور چشمگیری گزینه‌های کاشی‌کاری یک کاشی اولیه را تغییر بدهیم ولی طبق نتیجه بعدی، درمی‌یابیم که این افزایش یک کاشی‌کاری تولید نخواهد کرد اگر این مجموعه اولیه قبلاً یک کاشی‌کاری تولید نکرده باشد.

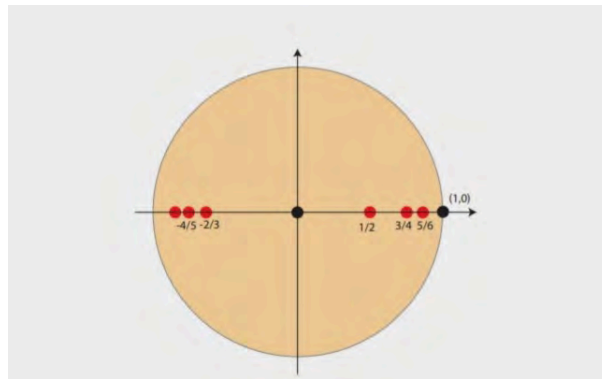
نتیجه ۲۵-۳. اگر کاشی اولیه ρ یک کاشی‌کاری تولید نکند، پس اجازه استفاده از تعداد متناهی کاشی اضافی این واقعیت را تغییر نخواهد داد.

اثبات. فرض کنید کاشی‌های T_1, T_2, \dots, T_n و کاشی‌های متجانس با کاشی‌های موجود در ρ یک کاشی‌کاری تولید کنند. چون تنها n کاشی اضافی وجود دارد، می‌توانیم وصله‌های بزرگ دلخواه در این کاشی‌کاری بیابیم که از این مجموعه متناهی جلوگیری کنیم. طبق قضیه توسیع، ρ یک کاشی‌کاری تولید می‌کند که یک تناقض خواهد بود. \square

برای اثبات قضیه بسط، به یک قضیه مشهور از آنالیز احتیاج خواهیم داشت.

قضیه ۲۶-۳ (قضیه بولتسانو-وایراشتراس). اگر Q یک مجموعه فشرده در صفحه باشد آنگاه هر دنباله از نقاط در Q دارای یک زیردنباله است که به یک نقطه p در Q میل می‌کند.

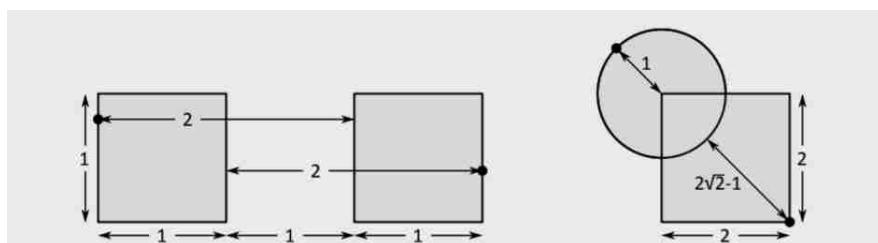
برای مثال، از آنجایی که دیسک واحد D فشرده است، می‌دانیم که هر نقطه در D دارای یک زیردنباله است که باید به یک نقطه مانند p در D میل کند. پس، طبق شکل ۴.۳، دنباله: $S = \{((-1)^n(1 - 1/n), 0) : n \in \mathbb{Z}^+\}$ را در نظر بگیرید. در این صورت یک زیردنباله همگرا که به $(1, 0)$ میل می‌کند، وجود خواهد داشت.



برای اثبات قضیه بسط، به یک سری تعاریف نیز نیاز پیدا خواهیم کرد.

تعریف ۲۷-۳. دو کاشی T_1 و T_2 را در نظر بگیرید. فرض کنید d_{12} دورترین فاصله از هر نقطه در T_1 از کاشی T_2 باشد و فرض کنید d_{21} دورترین فاصله از هر نقطه در T_2 از کاشی T_1 باشد. فاصله هاسدورف بین T_1 و T_2 که آن را با $\delta(T_1, T_2)$ نشان می‌دهیم، ماکسیمم فاصله d_{12} و d_{21} است.

برای مثال، در شکل ۲۸-۳، دو مربع در صفحه را مشاهده می‌کنیم. دورترین نقطه در T_1 از کاشی T_2 ، هر نقطه روی یال چپ T_1 خواهد بود و دارای فاصله $d_{12} = 2$ از T_2 است. به طور مشابه، دورترین نقطه در T_2 از کاشی T_1 ، هر نقطه روی یال راست T_2 خواهد بود و دارای فاصله $d_{21} = 2$ از T_1 است. ماکسیم آن‌ها ۲ خواهد بود پس $\delta(T_1, T_2) = 2$. در شکل ۴۰۳، دو کاشی روی هم افتاده داریم که یکی کاشی دایره T_1 و دیگری کاشی مربع T_2 است. دورترین فاصله از یک نقطه در T_1 به T_2 ، $d_{12} = 1$ و دورترین فاصله از یک نقطه در T_2 به T_1 ، $d_{21} = 2\sqrt{2} - 1 \approx 1.818$ است. پس ماکسیم آن‌ها $2\sqrt{2} - 1$ خواهد بود که همان فاصله هاسدورف بین این دو کاشی است. توجه داشته باشید که فاصله هاسدورف بین دو کاشی صفر است اگر و تنها اگر این دو کاشی بر هم منطبق باشند.



تعریف ۲۸-۳. توجه داشته باشید، فاصله‌ای که برای میل کردن کاشی‌ها استفاده می‌کنیم، فاصله هاسدورف است.

تعریف ۲۹-۳. یک دنباله از کاشی‌های $\{T_i\}$ به تک کاشی T میل می‌کند اگر $\lim_{i \rightarrow \infty} \delta(T_i, T) = 0$.

برای مثال، اگر مربع‌های واحد S_i را در نظر بگیریم که اضلاع آن با محورهای مختصات موازی و مرکز آن بر نقطه $(0, 1/i)$ باشد، آنگاه به وضوح به مربع واحد با مرکز $(0, 0)$ میل خواهد کرد. در ادامه، به لم انتخاب می‌پردازیم که برای اثبات قضیه توسیع احتیاج خواهد بود.

لم ۳۰-۳. (لم انتخاب). اگر یک دنباله از کاشی‌های $\{T_i\}$ را داشته باشیم که همگی به یک تک کاشی اولیه T همگرا و در نقطه p مشترک باشند، زیردنباله‌ای شامل p همگرا به یک کاشی T' وجود خواهد داشت که به کاشی T نیز همگرا است.

اثبات. تصورمان از T یک کاشی معین در صفحه است. فرض کنید (x_i, y_i) نقطه مرکزی از کاشی T_i و (x, y) نقطه مرکزی T باشند. (منظور از نقطه مرکزی این است که اگر لبه شکل را زیر این نقطه قرار بدهیم، بالانس خود را حفظ می‌کند ولی برای یک کاشی غیرمحدب، حتی نیاز به قرارگیری درون کاشی نیز نخواهد بود). از آن جایی که T_i به T همگرا است، می‌دانیم که می‌توانیم ایزومتری‌ای از T_i به T با انتقال (x_i, y_i) به (x, y) در نظر بگیریم که در صورت نیاز نسبت به خط عمودی گذرنده از (x, y) بازتاب شود و سپس با زاویه θ دوران می‌شود تا دوکاشی را کنار هم قرار بدهد.

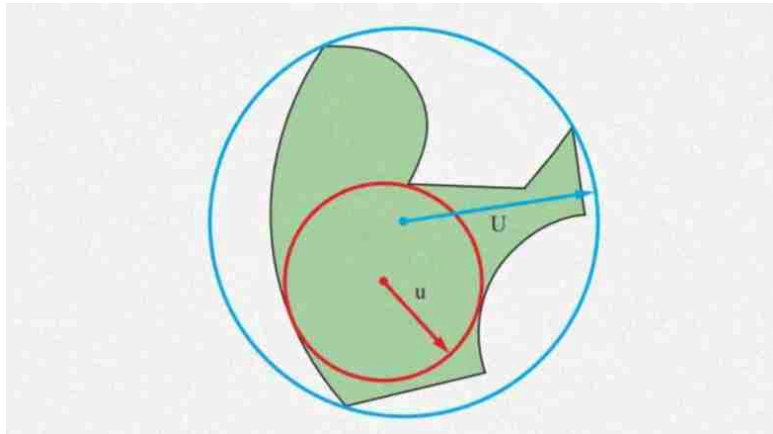
طبق اصل لانه کیوتری، می‌دانیم یک زیردنباله $\{T'_i\}$ از کاشی‌ها وجود دارد به طوری که همه آن‌ها به یک بازتاب در ایزومتري یا احتیاج خواهند داشت یا احتیاج نخواهند داشت. سپس هر کاشی T'_i در دنباله را با یک نقطه $q_i = (x_i, y_i, \theta_i)$ نشان می‌دهیم.

فرض کنید X مجموعه همه نقاطی (نه فقط آن‌هایی که با $\{T'_i\}$ متناظر هستند) است که با کاشی‌هایی که شامل p هستند و نیز همگرا به T هستند، متناظر است. از آن جایی که اگر d فاصله ماکسیمم از هر نقطه در T از نقطه مرکزی (x, y) در T باشد، آنگاه همه نقاط مرکزی باید درون d از p قرار بگیرند، پس X یک مجموعه محدود خواهد بود.

برای بررسی بسته بودن مجموعه X نشان می‌دهیم که مکمل آن باز است. فرض کنید که (x, y, θ) با یک نقطه که در X نیست، متناظر است. پس کاشی متناظر T شامل p نیست ولی در این صورت فاصله مثبت بین p و کاشی وجود خواهد داشت. به خصوص، می‌توانیم هم نقطه مرکزی و هم زاویه T به اندازه کوچکی تغییر دهیم ولی کاشی‌های نتیجه شده هنوز شامل p نخواهند بود. در نتیجه، یک همسایگی کوچکی از (x, y, θ) وجود دارد که در X نیست. پس مکمل X باز و در نتیجه X بسته خواهد بود.

از آن جایی که X هم بسته و هم محدود است، دنباله $\{T_i\}$ ، دنباله نامتناهی S از مجموعه همه نقاط موجود در X را نتیجه می‌دهد ولی طبق قضیه بولتسانو-وایراشتراس، یک دنباله نامتناهی از مجموعه همه نقاط در مجموعه فشرده X باید دارای یک زیردنباله باشد که به نقطه‌ای مانند (x_0, y_0, θ_0) در X میل کند. پس نقاط مرکزی کاشی‌ها باید به (x_0, y_0) و زوایای θ_i باید به مقدار ثابت θ_0 میل کنند. \square

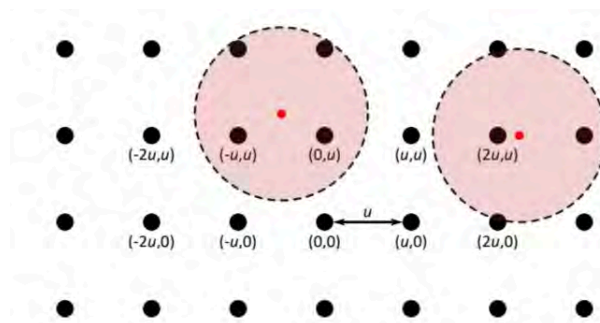
تعریف ۳-۳۱. اگر تک کاشی T را در اختیار داشته باشیم، طبق شکل؟؟، شعاع داخلی u از T را کوچک‌ترین شعاع از یک دیسک موجود در T و شعاع بیرونی U از T را بزرگ‌ترین شعاع از یک دیسک موجود در T تعریف می‌کنیم. یک مجموعه اولیه متناهی ρ ، دارای کوچک‌ترین شعاع داخلی‌ای است که برای همه کاشی‌های اولیه موجود خواهد بود و به آن شعاع داخلی ρ می‌گوییم و با u آن را نشان می‌دهیم و دارای بزرگ‌ترین شعاع بیرونی‌ای است که به آن شعاع بیرونی ρ می‌گوییم و آن را با U نشان می‌دهیم. پس هر کاشی اولیه شامل یک دیسک با شعاع u و یک دیسک با شعاع U خواهد بود.



شکل ۴۸-۳: شعاع بیرونی و درونی یک کاشی T

حال آماده هستیم که به اثبات قضیه توسیع بپردازیم.

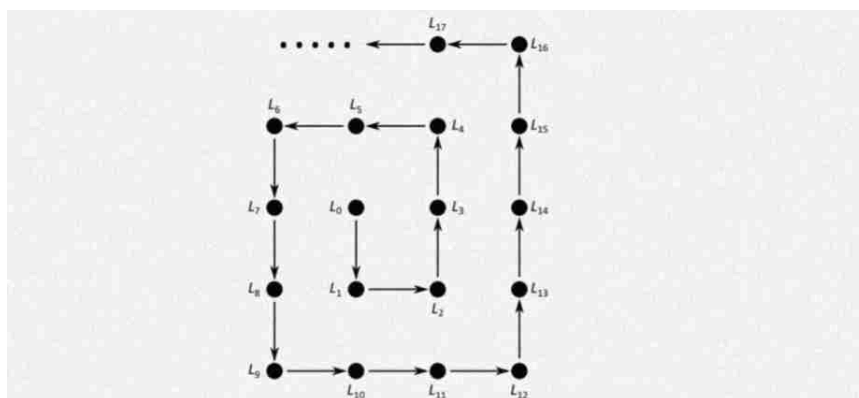
اثبات قضیه توسیع. اگر مجموعه اولیه ρ را با شعاع داخلی u و شعاع بیرونی U داشته باشیم، در ابتدا یک شبکه از نقاط در صفحه را با $\lambda = \{(nu, mu) : n, m \in \mathbb{Z}\}$ می‌سازیم که طبق شکل ۴۹-۳، همان شبکه اعداد صحیح است که در u ضرب شده است. توجه داشته باشید که برای این شبکه، هر دیسک با شعاع u حداقل با یکی از این نقاط برخورد خواهد داشت. از آن جایی که هر کاشی اولیه شامل یک دیسک با شعاع u است، این به این معنی است که هر کاشی متجانس با یک کاشی اولیه حداقل با یکی از نقاط در شبکه برخورد خواهد کرد.



شکل ۴۹-۳: هر دیسک با شعاع u شامل نقاط شبکه است.

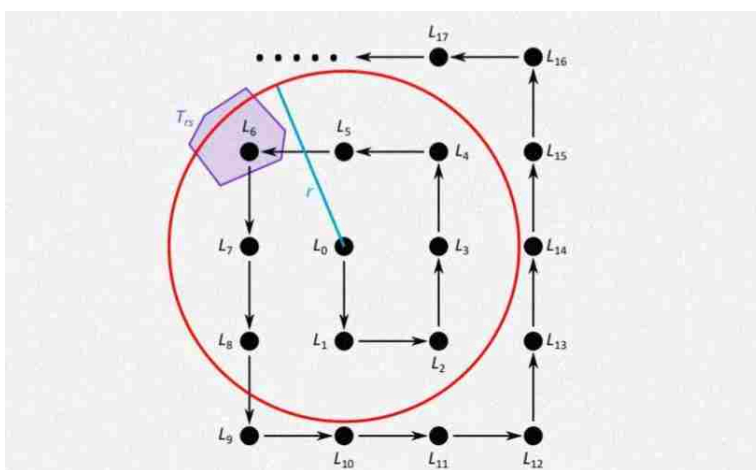
برای راحتی، یک لیست از همه نقاط موجود در شبکه تهیه می‌کنیم. طبق شکل ۵۰-۳، این کار را با شروع از مبدأ و سپس به صورت مارپیچ حول مبدأ می‌چرخیم که هر نقطه بعدی در لیست نقاط مارپیچ را ثبت کند.

هدف ما، ساخت یک کاشی‌کاری از تمام صفحه به گونه‌ای است که کاشی‌ها به نحوی چیده شوند که کاشی n ام شامل نقطه L_{n-1} باشد.



شکل ۵-۳: لیست کردن تمام نقاط موجود در شبکه A .

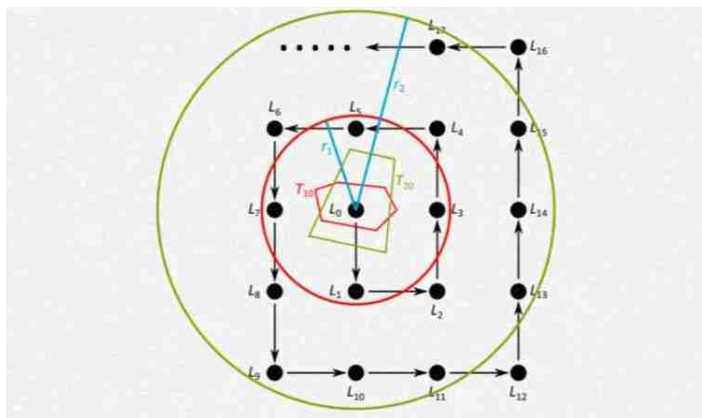
فرض کنید $D(L_0, r)$ دیسک بسته با شعاع r و مرکز L_0 باشد که $r = 1, 2, 3, \dots$. در این صورت طبق فرضیه‌ها، برای هر مقدار r می‌توانیم وصله A_r را بسازیم که شامل دیسک متناظر باشد. اگر r به اندازه‌ای بزرگ انتخاب شده باشد که دیسک شامل L_s باشد آنگاه طبق شکل ۳-۳۲، T_{rs} کاشی موجود در A_r خواهد بود که شامل L_s می‌شود. اگر بیشتر از یک کاشی در وصله شامل L_s باشد، L_s روی یک یال یا یک رأس قرار می‌گیرد و می‌توانیم T_{rs} را به گونه‌ای انتخاب کنیم که هر کاشی شامل L_s باشد. شکل ۳-۵۱، کاشی T_{16} که شامل L_6 در وصله A_1 است را به تصویر می‌کشد.



شکل ۳-۵۱: تعریف T_{rs}

حال دنباله $S_0 = \{T_{10}, T_{20}, T_{30}, \dots\}$ ، شامل کاشی‌هایی از وصله‌های A_1, A_2, \dots که شامل L_0 هستند را در نظر می‌گیریم. دو عضو اول این دنبال در شکل ۳-۵۲ به تصویر کشیده شده‌اند. از آن جایی که ρ متناهی است، طبق اصل لانه کبوتری، یک زیردنباله S'_1 از S_0 با کاشی‌های همگی متجانس با یک تک کاشی اولیه T_0 وجود خواهد داشت. از آن جایی که همه کاشی‌ها شامل نقطه L_0 هستند، طبق لم انتخاب، زیردنباله S''_1 از S'_1 وجود دارد که به یک کاشی T'_1 متجانس با T_0 و شامل نقطه L_0 ، میل می‌کند که اولین کاشی در کاشی‌کاری‌ای است که می‌خواهیم بسازیم.

حال دنباله کاشی‌های $S_1 = \{T_{r1}\}$ را در نظر می‌گیریم که تنها مقادیری از r را که در زیردنباله نهایی S''_1 از مرحله قبلی ظاهر شده‌اند را شامل می‌شود. طبق تعریف، هر یک از این کاشی‌ها شامل L_1 است.



شکل ۳-۵۲: کاشی‌های T_{10} و T_{20} هر دو شامل L_0 هستند.

دقیقا طبق مرحله آخر، می‌توانیم یک زیردنباله S'_1 که شامل تنها کاشی‌های متجانس با تک کاشی اولیه T_1 است بسازیم و دوباره طبق لم انتخاب، یک زیردنباله S''_1 وجود دارد که به یک کاشی T'_1 که متجانس با T_1 که شامل نقطه L_1 است، میل می‌کند.

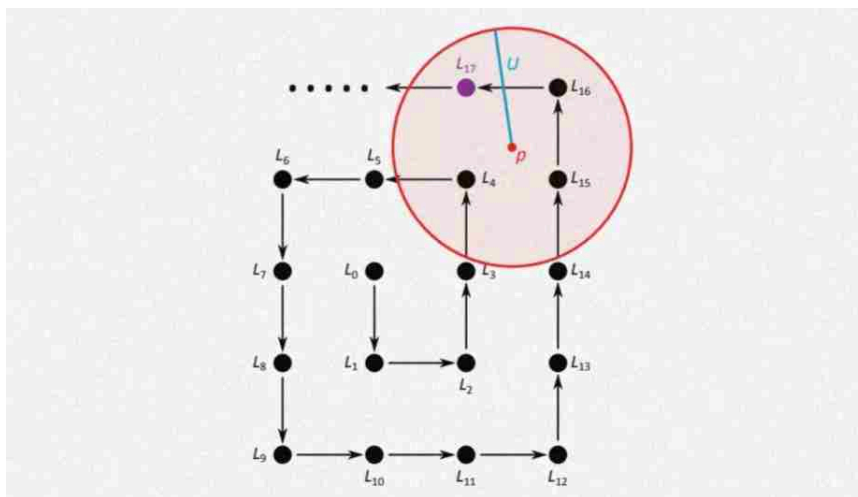
از این جا با این روش ادامه می‌دهیم. در مرحله m ام، دنباله $S_m = \{T_{rm}\}$ از کاشی‌ها را در نظر می‌گیریم که تنها شامل شعاع r به اندازه کافی بزرگ که L_m دیسک متناظر باشد و در دنباله پیشین S''_{m-1} ظاهر می‌شود، است. یک زیردنباله S'_m که همگی متناظر با کاشی اولیه T_m هستند، می‌یابیم و سپس یک زیردنباله S''_m همگرا به یک کاشی T'_m که متجانس با T_m و شامل نقطه L_m است می‌یابیم.

ادعا: مجموعه $\tau = \{T'_0, T'_1, T'_2, \dots\}$ یک کاشی‌کاری از صفحه توسط ρ تشکیل می‌دهد.

برای اثبات این ادعا، از آن جایی که ممکن است کاشی‌های تکراری در لیست موجود باشند، برای راحتی، آن‌ها را حذف می‌کنیم تا هر کاشی موجود در دنباله منحصر به فرد باشد. هم‌چنین توجه داشته باشید که ما قبلا نشان داده‌ایم که هر کاشی متجانس با یک کاشی از مجموعه اولیه ρ خواهد بود. پس کافی است نشان بدهیم که

مجموعه کاشی‌ها هم یک پوشش و هم یک بسته‌بندی از صفحه است. برای اثبات پوشش، فرض کنید p یک نقطه در صفحه باشد. کافی است نشان دهیم که در حداقل یک کاشی از τ' قرار می‌گیرد. دیسک $D(p, U)$ را که شعاع بیرونی برای مجموعه اولیه ρ باشد، در نظر بگیرید. از آن جایی که هر نقطه در صفحه با ماکسیم فاصله $U < u/\sqrt{2}$ از یک نقطه شبکه است، این دیسک شامل نقاط شبکه خواهد بود. طبق شکل ۳-۵۳، فرض کنید L_m نقطه شبکه در $D(p, U)$ با بزرگ‌ترین اشتراک باشد. حال وصله‌های A_r را در نظر می‌گیریم که برای مقادیر r متناظر با دنباله S_m'' ، دیسک $D(L_m, r)$ را بپوشانند. هم‌چنین فرض می‌کنیم که r به اندازه کافی بزرگ است که هم p و هم L_m در A_r قرار بگیرند. برای هر r مجموعه کاشی‌های $\tau_r = \{T_{r0}, T_{r1}, \dots, T_{rm}\}$ را در نظر بگیرید. همه این کاشی‌ها متعلق به وصله A_r هستند. حداقل یکی از آن‌ها شامل p است و هیچ‌کدام در نواحی داخلی دارای هم‌پوشانی نیستند.

حال، همان‌طور که r توسط مقادیر متناظر با S_m'' به ∞ میل می‌کند، هر کاشی در τ_r به یک کاشی در $\tau'_m = \{T'_0, T'_1, T'_2, \dots, T'_m\}$ میل خواهد کرد. پس اجتماع کاشی‌ها در τ_r به اجتماع کاشی‌ها در τ'_m میل می‌کند. از آن جایی که اجتماع کاشی‌ها در τ_r برای هر r شامل p است، پس اجتماع کاشی‌ها در τ'_m نیز شامل آن خواهد بود. این ثابت می‌کند که یک کاشی در τ' شامل p وجود دارد.



شکل ۳-۵۳: انتخاب L_m

حال اثبات می‌کنیم که τ' یک بسته‌بندی است. کافی است نشان دهیم که برای هر نقطه p در صفحه، نمی‌تواند در ناحیه داخلی دو کاشی قرار بگیرد. فرض کنید p در دو کاشی T'_j و T'_i از τ' قرار داشته باشد. سپس برای یک ϵ ، دیسک-اپسیلون باز $D(p, \epsilon)$ در هر دو کاشی وجود خواهد داشت ولی در این صورت برای یک r به اندازه کافی بزرگ به طوری که $\delta(T_{rj}, T'_j)$ و $\delta(T_{ri}, T'_i)$ به اندازه کافی کوچک باشند و از آن جایی که T_{ri}

متجانس با T'_i و T_{ri} متجانس با T'_j است، دو کاشی T_{ri} و T_{rj} باید در نواحی داخلی در نقطه p هم‌پوشانی داشته باشند که با این واقعیت که هر دو از یک وصله A_r هستند در تناقض است. این اثبات قضیه توسیع را کامل می‌کند. \square

۵.۳ کاشی‌کاری متناوب

در بخش‌های قبلی، گروه‌های فریز را مطرح کردیم که گروه‌های تقارنی‌ای شامل انتقال‌هایی تنها در یک جهت موازی بودند. همچنین گروه‌های کاغذدیواری را مشاهده کردیم که گروه‌های تقارنی‌ای شامل انتقال‌هایی در بیشتر از یک جهت غیرموازی بودند. در این بخش، نتیجه غیرمنتظره‌ای را اثبات می‌کنیم که یک مجموعه اولیه چندضلعی یک کاشی‌کاری شامل یک گروه متقارن که یک گروه فریز است باید یک کاشی‌کاری با یک گروه متقارن که یک گروه کاغذدیواری است نیز تولید کند. توجه داشته باشید که نیازی نیست از همه کاشی‌های اولیه موجود در مجموعه اولیه استفاده کنیم.

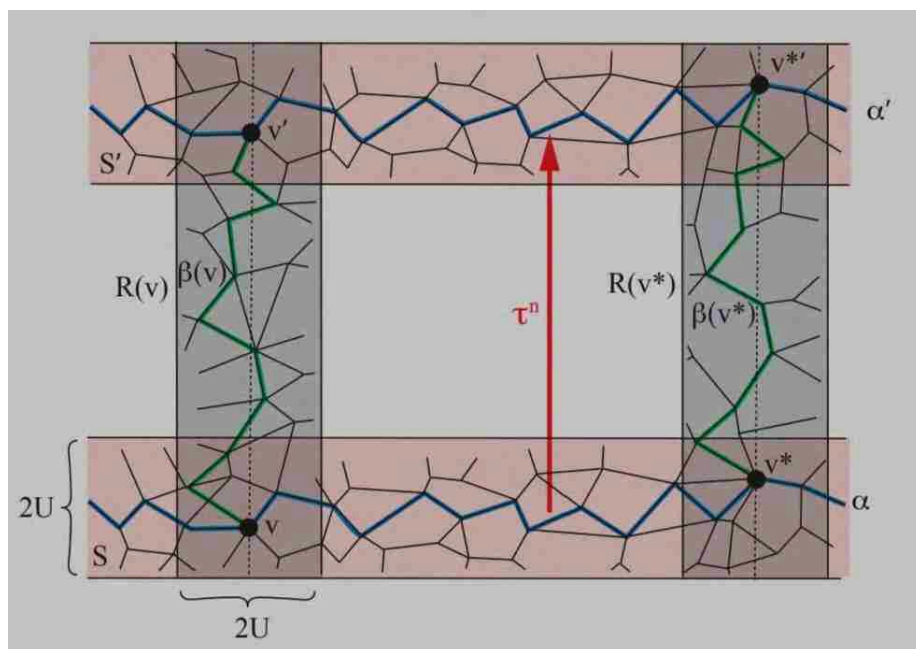
قضیه ۳۲-۳. فرض کنید ρ یک مجموعه اولیه شامل کاشی‌های چندضلعی باشد. اگر این مجموعه اولیه یک کاشی‌کاری یال به یال \mathcal{S} را با تقارن انتقالی تولید کند آنگاه ρ یک کاشی‌کاری متناوب یال به یال \mathcal{S}' را تولید خواهد کرد.

اثبات. فرض کنید τ یک انتقال در گروه متقارن \mathcal{S} به اندازه x باشد. برای راحتی تصور می‌کنیم این انتقال در جهت عمودی باشد. فرض کنید U شعاع بیرونی ρ باشد و یک نوار بی‌نهایت S با عرض $2U$ عمود بر جهت τ طبق شکل، تعریف کنیم.

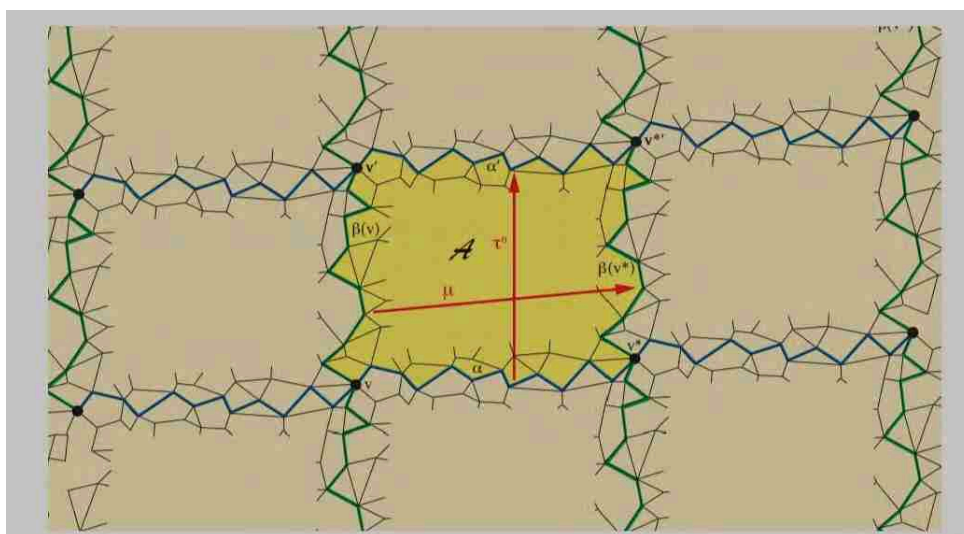
از آن جایی که S به اندازه کافی پهن است که هیچ کاشی‌ای نتواند هر دو مرز آن را قطع کند، می‌توانیم یک مسیر بی‌نهایت α در S که در یال‌های کاشی‌کاری طبق شکل شامل شده است را بیابیم. عدد صحیح n را به اندازه کافی بزرگ انتخاب می‌کنیم تا $S \cap \tau^n(S) = \emptyset$. فرض کنید $S' = \tau^n(S)$ آنگاه $\alpha' = \tau^n(\alpha)$ یک مسیر یالی در S گسسته از α خواهد بود. فرض کنید v یک بردار ثابت در α باشد. توجه کنید در این صورت $v' = \tau^n(v)$ یک رأس از کاشی‌کاری در $\alpha' \subset S'$ خواهد بود.

طبق شکل ۵۴-۳، مستطیل سایه‌دار $R(v)$ را می‌سازیم که با قرارگیری v و در نتیجه v' بر روی خط میانی عمودی خط چین شده برای ایجاد عرض به اندازه $2U$ و قرارگیری یال‌های بالا و پایین بر روی دورترین خط مرزهایی از S و S' تعریف می‌کنیم. توجه داشته باشید که ارتفاع مستطیل $R(v)$ ، $2U + nx$ است و چون کاشی‌ها نمی‌توانند در فاصله بیشتر از $2U$ گسترش پیدا کنند، باید یک مسیر یالی در $R(v)$ از v تا v' وجود داشته باشد و آن را $\beta(v)$ نام گذاری می‌کنیم.

اگر v انتخاب شده را تغییر بدهیم، همه مستطیل‌های $R(v)$ دقیقاً به همان اندازه خواهد بود و هر کدام تنها با تعداد متناهی کاشی از \mathcal{T} تماس خواهند داشت.



شکل ۳-۵۴: شکل مربوط به قضیه تناوبی



شکل ۳-۵۵: به دست آوردن یک کاشی‌کاری متناوب از A

ادعا. بر روی تمام رئوس در α حداکثر می‌تواند تعداد متناهی مسیره‌های نامتجانس $\beta(v)$ متناظر در $R(v)$ وجود داشته باشد.

برای اثبات این ادعا، مستقل از این کاشی‌کاری خاص، با یک رأس v در مرکز یک دیسک D با شعاع $3U + nx$ شروع می‌کنیم. توجه کنید که یک مستطیل $R(v)$ شامل v بر روی خط مرکزی، به طور کامل در D شامل می‌شود و با مجموعه اولیه ثابت، وصله‌ای شامل D می‌سازیم. زمانی که تک کاشی T با قرارگیری گوشه آن بر رأس v را در نظر بگیریم، کاشی دوم را تنها به تعداد متناهی روش می‌توانیم به صورت یال به یال به T بچسبانیم. همانطور که به ساخت وصله با اضافه کردن کاشی‌ها می‌پردازیم، هنوز هم تعداد متناهی روش برای این کار وجود خواهد داشت. در نتیجه، اگر دو وصله را هم‌ارز در نظر بگیریم به طوری که وصله دوم دوران یافته اولی به مرکز v باشد، آنگاه تنها تعداد متناهی از چنین کلاس‌های هم‌ارزی وجود خواهد داشت. اگر چنین وصله‌ای به مرکز v که شامل D است را داشته باشیم، تنها تعداد متناهی مسیر یالی بین v و هر رأس دیگری مانند v' در D وجود خواهد داشت. حال، اگر مستطیل $R(v)$ را به هر روشی در D به طوری که شامل v و یک رأس دیگر v' بر روی خط مرکزی باشد، قرار بدهیم، حداکثر تعداد متناهی مسیر یالی بین v و v' در $R(v)$ در این وصله به خصوص، موجود خواهد بود. از آن جایی که حداکثر تعداد متناهی از چنین وصله‌هایی وجود دارد، تنها تعداد متناهی از گزینه‌های متمایز برای $\beta(v)$ بر روی تمام کاشی‌کاری‌های این مجموعه اولیه و روی تمام رئوس v در α وجود خواهد داشت.

حال به کاشی‌کاری خاص \mathcal{T} برمیگردیم. از آن جایی که تعداد متناهی رأس در α وجود دارد، طبق اصل لانه کبوتری باید دو رأس v و v^* در α به طوری که $\beta(v)$ و $\beta(v^*)$ متجانس باشند و این تجانس v را به v^* و v' را به v'^* ببرد، وجود داشته باشد. توجه کنید که چون هر مسیر یالی دارای یک نقطه انتهایی هم‌ارز با دیگری به وسیله انتقال τ^n است، تجانس بین دو مسیر یالی می‌تواند توسط انتقال μ از صفحه ملاحظه شود. فرض کنید A یک وصله از کاشی‌ها در \mathcal{T} است که توسط $\beta(v)$ ، $\beta(v^*)$ ، قسمتی از α بین v و v^* و قسمتی از α' بین v' و $v'^* = \tau^n(v^*)$ طبق شکل محدود شده است. با انتقال‌های مکرر A توسط انتقال‌های μ ، τ^n و ترکیب‌های خطی آن، به یک کاشی‌کاری متناوب از تمام صفحه دست می‌یابیم. \square

حال به ارتباط بین رئوس، یال‌ها و کاشی‌ها در یک کاشی‌کاری متناوب می‌پردازیم و به این منظور ویژگی‌های اوایلر را معرفی می‌کنیم.

ویژگی اوایلر-ویژگی اوایلر یک پایای توپولوژیکی است، به این معنی که به یک هندسه خاص از یک شیء وابسته نیست. در ابتدا، ویژگی اوایلر را برای یک وصله در نظر می‌گیریم. وقتی که در مورد رئوس یک وصله صحبت می‌کنیم، علاوه بر رئوس موجود در ناحیه داخلی وصله، نقاطی که بر روی مرز مشترک بین دو کاشی یا بیشتر قرار گرفته‌اند را نیز در نظر می‌گیریم. برای یال‌ها نیز، علاوه بر آن‌هایی که در ناحیه داخلی وصله قرار

دارند، زیرمجموعه‌های همبند از مرز وصله که توسط دو رأس محدود شده‌اند و شامل هیچ رأسی در ناحیه داخلی نیستند را در نظر می‌گیریم.

تعریف ۳-۳۳. فرض کنید A یک وصله تولید شده توسط یک مجموعه اولیه، V تعداد رئوس در وصله، E تعداد یال و T تعداد کاشی‌ها در وصله باشد. ویژگی اویلر این وصله، با $\chi(A)$ نشان داده می‌شود و $\chi(A) = V - E + T$ تعریف می‌شود.

قضیه ۳-۳۴. برای هر وصله A ، $\chi(A) = 1$.

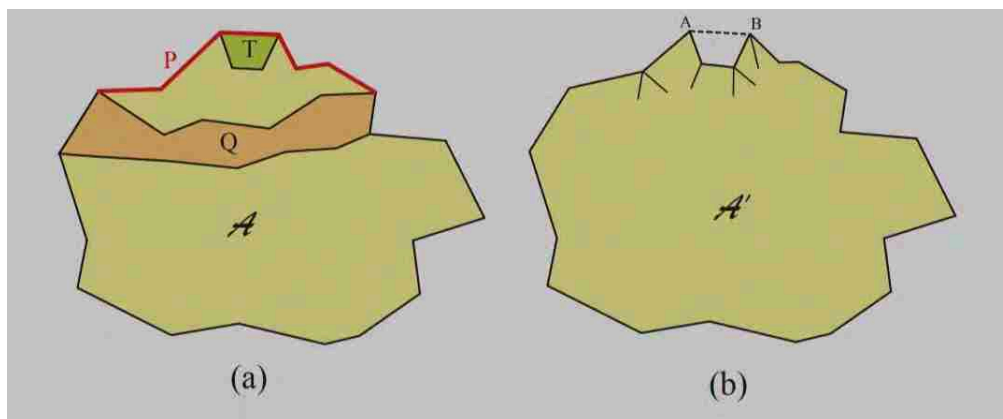
اثبات. مرز وصله A شامل یال‌ها است که هر کدام بر روی یک کاشی از وصله قرار دارند. در ابتدا، نشان می‌دهیم یک کاشی T که با مرز A در دقیقاً یک یال اشتراک داشته باشد، وجود دارد.

هر کاشی‌ای که با مرز اشتراک دارد، یک گردایه‌ای از یال‌های مجزا و/یا رئوس مجزا از یال‌ها است. فرض کنید هیچ کاشی‌ای در مرز^۴، در دقیقاً یک یال اشتراک نداشته باشد. در این صورت هر کاشی در مرز با بیشتر از یک جزء همبند اشتراک خواهد داشت پس چنین کاشی Q با حداقل یک طول مسیر غیربدهی در امتداد مرز A بین اشتراک‌ها و مرز متناظر خواهد بود. طبق شکل ۷.۰۰.۲، برای Q می‌توانیم مسیری روی ∂A که شامل حداقل تعداد یال‌ها از تمام چنین مسیرهایی برای Q است را نظیر کنیم.

حال، کاشی Q را انتخاب می‌کنیم چون دارای مسیر P با چنین ویژگی‌ای با مینیمم تعداد یال بر روی همه کاشی‌های A است. در این صورت هر کاشی T که دارای یک یال از یال‌های P است باید با ∂A در تنها یک یال اشتراک داشته باشد. دلیل آن نیز این است که طبق شکل ۳-۵۶، چون آن کاشی نمی‌تواند با Q در ناحیه داخلی اشتراک داشته باشد، پس تنها با ∂A در P اشتراک خواهد داشت. در نتیجه، اگر با ∂A در بیشتر از یک جزء همبند اشتراک داشته باشد، آنگاه تعداد یال‌های کمتری روی ∂A بین اشتراک‌های T با ∂A از Q خواهد داشت که در این صورت به تناقض می‌رسیم.

^۴مرز دارد.

^۴منظور کاشی‌ای است که اشتراکی با



شکل ۵۶-۳:

در نتیجه یک کاشی T وجود دارد که با مرز در تنها یک یال اشتراک خواهد داشت. طبق شکل، فرض کنید A' وصله تولید شده توسط A با حذف کاشی T باشد که واقعیت هم‌ارزی توپولوژیک وصله با یک دیسک را حفظ می‌کند. همچنین، یال مشترک T با مرز A را حذف می‌کند.

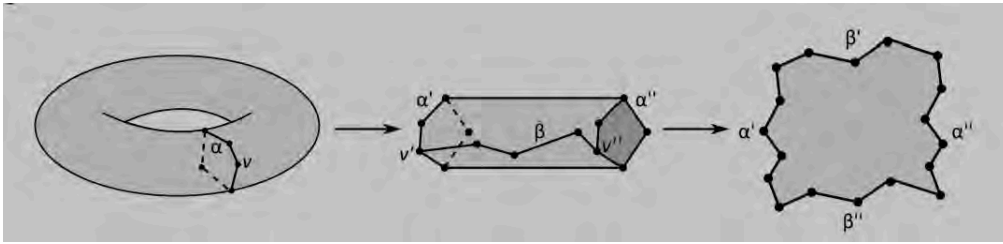
حال، هر دو رأسی که T در مرز A با آن‌ها تماس داشت را در نظر بگیرید. اگر هر کدام با دو کاشی دیگر در A تماس داشته باشد، همان رأس در A' که به نام B آن را تغییر دادیم، خواهد بود. اگر هر کدام با تنها یک کاشی دیگر در A تماس داشته باشد، که آن را A می‌نامیم، آنگاه دیگر یک رأس از مرز A' نخواهد بود. از طرفی، چون آن رأس دیگر برای تقسیم مرز A' به یال‌ها در دسترس نخواهد بود، تعداد یال‌ها یکی یکی کم می‌شود. بقیه رئوس موجود بر روی T به همان شکل باقی می‌مانند چون اگر در ناحیه داخلی A قرار داشتند، باید در حداقل سه کاشی مشترک باشند، پس زمانی که T حذف شود، آن‌ها روی مرز هستند و هنوز با حداقل دو کاشی اشتراک خواهند داشت.

پس، $c = 0, 1, 2$ رأس و متناظر با آن $c = 1, 2, 3$ یال را از دست می‌دهیم. در نتیجه،

$\chi(A') = \chi(A) - c + (c + 1) - 1 = \chi(A)$ می‌توانیم یکی یکی کاشی‌ها را بدون تغییر در ویژگی اویلر تا جایی حذف کنیم که تنها دو کاشی باقی بماند. از آن جایی که این وصله هنوز به صورت توپولوژیک یک دیسک است، این دو کاشی تنها در یک یال می‌توانند اشتراک داشته باشند. پس تعداد رئوس باید ۲، تعداد یال‌ها ۳ و تعداد کاشی‌ها ۲ باشد و در نتیجه $\chi(A) = 2 - 3 + 2 = 1$. □

در واقع، این قضیه به یک تنوعی از نتایج دلالت دارد و از فرمول و اثبات آن، اغلب به عنوان تولد توپولوژی یاد می‌شود. حال به اثبات نتیجه زیر می‌پردازیم.

نتیجه ۳-۳۵. اگر \mathcal{T} یک کاشی‌کاری روی یک چنبره باشد، آنگاه ویژگی اویلر این کاشی‌کاری صفر خواهد بود.

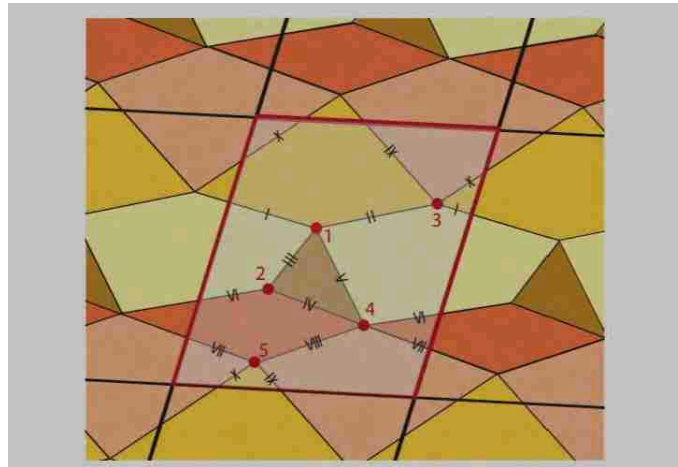


اثبات. یک رأس از کاشی‌کاری مانند v را انتخاب کنید. در این صورت باید یک حلقه α درون یال‌های \mathcal{T} قرار داشته باشد که یک دیسک از این چنبره را محدود نکند و به همان رأس طبق شکل، بازگردد. طبق شکل، اگر از α چنبره و کاشی‌کاری را ببریم، یک کاشی‌کاری \mathcal{T}' بر روی یک سیلندر C با دو کپی از هر یال در α و دو کپی از هر رأس در α که مرز آن را تشکیل می‌دهند، را نتیجه می‌دهد. فرض کنید v' و v'' یک زوج رأس متناظر با v باشند. حال یک مسیر یالی β در \mathcal{T}' از v' به v'' می‌یابیم. C و کاشی‌کاری \mathcal{T}' را از β باز می‌کنیم که وصله A را طبق شکل، نتیجه می‌دهد.

می‌دانیم طبق قضیه قبل که $\chi(A) = 1$. حال اگر تمام مراحلی که با آن به A دست یافتیم را معکوس کنیم، می‌بینیم که تعداد کاشی‌ها در A همان تعداد کاشی‌های روی چنبره است. زمانی که دو کپی β' و β'' از β بر روی هم منطبق شوند، تعداد یال‌ها به تعداد یال‌ها در β کاهش می‌یابد ولی همین اتفاق نیز برای رئوس می‌افتد که در این صورت از تعداد یال‌ها یکی بیشتر خواهند بود. پس طبق ویژگی اوایلر، $\chi(\mathcal{T}') = \chi(A) - 1 = 0$. حال زمانی که دو کپی α' و α'' از α را به هم می‌چسبانیم تا کاشی‌کاری \mathcal{T} را تولید کنیم، به طور مشابه تعداد یال‌ها و رئوس کاهش پیدا می‌کند و تغییری در ویژگی اوایلر ایجاد نمی‌کند. در نتیجه $\chi(\mathcal{T}) = \chi(\mathcal{T}') = 0$. \square

حال به کاشی‌کاری‌های متناوب برمی‌گردیم. توجه کنید که برای یک کاشی‌کاری متناوب، می‌توانیم متوازی‌الاضلاع تناوبی P را تعریف کنیم. اگر تقارن‌های انتقالی کاشی‌کاری متناوب را اجرا کنیم، متوازی‌الاضلاع تناوبی تمام صفحه را کاشی می‌کند. در نتیجه، کافی است بدانیم که کاشی‌کاری درون P به چه شکلی است تا کاشی‌کاری کل صفحه را بیابیم.

تعریف ۳-۳۶. فرض کنید کاشی‌کاری متناوب \mathcal{T} و یک متوازی‌الاضلاع تناوبی P از یک ناحیه مینیمال، به طوری که طبق شکل ضلع‌های آن شامل هیچ رأسی از \mathcal{T} نباشند را داشته باشیم. در این صورت تعداد رأس، یال و کاشی متوازی‌الاضلاع که با V_p, E_p, T_p نشان می‌دهیم را تعداد رأس، یال و کاشی ارث برده شده از چنبره متناظر تعریف می‌کنیم.



از این تعریف و نتیجه درمی‌یابیم که $V_p - E_p + T_p = 0$. به طور خاص، این بدان معناست که اگر از بین V_p ، E_p و T_p دو مقدار مشخص باشد، مقدار سوم نیز قابل محاسبه است. می‌توانیم برای محاسبه این مقادیر، بدون اشاره به چنبره، به طور مستقیم از متوازی‌الاضلاع استفاده کنیم. با در نظر گرفتن فصل مشترک کاشی‌کاری اصلی با متوازی‌الاضلاع، می‌توانیم به چسباندن یال‌های جزئی و کاشی‌های ایجاد شده فکر کنیم تا یال‌های کامل و کاشی‌های روی چنبره درست شوند و نتیجه یکسان باقی بماند. پس طبق شکل، بخش‌هایی از کاشی‌های هم‌رنگ در متوازی‌الاضلاع را مشاهده می‌کنیم که به هم می‌چسبند تا یک تک‌کاشی بر روی چنبره تشکیل دهند. پس در مجموع پنج کاشی، هر کدام به یک رنگ متفاوت، روی چنبره وجود دارند. به طور مشابه، تکه‌یال‌هایی که با اعداد رومی برچسب‌گذاری شده‌اند، در متوازی‌الاضلاع به هم می‌چسبند تا یک تک‌کاشی بر روی چنبره تشکیل دهند و در نتیجه ده یال و پنج رأس در متوازی‌الاضلاع و روی چنبره وجود خواهند داشت. پس همانطور که انتظار داشتیم $V_p - E_p + T_p = 0$. همانطور که قبلاً مطرح شد، می‌توانیم یک ناحیه مینیمال متوازی‌الاضلاع تناوبی را با استفاده از کوتاه‌ترین تقارن انتقالی $T_{\vec{v}}$ و سپس کوتاه‌ترین تقارن انتقالی $T_{\vec{w}}$ که با اولی غیرموازی است تولید شود.

لم ۳۷-۳. فرض کنید \mathcal{F} یک کاشی‌کاری متناوب باشد در این صورت مقادیر V_P ، E_P و T_P با تغییر انتخاب ناحیه مینیمال متوازی‌الاضلاع تناوبی، تغییر نمی‌کنند.

اثبات. دلیل آن پیرو این واقعیت است که کاشی‌کاری به ارث رسیده توسط چنبره در همه موارد یکسان است. \square

متوازی‌الاضلاع تناوبی P' که ناحیه مینیمال نباشد، دارای یک ناحیه یک عدد صحیح مضرب k از یک ناحیه مینیمال متوازی‌الاضلاع P است. در این صورت هر کدام از $V_{P'}$ ، $E_{P'}$ و $T_{P'}$ توسط ضرب V_P ، E_P و

T_p در k به دست می‌آیند ولی این به معنی است که نسبت‌های V_p/T_p و E_p/T_p به انتخاب متوازی‌الاضلاع تناوبی وابسته نیستند.

تعریف ۳-۳۸. اگر \mathcal{T} یک کاشی‌کاری متناوب باشد، میانگین تعداد رئوس برای هر کاشی، یعنی V_p/T_p ، که آن را با $\bar{v}(\mathcal{T})$ نشان می‌دهیم، و میانگین تعداد یال‌ها برای هر کاشی یعنی E_p/T_p ، که آن را با $\bar{e}(\mathcal{T})$ نشان می‌دهیم،
تعریف می‌کنیم.

از آن جایی که $V_p - E_p + T_p = 0$ ، می‌دانیم $V_p/T_p - E_p/T_p + 1 = 0$ و در نتیجه $\bar{e}(\mathcal{T}) = \bar{v}(\mathcal{T}) + 1$.
برای مثال، در کاشی‌کاری شش‌ضلعی منظم، هر کاشی دارای شش رأس است اما هر رأس روی سه کاشی متفاوت ظاهر شده است. از آن جایی که این مسئله برای هر کاشی و رأس درست است، در هر متوازی‌الاضلاع تناوبی ضلعی نیز صدق خواهد کرد. پس $\bar{v}(\mathcal{T}) = 6/2 = 3$ به طور مشابه، هر کاشی دارای شش یال و هر یال بر روی دو کاشی ظاهر می‌شود، پس $\bar{e}(\mathcal{T}) = 6/2 = 3$ و در نتیجه $\bar{e}(\mathcal{T}) = \bar{v}(\mathcal{T}) + 1$.

فصل ۴

فضاهای انتقال

۱.۰.۴ انتقال‌های کامل

اطلاعات اغلب به عنوان دنباله‌ای از نمادهای گسسته نشان داده می‌شود که از یک مجموعه محدود ثابت گرفته شده است. برای مثال، یک کتاب، یک دنباله طولانی از حروف، علائم نگارشی و نمادهای دیگر است. یک عدد حقیقی، توسط دنباله نامتناهی از نمادها به شکل بسط اعشاری توصیف می‌شود و کامپیوترها نیز داده‌ها را به صورت دنباله‌ای از صفر و یک ذخیره می‌کنند. در این فصل به معرفی نظریه انتقال‌ها که بخشی از حوزه در حال توسعه از سیستم‌های دینامیکی به نام دینامیک نمادین است، می‌پردازیم. در ابتدا، به یادآوری برخی از مفاهیم موردنیاز می‌پردازیم.

تعریف ۴-۱. یک نگاشت پیوسته، تابعی بین دو فضای توپولوژیک هست که ساختار توپولوژیکی را حفظ می‌کند. به عبارت دیگر، فرض کنید X و Y فضاهای توپولوژیک باشند. یک نگاشت $f : X \rightarrow Y$ پیوسته است اگر و تنها اگر تصویر اولیه هر مجموعه باز در Y در X نیز باز باشد.

تعریف ۴-۲. فرض کنید (X, d) یک فضای متریک باشد. گوئیم یک دنباله (x_n) از نقاط در X یک دنباله کوشی در (X, d) است اگر برای $\epsilon > 0$ یک عدد صحیح N موجود باشد به طوری که به ازای هر $n, m \geq N$ ، $d(x_n, x_m) < \epsilon$. فضای متریک (X, d) کامل است اگر هر دنباله کوشی در X همگرا باشد.

تعریف ۴-۳. یک فضای متریک (X, d) کاملاً کراندار است اگر برای هر $\epsilon > 0$ یک پوشش متناهی از X توسط ϵ -گویی‌ها موجود باشد.

برای مثال، تحت متر $d(a, b) = |a - b|$ ، خط حقیقی \mathbb{R} کامل است اما کاملاً کراندار نیست در حالی که زیرفضای $(-1, 1)$ کاملاً کراندار است اما کامل نیست. زیرفضای $[-1, 1]$ هم کامل و هم کاملاً کراندار است.

تعریف ۴-۴. یک فضای متریک (X, d) فشرده است، اگر و تنها اگر هم کامل و هم کاملاً کراندار باشد.

تعریف ۴-۵. یک سیستم دینامیکی (X, f) شامل یک فضای متریک فشرده X همراه با نگاشت پیوسته $f: X \rightarrow X$ است. برای هر نقطه $x \in X$ ، مسیر یا مدار را $O(x) = \{f^n(x) | n \in \mathbb{Z}\}$ تعریف می‌کنیم.

برای مثال، سیستم دینامیکی (S^1, R_α) را در نظر بگیرید که S^1 دایره واحد در \mathbb{C} و $R_\alpha: S^1 \rightarrow S^1$ نگاشتی است که دایره را به اندازه $2\pi\alpha$ دوران می‌دهد. پس $z \mapsto e^{i2\pi\alpha}z$ که چون z در دایره واحد قرار دارد، پس فرم آن به صورت $z = e^{i2\pi x}$ خواهد بود که $x \in [0, 1)$ در نتیجه، $R_\alpha(z) = e^{i2\pi(x+\alpha)}$.

تعریف ۴-۶. اگر $f(x) = x$ آنگاه x یک نقطه ثابت است. اگر برای مقادیری از $n \in \mathbb{Z}$ ، $f^n(x) = x$ ، آنگاه x یک نقطه تناوبی با تناوب n خواهد بود. $Fix(f)$ را مجموعه‌ای از نقاط ثابت در X و $P_n(f)$ را مجموعه نقاط تناوبی با تناوب n تعریف می‌کنیم.

توجه داشته باشید، زیرمجموعه $Y \subseteq X$ تحت f پایا است اگر $f(Y) = Y$. اگر x کم‌ترین تناوب k را دارا باشد، آنگاه دارای تناوب $2k, 3k, \dots$ نیز است و هر تناوب از x یک مضربی از k خواهد بود.

تعریف ۴-۷. در هر یک از مثال‌های مطرح شده در ابتدای بخش، مجموعه‌ای متناهی از نمادها مانند A وجود دارد که آن را الفبا می‌نامیم. اعضای A را حروف نیز می‌نامند و آن‌ها را معمولاً با a, b, c, \dots و در مواردی با $0, 1, 2, \dots$ نشان می‌دهند.

با این که در دنیای حقیقی نمادها متناهی هستند، در بسیاری از موارد دنباله‌های طولانی را از هر دو طرف نامتناهی در نظر می‌گیریم. بنابراین هدف اصلی، مطالعه گردایه‌ای از دنباله‌های در هر دو طرف نامتناهی از الفبای متناهی A خواهد بود. چنین دنباله‌ای را با $x = (x_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ یا $x = \dots x_{-2} x_{-1} x_0 x_1 \dots$ نمایش می‌دهیم که برای هر i ، $x_i \in A$. نماد x_i به معنی i امین مختصات x است. برای یافتن صفرمین مختصات، از بسط اعشاری استفاده می‌کنیم. برای مثال مختصات‌های $x = 0.11$ به صورت $x = 0.11$ ، $x_0 = 1$ ، $x_{-1} = 0$ خواهد بود.

تعریف ۴-۸. اگر A یک الفبای متناهی باشد، آنگاه A -انتقال کامل یک گردایه‌ای از همه دنباله‌های در هر دو طرف نامتناهی از نمادهای A است و آن را با $\{x = (x_i)_{i \in \mathbb{Z}} : x_i \in A, i \in \mathbb{Z}\}$ نشان می‌دهیم. r -انتقال کامل، یک انتقال کامل بر روی الفبای $\{0, 1, \dots, r-1\}$ است.

در اینجا $A^{\mathbb{Z}}$ نماد استاندارد ریاضی برای مجموعه تمام توابع از \mathbb{Z} به A است که چنین توابعی همان دنباله‌های در هر دو طرف نامتناهی از اعضای A هستند. هر دنباله $x \in A^{\mathbb{Z}}$ یک نقطه از انتقال کامل نامیده می‌شود. به نقاط ۲- انتقال کامل نیز دنباله‌های دوتایی گفته می‌شود. اگر $|A| = r$ ، آنگاه یک تناظری بین هر دو انتقال کامل به وجود خواهد آمد و در مواقعی تمایز بین آن‌ها نیز غیرقابل تشخیص خواهد بود. برای مثال، راحت‌تر است انتقال کامل روی $\{-1, +1\}$ را به عنوان ۲- انتقال کامل در نظر گرفت.

تعریف ۹-۴. دنباله‌ای متناهی از حروف A یک بلوک یا کلمه نامیده می‌شود.

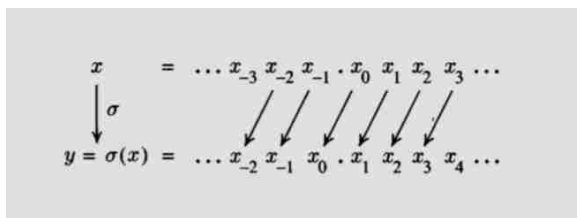
توجه داشته باشید، یک n -بلوک، یک بلوک به طول n است. مجموعه همه k -بلوک‌ها روی A را با A^k نمایش داده می‌شود.

نمادهای موجود در بلوک‌ها را بدون آن که با ویرگول یا سایر علائم نگارشی جدا کنیم، نشان می‌دهیم. یک بلوک بر روی $A = \{a, b\}$ عبارتی شبیه به $ababbabbb$ خواهد بود. اگر دنباله‌ای شامل هیچ نمادی نباشد، به آن بلوک، بلوک خالی می‌گوییم و آن را با ϵ نشان می‌دهیم و طول آن $|\epsilon| = 0$ خواهد بود.

تعریف ۱۰-۴. یک زیربلوک یا زیرکلمه از $u = a_1 a_2 \dots a_k$ ، یک بلوک به فرم $a_i a_{i+1} \dots a_j$ است که $1 \leq i \leq j \leq k$.

اگر x یک نقطه در $A^{\mathbb{Z}}$ باشد و $i \leq j$ ، آنگاه بلوک مختصات‌ها در x از i به j را با $x_{[i,j]} = x_i x_{i+1} \dots x_j$ نشان می‌دهیم. اگر $i > j$ ، $x_{[i,j]}$ را ϵ تعریف می‌کنیم. هم‌چنین برای راحتی آن را با $x_{[i,j]} = x_i x_{i+1} \dots x_{j-1}$ نیز نمایش می‌دهیم.

تعریف ۱۱-۴. طبق شکل ۱-۴، نگاشت انتقال σ روی انتقال کامل $A^{\mathbb{Z}}$ ، نقطه x را به $y = \sigma(x)$ می‌برد که i امین مختصات آن $y_i = x_{i+1}$ است.



شکل ۱-۴: نگاشت انتقال

وارون این نگاشت، σ^{-1} که هر یک از دنباله‌ها را به سمت راست انتقال می‌دهد، بیانگر یک به یک و پوشا بودن این نگاشت است. ترکیب $\sigma^k = \sigma \circ \dots \circ \sigma$ که در آن $k > 0$ ، دنباله‌ها را k تا به سمت چپ می‌برد. در

حالی که σ^{-k} به همان اندازه آن‌ها را به راست انتقال می‌دهد و به همین خاطر به $A^{\mathbb{Z}}$ یک انتقال کامل گفته می‌شود. از نگاهت انتقال برای نمایش بسیاری از ایده‌ها در دینامیک نمادین استفاده می‌شود.

۲.۰.۴ فضاهای انتقال

در این بخش به مفهوم اساسی فضای انتقال می‌پردازیم که زیرمجموعه‌ای از نقاط در یک انتقال کامل خواهد بود که مجموعه‌ای ثابت از محدودیت‌ها را برآورده می‌کند. برای مثال، در کد مورس از نماد نقطه، خط تیره و مکث استفاده شده است. در این کد، الفبای انگلیسی با استفاده از بلوک‌های نقطه و خط تیره با طول حداکثر شش که با یک مکث از هم جدا شده‌اند منتقل می‌شوند به طوری که هر بلوک به طول حداقل هفت که شامل مکث نیست، ممنوع خواهد بود. در واقع این بلوک‌های حداکثر شش یک فضای انتقال خواهند بود. در ادامه به بررسی دقیق‌تر این مفهوم می‌پردازیم.

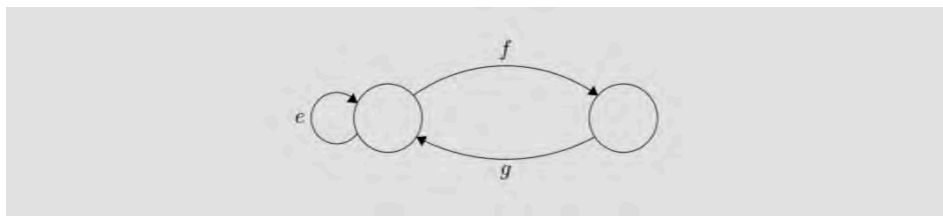
اگر $x \in A^{\mathbb{Z}}$ و ω یک بلوک روی A باشد، می‌گوییم ω در x رخ می‌دهد اگر اندیس‌های i و j وجود داشته باشند به طوری که $\omega = x_{[i,j]}$. توجه داشته باشید که چون $\epsilon = x_{[1,0]}$ ، بلوک خالی ϵ در هر x رخ می‌دهد.

تعریف ۱۲-۴. فرض کنید F گردایه‌ای از بلوک‌ها روی A و نام اعضای آن بلوک‌های ممنوعه باشند. در این صورت، برای هر F ، X_F زیرمجموعه‌ای از دنباله‌های $A^{\mathbb{Z}}$ است که شامل هیچ بلوکی در F نیست. یک فضای انتقال، زیرمجموعه X از انتقال کامل $A^{\mathbb{Z}}$ است به طوری که برای یک گردایه F از بلوک‌های ممنوعه روی A ، $X = X_F$ است.

گردایه F ممکن است متناهی یا نامتناهی باشد. در هر حالت قابل شمارش است چون می‌توان اعضای آن را به ترتیب طول بلوک‌ها در یک لیست جایگذاری کنیم. ممکن است یک فضای انتقال توسط چند گردایه F توصیف شود. توجه داشته باشید مجموعه \emptyset یک فضای انتقال است که $F = A$. اگر یک فضای انتقال X در یک فضای دیگر مانند Y شامل شود، X زیرانتقال Y خواهد بود.

برای مثال X مجموعه همه دنباله‌های دوتایی‌ای باشد که دو تا ۱ نتوانند کنار هم قرار بگیرند، $X = X_F$ که $F = \{11\}$ و به این انتقال، انتقال میانگین طلایی گفته می‌شود.

در مثال بعدی به نحوه فهرست کردن یک گردایه مناسب F از بلوک‌های ممنوعه که $X = X_F$ می‌پردازیم. فرض کنید $A = \{e, f, g\}$ و X مجموعه نقاط در A -انتقال کامل باشد که بعد از e فقط e یا f ، بعد از f فقط g و بعد از g فقط e یا f خواهند آمد. طبق شکل زیر، یک نقطه در این فضا یک مسیر از دو طرف نامتناهی خواهد بود. در این مثال، انتقال از نوع متناهی است که در ادامه به آن می‌پردازیم.



شکل ۲-۴: گراف مثال انتقال متناهی

۳.۰.۴ محدودیت نوع متناهی

انتقال‌های نوع متناهی، علی‌رغم ساده بودن، نقش مهمی در موضوعات مختلف ریاضی از جمله دینامیک نهادین ایفا می‌کنند. هم‌چنین، مطالعه آن‌ها راه حل‌هایی را برای مشکلات مهم عملی، مانند یافتن طرح‌های کدگذاری کارآمد برای ذخیره داده‌ها بر روی دیسک‌های رایانه ارائه کرده است.

تعریف ۱۳-۴. یک انتقال نوع متناهی، SFT ، فضای انتقالی است که می‌تواند توسط یک مجموعه متناهی از عوامل ممنوعه توصیف شود. یک فضای انتقال X برای یک مجموعه متناهی \mathbb{F} دارای فرم $X_{\mathbb{F}}$ خواهد بود.

تمام مثال‌های مطرح شده در قسمت قبل، انتقالی از نوع متناهی بودند. توجه داشته باشید که می‌توان یک انتقال از نوع متناهی X را توسط یک مجموعه نامتناهی از بلوک‌های ممنوعه نیز تعریف کرد.

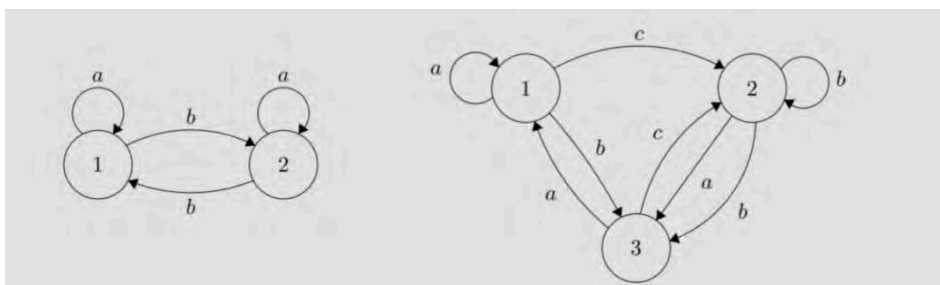
تعریف ۱۴-۴. یک SFT ، M -مرحله‌ای یا دارای حافظه M است، اگر بتوان توسط یک گردایه‌ای از بلوک‌های ممنوعه که همگی به طول $M + 1$ هستند، آن را توصیف کرد.

برای توضیح اختلاف M و $M + 1$ ، فرض کنید همه بلوک‌های ممنوعه دارای طول $M + 1$ باشند. $u = a_1 a_2 \dots a_n$ یک بلوک به طول n باشد که بسیار بزرگ‌تر از M است. فرض کنید یک ماشین، نمادهای u را یکی پس از دیگری از چپ به راست بخواند. برای این که این ماشین تشخیص دهد که آیا u شامل یک بلوک ممنوعه است یا خیر، کافی است نمادهای M قبلی که خوانده شده است را به یاد بیاورد؛ به عبارت دیگر تنها نیاز به M مرحله از حافظه است.

فرض کنید یال‌های گراف با نمادهای الفبای A برچسب‌گذاری شده باشند که دو یال یا بیشتر می‌توانند دارای برچسب‌های یکسان باشند. هر قدم از هر دو طرف نامتناهی روی این گراف، یک نقطه در انتقال کامل $A^{\mathbb{Z}}$ با خواندن برچسب‌ها از روی یال‌ها را نتیجه می‌دهد. به مجموعه این نقاط با چنین ویژگی‌هایی، انتقال سوفیک گوئیم.

تعریف ۴-۱۵. یک گراف برچسب‌دار ζ یک زوج مرتب (G, L) است که G یک گراف با مجموعه یال ϵ و برچسب‌گذاری $A : \epsilon \rightarrow A$ به هر یال ϵ از G یک برچسب $L(e)$ از الفبای متناهی A اختصاص می‌دهد.

برچسب‌گذاری L می‌تواند هر تخصیص حروف از یک الفبای A به یال‌های G باشد. از طرفی، برای هر $e \in \epsilon$ می‌توانیم فرض کنیم $A = \epsilon$ و $L(e) = e$ که یک برچسب‌گذاری یک‌به‌یک از یال‌ها توسط نام‌هایشان را نتیجه بدهد. از طرف دیگر، A می‌تواند شامل یک تک حرف a و همه یال‌ها می‌توانند با a برچسب‌گذاری شده باشند به طور که طبق شکل ۳-۴، برای هر $e \in \epsilon$ ، $L(e) = a$.



شکل ۳-۴: دو مثال از گراف‌های برچسب‌گذاری شده

همانطور که مشاهده می‌کنید بسیاری از یال‌ها دارای برچسب یکسان هستند. به طور معمول از کاراکترهایی مانند e, f, g برای نام یال‌ها و از a, b, c یا اعداد صحیح کوچک برای برچسب آن‌ها استفاده می‌کنیم.

تعریف ۴-۱۶. به طور دقیق‌تر، یک زیرمجموعه X از یک انتقال کامل، یک انتقال سوفیک است اگر برای یک گراف برچسب‌دار ζ ، $X = X_\zeta$. به عبارت دیگر، یک انتقال سوفیک X یک گراف برچسب‌دار ζ است که $X_\zeta = X$. نگاشت انتقال روی X_ζ با δ_ζ نشان داده می‌شود.

۴.۰.۴ تهی یا غیرتهی؟

اگر X یک SFT تعریف شده توسط یک مجموعه متناهی از حروف ممنوعه باشد، آیا می‌توان تصمیم گرفت که X تهی است یا غیرتهی؟

برای مثال فرض کنید $X \subset \{a, b\}^{\mathbb{Z}}$ یک SFT تعریف شده توسط $F = \{bb, aaa, babab\}$ باشد. این انتقال متناهی تهی نیست چون شامل مسیر متناوب $(aab)^{\mathbb{Z}}$ است. بنابراین یک SFT با داشتن یک مسیر متناوب تهی نخواهد بود و آن را به قضیه زیر تعمیم می‌دهیم.

قضیه ۴-۱۷. هر SFT که شامل یک مسیر متناوب باشد، غیرتهی است.

اثبات. فرض کنید X یک SFT تعریف شده توسط یک مجموعه متناهی از کلمات ممنوعه، با طول k برای بزرگترین آن، باشد. اگر X تهی نباشد، آنگاه $x \in X$ در نظر می‌گیریم. از آن جایی که تعداد متناهی کلمه متفاوت با طول k در x وجود دارد، یکی از آن‌ها در موقعیت $i < j$ باید حداقل دو بار تکرار شود. در این صورت هر عامل به طول k از مسیر $x' = (x_i x_{i+1} \dots x_{j-1})^{\mathbb{Z}}$ در x ظاهر می‌شود که در نتیجه به یک مسیر متناوب در X ما را می‌رساند. \square

قضیه بعدی، قضیه بالا را با روشی متفاوت کامل می‌کند.

قضیه ۱۸-۴. اگر یک SFT تهی باشد، آنگاه $k \geq 0$ موجود است که هر کلمه به طول k شامل یک کلمه ممنوعه خواهد بود.

اثبات. فرض کنید، به عکس، برای هر k یک کلمه u_k به طول k که شامل هیچ کلمه ممنوعه‌ای نباشد، وجود دارد. نشان می‌دهیم که X تهی نیست. تا حذف آخرین حرف آن، می‌توان فرض کرد که هر u_k دارای طول فرد است. با این کلمات یک بسته نامتناهی می‌سازیم که u_k بالای u_{k+1} و حرف میانی u_k در موقعیت صفر قرار داشته باشد. از آن جایی که الفبایی که u_k روی آن تعریف شده‌اند، متناهی است، حداقل یکی از تعداد نامتناهی حروف در ستون در موقعیت صفر این بسته، مثل x ، به تعداد نامتناهی بار ظاهر خواهد شد. همه کلمات u_k که x در موقعیت صفر بسته قرار ندارد را حذف می‌کنیم. حال یک بسته جدید که هنوز نامتناهی است را خواهیم داشت. با تکرار این روند روی ستون‌های $\{1, -1, 2, -2, \dots\}$ پس از $2n + 1$ مرحله، یک دنباله x_i را به دست می‌آوریم به طوری که برای هر x_i کلمات بسته نامتناهی ما دارای حرف i در موقعیت $-n \leq i \leq n$ باشد. فرض کنید x مسیری باشد که توسط x_i ها تعریف شده باشد. از آن جایی که هر کلمه متناهی‌ای که در x ظاهر می‌شود در یک u_k به اندازه کافی بزرگ نیز ظاهر خواهد شد، x نمی‌تواند دارای کلمه ممنوعه باشد. در نتیجه $x \in X$ و SFT تهی نخواهد بود. \square

در ادامه، الگوریتمی را معرفی می‌کنیم که با استفاده از قضایای قبلی مشخص می‌کند، آیا SFT تعریف شده توسط کلمه‌های ممنوعه، تهی است یا خیر.

```

Data: A finite set  $F$  of forbidden words which define an SFT  $X$ 
Result:  $X$  is empty or not
 $k \leftarrow$  length of the largest word in  $F$ ;
 $hope \leftarrow false$ ;
while  $hope$  do
   $hope \leftarrow false$ ;
  for  $u$  in words of length  $k$  do
    if  $uu$  has no word in  $F$  then
      | return " $X$  is not empty";
    end
    if  $u$  has no word in  $F$  then
      |  $hope \leftarrow true$ ;
    end
  end
end
return " $X$  is empty"

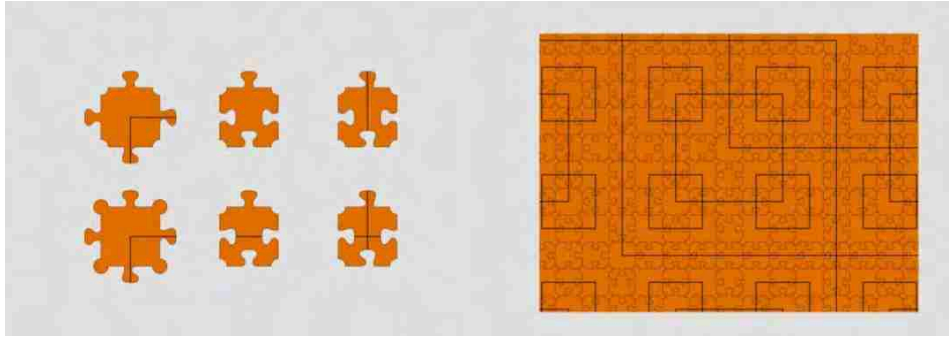
```

شکل ۴-۴: تهی یا غیرتهی

۵.۰.۴ انتقال‌های دو بعدی

در این بخش، به دنبال فضاهاى انتقال در ابعاد بالاتر می‌گردیم. برای یک الفبای متناهی A انتقال کامل d -بعدی را به صورت $A^{\mathbb{Z}^d}$ تعریف می‌کنیم. در این بخش به تنها انتقال‌های دو بعدی می‌پردازیم. یک ترکیب، یک عضو از $A^{\mathbb{Z}^2}$ است. فاصله بین دو ترکیب با $d(x, y) = 2^{\inf\{\max(|i|, |j|) \mid x_{ij} \neq y_{ij}\}}$ تعریف می‌شود. یک الگو، مجموعه‌ای متناهی از حروف نمایه شده توسط \mathbb{Z}^2 است. یک انتقال، زیرمجموعه‌ای از $A^{\mathbb{Z}^2}$ است که دارای الگوهای ممنوعه نیست. یک SFT انتقالی است که توسط تعداد متناهی الگوی ممنوعه تعریف شده است. یک انتقال بر روی A سوفیک است اگر تصویر آن یک SFT روی B با نگاشت $B \rightarrow A$ باشد. به سوال اصلی بازمی‌گردیم. اگر یک مجموعه متناهی از الگوهای ممنوعه داشته باشیم، می‌توانیم تصمیم بگیریم که آیا SFT ۲-بعدی‌ای که تعریف می‌کند، تهی است یا خیر. قضیه قبل را برای حالت ۲-بعدی گسترش می‌دهیم. **قضیه ۱۹-۴.** یک SFT غیرتهی بدون هیچ ترکیب متناوبی وجود دارد.

اولین SFT با چنین ویژگی‌هایی توسط برگر در سال ۱۹۶۴ تعریف شد. کاشی‌ها و قسمتی از این کاشی‌کاری در شکل ۵-۴، نشان داده شده است.



شکل ۴-۵: کاشی‌های رابینسون و نمایی جزئی از کاشی‌کاری تولید شده توسط آن‌ها.

این بدان معناست که الگوریتم ۱ را نمی‌توان به راحتی به الگوریتمی تعمیم داد که تصمیم می‌گیرد که آیا یک SFT ۲-بعدی تهی است یا خیر.

۱.۴ نظریه محاسبات

۱.۱.۴ ماشین تورینگ

در این بخش، به بررسی جنبه محاسباتی کاشی‌کاری می‌پردازیم. مدل‌های زیادی برای محاسبات وجود دارد اما قوی‌ترین مدل به نام ماشین تورینگ توسط آلن تورینگ ارائه شده است. توجه داشته باشید، ماشین‌های تورینگ مدلی از سیستم‌های کامپیوتری مدرن نیستند. به طور دقیق‌تر، در تزی به نام تز چرچ-تورینگ بیان شده است که هر تابعی که در دنیای فیزیکی قابل محاسبه باشد، توسط ماشین تورینگ نیز قابل محاسبه خواهد بود. در مدل ماشین تورینگ، از نوار بی‌نهایت برای حافظه نامحدود خود استفاده می‌کند. همچنین با ابتدای نوار، می‌تواند نمادها را بخواند و بنویسد و روی نوار حرکت کند. در ابتدا نوار تنها شامل رشته ورودی است و همه جا خالی است. اگر ماشین نیاز داشته باشد اطلاعات ذخیره کند، این اطلاعات را روی نوار می‌نویسد. برای خواندن این اطلاعات نوشته شده، ماشین می‌تواند به آن برگردد و تا جایی ادامه دهد که تشخیص دهد می‌تواند یک خروجی تولید کند. ماشین به خروجی‌های قبول و رد با وارد شدن در حالات پذیرنده و ردشونده طراحی شده، دست می‌یابد. زمانی که یک ماشین تورینگ را روی یک ورودی شروع می‌کنیم، سه خروجی ممکن خواهد داشت؛ قبول، رد یا حلقه. منظور از حلقه یعنی ماشین متوقف نمی‌شود. در ادامه به معرفی برخی مفاهیم از نظریه ماشین‌های تورینگ می‌پردازیم.

تعریف ۲۰-۴. یک ماشین تورینگ TM توسط چندگانه $(Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_{accept}, q_{reject})$ توصیف می‌شود.

Q مجموعه‌ای از حالات است. Σ الفبای ورودی است که شامل نماد تهی یا خالی \square است. Γ الفبای نوار است؛ یک مجموعه متناهی از نمادها که بر روی نوارهای TM ظاهر می‌شوند به طوری که $\square \in \Gamma$ و $\Sigma \subset \Gamma$. $\delta : Q \times \Gamma \rightarrow Q \times \Gamma \times \{L, R\}$ تابع انتقال، $q_0 \in Q$ حالت شروع، $q_{accept} \in Q$ حالت قبول و $q_{reject} \in Q$ حالت رد است که $q_{reject} \neq q_{accept}$.

گردایه‌ای از رشته‌ها که توسط ماشین تورینگ مثل M قبول می‌شود، زبانی از M یا زبان تشخیص داده شده توسط M است که با $L(M)$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۲۱-۴. به یک زبان تورینگ-شناخت‌پذیر می‌گوییم اگر یک ماشین تورینگ آن را بشناسد.

تعریف ۲۲-۴. به یک زبان تورینگ-تصمیم‌پذیر می‌گوییم اگر یک ماشین تورینگ آن را تصمیم بگیرد.

برای مثال، ماشین تورینگ M_1 که $A = \{0^n | n \geq 0\}$ را تصمیم می‌گیرد را توصیف می‌کنیم. زبانی که شامل همه رشته‌های صفر است که طول آن توانی از دو است. در قدم اول به ورودی، رشته w را می‌دهیم. سپس، ماشین از چپ به راست روی نوار حالت رفت و برگشت پیدا کرده و هر صفر موجود را خط می‌زند. اگر در مرحله یک، نوار شامل یک تک صفر باشد، قبول می‌شود. اگر در مرحله یک، نوار شامل بیشتر از یک تک صفر باشد و تعداد صفرها فرد باشد آن را رد می‌کند. در مرحله بعدی سر ماشین به انتهای سمت چپ از نوار برمی‌گردد و دوباره به خوانش مرحله اول می‌پردازد.

۲.۱.۴ کاشی‌کاری محاسبه‌پذیر

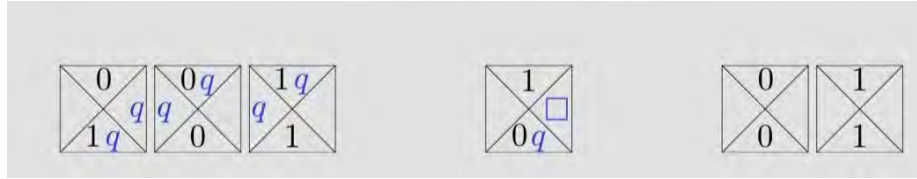
حال به ارتباط میان کاشی‌کاری و ماشین تورینگ می‌پردازیم. در مثال

$$\begin{aligned}(1, q) &\rightarrow (0, +1, 1), \\ (0, q) &\rightarrow (1, +1, \square).\end{aligned}$$

شکل ۶-۴: مثالی از کاشی‌کاری و ماشین تورینگ

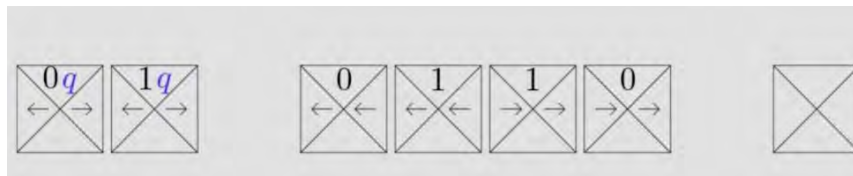
TM به هر عدد داده شده، عدد یک را اضافه می‌کند و متوقف می‌شود. می‌خواهیم محاسبات یک ماشین تورینگ را به یک کاشی‌کاری شبیه‌سازی کنیم. ایده این است که کاشی‌ها، مربع‌هایی مطابق با حجره‌های نوار

باشند که ردیف k ام از کاشی‌کاری، با حالتی از نوار با k مرحله محاسبه، متناظر است. فرض می‌کنیم که کاشی‌ها را نمی‌توانیم دوران بدهیم و دو کاشی همسایه مجاور، رنگ یکسانی دارند.



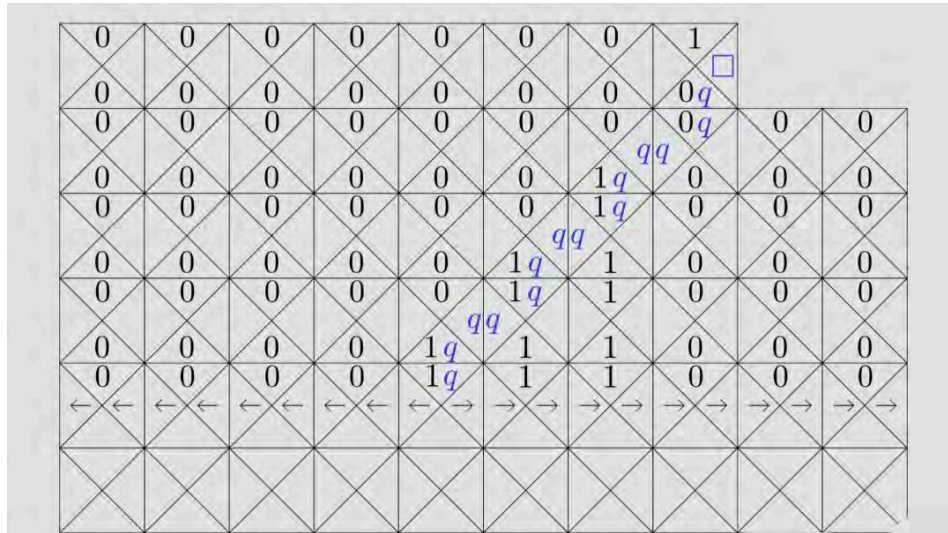
شکل ۷-۴: کاشی‌های اولیه

کاشی‌های بالا را برای شبیه‌سازی ماشین تورینگ در نظر می‌گیریم. سه کاشی اول، اولین جابه‌جایی را شبیه‌سازی می‌کنند. دومین کاشی، دومین جابه‌جایی و دو کاشی آخر از مرحله k تا $k+1$ را نشان می‌دهند. حال، با توجه به ماشین تورینگ، کاشی‌های متناظر را در نظر می‌گیریم و کاشی‌ای را در جایی روی صفحه قرار می‌دهیم که محاسبات را شروع کند. اگر محاسبات شبیه‌سازی شده توسط این کاشی‌ها در نهایت متوقف شود، کاشی‌کاری نمی‌تواند بیشتر از این گسترش یابد زیرا هیچ کاشی‌ای با حالت \square مطابقت ندارد و برعکس، اگر محاسبات تا بی‌نهایت ادامه یابد، آنگاه یک کاشی‌کاری از نیم صفحه بالایی دریافت خواهد شد.



شکل ۸-۴: حالت دوم

سپس طبق شکل ۹-۴، کاشی‌هایی که مقدار دهی اولیه محاسبه ماشین تورینگ را تشکیل می‌دهند در نظر می‌گیریم. دو کاشی اول محاسبه را در حالت q با صفر یا یک در حجره کنونی آغاز می‌کنند. چهار مورد بعدی اجازه می‌دهند که بدون هیچ محاسبات موازی و ابتدایی دیگر، نوار اولیه را آزادانه با صفر و یک پر کنیم و کاشی آخر برای نصف صفحه زیر نوار اولیه است.



شکل ۹-۴: نمای جزئی از کاشی‌کاری تولید شده

در شکل ۲.۰۶، نمونه‌ای از نمای جزئی کاشی‌کاری تولید شده توسط محاسبات کاشی‌های موجود در شکل را به نمایش گذاشته است. در این کاشی‌کاری، یک کاشی محاسبه را در حالت q در ردیف دوم از پایین، مقدار دهی اولیه می‌کند. محاسبات در سه مرحله، به سمت بالا، انجام شده و سپس وارد حالت توقف می‌شود. در نتیجه این کاشی‌کاری گسترش پیدا نخواهد کرد.

می‌دانیم، اگر بتوانیم مربع‌های دلخواه بزرگ را کاشی کنیم، کل صفحه نیز قابل کاشی شدن است. از این رو، هر الگوریتم برای تصمیم‌گیری در مورد این که آیا یک مجموعه کاشی که صفحه را با کاشی‌ای که محاسبات را آغاز می‌کند، کاشی کند، یک الگوریتم برای تصمیم‌گیری اینکه آیا یک ماشین تورینگ متوقف می‌شود یا خیر، نتیجه می‌دهد. اگر چه، با کاشی‌های موجود در شکل قبل، می‌توان به راحتی بدون استفاده از هیچ کاشی‌ای برای آغاز محاسبات، صفحه را کاشی کرد؛ به وضوح، می‌توانیم تنها از کاشی‌هایی استفاده کنیم که حروف را جابه‌جا می‌کنند. بنابراین، به یک ایده جدید برای تحمیل کردن یک کاشی که آغازگر محاسباتی در هر کجا از صفحه باشد، نیاز خواهیم داشت. در واقع، محاسبات نمی‌تواند تنها در یک مکان آغاز شود زیرا در این صورت بدون هیچ محاسباتی، مربع‌های دلخواه بزرگ تولید خواهد کرد و در نتیجه بدون هیچ محاسباتی، به یک کاشی‌کاری از کل صفحه دست خواهیم یافت. بنابراین این محاسبه باید از همه نقاط آغاز شود.

ایده اول، استفاده از یک کاشی‌کاری متناوب برای شروع تناوبی محاسبات است اما این به این معنا است که تمام محاسبات باید در تناوبی از کاشی‌کاری انجام شود و این یعنی برای انجام محاسبات، فضا و زمان محدودی خواهد داشت. به خصوص، اگر ماشین تورینگ شبیه‌سازی شده به زمان یا فضای بیشتری احتیاج داشته باشد، آن را شناسایی نخواهد کرد. پس به مجموعه‌ای از کاشی‌ها احتیاج خواهیم داشت که صفحه را به

غیر از حالت متناوب، کاشی کند.

یک راه حل، ترکیب کاشی‌هایی است که با کاشی‌های رابینسون، مانند شکل ۴.۰.۲، محاسبه می‌شوند. علت این کار برای این است که هر مربع از کاشی‌کاری رابینسون بر روی ضلع پایینی خود یک محاسبه را آغاز کند که نتواند به بیرون از خود مربع برود. از آن جایی که اندازه این مربع‌ها نامحدود است، ماشین تورینگ در نهایت متوقف خواهد شد اگر و تنها اگر کاشی‌ای با حالت توقف لزوماً در یک مربع به اندازه کافی بزرگ رخ بدهد. از آن جایی که هیچ کاشی‌ای با این خصوصیات نداریم، کاشی‌کاری آن نیز نمی‌تواند همه صفحه را بپوشاند. بنابراین، هر الگوریتم برای تصمیم‌گیری در مورد این که آیا یک مجموعه کاشی که صفحه را با کاشی‌ای که محاسبات را آغاز می‌کند، کاشی کند، یک الگوریتم برای تصمیم‌گیری این که آیا یک ماشین تورینگ متوقف می‌شود یا خیر، نتیجه خواهد داد. این‌ها ایده‌های اصلی برای اثبات این است که هیچ الگوریتمی برای تصمیم‌گیری تهی بودن SFT ۲-بعدی وجود ندارد.

کتابنامه

- [1] *Adams, Colin.* The tiling book. An introduction to the mathematical theory of tilings. Providence, RI: American Mathematical Society (AMS), 2022.
- [2] *Lind, Douglas and Marcus, Brian.* An introduction to symbolic dynamics and coding. Camb. Math. Libr. Cambridge: Cambridge University Press, 2nd updated edition edition, 2021.

An introduction to tiling theory

MANA KORDANI

m.kordany@iut.ac.ir

September 14, 2024

Bachelor of Science Thesis (in Farsi)

Departement of Mathematical Sciences

Isfahan University of Technology, Isfahan 84156-8311, Iran

Supervisor: Dr. Amir Hashemi, amir.hashemi@iut.ac.ir**2000 MSC:** 05C25 20B25 05C60

Abstract:

This B.Sc. thesis is based on the following papers

- ADAMS, COLIN, *The Tiling Book: An introduction to the Mathematical theory of Tilings* American Mathematical Society (2022)
- LIND, DOUGLAS A., DOUGLAS LIND, AND BRIAN MARCUS., *An introduction to symbolic dynamics and coding.* Cambridge university press, 2021.

This thesis provides a comprehensive introduction to the mathematical theory of tiling. Tiling, or tessellation, is a fascinating intersection of art and mathematics, where geometric shapes are used to cover a plane without overlaps or gaps. This study explores various tiling patterns, including regular, semi-regular and periodic tilings, highlighting their mathematical properties and artistic applications.

We begin the first chapter with the basic definitions of tiling, isometries, and symmetries. We then delve into the symmetry groups of tilings, including the frieze symmetry groups and the wallpaper groups. The chapter introduces the orbifold notation for these symmetry groups and concludes by discussing specific tiles that can form unique tilings./ In the second chapter, we introduce the concept of the species and types of vertices, satisfying specific equations. It explains that if the vertices have the same type and the tiling is composed of regular polygons, there will be 11 particular tilings called the uniform tilings. Similarly, if the tilings have regular vertices, there will be 11 particular tilings called the Laves tilings. The chapter also covers tilings that are not edge-to-edge and explores the possible tilings that can be produced by a patch. It then proceeds on discussing random tilings and the extension theorem, a significant theorem that spans the entire section. The chapter concludes with an introduction to periodic tilings and the related theorems and definitions.

The third chapter introduces a new concept in symbolic dynamic systems called shifts. It begins by explaining shift spaces and shifts of finite type. The chapter then introduces Turing machines, detailing how they work and their significance in computational theory. Finally, it explores the intriguing possibility of simulating a Turing machine using tiling patterns, bridging the gap between symbolic dynamics and mathematical tiling.

Overall, this thesis aims to provide a thorough introduction to the fascinating world of mathematical tiling, offering insights into its mathematical foundations, historical development, and contemporary applications.