

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ



دانشگاه صنعتی اصفهان
دانشکده علوم ریاضی

پروژه کارشناسی ریاضی کاربردی

میکائیل حمیدی

استاد راهنما

دکتر سجاد لکزیان

استاد مشاور

۱۴۰۳

فهرست مطالب

هفت	فهرست مطالب
۱	۱ مقدمه
۱	۱.۱ قضیه‌ی مثبت بودن و صلیت جرم
۱	۱.۱.۱ گرانش نیوتونی
۲	۲.۱.۱ مکانیک همیلتونی
۳	۳.۱.۱ نسبیت عام
۵	۲ پیشنیازهای هندسه منیفلد و ریمانی
۵	۱.۲ هندسه منیفلد:
۵	۱.۱.۲ منیفلد توپولوژیک
۷	۲.۱.۲ منیفلد هموار
۱۱	۳.۱.۲ فضای مماسی
۱۲	۴.۱.۲ میدان برداری
۱۵	۵.۱.۲ منیفلدهای ریمانی
۱۵	۱.۵.۱.۲ متریک ریمانی
۱۸	۶.۱.۲ انحنا
۱۸	۲.۲ هندسه‌ی نسبیت
۱۸	۱.۲.۲ متریک شوارتزشیلد
۲۰	۲.۲.۲ منیفلدهای در بینهایت مسطح
۲۱	۳ پیش‌نیازهای هندسه نسبیت
۲۲	۴ ابررویه‌های مینیمال

۲۶ ۱۰۴ تعییرات مرتبه‌ی اول و دوم اندازه‌ی حجم
۲۸	نتیجه‌گیری و پیشنهادات
۲۹	کتاب‌نامه
۳۴	واژه‌نامه فارسی به انگلیسی
۳۷	واژه‌نامه انگلیسی به فارسی
۴۲	فهرست نمادها
۴۳	فهرست کلمات اختصاری

چکیده:

قضیه‌ی جرم مثبت ADM^۱ یکی از نتایج بنیادی نسبیت عام است. که نقش مهمی در فهم پایداری فضا-زمان و مفاهیم مجانبی (asymptotically) گرانشی ایفا می‌کند. این قضیه بیان می‌کند؛ که اگر یک فضا-زمان بدون تکینگی و با رفتار مجانبی تخت (asymptotically flat) آنگاه جرم ADM آن مثبت است. مقدار جرم تنها در صورتی صفر است؛ که فضا-زمان کاملاً تخت باشد. «یعنی فضای مینکوفسکی باشد.» این نتیجه پیامدهای عمیقی در فیزیک نظری، کیهان‌شناسی و ریاضیات دارد.

قضیه‌ی جرم مثبت ADM در هندسه‌ی دیفرانسیل نیز اهمیت زیادی دارد. به عنوان مثال، اثبات این قضیه توسط ریچارد شوئن^۲ و شینگ تونگ یائو^۳ با استفاده از روش‌های هندسه‌ی دیفرانسیل و تئوری سطوح مینیمال انجام شد [۲]. اثبات دیگر توسط ادوارد ویتن^۴ مبتنی بر نظریه‌ی اسپینور ها و نظریه‌ی ابرتقارن است [۳]. این ارتباط بین نسبیت عام، توپولوژی و نظریه‌ی میدان‌های کوانتومی یکی از جنبه‌های جالب این قضیه است. در این پایان‌نامه قصد داریم تا اثبات قضیه‌ی جرم مثبت را که توسط یائو و شوئن با استفاده از رویه‌های مینیمال ارائه شده است. را مرور کنیم. و در این مسیر پیشنهادها را لازم را نیز بیان می‌کنیم.

¹the positive ADM mass theorem

²Richard Melvin Schoen
³Shing-Tung Yau

⁴Edward Witten

فصل ۱

مقدمه

ما در این پایان نامه قرار است ما یکسری آشنایی با مفاهیم هندسه‌ی منیفلد، هندسه‌ی ریمانی و هندسه‌ی نسبیت به دست بیاوریم. و قرار است که ما به دور از تعاریف و بیان‌های پیچیده‌ای که در این مباحث وجود دارد. تمام تلاش خود را انجام بدهیم. تا یک آشنایی کلی با این مفاهیم به خصوص قضیه‌ی مثبت بودن جرم بپردازیم.

۱.۱ قضیه‌ی مثبت بودن و صلبیت جرم

۱.۱.۱ گرانش نیوتونی

گرانش یکی از چهار نیروی بنیادی طبیعت است که باعث جذب اجرام به یکدیگر می‌شود. این نیرو نقش اساسی در شکل‌گیری و پایداری ساختارهای کیهانی مانند سیارات، ستارگان و کهکشان‌ها ایفا می‌کند. در زندگی روزمره، گرانش مسئول سقوط اشیا به سمت زمین و همچنین مدار حرکت سیارات به دور خورشید است. اگرچه ما این نیرو را به‌طور مستقیم احساس می‌کنیم، اما در مقیاس‌های بزرگ، گرانش نیروی غالبی است که تکامل کیهان را هدایت می‌کند.

یکی از اولین توصیف‌های ریاضی گرانش توسط ایزاک نیوتون در قرن هفدهم ارائه شد. [۴] او در قانون جهانی گرانش بیان کرد که هر دو جرم در جهان، یکدیگر را با نیرویی که متناسب با حاصل ضرب جرم‌هایشان و معکوس

مجذور فاصله بین آن‌ها است، جذب می‌کنند. این قانون، که با فرمول

$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2} \quad (1.1)$$

بیان می‌شود، توانست بسیاری از پدیده‌های نجومی مانند حرکت سیارات را با دقت خوبی توضیح دهد. نظریه‌ی نیوتونی گرانش پایه‌ای برای مکانیک کلاسیک بود و کاربردهای فراوانی در فیزیک و مهندسی داشت. [۵] با وجود موفقیت‌های فراوان، نظریه نیوتون دارای محدودیت‌هایی بود که در شرایط خاص مانند سرعت‌های نزدیک به سرعت نور یا میدان‌های گرانشی بسیار قوی، دقت کافی نداشت. این نواقص در نهایت منجر به توسعه‌ی نظریه‌ی نسبیت عام اینشتین شد [۶]. که دیدگاه جدیدتری نسبت به گرانش ارائه کرد. با این حال، قانون نیوتونی همچنان در بسیاری از مسائل مهندسی و فیزیکی که شامل سرعت‌های پایین و میدان‌های گرانشی ضعیف هستند، مورد استفاده قرار می‌گیرد.

۲.۱.۱ مکانیک همیلتونی

در قرن هفدهم، اسحاق نیوتن با ارائه‌ی قوانین حرکت و نظریه‌ی گرانش، اولین چارچوب کلاسیک برای توصیف حرکت اجسام را ایجاد کرد. مکانیک نیوتنی به‌طور عمده بر نیروهای وارد بر اجسام تأکید داشت و نحوه‌ی حرکت اجسام را با استفاده از معادلات نیوتن مدل می‌کرد.

با این حال، مشکلاتی در حل مسائل پیچیده در مکانیک کلاسیک وجود داشت، به‌ویژه در سیستم‌های پیچیده با چندین درجه آزادی. در اواخر قرن هجدهم، ژوزف لوئی لاگرانژ مکانیک لاگرانژی را معرفی کرد که به‌جای نیروها، از تابعی به نام لاگرانژی استفاده می‌کرد. لاگرانژی تابعی از انرژی جنبشی و پتانسیل سیستم است و با استفاده از اصل کمترین اثر، معادلات حرکت سیستم‌ها را استخراج می‌کند. این روش به‌ویژه در سیستم‌هایی که در آن‌ها نیروهای پیچیده یا غیراصیل وجود داشت، موفقیت‌آمیز بود.

توسعه مکانیک همیلتونی به‌عنوان یک چارچوب جدید برای تحلیل سیستم‌های دینامیکی در فیزیک، نتیجه نیازهای مختلفی بود که در تحلیل سیستم‌های پیچیده‌تر و به‌ویژه در زمینه‌های خاص فیزیک و ریاضیات به وجود آمد. آزادی، پیچیده‌تر می‌شدند. هامیلتون برای ساده‌سازی این معادلات، به‌جای استفاده از مشتقات دوم (که در معادلات لاگرانژی ظاهر می‌شود)، از معادلات دیفرانسیل مرتبه اول استفاده کرد. این امر حل معادلات حرکت را برای سیستم‌های پیچیده و با تعداد زیادی درجه آزادی آسان‌تر می‌کند.

همچنین، معادلات همیلتونی به‌راحتی با روش‌های ریاضی پیشرفته‌تر مانند هندسه دیفرانسیل و تئوری سیستم‌های دینامیکی ترکیب می‌شوند، که در تحلیل سیستم‌های پیچیده‌تر بسیار مفید است. در قرن نوزدهم، پیشرفت‌های زیادی در هندسه دیفرانسیل به‌ویژه در زمینه فضای فاز phase space انجام شد.

در مکانیک همیلتونی، فضا به طور کلی به عنوان یک فضای فازی (فضای مختصاتی و ممان‌ها) در نظر گرفته می‌شود. این پیشرفت‌ها و نظریه‌ها به خصوص از نظریه‌های هندسی از قبیل فرم‌های کانیکال *canoniacal forms* و ترکیب سیستم‌های دینامیکی نشأت گرفتند. که به تحلیل حرکت‌های پیچیده‌تر کمک می‌کند. مکانیک همیلتونی یک چارچوب ریاضیاتی است که برای توصیف حرکت سیستم‌های فیزیکی و دینامیک آن‌ها در نظریه‌های مختلف فیزیکی کاربرد دارد. این روش از معادلات دیفرانسیل حرکت برای تحلیل سیستم‌های پیچیده استفاده می‌کند و در مقایسه با مکانیک کلاسیک نیوتنی مزایای قابل توجهی دارد. در مکانیک همیلتونی، سیستم به جای استفاده از نیروها، از تابعی به نام هامیلتونی H برای توصیف انرژی کل سیستم استفاده می‌شود. این تابع به صورت معمول تابعی از مختصات گسترش یافته‌ی q_i و ممان‌های گسترش یافته‌ی p_i معادلات حرکت همیلتونی به صورت دو معادله‌ی دیفرانسیل برای مختصات و ممان‌ها بیان می‌شوند:

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \quad (2.1)$$

این معادلات به طور کلی امکان حل دقیق و تحلیلی برای سیستم‌های پیچیده‌تری مانند سیستم‌های غیرخطی یا سیستم‌هایی با درجات آزادی زیاد را فراهم می‌آورند. یکی از ویژگی‌های برجسته‌ی مکانیک همیلتونی این است که این روش، هم برای سیستم‌های کلاسیک و هم برای سیستم‌های نسبیتی قابل اعمال است. که آن را به یک ابزار قدرتمند در فیزیک نظری تبدیل می‌کند. مکانیک همیلتونی در نسبیت عام فضا-زمان به عنوان یک ساختار دینامیکی که تحت تاثیر جرم و انرژی تغییر می‌کند. توصیف می‌کند.

۳.۱.۱ نسبیت عام

نظریه نسبیت عام یکی از دستاوردهای آلبرت اینشتین است که در سال ۱۹۱۵ ارائه شد. این نظریه، جایگزینی برای نظریه گرانش نیوتونی بود که در برخی شرایط خاص، مانند میدان‌های گرانشی قوی و سرعت‌های نزدیک به سرعت نور، ناکارآمد به نظر می‌رسید. اینشتین با الهام از اصل هم‌ارزی، که بیان می‌کند شتاب و گرانش از دید یک ناظر محلی غیرقابل تمایز هستند، توانست یک توصیف جدید از گرانش ارائه دهد که بر انحنای فضا-زمان تأکید دارد.

قبل از ارائه‌ی این نظریه، فیزیک‌دانان از قانون جهانی گرانش نیوتن ۱.۱ برای توضیح حرکت اجرام استفاده می‌کردند. اما این قانون در برخی موارد، مانند مدار عطارد، که انحراف کوچکی از پیش‌بینی نیوتونی نشان می‌داد، دچار مشکل بود. در اوایل قرن بیستم، اینشتین ابتدا نظریه نسبیت خاص را در سال ۱۹۰۵ مطرح کرد که مفهوم زمان و مکان را با هم ترکیب و نشان داد که زمان برای ناظران مختلف می‌تواند متفاوت باشد. اما

نسبیت خاص، نیروی گرانش را در بر نمی‌گرفت و نیاز به یک نظریه جامع‌تر احساس می‌شد. در نظریه نسبیت عام، گرانش نه به‌عنوان یک نیرو، بلکه به‌عنوان نتیجه‌ی انحنای فضا-زمان در نظر گرفته می‌شود. جرم و انرژی، ساختار فضا-زمان را خم می‌کنند و این انحنا مسیر حرکت اجرام را تعیین می‌کند. معادلات میدان اینشتین

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + g_{\mu\nu}\Lambda = \frac{\Lambda\pi G}{c^4}T_{\mu\nu} \quad (۳.۱)$$

- $R_{\mu\nu}$: کرنل ریچ است که انحنای فضا-زمان را نشان می‌دهد.
- $g_{\mu\nu}$: تانسور متریک است که ساختار هندسی فضا-زمان را توصیف می‌کند.
- R : ریچ اسکالر است که مجموع منحنی‌های فضای‌زمان را نشان می‌دهد.
- Λ : ثابت کیهانی است که برای مدل‌سازی انبساط کیهان به‌کار می‌رود.
- G : ثابت گرانش جهانی است.
- c : سرعت نور است.
- $T_{\mu\nu}$: تانسور انرژی-مومنتوم است که توزیع انرژی و تکانه را بیان می‌کند.

که هسته‌ی اصلی نظریه را تشکیل می‌دهند، ارتباط بین توزیع ماده و انرژی و هندسه‌ی فضا-زمان را توصیف می‌کنند. این معادلات، مدل‌های کیهانی جدیدی را ارائه دادند که منجر به پیش‌بینی پدیده‌هایی مانند سیاهچاله‌ها و امواج گرانشی شدند.

یکی از اولین آزمایش‌های تجربی که صحت این نظریه را تأیید کرد، انحراف نور ستارگان در هنگام عبور از کنار خورشید بود که در سال ۱۹۱۹ توسط آرتور ادینگتون رصد شد. این مشاهده نشان داد که نور نیز تحت تأثیر میدان گرانشی خم می‌شود، پدیده‌ای که در چارچوب نیوتونی قابل توضیح نبود. از آن زمان تاکنون، آزمایش‌های بسیاری، از جمله مشاهدات مربوط به امواج گرانشی در سال ۲۰۱۵، صحت پیش‌بینی‌های نسبیت عام را تأیید کرده‌اند.

هدف اصلی این نظریه، ارائه‌ی یک توصیف جامع و دقیق از گرانش بود که بتواند در تمامی شرایط، از مقیاس‌های کهکشانی تا اجرام فوق‌العاده سنگین، به‌درستی عمل کند. علاوه بر این، نسبیت عام پایه‌گذار کیهان‌شناسی مدرن شد و مدل‌های کنونی برای توصیف گسترش جهان و ساختارهای بزرگ مقیاس کیهانی به این نظریه وابسته‌اند.

فصل ۲

پیشنیازهای هندسه منیفلد و ریمانی

در این فصل قرار است که ما یکسری از تعاریف و نتایج موردنیاز خود را از هندسه‌ی منیفلد و ریمانی بیان کنیم. در پس این تعاریف میتوان صورتبندی‌های متفاوت و متنوعی را ارائه داد اما در این فصل تمام تلاش ممکن صورت گرفته است. تا این تعاریف کاملا منطبق با شهود هندسی ما بیان شوند.

فرض کنیم که M یک فضای توپولوژیک باشد. به صورت دقیق‌تر به زوج مرتب (M, τ) که در آن M یک مجموعه‌ی دلخواه می‌باشد. و τ نیز یک توپولوژی روی M می‌باشد. و این جفت تشکیل یک فضای توپولوژیک می‌دهند. اما به علت ساده سازی در اکثر اوقات اگر توپولوژی برای ما واضح باشد از نوشتن τ صرف نظر می‌کنیم. در ادامه هرگاه بگوییم که $S \subset M$ یک زیر فضای توپولوژیک M خواهد بود. که توپولوژی آن توپولوژی القا شده از M میباشد. در نهایت یادآوری می‌کنیم که هومئومورفیسم‌ها نگاشت‌هایی پیوسته و دوسویی هستند که داری وارون پیوسته نیز می‌باشند.

۱.۲ هندسه منیفلد:

۱.۱.۲ منیفلد توپولوژیک

تعریف ۱-۲. فرض می‌کنیم که M یک فضای توپولوژیک باشد. آنگاه M را موضعا اقلیدسی (موضعا اقلیدسی از بعد- n) می‌گوییم. هرگاه که برای هر نقطه‌ی دلخواه $p \in M$ یک همسایگی $U_p \subset M$ وجود داشته باشد. به

گونه‌ای که U_p با یک باز داخل \mathbb{R}^n هومئومورفیک باشد.

تعریف ۲-۲. فرض می‌کنیم که M یک فضای توپولوژیک باشد. که شمارای نوع دوم و هاسدورف است. آنگاه M را یک منیفلد توپولوژیک از بعد- n می‌گوییم. هرگاه M یک فضای موضعا اقلیدسی از بعد- n باشد. شرط‌های شمارای نوع دوم و هاسدورف بودن تضمین‌کننده‌ی این هستند که منیفلدها هرچه بیشتر شبیه فضاهای \mathbb{R}^n رفتار کنند.

نتیجه ۲-۳. فرض می‌کنیم که M یک منیفلد توپولوژیک از بعد- n باشد در این صورت هر زیرمجموعه‌ی باز M خودش یک منیفلد توپولوژیک از بعد- n می‌باشد.

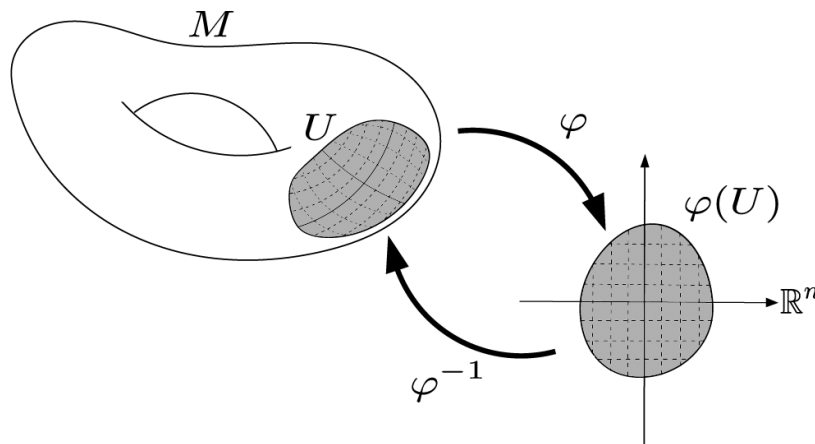
این نتیجه به صورت کاملاً مستقیم نتیجه می‌شود. زیرا ما میدانیم که خاصیت‌های شمارای نوع دوم و هاسدورف بودن ویژگی‌های توپولوژیک ارثی می‌باشند. از طرفی پیشتر اشاره کردیم که مجموعه‌ی M یک مجموعه موضعا اقلیدسی می‌باشد. به این صورت نشان داده می‌شود. که هر زیر مجموعه‌ی باز از مجموعه‌ی M یک زیر منیفلد توپولوژیک n - بعدی می‌باشد.

مثال ۲-۴. خم‌های صفحه‌ای که خودشان را قطع نمی‌کنند و دایره‌هایی از منیفلدهای توپولوژیک ۱ - بعدی هستند. و به صورت کلی $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\| = 1\}$ تشکیل یک منیفلد توپولوژیکال $n + 1$ - بعدی می‌دهد.

تذکر ۲-۵. در مثال ۲-۴ ما خود را به زیرفضاهای اقلیدسی محدود کرده‌ایم. اما منیفلدهای غیر اقلیدسی‌ای نیز وجود دارند. که ما نمی‌توانیم آنها را داخل یک فضای اقلیدسی احاطه کنیم. به عنوان مثال میتوان به منیفلدهای ماتریس‌های $n \times m$ اشاره کرد. در؟؟ میتوان چنین مثال‌هایی را پیدا کرد.

تعریف ۲-۶. فرض می‌کنیم M یک منیفلد توپولوژیکال باشد. آنگاه یک چارت مختصاتی روی M یک جفت (U, ϕ) می‌باشد. که $U \subset M$ باز است و $\phi : U \rightarrow \phi(U)$ یک هومئومورفیسم پوشا روی $\phi(U)$ می‌باشد. که این مجموعه یک باز زیرمجموعه‌ی \mathbb{R}^n می‌باشد. نگاشت ϕ را یک نگاشت مختصاتی موضعی می‌نامیم. و نگاشت ϕ^{-1} یک پارامتری‌سازی موضعی برای U می‌باشد. به مولفه‌های نگاشت ϕ نیز مختصه‌های موضعی U گفته میشود.

مختصه‌های موضعی روی U را معمولاً به صورت (x^1, \dots, x^n) نمایش می‌دهند. که در آن $x^i : U \rightarrow \mathbb{R}$ مولفه‌ی i - ام نگاشت مختصاتی ϕ می‌باشد.



شکل ۱.۲: نمایش هندسی تعریف ۲-۶

۲.۱.۲ منیفلد هموار

به بیان ساده منیفلدهای هموار اشیایی هستند؛ که به صورت موضعی شبیه به یک فضای اقلیدسی \mathbb{R}^n به نظر می‌رسند. و میتوان روی آن‌ها حساب دیفرانسیل و انگرال انجام داد. منظور ما از همواری در اینجا این است که از این توابع می‌توان بی‌نهایت بار مشتق‌گیری انجام داد. به عبارت دیگر فرض کنیم که $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ باشد. که در آن U یک زیرمجموعه‌ی باز است. در این صورت تمام مشتق‌های جزئی باید موجود و پیوسته باشند. زمانی که f هموار باشد؛ از نماد رایج $f \in C^\infty(U)$ استفاده می‌کنیم. به طور کلی یک تابع $F : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ با دامنه‌ی باز $U \subset \mathbb{R}^n$ هموار نامیده می‌شود. هرگاه هر تابع مولفه‌ای F^i از $F = (F^1, F^2, \dots, F^m)$ هموار باشد. بنابراین در این قسمت تمرکز ما به تعریف این خواهد بود که برای یک نگاشت $f : M \rightarrow \mathbb{R}^k$ چه معنایی دارد که f یک نگاشت هموار باشد. فرض کنید که M یک زیرمجموعه‌ی از \mathbb{R}^k برای $k > 0$ و نگاشت $f : M \rightarrow \mathbb{R}^l$ یکی از روش‌ها برای تعیین هموار بودن یا نبودن نگاشت f این است که بتوانیم بررسی کنیم که آیا این نگاشت هموار است یا نه؟ این است که ببینیم آیا میتوان این نگاشت را به یک نگاشت هموار g گسترش داد (توسیع داد). به طوری که $g|_M = f$ باشد. که نگاشت g دارای دامنه‌ی باز است. به بیان دیگر $g : U \subset \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^l$ است. از نظر شهودی و هندسی این رویکرد و استدلال منطقی است. برای مثال می‌توان به $??, ??$ مراجعه کرد. رویکرد فوق علاوه بر راحتی از نظر شهودی دو ایراد اساسی دارد. اول آنکه این کار به صورت کلی امکان پذیر نیست. و این را با توجه به تذکر ۲-۵ دریافت. دوم برای اینکه این رویکرد مطلوب باشد. ما باید یک فضای محیطی داشته باشیم که منیفلد M در آن احاطه شده باشد. و در ادامه‌ی این پایان‌نامه خواهیم دید که این رویکرد ما را محدود به چنین فضاهایی می‌کند. اما ما می‌خواهیم که بتوانیم منیفلد M را به عنوان یک فضای مستقل در نظر بگیریم. نه به عنوان بخشی از یک فضای بزرگتر.

تعریف ۲-۷. فرض کنید $U \subset \mathbb{R}^n$ و $V \subset \mathbb{R}^m$ دو زیرمجموعه‌ی باز باشند. آنگاه نگاشت $F : U \rightarrow V$ را

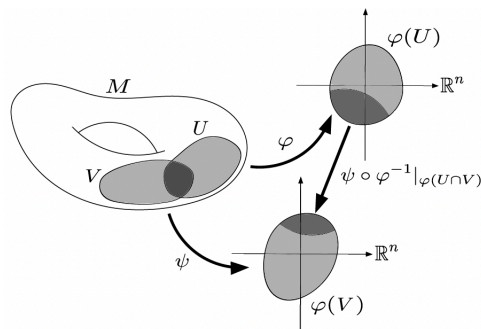
یک دیفئومورفیسم نامیم. هرگاه F یک نگاشت دوسویی هموار با وارون هموار باشد.

توجه می‌کنیم که اگر F یک دیفئومورفیسم باشد. آنگاه به وضوح یک هومئومورفیسم نیز می‌باشد.

تعریف ۸-۲. دو نقشه‌ی مختصاتی $(U, \phi), (V, \psi)$ روی M را با هم سازگار گوئیم. اگر $U \cap V$ تهی باشد. یا نقشه‌ی مختصاتی

$$\phi^{-1} \circ \psi|_{\phi(U \cap V)} : \phi(U \cap V) \rightarrow \psi(U \cap V) \quad (1.2)$$

دیفئومورفیسم باشد. به تصویر ۲.۲ مراجعه شود.



شکل ۲.۲: تصویری هندسی از تعریف ۸-۲

تعریف ۹-۲. فرض کنیم A گردایه‌ای از نقشه‌های مختصاتی باشد. که دامنه‌ی این نقشه‌های مختصاتی تمام M را پوشش دهد. اطلس A را هموار گوئیم. هرگاه هر دو نقشه‌ی مختصاتی در A با یکدیگر سازگار باشند. علاوه بر این اطلس A کامل است. زمانی که در هیچ اطلس هموار دیگری نشانده نشود.

تعریف ۱۰-۲. جفت (M, A) را یک n -منیفلد هموار است. زمانی که A یک اطلس کامل M باشد. نقشه‌های مختصاتی داخل A نیز هموار هستند.

در واقع می‌توان گفت که اگر بتوان یک اطلس کامل برای M پیدا کرد. آنگاه این منیفلد دارای ساختار هموار است. اما پیدا کردن این اطلس نیز کار دشواری است. اما گزاره‌ی بعدی نشان می‌دهد. چگونه میتوان چنین ساختاری را به M القا کرد. گزاره‌گزاره def

گزاره ۱۱-۲. فرض کنید A یک اطلس هموار برای منیفلد M باشد. آنگاه اطلس یکتای کامل A' شامل A وجود دارد. و می‌گوئیم اطلس A' توسط اطلس A تعیین شده است.؟؟

در نتیجه اگر اطلس همواری برای M وجود داشته باشد. می‌تواند به یک منیفلد هموار تبدیل شود. البته به این نکته نیز توجه کرد. که ممکن است اطلس همواری وجود نداشته باشد. و در نتیجه M نتواند یک ساختار هموار بپذیرد. همچنین ممکن است که M ساختارهای هموار متفاوتی را بپذیرد. اما خوشبختانه در ابعاد $n < 4$ هیچ یک از دو حالات فوق رخ نمی‌دهد. برای مثال می‌توان به؟؟ مراجعه کرد.

مثال ۱۲-۲. می‌خواهیم نشان دهیم. S^2 که یک 2 -منیفلد توپولوژیک می‌باشد. قابل تبدیل به یک منیفلد هموار است. که در آن $S^2 = \{(x, y, z) | x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ است. حال مجموعه‌ی باز

$$S_+^2 = \{(x, y, z) \in S^2 | z > 0\} \text{ and } B^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 < 1\}$$

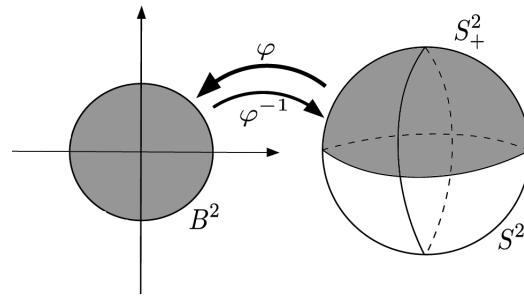
ما به S_+^2 نیمکره‌ی شمالی گوئیم. حال به نگاشت تصویر

$$\varphi : S_+^2 \rightarrow B^2, (x, y, z) \mapsto (x, y)$$

توجه می‌کنیم که یک هومئورفیسم می‌باشد. زیرا داریم

$$\varphi^{-1} : B^2 \rightarrow S_+^2, (x, y) \mapsto (x, y, \sqrt{1 - (x^2 + y^2)})$$

و به وضوح هر دوی φ, φ^{-1} پیوسته هستند. در نتیجه جفت (S_+^2, φ) یک نقشه‌ی مختصاتی برای S^2 می‌باشد.



شکل ۳.۲: تصویری هندسی از مثال ۲-۱۲

به صورت مشابه نیمکره‌ی جنوبی را و نقشه‌ی مختصاتی آن را نیز تعریف می‌کنیم.

$$S_-^2 = \{(x, y, z) \in S^2 \mid z < 0\}, \quad \psi : S_-^2 \rightarrow B^2, \quad (x, y, z) \mapsto (x, y)$$

حال توجه می‌کنیم که ما به چهار نقشه‌ی مختصاتی داریم. تا بتوانیم کره‌ی S^2 را بپوشانیم.

$$U_+ = \{(x, y, z) \in S^2 \mid x > 0\}, \quad \pi_1 : U_+ \rightarrow B^2, \quad (x, y, z) \mapsto (y, z)$$

$$U_- = \{(x, y, z) \in S^2 \mid x < 0\}, \quad \pi_2 : U_- \rightarrow B^2, \quad (x, y, z) \mapsto (y, z)$$

$$V_+ = \{(x, y, z) \in S^2 \mid y > 0\}, \quad \pi_3 : V_+ \rightarrow B^2, \quad (x, y, z) \mapsto (x, z)$$

$$V_- = \{(x, y, z) \in S^2 \mid y < 0\}, \quad \pi_4 : V_- \rightarrow B^2, \quad (x, y, z) \mapsto (x, z)$$

حال A را گردایه‌ی این نقشه‌های مختصاتی قرار می‌دهیم. که یک اطلس برای S^2 می‌باشد. به علاوه A یک اطلس هموار است. این ادعا نیز به سادگی اثبات می‌شود. برای مثال تابع زیر را در نظر بگیرید.

$$(\pi_2 \circ \varphi^{-1})(x, y) = (y, \sqrt{1 - (x^2 + y^2)})$$

و

$$(\pi_2 \circ \varphi^{-1})^{-1}(y, z) = (\sqrt{1 - (y^2 + z^2)}, y)$$

که به وضوح زمانی که به $\pi_2(S_+^2 \cap U_-)$ و $\varphi(S_+^2 \cap U_-)$ تحدید می‌شود هموار است. همچنین نگاهت‌های φ و π_2 نیز با یکدیگر سازگار هستند. و بنابر گزاره‌ی ۲-۱۱ اطلس A یک ساختار هموار تعیین می‌کند. که ساختار هموار استاندارد روی S^2 نامیده می‌شود.

مثال ۲-۱۳. U را یک زیرمجموعه‌ی باز دلخواه از \mathbb{R}^n در نظر بگیرید. نقشه‌ی مختصاتی (U, φ) با نگاهت

همانی در واقع یک اطلس $\{(u, \varphi)\}$ روی U تعریف می‌کند. که به علت سازگار بودن نقشه‌ی مختصاتی یک اطلس هموار می‌باشد. حالا که φ یک نگاشت سازگار با خودش است. پس توسط اطلس $\{(u, \varphi)\}$ می‌توان یک ساختار هموار روی U تعیین کرد. در حالت کلی هر زیرمجموعه‌ی باز از یک منیفلد مانند $V \subset M$ را از منیفلد هموار (M, A) در نظر بگیریم آنگاه V یک منیفلد توپولوژیک می‌باشد. و با استفاده از گزاره‌ی ۲-۱۱ با در نظر گرفتن $A|_V = \{(U, \varphi) \in A | V \subset U\}$ می‌توان این منیفلد را به یک منیفلد توپولوژیک توسعه داد. به $(V, A|_V)$ زیر منیفلد باز از (M, A) می‌گوییم.

به‌طور کلی تمام مثال‌های ۲-۴ را می‌توان با رویکردی مشابه به منیفلدهای هموار توسعه داد. مفهوم اطلس کامل و ساختار هموار بسیار مهم هستند. زیرا ما را قادر می‌سازند تا مفهوم همواری را به صورت قابل قبولی برای توابع $f : M \rightarrow \mathbb{R}^k$ تعریف کنیم.

تعریف ۲-۱۴. فرض کنیم که (M, A) یک n -منیفلد هموار باشد. نگاشت $f : M \rightarrow \mathbb{R}^k$ هموار است. اگر برای هر نقشه‌ی مختصاتی همواری که $(U, \varphi) \in A$ ترکیب $f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \rightarrow \mathbb{R}^k$ هموار باشد.

لم ۲-۱۵. فرض کنید $A = \{(U_i, \varphi_i)\}$ یک اطلس هموار از M باشد. آنگاه نگاشت $f : M \rightarrow \mathbb{R}^k$ هموار است. اگر و تنها اگر برای هر i نگاشت $f \circ \varphi_i^{-1} : \varphi_i(U_i) \rightarrow \mathbb{R}^k$ هموار باشد. برای اثبات به؟؟ مراجعه کنید.

تعریف ۲-۱۶. M و N را منیفلدهای هموار در نظر بگیرید. نگاشت $F : M \rightarrow N$ هموار نامیده می‌شود. اگر برای هر نقشه‌ی مختصاتی هموار (U, φ) روی M و هر نقشه‌ی مختصاتی هموار (V, ψ) روی N نمایش مختصاتی $\psi(V) \rightarrow \psi(U \cap F^{-1}(V)) : \psi \circ F \circ \varphi^{-1}$ از F هموار باشد.

۳.۱.۲ فضای مماسی

در ابتدا فرض می‌کنیم برای $M, n < k$ یک زیر منیفلد n -بعدی نشانده شده در \mathbb{R}^k باشد. آنگاه یک روش باری تعریف فضای مماسی M در نقطه‌ی p به این صورت خواهد بود.

$$T_p M = \{\gamma'(0) : \gamma : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M \text{ is a path}, \gamma \in C^\infty((-\epsilon, \epsilon)), \gamma(0) = p\} \quad (2.2)$$

این تعریف که بیان می‌کند فضای مماسی برابر با مشتق تمام خم‌های گذرنده از نقطه‌ی p است. با استفاده از شهود هندسی ما بیان به بسیار ساده و قابل فهم است. اما مشکل آن این است که فقط باری فضایی «منیفلدهایی» که آنها را می‌توان در یک فضای \mathbb{R}^k بزرگتر نشانده پاسخگو است. و برای منیفلدهای همواری که

دارای این ویژگی نیستند باید تعریف دیگری ارائه دهیم. راهها و رویکردهای متفاوتی برای تعریف فضای مماس وجود دارند. اما ما در این پایان نامه می‌خواهیم فضای مماسی را با استفاده از تعریف مشتق ارائه دهیم.

تعریف ۱۷-۲. نگاشت خطی $X : C^\infty(M) \rightarrow \mathbb{R}$ را مشتق M در نقطه‌ی p می‌نامیم هرگاه شرط

$$X(fg) = f(p)Xg + g(p)Xf \quad (۳.۲)$$

که به شرط لاینیتز نیز معروف است برقرار باشد.

برای هر $f, g \in C^\infty(M)$ فضای مماسی به M در نقطه‌ی p با نماد $T_p(M)$ نمایش داده می‌شود. که مجموعه‌ی تمام مشتقات M در نقطه‌ی p می‌باشد. و هر عضو فضای مماسی نیز بردار مماسی M در نقطه‌ی p نامیده می‌شود.

واضح است که فضای مماسی که فضای برداری است. که اسکالرهای آن از میدان \mathbb{R} می‌آیند. علاوه بر آن این نکته نیز قابل توجه است که شرط لاینیتز در واقع به نوعی شبیه به قاعده‌ی مشتق حاصل ضرب می‌باشد. و یک مثال از این مشتقات؛ مشتقات جهتی از یک تابع f در مسیر یک خم هموار می‌باشد. به صورت دقیق‌تر فرض کنید $\gamma : I \rightarrow M$ یک مسیر هموار با ویژگی $\gamma(0) = p$ باشد. آنگاه نگاشت X به این صورت عمل می‌کند.

$$X(f) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (f \circ \gamma) \quad (۴.۲)$$

۴.۱.۲ میدان برداری

فرض کنیم که M یک n -منیفلد هموار باشد. قیل از آنکه به تعریف میدان برداری بپردازیم به معرفی کلاف مماسی می‌پردازیم.

تعریف ۱۸-۲. کلاف مماسی M که آن را با نماد TM نمایش می‌دهیم. اجتماع مجزا از فضاهای مماسی است. و داریم.

$$TM = \{(p, X) \in TM : p \in M, X \in T_pM\} \quad (۵.۲)$$

نکته‌ی مهم این است که کلاف برداری TM دارای توپولوژی طبیعی و ساختار هموار می‌باشد. که باعث می‌شود آن به یک $2n$ -منیفلد هموار تبدیل شود. برای هر نقشه‌ی مختصاتی هموار $(U, \varphi(x^1, x^2, \dots, x^n))$ روی M

مجموعه‌ی باز $\tilde{U} = \{(p, X) \in TM : p \in U\}$ با نقشه‌ی مختصاتی

$$\tilde{\varphi} : \tilde{U} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}, (p, X^i \frac{\partial}{\partial x^i} |_p) \mapsto (\varphi(U), X^1, X^2, \dots, X^n) \quad (۶.۲)$$

آنگاه گردایه‌ی همه‌ی این نقشه‌های مختصاتی که آن را با \tilde{A} نمایش می‌دهیم. که اطلس هموار است. که توسط آن می‌توان یک ساختار هموار روی TM تعیین کرد. که به آن ساختار هموار طبیعی روی TM گفته می‌شود.

تعریف ۱۹-۲. فرض کنید $U \subset M$ یک زیرمجموعه‌ی باز باشد. X میدان برداری‌ای از M روی U نگاشتی به صورت $X : U \rightarrow TM$ است. به طوری که برای هر نقطه‌ی $p \in U$ داریم $X|_p \in T_pM$

توجه کنید که برای میدان برداری X ما از نماد $X|_p$ به جای نماد $X(p)$ استفاده می‌کنیم. تا با نماد عمل کردن بردار مماس بر یک تابع هموار اشتباه نشود.

بگذارید (x^1, \dots, x^n) هر دستگاه موضعی دلخواهی روی یک زیرمجموعه‌ی باز $U \subset M$ باشد. و X را یک میدان برداری سرتاسری $X : M \rightarrow TM$ در نظر بگیرید. در این صورت می‌توان آن را به صورت موضعی به این صورت بیان کرد.

$$X|_p = X^i(p) \frac{\partial}{\partial x^i} |_p \quad (۷.۲)$$

برای هر $p \in U$ و تابع $X^i : U \rightarrow \mathbb{R}$ تابع مولفه‌ای X نسبت به دستگاه مختصاتی داده شده است. به علاوه از آنجایی که TM یک $2n$ -منیفلد هموار است. می‌توان از میدان برداری هموار صحبت کرد. میدان برداری X هموار است. اگر یک نگاشت هموار بین منیفلدهای هموار باشد. حال مجموعه‌ی تمام میدان‌های برداری هموار روی M با معنا است. و این گردایه را با نماد TM نمایش می‌دهیم.

لم ۲۰-۲. بگذارید $X : U \rightarrow TM$ یک میدان برداری باشد. آنگاه M هموار است. اگر و تنها اگر برای هر نقشه‌ی مختصاتی هموار (U, φ) تابع‌های مولفه‌ای X^1, \dots, X^n هموار بر اساس تعریف ۱۴-۲ باشند.

در اینجا ما U را به عنوان یک زیرمنیفلد باز هموار از M در نظر می‌گیریم.

نتیجه ۲۱-۲. بگذارید (U, φ) هر نقشه‌ی مختصاتی هموار دلخواهی باشد. به طوری که U یک زیر منیفلد باز هموار از منیفلد M باشد. آنگاه میدان برداری $X : U \rightarrow TM$ یک میدان برداری هموار است. اگر و تنها اگر تابع‌های مولفه‌ای X^1, \dots, X^n نسبت به نقشه‌ی (U, φ) هموار باشند.

تعریف ۲۲-۲. بگذارید (x^1, \dots, x^n) یک دستگاه مختصات محلی روی زیرمجموعه‌ی باز $U \subset M$ باشد.

آنگاه

$$\frac{\partial}{\partial x^i} : U \rightarrow TM, p \mapsto \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p \quad (۸.۲)$$

یک میدان برداری هموار روی U است. که به آن **میدان بردای مولفه‌ی i** - ام می‌گوییم.

توجه کنید که ما به صورت کلی اشیا مورد بحثمان را به صورت سرتاسری تعریف می‌کنیم. برای مثال ما میدان برداری هموار $X : M \rightarrow TM$ را به صورت سرتاسری تعریف می‌کنیم. اما در عمل برای بررسی و اینکه بتوانیم روی این اشیا محاسبات انجام دهیم. آنها را به صورت موضعی روی یک نقشه‌ی مختصاتی هموار بررسی می‌کنیم.

لم ۲۳-۲. تغییر مختصات

بگذارید $(U, \varphi = (x^1, \dots, x^n))$ و $(V, \psi = (y^1, \dots, y^n))$ دو نقشه‌ی مختصاتی هموار روی M باشند. به طوری که $U \cap V \neq \emptyset$ آنگاه میدان برداری مولفه‌ی روی زیرمنیفلد باز $U \cap V$ که به مختصات موضعی (x^1, \dots, x^n) و (y^1, \dots, y^n) مربوط است. توسط قانون تغییر مختصات به صورت زیر به یکدیگر مرتبط هستند.

$$\frac{\partial}{\partial x^i} = \frac{\partial y^j}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial y^j} \quad (۹.۲)$$

علاوه بر این تابع‌های مولفه‌ی

$$\frac{\partial y^j}{\partial x^i} : U \cap V \rightarrow \mathbb{R}, p \mapsto \frac{\partial y^j}{\partial x^i}(\varphi(p)) \quad (۱۰.۲)$$

هموار می‌باشند.

توجه کنید که لم فوق یک ابزار ساده برای تغییر مختصات هر میدان برداری می‌باشد. همچنین این لم تضمین می‌کند؛ که تغییر مختصات تاثیری بر همواری میدان‌های برداری ندارد و آن را حفظ می‌کند.

۵.۱.۲ منیفلدهای ریمانی

یک متریک ریمانی روی منیفلد هموار M طول بردار مماس و طول مسیرها را مشخص می‌کند. در این بخش ما می‌خواهیم یکسری از مفاهیم پایه‌ای از منیفلدهای ریمانی بپردازیم. با این هدف که نشان دهیم با تغییر متریک روی منیفلد M انحنا‌ی این منیفلد نیز تغییر می‌کند. برای مطالعات بیشتر در رابطه با این منیفلدها می‌توان به؟؟ مراجعه کرد. در ضمن در این فصل ما M را یک فضای مستقل در نظر می‌گیریم. نه بخشی از یک فضای دیگر در برخی از مراجع M را بخشی از یک فضای محیطی می‌دانند. که باعث می‌شود بتوان روی آن‌ها حساب دیفرانسیل و انتگرال انجام داد. اما انجام آن بسیار سخت و همراه با محدودیت‌های زیاد می‌باشد. و به صورت به خصوص تغییر متریک روی M زمانی که فضای محیطی وجود دارد امکان پذیر نیست.

۱.۵.۱.۲ متریک ریمانی

فرض کنید M یک منیفلد هموار باشد. متریک ریمانی g روی M که توسط خود ریمان معرفی شده. گردایه‌ای از ضرب‌های داخلی $g|_p : T_p M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R}$ برای هر $p \in M$ به طوری که $g|_p$ به صورت هموار تغییر کند.

؟؟ را ببینید. به صورت هموار تغییر کردنه این معنی است که

$$g(X, Y) : M \rightarrow \mathbb{R}, \quad p \mapsto g|_p(X|_p, Y|_p) \quad (11.2)$$

این تابع برای هر میدان برداری همواری روی M هموار می‌باشد. باید توجه کنیم که متریک ریمانی g مثبت معین می‌باشد. یعنی $g(X, X) > 0$ اگر $X \neq 0$ باشد. و متقارن نیز می‌باشد. یعنی $g(X, Y) = g(Y, X)$ برای هر $X, Y \in T_p M$ و $p \in M$ به این خاطر که بر اساس تعریف $g|_p$ یک ضرب داخلی است. علاوه بر این یادآوری می‌کنیم. که شرط همواری معادل است با اینکه بگوییم هر یک از توابع مولفه‌ای $g_{ij} = g(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j})$ برای هر دستگاه مختصاتی موضعی $(\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n})$ هموار است.

تعریف ۲۴-۲. متریک ریمانی g روی $-n$ منیفلد هموار M یک میدان تانسوری مثبت معین و متقارن می‌باشد. $(M, g) \in \tau_0^2(M)$ به جفت (M, g) یک منیفلد ریمانی می‌گوییم.

این تعریف یک تعریف متعارف است. که در اکثر مراجع می‌توان آن را پیدا کرد. حالا فرض کنید که (M, g) یک $-n$ منیفلد ریمانی باشد. آنگاه می‌توانیم. نرم «طول» $X \in T_p M$ بردار مماس را مشابه نرم اقلیدسی تعریف کنیم.

$$\|X\|_g = \sqrt{g_p(X, X)} \quad (12.2)$$

به صورت مشابه زاویه‌ی بین دو بردار ناصفر $X, Y \in T_p M$ برابر است با $\theta \in [0, \pi]$ که شرط

$$\cos(\theta) = \frac{g(X, Y)}{\|X\|_g \|Y\|_g} \quad (13.2)$$

را برآورده کند. توجه داریم که θ می‌تواند بی نهایت مقدار انتخاب کند اما تنها جواب یکتای آن در بازه‌ی $[0, \pi]$ مورد قبول ما است. حال یک دستگاه مختصاتی موضعی (x^1, x^2, \dots, x^n) روی مجموعه‌باز $U \subset M$ در نظر می‌گیریم. متریک ریمانی g را می‌توان به صورت

$$g = g_{ij} dx^i \otimes dx^j \quad (14.2)$$

نمایش داد که در آن $g_{ij} = (\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j})$ می‌باشد. از آنجایی که g_{ij} یک میدان تانسوری هموار است. g در ۱۴.۲ نیز هموار می‌باشد. همچنین شایان به ذکر است که در فرمول بالا از نماد اینیشتن نیز استفاده شده کرده‌ایم. همچنین به علت‌های تاریخی و نمایش ۱۴.۲ در فیزیک از نوشتن علامت \otimes نیز صرف نظر می‌شود. و متریک

g را در یک دستگاه مختصات موضعی به این صورت نمایش می‌دهند.

$$g = g_{ij} dx^i dx^j \quad (15.2)$$

به علاوه این روش نیز مفید است که ماتریس $G = (g_{ij})_{ij}$ را متناظر با دستگاه مختصات موضعی در نظر بگیریم و بردارهای $X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$, $Y = Y^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ آنگاه داریم

$$g(X, Y) = g_{ij} X^i Y^j = (X^1, X^2, \dots, X^n) G(p) \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \dots \\ Y_n \end{pmatrix} \quad (16.2)$$

توجه داشته باشید که برای هر نقطه‌ی $p \in U$ ماتریس G یک ماتریس مثبت معین و متقارن می‌باشد.

تعریف ۲-۲۵. دو متریک ریمانی g_1, g_2 روی یک منیفلد M را هم‌ریخت (conformal) نسبت به یکدیگر می‌نامیم اگر و تنها اگر یک تابع مثبت هموار مانند $f \in C^\infty(M)$ وجود داشته باشد. و $g_2 = f g_1$

۶.۱.۲ انحنا

۲.۲ هندسه‌ی نسبیّت

در این قسمت ما شروع به تعریف یکسری از مفاهیم می‌کنیم. که در ریاضیات نظریه‌ی نسبیّت خصوصاً در بیان و اثبات قضیه‌ی جرم مثبت لازم است.

۱.۲.۲ متریک شوارتزشیلد

به صورت کلی وقتی ما در رابطه با معادلات دیفرانسیل جزئی حرف می‌زنیم. به دست آوردن جواب در حالت متقارن می‌تواند اطلاعات زیاد و کاربردی‌ای به ما بدهد؛ و ما را به سمت جواب بنیادی رهنمود می‌کند. حالا فرض کنید که می‌خواهیم معادلات میدان انیشتن^۱ ۳.۱ را در حالت انحنای اسکالر ثابت حل کنیم. اگر g را یک متریک کروی متقارن را در نظر بگیریم. و $d\Omega^2$ را نماد متریک واحد استاندارد کروی روی کره‌ی S^{n-1} در نظر بگیریم. آنگاه متریک g به صورت زیر خواهد بود

$$g = ds^2 + r(s)^2 d\Omega^2 \quad (17.2)$$

¹Einstein field equations

اگر متریک خارج از یک کره‌ی متقارن مینیمال باشد. آنگاه متریک g به این فرم درخواهد آمد:

$$g = \frac{ds^2}{V(r)} + r^2 d\Omega^2 \quad (18.2)$$

که در آن $V(r)$ یک تابع مثبت است. و از r به عنوان مختصات استفاده می‌کنیم. حال با به دست آوردن انحنای اسکار برای متریک g و ثابت فرض کردن فرم تابع $V(r)$ را بدست می‌آوریم.

$$V(r) = 1 - \frac{2m}{r^{n-2}} V(r)' - \frac{\kappa}{n(n-1)} r^2 \quad (19.2)$$

حال زمانی که $\kappa = 0$ باشد. ما به این متریک شوارتزشیلد^۲ می‌گوییم.

تعریف ۲۶-۲. متریک شوارتزشیلد یک حل تحلیلی از معادلات میدان گرانشی در نسبیت عام است که توصیف‌کننده‌ی فضا-زمان اطراف یک جرم کروی غیرچرخشی است، مانند یک سیاهچاله یا یک ستاره با جرم ثابت. این متریک توسط کارل شوارتزشیلد^۳ در سال ۱۹۱۶ به دست آمد و یکی از مهم‌ترین و مشهورترین متریک‌ها در نظریه نسبیت عام است. [۶-۱] فرمول متریک شوارتزشیلد به شکل زیر است:

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2GM}{rc^2} \right) c^2 dt^2 + \left(1 - \frac{2GM}{rc^2} \right)^{-1} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \quad (20.2)$$

که در آن

- ds^2 مربع فاصله‌ی فضا-زمان است.
- G ثابت گرانش.
- M جرم مرکزی.
- c سرعت نور.
- r فاصله از مرکز جرم.
- θ و ϕ مختصات زاویه‌ای در سیستم مختصات کروی هستند.
- t زمان است.

در اینجا من نمی‌دانم که تعریف رسمی را ارائه دهم. یا تعریفی که در مسیر اثبات از آن بهره می‌بریم؟؟

²Schwarzschild metric

³Karl Schwarzschild

۲.۲.۲ منیفدهای در بینهایت مسطح

فصل ۳

پیش‌نیازهای هندسه نسبت

ما در این فصل قرار است مفاهیم مرتبط با هندسه‌ی نسبت را بیان کنیم.

فصل ۴

ابرویه‌های مینیمال

تعریف ۴-۱. فرض کنید Σ^m یک زیرمنیفلد از منیفلد ریمانی (M^n, g) باشد. متریک g زمانی که روی Σ القا شده را h می‌نامیم. اگر ما همبندی لوی-چیویتای^۱ (Σ, h) را با نماد $\hat{\nabla}$ نشان دهیم. آنگاه برای هر $p \in \Sigma$ و $X \in T_p\Sigma$ و برای هر میدان برداری $Y \in C^\infty(T\Sigma)$ داریم:

$$\hat{\nabla}_X Y = (\nabla_X \tilde{Y})^T$$

مولفه‌ی مماسی $\nabla_X \tilde{Y}$ در نقطه‌ی p و \tilde{Y} یک توسیع دلخواه از Y در یک میدان برداری روی M می‌باشد. قرار می‌دهیم که $N\Sigma$ یک کلاف نرمال از Σ روی M باشد. یادآوری می‌کنیم که فرم اساسی دوم Σ به صورت یک تانسور $A \in C^\infty(T^*\Sigma \otimes T^*\Sigma \otimes N\Sigma)$ تعریف شده. که برای هر $p \in \Sigma$ و $X, Y \in T_p\Sigma$

$$A(X, Y) := (\nabla_X \tilde{Y})^\perp$$

به صورت معادل ما می‌توانیم عملگر شکل^۲ یا نگاهت وینگارتن^۳ $S \in C^\infty(N^*\Sigma \otimes T^*\Sigma \otimes T\Sigma)$ آنگاه برای هر $X \in T_p\Sigma$ و $\nu \in N_p\Sigma$

$$S_\nu(X) := (-\nabla_X \tilde{\nu})^T$$

¹Levi-Civita connection

²shape operator

³weingarten map

مولفه‌ی مماسی $\nabla_X \tilde{\nu}$ که $\tilde{\nu}$ یک توسیع دلخواه از ν است. که بر امتداد نرمال Σ باقی بماند. فرم اساسی دوم و عملگر شکل توسط معادله‌ی وینگارتن با یکدیگر مرتبط می‌شوند.

$$\langle A(X, Y), \nu \rangle = \langle S_\nu(X), Y \rangle$$

در حالت ابرویه زمانی که Σ دارای بعد $n - 1$ باشد. معمولاً اینکار مفید است؛ که یک بردار نرمال عمود متمایز انتخاب کنیم. اگر انتخاب سرتاسری‌ای برای بردار نرمال ν «به بیان دیگر Σ دارای کلاف نرمال بدیهی می‌باشد.» وجود داشته باشد. می‌گوییم که Σ دووجهی^۴ است. یادآوری می‌کنیم؛ که اگر منیفلد محیطی M جهت‌دار باشد. آنگاه ابرویه‌ی Σ دووجهی است اگر و تنها اگر جهت‌دار باشد. با توجه به چنین ν توسط تعریف زیر ما می‌توانیم فرم اساسی دوم را به عنوان یک فرم اسکالر-مقدار دو خطی در نظر بگیریم. به جای اینکه به عنوان یک فرم بردار-مقدار دو خطی در نظر بگیریم.

$$A(X, Y) := \langle A(X, Y), -\nu \rangle$$

این را در نظر داشته باشید که همیشه حداقل یک انتخاب ضمنی برای بردار نرمال ν وجود دارد. هر جا که از نماد $A(X, Y)$ استفاده شود. در حالت کلی اگر یک بردار نرمال واحد ν خاص نباشد. و Σ دارای داخل و بیرون باشد. معمولاً به صورت ضمنی فرض می‌شود. که ν بردار نرمال بیرونی است. به صورت مشابه اگر ν مشخص باشد. آنگاه ما برای عملگر شکل می‌نویسیم

$$S := S_{-\nu}$$

توجه کنید.

$$(\nabla_X Y, -\nu) = A(X, Y) = \langle S(X), Y \rangle = \langle \nabla_X \nu, Y \rangle \quad (1.4)$$

تبصره ۲-۴. نماد $-\nu$ به جای ν به خاطر تعریف ما از A, S ظاهر می‌شود. این یک قرارداد بین ما در ادامه‌ی کتاب می‌باشد. این انتخاب نسبتاً عجیب برای این است که ما می‌خواهیم به صورت همزمان (۱) دو خطی بودن A و اینکه عملگر شکل S برای کره‌ها در فضای اقلیدسی مثبت باشد. و (۲) اینکه بردار نرمال به جهت بیرون بردار نرمال واحدی باشد که ما به صورت پیش‌فرض انتخاب می‌کنیم. متأسفانه این انتخاب باعث تضاد(تناقض؟؟) در تعریف کلاسیک ما از عملگر شکل می‌شود. با این حال ما بر این باوریم؛ که مزایای این

⁴Two-sided

توافق بر معایب آن می چربد.

مثال ۳-۴. نشان دهید اگر (M, g) یک فضای اقلیدسی باشد. و Σ یک کره با شعاع r باشد. و ما ν را بردار نرمال بیرونی انتخاب کنیم. آنگاه $A = \frac{1}{r}h$ که h متریک القایی روی Σ می باشد.

بردار انحنای میانگین H برابر است با $tr(A)$ روی جهت های مماسی. در نقطه $p \in \Sigma$

$$H := \sum_{i=1}^m A(e_i, e_i)$$

و e_1, e_2, \dots, e_m هر پایه‌ی یکا متعامدی از فضای مماس $T_p \Sigma$ می باشد. در حالت ابرویه‌ها ما می توانیم انحنای میانگین اسکالر را به صورت:

$$H := \langle H, -\nu \rangle = tr_h(A) = tr(S)$$

تعریف کنیم.

مثال ۴-۴. ابرویه‌ی Σ در (M, g) را با بردار نرمال ν در نظر بگیرید. نشان دهید برای هر تابع هموار f

$$\Delta_{\Sigma} f = \Delta_g f - \nabla_{\nu} \nabla_{\nu} f + \langle H, \nabla f \rangle$$

برای میدان برداری X داده شده روی M که در راستای Σ تعریف شده. ما می توانیم دیورژانس مماسی را X را به این صورت تعریف کنیم.

$$div_{\Sigma} X := \sum_{i=1}^m \langle \nabla_{e_i} X, e_i \rangle$$

که e_1, \dots, e_n هر پایه‌ی یکامتعادلی برای Σ هستند. توجه کنید که این تعریف تعمیم یافته‌ی تعریف اصلی دیورژانس روی Σ نسبت به بردارهایی که لزوماً نسبت به Σ مماس نیستند. همچنین مشاهده کنید که این نماد برای ما یک بیان دیگر برای انحنای میانگین اسکالر Σ می دهد.

$$H = tr(S) = div_{\Sigma} \nu$$

مثال ۴-۵. نشان دهید برای هر دستگاه مختصاتی ν_1, \dots, ν_n برای Σ داریم:

$$\operatorname{div}_\nu X = \sum_{i,j=1}^m \langle \nu^i, \nu^j \rangle \langle \nabla_{\nu^i} X, \nu_j \rangle$$

انحنای درونی و بیرونی Σ و انحنای محیطی همه با یکدیگر مرتبط هستند. با توجه به معادلات Gauss-codazzi [wik, gauss-codazzi] که ما می‌خواهیم آنها را از یکدیگر جدا کنیم. و به آن‌ها معادله‌ی گاوس و معادله‌ی Peterson, codazzi, Mainardi بنامیم.

قضیه ۴-۶. معادله‌ی گاوس

فرض کنید Σ یک زیرمنیفلد (M, g) باشد. برای هر $p \in \Sigma$ و هر بردار مماسی $X, Y, Z, W \in T_p \Sigma$ داریم:

$$\operatorname{Riem}_m(X, Y, Z, W) = \operatorname{Riem}_\Sigma(X, Y, Z, W) + \langle A(X, W), A(Y, Z) \rangle - \langle A(X, Z), A(Y, W) \rangle$$

قضیه ۴-۷. Peterson-Codazzi-Mainardi

قرار دهید Σ یک زیرمنیفلد از (M, g) باشد. برای هر $p \in \Sigma$ و هر بردار مماسی $X, Y, Z \in T_p \Sigma$ و هر بردار نرمال $\nu \in N_p \Sigma$ داریم:

$$\operatorname{Riem}_M(X, Y, Z, \nu) = \langle (\nabla_Y)(X, Z) - (\nabla_X A)(Y, Z), \nu \rangle$$

حالت ابرویه را در نظر بگیرید. قرار دهید e_1, \dots, e_{n-1} یک پایه‌ی یکامتعامد برای فضای مماسی $T - p \Sigma$ باشد. و ν را یک بردار نرمال متمایز قرار می‌دهیم. $\nu \in N_p \Sigma$ بر اساس معادله‌ی گاوس داریم:

$$\operatorname{Riem}_m(e_i, e_j, e_i, e_j) = \operatorname{Riem}_\Sigma(e_i, e_j, e_i, e_j) + A(e_i, e_j)A(e_j, e_i) - A(e_i, e_j)A(e_j, e_i)$$

اگر ما معادله‌ی فوق را روی اندیس‌های i, j از $1, \dots, n-1$ جمع بزنیم. « به عبارت دیگر تریس بگیریم » مشاهده می‌کنیم:

$$\sum_{i,j=1}^{n-1} \operatorname{Riem}_M(e_i, e_j, e_i, e_j) = R_\Sigma + \|A\|^2 - H^2$$

اگر ما $e_n = \nu$ قرار دهیم. آنگاه e_1, \dots, e_n یک پایه‌ی یکامتعامد برای $T_p M$ خواهد شد. آنگاه سمت چپ

$$\begin{aligned} \sum_{i,j=1}^{n-1} Riem_M(e_i, e_j, e_i, e_j) &= \sum_{i,j=1}^n Riem_M(e_i, e_j, e_i, e_j) - \sum_{i=1}^n Riem_m(e_i, e_n, e_i, e_n) \\ &\quad - \sum_{j=1}^n Riem_m(e_n, e_j, e_n, e_j) + Riem_M(e_i, e_j, e_i, e_j) \\ &\quad - Riem_M(e_n, e_n, e_n, e_n) \\ &= R_M - 2 Ric_M(e_n, e_n) \end{aligned}$$

که در اینجا ما از تقارن‌های تانسور ریمان استفاده کردیم. حال نتیجه‌ی ذیل را داریم:

نتیجه ۸-۴. تریس معادله‌ی گاوس

Σ را یک ابررویه‌ی (M, g) برای هر $p \in \Sigma$ و هر بردار یک‌ه‌ی نرمال $\nu \in N_p \Sigma$ داریم:

$$R_M = R_\Sigma + 2 Ric_M(\nu, \nu) + |A|^2 - H^2$$

۱.۴ تعییرات مرتبه‌ی اول و دوم اندازه‌ی حجم

هدف ما در این بخش مطالعه‌ی تابع حجم μ روی فضای همه زیرمنیفدهای فشرده‌ی m -بعدی از منیفلد بدون مرز یا با مرز M^n می‌باشد. به صورت دقیق‌تر، ما می‌خواهیم نقاط بحرانی این تابع را شناسایی کنیم. و در ادامه نقاط ماکسیمال موضعی. به طور رسمی ما می‌توانیم تابع حجم را روی یک منیفلد ماتناهی‌البعده M یک تابع بی‌نهایت بعدی (فضای غیرخطی) فضای همه‌ی زیرمنیفدهای فشرده‌ی m -بعدی در نظر بگیریم. و $f : M \rightarrow V$

را یک نگاشت از M به فضای برداری V است، آنگاه ما مشتق سوپی از f را در جهت ν در نقطه‌ی p به صورت $Df|_p(\nu) := \frac{d}{dt}|_{t=0} f(\gamma(t))$ زمانی که γ هر مسیر همواری روی M و $\gamma(0) = p$ و $\gamma'(0) = \nu$. نگاشت مشتق در نقطه‌ی p ، $Df|_p(\nu) : T_p M \rightarrow V$ گاهی به عنوان خطی‌سازی f در نقطه‌ی p یاد می‌شود. یک نقطه‌ی بحرانی نقطه‌ای است که تبدیل خطی‌سازی در آن نقطه پوچ شود. این ایده را می‌توان به حالت بی‌نهایت بعد نیز تعمیم داد. اما ما در اینجا آن را به صورت نا دقیق بیان می‌کنیم چون ما به این چارچوب نیازی نداریم. در تعریف قبلی خود از منیفدهای بی‌نهایت بعدی ما M را به عنوان فضای همه زیر منیفدهای m -بعدی فشرده‌ی منیفلد M حرف زدیم. اما گاهی می‌توان منیفدهای بینهایت بعدی را با این ادبیات نیز توضیح داد. که یک ابررویه‌ی مشخص شده Σ را در نشر بگیریم و M را فضای همه‌ی نشاندهای هموار Σ به توی M در

نظر بگیریم. به این خاطر که این فضا برای کار کردن بسیار مناسب‌تر است. یک رویکرد مشابه دیگر نیز وجود دارد که در آن ما یک زیرمنیفلد خاص را انتخاب می‌کنیم. $\Sigma^m \subset M^n$ و فضای M را $Diff_0(M)$ در نظر می‌گیریم، که فضای همه‌ی دیفیومورفیسم‌ها که در همان مولفه همانی است. با پیش بردن Σ توسط دیفیومورفیسم‌ها، این فضا تمام زیرمنیفلدهای M را که نسبت به Σ (isotropic) هستند را پارامتری می‌کند. **در کتاب بیان شده که این خودش تعریف isotropic است.** قطعاً این پارامتری‌سازی‌ها تعداد زیادی تکرار غیرضروری ایجاد می‌کند. اما این تکررهای غیر ضروری مشکلی برای ما ایجاد نمی‌کنند. حتی بدون تعریف درست منیفلدهای بی‌نهایت بعدی ما همچنان می‌توانیم به صورت شهودی در رابطه با چگونگی فضای مماس $Diff_0(M)$ در همانی فکر کنیم.

نتیجه‌گیری و پیشنهادات

کتابنامه

- [1] J.A. Thorpe. Elementary Topics in Differential Geometry. Undergraduate Texts in Mathematics. Springer My Copy UK, 1979. *Tho 79*
- [2] Schoen, R., & Yau, S. T. (1979). *On the proof of the positive mass conjecture in general relativity*. Communications in Mathematical Physics, 65(1), 45–76.
- [3] Witten, E. (1981). *A new proof of the positive energy theorem*. Communications in Mathematical Physics, 80(3), 381–402.
- [4] Newton, I. (1687). *Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica*. Royal Society, London.
- [5] Goldstein, H., Poole, C., & Safko, J. (2002). *Classical Mechanics* (3rd ed.). Addison-Wesley, San Francisco.
- [6] C. W. Misner, K. S. Thorne, J. A. Wheeler, *Gravitation*, W. H. Freeman and Company, 1973.
- [7] B. F. Schutz, *A First Course in General Relativity*, Cambridge University Press, 2009.
- [8] R. M. Wald, *General Relativity*, University of Chicago Press, 1984.
- [9] Ervin, V. J., & Roop, J. P.(2006). Variational formulation for the stationary fractional advection dispersion equation. *Numer. Methods Partial Differential Equations*, 22. 558–576.
- [10] Evans, L. C.(2010). *Partial differential equations* (2nd Ed.). AMS.

- [11] Falgout, R. D., Friedhoff, S., Kolev, T. V., Maclachlan, S. P., & Schroder, J. B. (2012). Parallel time integration with multigrid. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 36(6). 635–661.
- [12] Falgout, R. D., Lecouvez, M., & Woodward, C. S. (2019). A parallel-in-time algorithm for variable step multistep methods. *Journal of Computational Science*, 37. 101029.
- [13] Falgout, R. D., Manteuffel, T. A., O’Neill, B., & Schroder, J. B. (2017). Multigrid reduction in time for nonlinear parabolic problems: a case study *SIAM Journal on Scientific Computing*, 39(5). S298-S322.
- [14] Feng, L. B., Zhuang, P., Liu, F., Turner, I., & Gu, Y. T. (2016). Finite element method for space-time fractional diffusion equation *Numerical Algorithms*, 72. 749-767.
- [15] Feng, L. B., Zhuang, P., Liu, F., Turner, I., Anh, V., & Li, J. (2017). A fast second-order accurate method for a two-sided space-fractional diffusion equation with variable coefficients. *Computers & Mathematics with Applications*, 73(6). 1155-1171.
- [16] Fox, W. P., & West, R. D. (2025). *Numerical methods and analysis with mathematical modelling*. CRC Press.
- [17] Friedhoff, S., Falgout, R. D., Kolev, T. V., Maclachlan, S. P., & Schroder, J. B. (2014). A multigrid-in-time algorithm for solving evolution equations in parallel. *Lawrence Livermore National Laboratory*.
- [18] Gander, M. J. (2015). 50 years of time parallel time integration. *Contrib. Math. Comput. Sci.*, 9. 69–114.
- [19] Gander, M. J., & Vandewalle, S. (2007). Analysis of the Parareal Time Parallel Time Integration Method. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 29(2). 556-578.

- [20] Gockenbach, G. S. (2006). *Understanding and implementing the finite element method*. SIAM.
- [21] Gong, C. Y., Bao, W. M., & Tang, G. J. (2013). A parallel algorithm for the Riesz fractional reaction–diffusion equation with explicit finite difference method. *Fract. Calc. Appl. Anal.*, 16. 654–669.
- [22] Gong, C. Y., Bao, W. M., Tang, G. J., Jiang, Y. W., & Liu, J. (2015). Computational challenge of fractional differential equations and the potential solutions: a survey. *Math. Probl. Eng.*, 2015. 258–265.
- [23] Günther, S., Gauger, N. R., & Schroder, J. B. (2018). A non-intrusive parallel-in-time adjoint solver with the XBraid library. *Comput. Visual Sci.*, 19. 85–95.
- [24] Hao, Z. P., Fan, K., Cao, W. R., & Sun, Z. Z. (2016). A finite difference scheme for semilinear space-fractional diffusion equations with time delay. *Appl. Math. Comput.*, 275. 238–254.
- [25] Henthaler, A., Southworth, B. S., Nordsletten, D., Röhrle, O., Falgout, R. D., & Schroder, J. B. (2020). Multilevel convergence analysis of Multigrid reduction-in-time. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 42(2). A771-A796.
- [26] HYPRE: Scalable linear solvers and multigrid methods, <https://llnl.gov/casc/hypre>.
- [27] Jia, J. H., & Wang, H. (2016). A fast finite volume method for conservative space-fractional diffusion equations in convex domains. *J. Comput. Phys.*, 310. 63–84.
- [28] Jin, B. (2021). *Fractional differential equations: an approach via fractional derivatives*. Springer.
- [29] Lions, J. L., Maday, Y., & Turinici, G. Résolution D’EDP par un schéma en tempspararéel. *C. R. Math. Acad. Sci. Paris* 332. (2001). 661–668.

- [30] Liu, F., Zhuang, P., Turner, I., Burrage, K., & Anh, V. (2014). A new fractional finite volume method for solving the fractional diffusion equation. *Appl. Math. Model.*, 38. 3871–3878.
- [31] Nievergelt, J. (1964). Parallel methods for integrating ordinary differential equations. *Commun. ACM*, 7. 731–733.
- [32] Pang, H. K., & Sun, H. W. (2012). Multigrid method for fractional diffusion equations. *J. Comput. Phys.*, 231. 693–703.
- [33] Reddy, B. D. (1998). *Introductory functional analysis: with applications to boundary value problems and finite elements*. Springer.
- [34] Ries, M., Trottenberg, U., & Winter, G. (1983). A note on MGR methods. *Linear Algebra and its Applications*, 49. 1–26.
- [35] Song, F. Y., & Xu, C. J. (2015). Spectral direction splitting methods for two-dimensional space fractional diffusion equations. *J. Comput. Phys.*, 299. 196–214.
- [36] Stoer, J., & Bulirsch, R. (2002). *Introduction to Numerical Analysis* (3rd ed.). Springer.
- [37] Sun, Z. Z., & Gao, G. H. (2020). *Fractional differential equations: Finite difference methods*. De Gruyter.
- [38] Tielen, R., Möller, M., & Vuik, C. (2022). Combining p-multigrid and MGRIT methods to obtain a scalable solver for Isogeometric Analysis. *SN Appl. Sci.*, 4(163).
- [39] Trottenberg, U., Oosterlee, C., & Schüller, A. (2001). *Multigrid*. Academic Press, San Diego.
- [40] Wang, Q. L., Liu, J., Gong, C. Y., Zhang, Y., & Xing, Z. C. (2015). A GPU-based fast solution for Riesz space fractional reaction–diffusion equation. *Proc. 18th Intl. Conf. Network-Based Info. Sys.* 317–323.

- [41] Wu, S. L., & Zhou, T. (2017). Fast parareal iterations for fractional diffusion equations. *J. Comput. Phys.*, 329. 210–226.
- [42] XBraid: Parallel time integration with multigrid, <https://llnl.gov/casc/xbraid>.
- [43] Xu, J., & Zikatanov, L. (2017). Algebraic multigrid methods. *Acta Numerica*, 26. 591–721.
- [44] Yang, Y. (2015). Jacobi spectral Galerkin methods for fractional integro-differential equations. *Calcolo*, 52. 519–542.
- [45] Yang, Z., Yuan, Z., Nie, Y., Wang, J., Zhu, X., & Liu, F. (2019). Finite element method for nonlinear Riesz space fractional diffusion equations on irregular domains. *J. Comput. Phys.*, 330. 863–883.
- [46] Yue, X., Shu, S., Xu, X., Bu, W., & Pan, K. (2019). Parallel-in-time multigrid for space–time finite element approximations of two-dimensional space-fractional diffusion equations. *Comput. Math. Appl.*, 78. 3471–3484.
- [47] Zhang, H., Liu, F., & Anh, V. (2010). Galerkin finite element approximation of symmetric space-fractional partial differential equations *Appl. Math. Comput.*, 217. 2534-2545.
- [48] Zhao, Y., Bu, W. P., Zhao, X., & Tang, Y. F. (2017). Galerkin finite element method for two-dimensional space and time fractional Bloch-Torrey equation. *J. Comput. Phys.*, 350. 117–135.

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

ا

Underlying اساسی
Temporal propagator انتشاردهنده زمانی

پ

Marching پیشرو

ت

Simultaneous توأم
Distributed توزیع یافته

چ

Piecewise polynomials چندجمله‌ای‌های قطعه‌ای
Cycle چرخه

د

Coarse درشت
Global interpolation درون‌یاب سراسری
Local interpolation درون‌یاب موضعی
Bilinear دوخطی

ر

Cluster computer..... رایانه خوشه‌ای

ز

Essential supremum..... زبرینه اساسی

Subdiffusion..... زیرانتشار

س

Hierarchy..... سلسله مراتب

ش

Mesh, Grid..... شبکه

ظ

Fine..... ظریف

ف

Parareal..... فراواقعی

Test Space..... فضای آزمایش

Trial Space..... فضای آزمون

ق

Simultaneous diagonalization..... قطری‌شونده توأم

ک

Total-reduction..... کاهش کلی

Alternating-reduction کاهش تناوبی

م

Restriction محدودیت

Support محمل

Scalabe مقیاس‌پذیر

و

Coercive وادارنده

ه

Concurrency همروندسازی

Smooth هموار

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

A

Affine	آفین
Analytic function	تابع تحلیلی

B

Boundary component	مولفه مرزی
--------------------------	------------

C

Calculation	محاسبات
Center	مرکز
Change	تبدیل
Closed orbit	مدار بسته
Coefficient	ضریب
Compactness	فشردگی
Continuous	پیوسته
Contradiction	تناقض
Coordinates	مختصات
Corollary	نتیجه
Counted with multiplicities	با احتساب تکرار
Criteria	معیار

Critical period دوره بحرانی
 Curve منحنی

D

Dehomogenized غیرهمگن
 Denominator مخرج
 Divid تقسیم
 Discriminant مبین

E

Energy level سطح انرژی
 Explicit صریح

F

Factor عامل
 First integral انتگرال اول
 Foliated افراز (یا ورقه‌بندی) شده
 Function تابع

H

Hamiltonian system دستگاه همیلتونی
 Half-plane نیم‌صفحه

I

Implicitly	به صورت ضمنی
Integrating factor	عامل انتگرال ساز
Interval	بازه
Invariant	ناوردا
Involution	برگردان
Isochronous	هم زمان - هم دوره

L

Lemma	لم
-------------	----

M

Multiplicities	چندگانگی ها
Maple	میپل
Mapping	نگاشت
Maximum	بیشینه
Minimum	کمینه
Monotone	یکنوا
Monotonicity	یکنوایی
Multiply	ضرب

N

Negative	منفی
Neighborhood	همسایگی
Notation	نماد

P

Parameter.....	پارامتر
Period annulus.....	طوق تناوبی
Period annuli.....	طوق‌های تناوبی
Period function.....	تابع دوره تناوب
Polynomial.....	چندجمله‌ای
Polycycle.....	چندسیکل
Potential system.....	دستگاه پتانسیل
Procedure.....	روش
Proof.....	اثبات
Proposition.....	گزاره
Punctured.....	محذوف

R

Regular.....	منظم
Rescaling.....	تغییرمقیاس
Resultant.....	برآیند
Reversible.....	برگشت‌پذیر
Root.....	ریشه

S

Sign.....	علامت
Statement.....	گزاره
Surrounding.....	حول

T

Tangent.....	مماس
Theorem.....	قضیه
Transformation.....	تبدیل
True.....	درست

U

Unique.....	یکتا
-------------	------

V

Variation method.....	روش تغییرات
-----------------------	-------------

W

Well defined.....	خوش تعریف
-------------------	-----------

فهرست نمادها

مفهوم	نماد
اعداد حقیقی	\mathbb{R}
اعداد حقیقی مثبت	\mathbb{R}^+
اعداد طبیعی	\mathbb{N}
اعداد فرد	\mathbb{O}

فهرست کلمات اختصاری

کلمه کامل	معنی	اختصار
Finite elements method	روش عناصر متناهی (المان محدود)	FEM
Fractional partial differential equations	معادلات با مشتقات جزئی کسری	FPDEs
Space-fractional diffusion	انتشار کسری-مکانی	SFD
Multigrid reduction	کاهش چندشبهه‌ای	MGR
Multigrid reduction-in-time	کاهش در زمان چندشبهه‌ای	MGRIT

Multigrid reduction-in-time algorithms for solving fractional partial differential equations

Ali Forouzandeh Hafshejani
aforouzandeh@math.iut.ac.ir

August 31, 2024

Master of Science Thesis (in Farsi)
Department of Mathematical Sciences
Isfahan University of Technology, Isfahan 84156-8311, Iran

Supervisor: Dr. Reza Mokhtari, mokhtari@iut.ac.ir

Advisor: Dr. Mohadese Ramezani, mohadeseh.ramezani@alumni.iut.ac.ir

2020 MSC: 65M55, 65M60, 65Y05.

Keywords: Fractional calculus, Space-fractional diffusion, FEM, Parallel-in-time, Multigrid reduction-in-time.

Abstract:

This M.Sc. thesis is based on the following paper

- Yue, X., Shu, S., Xu, X., Bu, W., & Pan, K. (2019). Parallel-in-time multigrid for space–time finite element approximations of two-dimensional space-fractional diffusion equations. *Comput. Math. Appl.*, 78. 3471–3484.

Nowadays, temporal or spatial fractional partial differential equations (FPDEs) have found applications in real-world problems in science and engineering. This popularity stems from the fractional derivative’s nonlocal property compared to the local nature of the integer-order derivative. One of the most important FPDEs is the space-fractional diffusion equation (SFD) which has applications in modeling anomalous diffusion, investigating subdiffusive phenomena, and describing chaotic dynamics. SFD over two-dimensional spaces is widely recognized as a key diffusion equation. It is derived from generalizing the spatial derivatives from integer order to fractional order within the partial differential equation. Since most SFD equations can not be solved analytically, various numerical methods, such as the finite difference method, local discontinuous Galerkin approach, and finite element method (FEM), have been proposed to achieve both high accuracy and efficiency. It is important to note that fractional derivatives use global information, while classical derivatives rely on local information. As a result, regardless of the discretization method used, significant computational effort is required due to the nonlocality introduced by fractional differential operators. Many researchers have worked on developing fast algorithms to address this challenge. In addition to these rapid solutions, parallel computing approaches, such as multigrid reduction in time (MGRIT), should also be considered potential techniques.

In this thesis, we begin by discussing fundamental concepts in functional analysis, including vector spaces, function spaces, and Sobolev spaces, as well as the principles of fractional calculus. We explain that fractional derivatives and integrals are foundational to fractional calculus, with the Ritz fractional derivative being particularly favored for applications in spatial domains. Next, we examine various fractional spaces, such as fractional Sobolev spaces, and investigate their properties. Additionally, we address spaces associated with FPDEs.

After that, we investigate the SFD problem with Dirichlet boundary conditions. We start by explaining the FEM and its properties. We construct the weak form of the SFD equation and apply space-time discretization, utilizing uniform spatial discretization and non-uniform temporal discretization. This process results in a large, sparse system of equations. To solve the SFD equation numerically, we represent the method as a time-marching loop, where a spatial linear system is solved at each time step. This time-marching loop acts as a one-step temporal method, similar to solving a lower bidiagonal block system over time. We also discuss various schemes for temporal parallelization and provide a brief historical context. One notable technique is MGRIT, which utilizes a multigrid reduction approach. The MGRIT offers two significant advantages: it minimizes interference with existing codes and allows optimal scalability. Subsequently, we employ a two-stage version of the MGRIT method to solve the lower bidiagonal system of

the block unit and analyzing its convergence performance.

Finally, we implement a numerical example in MATLAB and XBraid and examine some tests. The results indicate that the method demonstrates adequate consistency and convergence for numerical solutions of such SFD equations, and it can be extended to solve some complicated FPDEs.