دانشکده علوم ریاضی
گروه ریاضی کاربردی

پروژه کارشناسی ریاضی گرایش بهینه سازی

عنوان

مسائل خطی در حساب تغییرات با جواب‌های قطعه‌ای هموار

پژوهشگر

نیلوفر قیصری

استاد راهنما

دکتر حمیدرضا مرزبان

تقدیم به:

پدر و مادرم

قدردانی

سپاس خداوندگار حکیم را که با لطف بی‌کران خود، آدمی را به زیور عقل آراست.

در آغاز وظیفه خود می‌دانم از زحمات بی‌دریغ استاد راهنمای خود، جناب آقای دکتر مرزبان صمیمانه تشکر و قدردانی کنم که در طول انجام این پایان‌نامه با نهایت صبوری همواره راهنما و مشوق من بودند و قطعاً بدون راهنمایی‌های ارزنده ایشان، این مجموعه به انجام نمی‌رسید. همچنین از جناب آقای دکتر هاشمی و دوستان گرانقدرم آقای علیرضا فرهادی و خانم روژین صدر که در نگارش این پژوهش مرا یاری کردند، کمال تشکر را دارم.

و در پایان، بوسه می‌زنم بر دستان خداوندگاران مهر و مهربانی، پدر و مادر عزیزم و بعد از خدا، ستایش می‌کنم وجود مقدس‌شان را و تشکر می‌کنم از خانواده عزیزم به پاس عاطفه سرشار و گرمای امیدبخش وجودشان، که بهترین پشتیبان من بودند.

نیلوفر قیصری

چکیده

در این پژوهش می‌خواهیم با استفاده از توابع ترکیبی لژاندر-بلاک پالس مسائل حساب تغییرات که دارای جواب‌های قطعه‌ای هموار هستند را حساب کنیم.بنابراین ابتدا لازم است که توابع ترکیبی را معرفی کنیم و خواص آن‌ها را بررسی کنیم و ماتریس‌های عملیاتی انتگرال متناظر با آن‌ها را بدست آوریم.به طور کلی دو روش برای حل مسائل حساب تغییرات وجود دارد :

۱)مستقیم

۲)غیر مستقیم

که ما در این پروژه با استفاده از روش مستقیم مسائلمان را حل می کنیم. در واقع مسأله حساب تغییرات را با کمک گرفتن از توابع ترکیبی لژاندر-بلاک پالس به مسأله بهینه سازی پارامتری تبدیل کرده و به حل مسأله می پردازیم.

واژگان کلیدی حساب تغییرات،توابع ترکیبی لژاندر-بلاک پالس

فهرست مطالب

فصل ۱

مقدمه

بهینه سازی هنر یافتن بهترین جواب در بین وضعیت موجود است. بهینه سازی در طراحی و نگه داری بسیاری از سیستم های مهندسی،اقتصادی به منظور مینیمم کردن یا ماکزیمم کردن سود کاربرد دارد. به دلیل کاربرد وسیع بهینه سازی در علوم مختلف، این مبحث رشد بسیاری کرده است، به‌طوری که در ریاضیات مدیریت و بسیاری از شاخه‌های علوم مورد مطالعه و بررسی قرار می‌گیرد.امروزه مسئله بهینه سازی سیستم‌های مختلف یکی از موضوعات مهم و مورد توجه پژوهشگران می‌باشد. مسائلی مانند ماکزیمم کردن برد یک راکت ، ماکزیمم کردن عملکرد یک سیستم، مینیمم کردن خطا در تخمین مکان یک شی و... مثال‌هایی از این نوع هستند. جستجو برای یافتن کنترلی که معیارهای مورد نظر این سیستم‌ها را ماکزیمم یا مینیمم کند، یکی ازبخش‌های مهم در نظریه بهینه سازی است.

از آن جایی که ساختار طیف وسیعی از مسائل کنترل بهینه پیچیده است، از این رو نمی توان برای آن‌ها جواب دقیق به‌دست آورد. بنابراین مدلسازی مسائل کنترل بهینه از اهمیت ویژه ای برخوردار است و در حل مسائل کنترل بهینه روش‌های عددی نقش مهمی ایفا میکنند. یکی از روش‌هایی که در حل مسائل کنترل بهینه مورد استفاده قرار می‌گیرد ، روش مستقیم است که مسأله‌ی کنترل بهینه را به یک مسأله‌ی بهینه سازی جبری تبدیل می‌کند.

در روش مستقیم توابع متعامد نقش بسیار مهمی دارند.در واقع در روش مستقیم با استفاده از توابع و چند جمله‌ای‌های متعامد، مسأله‌ی اصلی به یک دستگاه معادلات جبری تبدیل می‌شود که حل آن به مراتب ساده تر از حل مسأله‌ی اولیه خواهد بود.

در واقع در این پروژه با استفاده از روش مستقیم مسأله‌ی حساب تغییرات را به مسأله‌ی بهینه سازی پارامتری

تبدیل کرده و برای تحقق این امر از پایه ترکیبی لژاندر−بلاک پالس استفاده می‌کنیم.

۱.۰.۱ مروری برفصل های دیگر

در فصل دوم، تعاریف چند جمله‌ای‌های لژاندر، توابع بلاک−پالس و مجموعه توابع ترکیبی لژاندر−بلاک پالس ارائه می‌شود ویژگی‌های آن‌ها مورد بررسی قرار می‌گیرند و هم‌چنین ماتریس‌های عملیاتی متناظر با این توابع ترکیبی که در حل مسائل از آن‌ها استفاده می‌شود را بیان می‌کنیم.
در فصل سوم، طبق روش مستقیم ابتدا مسائل حساب تغییرات را با استفاده از توابع ترکیبی لژاندر−بلاک پالس به مسأله بهینه سازی پارامتری تبدیل کرده و به حل مسائل می‌پردازیم.

فصل ۲

تعاریف

۱.۲ چندجمله‌ای‌های لژاندر

تعریف ۱.۱.۲. چند جمله‌ای‌های لژاندر، $\{P_m(t)\}_{m=0}^{\infty}$ روی بازه‌ی $[-1,1]$ با تابع وزن $\omega(t) = 1$ یک مجموعه متعامد کامل برای فضای $L^2[-1,1]$ هستند. درواقع این چند جمله ای‌ها، جواب‌های معادله دیفرانسیل زیر موسوم به معادله دیفرانسیل لژاندر هستند

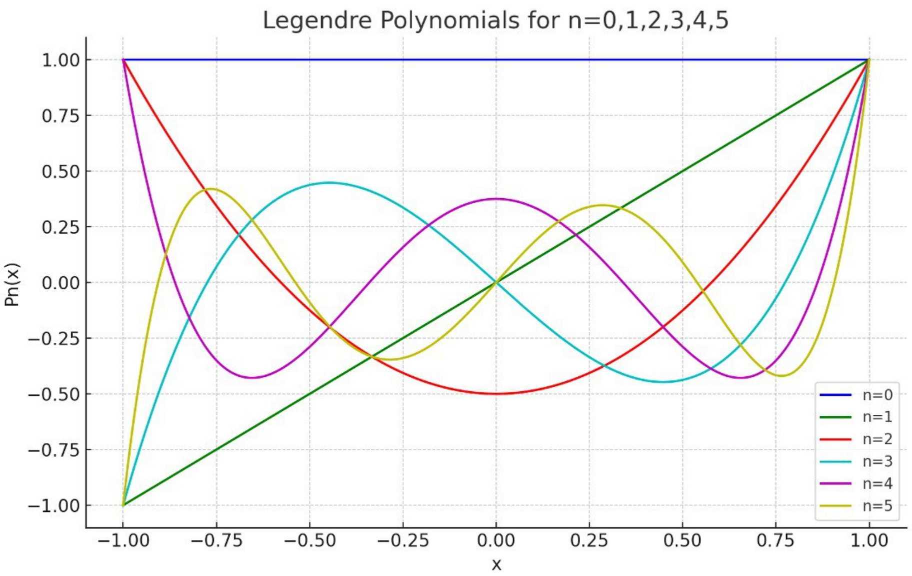
$$\frac{d}{dt}\left[(1-t^2)P'_m(t)\right] + m(m+1)P_m(t) = 0$$

که به صورت زیر تعریف می‌شوند

$$P_0(t) = 1, \qquad P_1(t) = t,$$

$$P_{m+1}(t) = \left(\frac{2m+1}{m+1}\right) tP_m(t) - \left(\frac{m}{m+1}\right) P_{m-1}(t), \qquad m = 1, 2, 3, \ldots$$

درشکل (۱.۲) نمودار چند جمله‌ای‌های لژاندر نشان داده شده است.



شکل ۱.۲: نمودار چندجمله‌ای‌های لژاندر به ازای $n = ۰, ۱, ۲, ۳, ۴, ۵$

۱.۱.۲ ویژگی‌های چندجمله‌ای‌های لژاندر

چندجمله‌ای‌های لژندر در شرایط زیر صدق می‌کنند

۱) $|P_m(t)| \leq ۱, \qquad -۱ \leq t \leq ۱.$

۲) $P_m(\pm ۱) = (\pm ۱)^m.$

۳) $P'_m(\pm ۱) = (\pm ۱)^m \frac{۱}{۲} m(m+۱)$

۴) $|P'_m(t)| \leq \frac{۱}{۲} m(m+۱), \qquad -۱ \leq t \leq ۱.$

۵) $(۱ - t^۲) P'_m(t) = m P_{m-۱}(t) - mt P_m(t).$

۶) $\int_{-۱}^{۱} P_m(t) P_n(t) dt = \begin{cases} ۰, & m \neq n, \\ \frac{۲}{۲m+۱}, & m = n. \end{cases}$

۷) $\int_{-۱}^{۱} [P'_m(t)]^۲ dt = m(m+۱).$

۲.۲ توابع بلاک-پالس

تعریف ۱.۲.۲. مجموعه‌ی توابع بلاک-پالس $\{\psi_{i,N}\}_{i=۱}^{N}$ روی بازه‌ی، $[۰, t_f)$ به صورت زیر تعریف می‌شوند

$$\psi_{i,N}(t) = \begin{cases} ۱, & (\frac{i-۱}{N})t_f \leq t < \frac{i}{N}t_f, \\ ۰, & \text{درغیر این صورت} \end{cases} \qquad i = ۱, ۲, ..., N, \qquad (۱.۲)$$

که در آن N، یک عدد صحیح و مثبت دلخواه است.

رابطه‌ی ،(۱.۲) نشان می‌دهد که بازه‌ی $[۰, t_f)$، به N زیربازه با طول مساوی تقسیم می‌شود و i-امین تابع بلاک-پالس $\psi_{i,N}(t)$، دارای یک پالس مربعی با ارتفاع واحد در زیربازه‌ی $\left[\frac{i-۱}{N}t_f, \frac{i}{N}t_f\right)$ است. i را مرتبه‌ی توابع بلاک-پالس می‌نامیم.

مثال ۲.۲.۲. مجموعه‌ی توابع بلاک-پالس به ازای$N = ۳$، روی بازه‌ی $[۰, ۱)$، به صورت زیر نمایش داده می‌شود.

$$\psi_{۱,۳}(t) = \begin{cases} ۱, & t \in \left[۰, \frac{۱}{۳}\right), \\ ۰, & \text{درغیر این صورت} \end{cases} \qquad \psi_{۲,۳}(t) = \begin{cases} ۱, & t \in \left[\frac{۱}{۳}, \frac{۲}{۳}\right), \\ ۰, & \text{درغیر این صورت} \end{cases}$$

$$\psi_{۳,۳}(t) = \begin{cases} ۱, & t \in \left[\frac{۲}{۳}, ۱\right), \\ ۰, & \text{درغیر این صورت} \end{cases}$$

۱.۲.۲ ویژگی‌های توابع بلاک-پالس

توابع بلاک-پالس روی بازه‌ی $[۰, t_f)$ دارای ویژگی‌های زیر هستند

۱. مجزا بودن: توابع بلاک-پالس روی بازه‌ی $[۰, t_f)$ نسبت به یکدیگر مجزا هستند. یعنی

$$\psi_{i,N}(t)\psi_{j,N}(t) = \begin{cases} \psi_{i,N}(t), & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

۲. تعامد: مجموعه‌ی توابع بلاک-پالس روی بازه‌ی $[0, t_f)$، نسبت به تابع وزن $\omega(t) = 1$ دو به دو برهم عمودند. عبارت دیگر

$$\int_0^{t_f} \psi_{i,N}(t)\psi_{j,N}(t)dt = \begin{cases} h, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

که در آن $h = \frac{t_f}{N}$، همان نرم افراز است.

۳. کامل بودن: اگر $N \to \infty$، مجموعه توابع بلاک-پالس در فضای هیلبرت $L^2[-1, t_f)$ کامل هستند.

۲.۲.۲ بسط یک تابع بر حسب توابع بلاک-پالس

اگر $f(t) \in L^2[0, t_f)$،آنگاه بسط تابع $f(t)$ برحسب توابع بلاک-پالس به صورت زیر نشان داده می‌شود

$$f(t) \simeq \sum_{i=1}^{N} f_i \psi_{i,N}(t),$$

که در آن

$$f_i = \frac{1}{h}\int_0^1 f(t)\psi_{i,N}(t)dt = \frac{1}{h}\int_{(i-1)h}^{ih} f(t)dt$$

و f_i را ضرایب بسط بلاک-پالس تابع $f(t)$ می‌نامیم.

در این قسمت مثالی ارائه می‌کنیم تا با بسط بلاک-پالس یک تابع آشنا شویم.

مثال ۳.۲.۲. فرض کنید $t_f = 1$ و $N = 3$ در این صورت ضرایب بسط بلاک-پالس تابع $f(t) = t^2$ عبارتند

از

$$f_1 = 3\int_0^1 t^2\psi_{1,3}(t)dt = \frac{1}{27},$$
$$f_2 = 3\int_0^1 t^2\psi_{2,3}(t)dt = \frac{7}{27},$$
$$f_3 = 3\int_0^1 t^2\psi_{3,3}(t)dt = \frac{19}{27},$$

در نتیجه

$$f(t) \simeq \frac{1}{27}\psi_{1,3}(t) + \frac{7}{27}\psi_{2,3}(t) + \frac{19}{27}\psi_{3,3}(t).$$

۳.۲ توابع ترکیبی لژاندر-بلاک پالس

با توجه به ویژگی‌های ذکر شده برای توابع بلاک-پالس و چندجمله‌ای‌های لژاندر می‌توان توابع ترکیبی متعامدی ایجاد کرد که دارای ویژگی‌های توابع بلاک-پالس و چندجمله‌ای‌های لژاندر باشند. بازه‌ی $[0, t_f)$ را به N زیربازه با فاصله‌های مساوی تقسیم می‌کنیم. حال چندجمله‌ای‌های لژاندر را روی هر یک از زیربازه‌ها تعریف می‌کنیم. چندجمله‌ای‌های لژاندر روی بازه‌ی $[-1, 1]$ متعامد هستند، بنابراین با استفاده از نگاشت خطی $\frac{2N}{t_f}t - 2n + 1$ هر یک از زیربازه‌های $\left[(\frac{n-1}{N})t_f, (\frac{n}{N})t_f\right)$، $n = 1, 2, ..., N$ را به بازه‌ی $[-1, 1]$ انتقال می‌دهیم.

تعریف ۱.۳.۲. توابع ترکیبی لژاندر-بلاک پالس $b_{nm}(t)$، $n = 1, 2, ..., N$ و $m = 0, 1, ..., M-1$ روی بازه‌ی $[0, t_f)$ به صورت زیر تعریف می‌شود

$$b_{nm}(t) = \begin{cases} P_m(\frac{2N}{t_f}t - 2n + 1), & (\frac{n-1}{N})t_f \le t < \frac{n}{N}t_f, \\ 0, & \text{درغیر این صورت} \end{cases} \tag{۲.۲}$$

که در آن n و m به ترتیب، مرتبه‌ی توابع بلاک-پالس و چندجمله‌ای‌های لژاندر می‌باشند. $P_m(\frac{2N}{t_f}t - 2n + 1)$، چندجمله‌ای‌های لژاندر مرتبه‌ی mاست، که زیربازه‌ی $\left[(\frac{n-1}{N})t_f, (\frac{n}{N})t_f\right)$، را به بازه‌ی $[-1, 1]$ می‌نگارد.

مثال ۲.۳.۲. فرض کنید $N = 3$ و $M = 3$ ، $t_f = 1$ توابع ترکیبی لژاندر-بلاک پالس به صورت زیر نمایش

داده می‌شوند

طبق (۲.۲) داریم

$$\left.\begin{aligned} b_{10}(t) &= P_0(6t-1) = 1\\ b_{11}(t) &= P_1(6t-1) = 6t-1\\ b_{12}(t) &= P_2(6t-1) = \frac{3}{2}(6t-1)^2 - \frac{1}{2} \end{aligned}\right\} 0 \le t < \frac{1}{3},$$

$$\left.\begin{aligned} b_{20}(t) &= P_0(6t-3) = 1\\ b_{21}(t) &= P_1(6t-3) = 6t-3\\ b_{22}(t) &= P_2(6t-3) = \frac{3}{2}(6t-3)^2 - \frac{1}{2} \end{aligned}\right\} \frac{1}{3} \le t < \frac{2}{3},$$

$$\left.\begin{aligned} b_{30}(t) &= P_0(6t-5) = 1\\ b_{31}(t) &= P_1(6t-5) = 6t-5\\ b_{32}(t) &= P_2(6t-5) = \frac{3}{2}(6t-5)^2 - \frac{1}{2} \end{aligned}\right\} \frac{2}{3} \le t < 1.$$

۱.۳.۲ بسط یک تابع برحسب توابع ترکیبی لژاندر-بلاک پالس

با توجه به این‌که پایه برای فضای هیلبرت $L^2[0, t_f)$ تشکیل می‌دهند، بنابراین هر تابع دلخواه $f(t) \in L^2[0, t_f)$را می‌توان برحسب این توابع ترکیبی به صورت زیر بسط داد

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} c_{nm} b_{nm}(t), \tag{۳.۲}$$

به طوری‌که بردارهای $B(t)$ و C به صورت زیر هستند

$$B(t) = [b_{10}(t), ..., b_{1M-1}(t), b_{20}(t), ..., b_{2M-1}(t), ..., b_{N0}(t), ..., b_{NM-1}(t)]^T, \tag{۴.۲}$$

$$C = [c_{10}, ..., c_{1M-1}, c_{20}, ..., c_{2M-1}, ..., c_{N0}, ..., c_{NM-1}]^T \tag{۵.۲}$$

بردار $B(t)$، بردار پایه نامیده می‌شود.

در(۳.۲) ضرایب بسط c_{nm} به صورت زیر محاسبه می‌شوند

$$c_{nm}=\frac{<f(t),b_{nm}(t)>}{<b_{nm}(t),b_{nm}(t)>}=\frac{\int_{\frac{n-1}{N}t_f}^{\frac{n}{N}t_f}(f(t).P_m(\frac{2N}{t_f}t-2n+1))dt}{\int_{\frac{n-1}{N}t_f}^{\frac{n}{N}t_f}P_m^2(\frac{2N}{t_f}t-2n+1)dt} \qquad (۶.۲)$$

مثال ۳.۳.۲. فرض کنید

$$f(t)=\begin{cases} t^2 & 0\leq t<\frac{1}{2},\\ t & \frac{1}{2}\leq t<1,\end{cases}$$

می‌خواهیم تابع $f(t)$ را برحسب توابع ترکیبی لژاندر-بلاک پالس تقریب بزنیم.

باتوجه به ضابطه تابع و با انتخاب $N=2$ و $M=3$ و $t_f=1$، ضرایب بسط لژاندر-بلاک پالس به صورت زیر به‌دست می‌آیند.

$$\begin{cases} c_{10} &= \frac{\int_0^{\frac{1}{2}}(t^2)dt}{\int_0^{\frac{1}{2}}dt}=\frac{1}{12},\\ c_{11} &= \frac{\int_0^{\frac{1}{2}}(t^2)(4t-1)dt}{\int_0^{\frac{1}{2}}(4t-1)^2dt}=\frac{1}{8},\\ c_{12} &= \frac{\int_0^{\frac{1}{2}}(t^2)(\frac{3}{2}(4t-1)^2-\frac{1}{2})dt}{\int_0^{\frac{1}{2}}(\frac{3}{2}(4t-1)^2-\frac{1}{2})^2dt}=\frac{1}{24},\end{cases}$$

$$\begin{cases} c_{20} &= \frac{\int_{\frac{1}{2}}^{1}(t)dt}{\int_{\frac{1}{2}}^{1}dt}=\frac{3}{4},\\ c_{21} &= \frac{\int_{\frac{1}{2}}^{1}(t)(4t-3)dt}{\int_{\frac{1}{2}}^{1}(4t-1)^2dt}=\frac{1}{4},\\ c_{22} &= \frac{\int_{\frac{1}{2}}^{1}(t)(\frac{3}{2}(4t-3)^2-\frac{1}{2})dt}{\int_{\frac{1}{2}}^{1}(\frac{3}{2}(4t-3)^2-\frac{1}{2})^2dt}=0,\end{cases}$$

در نتیجه داریم

$$f(t)\simeq c_{10}b_{10}(t)+c_{11}b_{11}(t)+c_{12}b_{12}(t)+c_{20}b_{20}(t)+c_{21}b_{21}(t)+c_{22}b_{22}(t)$$

$$= \begin{cases} t^{۲} & ۰ \leq t < \frac{۱}{۲}, \\ t & \frac{۱}{۲} \leq t < ۱, \end{cases}$$

که با خود تابع $f(t)$ برابر است.

۴.۲ عملگرهای توابع ترکیبی لژاندر-بلاک پالس

در این بخش، با سه دسته از عملگرهای توابع ترکیبی لژاندر-بلاک پالس که برای تقریب مسائل کنترل بهینه و حل آن‌ها در فصل بعدی مورد استفاده قرار می‌گیرند آشنا خواهیم شد.

۱.۴.۲ ماتریس عملیاتی انتگرال

تعریف ۱.۴.۲. فرض می‌کنیم $B(t)$، بردار پایه‌ی تعریف شده در (۴.۲) باش. در این صورت انتگرال آن روی بازه‌ی $[۰, t)$ به شکل زیر تقریب زده می‌شود

$$\int_{۰}^{t} B(t')dt' \simeq PB(t), \tag{۷.۲}$$

به طوری‌که ماتریس P، یک ماتریس $NM \times NM$ است و ماتریس عملیاتی انتگرال نامیده می‌شود.

$$P = \begin{pmatrix} E & H & H & \cdots & H \\ O & E & H & \cdots & H \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O & O & O & \cdots & E \end{pmatrix} \tag{۸.۲}$$

به طوری‌که

$$H=\frac{t_f}{N}\begin{pmatrix}1&0&\cdots&0\\0&0&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&\cdots&0\end{pmatrix}\tag{9.2}$$

و

$$E=\frac{t_f}{2N}\begin{pmatrix}1&1&0&0&\cdots&0&0&0\\\frac{-1}{3}&0&\frac{1}{3}&0&\cdots&0&0&0\\0&\frac{-1}{5}&0&\frac{1}{5}&\cdots&0&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots&\vdots\\0&0&0&0&\cdots&\frac{-1}{2M-3}&0&\frac{1}{2M-3}\\0&0&0&0&\cdots&0&\frac{-1}{2M-1}&0\end{pmatrix}\tag{10.2}$$

که در آن ماتریس صفر O، E و H ماتریس‌هایی با ابعاد $M\times M$ هستند.

ماتریس E، ماتریس عملیاتی انتگرال چندجمله‌ای‌های لژاندر روی $n-$امین زیربازه یعنی $\left[(\frac{n-1}{N})t_f,(\frac{n}{N})t_f\right)$ می‌باشد. ماتریس H، ارتباط بین هر یک از بلاک‌ها را در توابع ترکیبی نشان می‌دهد. اگر این زیر بازه‌ها متساوی الفاصله نباشند، آن‌گاه ماتریس H در هر کدام از زیربازه‌ها متفاوت خواهد بود. اگر $N=1$ ، آن‌گاه توابع بلاک-پالس را نخواهیم داشت و $P=E$ خواهد بود.

مثال ۲.۴.۲. فرض کنید $N=3$، $M=3$ و $t_f=1$. در این صورت ماتریس عملیاتی انتگرال توابع ترکیبی لژاندر-بلاک پالس روی بازه‌ی $[0,1)$ به صورت زیر محاسبه می‌شود.

قرار می‌دهیم

$$B(t)=[b_{10}(t),b_{11}(t),b_{12}(t),b_{20}(t),b_{21}(t),b_{22}(t),b_{30}(t),b_{31}(t),b_{32}(t)]^T$$

طبق (۲.۲) داریم

$$\left.\begin{aligned} b_{10}(t) &= 1 \\ b_{11}(t) &= 6t-1 \\ b_{12}(t) &= \frac{3}{2}(6t-1)^2-\frac{1}{2} \end{aligned}\right\} 0 \le t < \frac{1}{3},$$

$$\left.\begin{aligned} b_{20}(t) &= 1 \\ b_{21}(t) &= 6t-3 \\ b_{22}(t) &= \frac{3}{2}(6t-3)^2-\frac{1}{2} \end{aligned}\right\} \frac{1}{3} \le t < \frac{2}{3},$$

$$\left.\begin{aligned} b_{30}(t) &= 1 \\ b_{31}(t) &= 6t-5 \\ b_{32}(t) &= \frac{3}{2}(6t-5)^2-\frac{1}{2} \end{aligned}\right\} \frac{2}{3} \le t < 1.$$

در نتیجه طبق (۹.۲) و (۱۰.۲) داریم

$$H = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

و

$$E = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ \frac{-1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{-1}{5} & 0 \end{pmatrix}$$

بنابراین طبق (۸.۲)، P یک ماتریس با ابعاد ۹ × ۹ که به صورت زیر نمایش داده می‌شود

$$P=\begin{pmatrix}
\frac{1}{6} & \frac{1}{6} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0\\
\frac{-1}{18} & 0 & \frac{1}{18} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & \frac{-1}{30} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & \frac{-1}{18} & 0 & \frac{1}{18} & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-1}{30} & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-1}{18} & 0 & \frac{1}{18}\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-1}{30} & 0
\end{pmatrix}$$

۲.۴.۲ ماتریس عملیاتی حاصل‌ضرب

تعریف ۳.۴.۲. فرض می‌کنیم C یک بردار دلخواه از مرتبه‌ی ۱ × NM باشد. عبارت $B(t)B^T(t)C$ را می‌توان با استفاده از توابع ترکیبی به صورت زیر بسط داد

$$B(t)B^T(t)C \simeq \tilde{C}B(t). \tag{11.2}$$

به طوری‌که $\tilde{C}$، یک ماتریس $NM \times NM$ است و ماتریس عملیاتی حاصل‌ضرب نامیده می‌شود که ساختاری به‌صورت زیر دارد

$$\tilde{C}=\begin{pmatrix}
\tilde{C}_1 & O & \cdots & O\\
O & \tilde{C}_2 & \cdots & O\\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\
O & O & \cdots & \tilde{C}_N
\end{pmatrix} \tag{12.2}$$

که در آن $\tilde{C}_i$، $i = 1, 2, \ldots, N$، ماتریس مربعی با ابعاد $M \times M$ است و ماتریس حاصل‌ضرب متناظر با $i-$امین بلاک نامیده می‌شود.

مثال ۴.۴.۲. فرض کنید $N = 4$، $M = 3$ و $t_f = 1$. در این صورت ماتریس عملیاتی حاصل‌ضرب توابع ترکیبی لژاندر-بلاک پالس روی بازه‌ی $[0, 1)$ به صورت زیر محاسبه می‌شود.
قرار می‌دهیم

$$C = [c_{10}, c_{11}, c_{12}, c_{20}, c_{21}, c_{22}, c_{30}, c_{31}, c_{32}, c_{40}, c_{41}, c_{42}]^T,$$

و

$$B(t) = [b_{10}(t), b_{11}(t), b_{12}(t), b_{20}(t), b_{21}(t), b_{22}(t), b_{30}(t), b_{31}(t), b_{32}(t), b_{40}(t), b_{41}(t), b_{42}(t)]^T, \tag{۱۳.۲}$$

طبق (۲.۲) داریم

$$\left.\begin{aligned} b_{10}(t) &= 1 \\ b_{11}(t) &= 8t - 1 \\ b_{12}(t) &= \frac{3}{2}(8t-1)^2 - \frac{1}{2} \end{aligned}\right\} 0 \leq t < \frac{1}{4},$$

$$\left.\begin{aligned} b_{20}(t) &= 1 \\ b_{21}(t) &= 8t - 3 \\ b_{22}(t) &= \frac{3}{2}(8t-3)^2 - \frac{1}{2} \end{aligned}\right\} \frac{1}{4} \leq t < \frac{1}{2},$$

$$\left.\begin{aligned} b_{30}(t) &= 1 \\ b_{31}(t) &= 8t - 5 \\ b_{32}(t) &= \frac{3}{2}(8t-5)^2 - \frac{1}{2} \end{aligned}\right\} \frac{1}{2} \leq t < \frac{3}{4},$$

$$\left.\begin{aligned} b_{۴۰}(t) &= ۱ \\ b_{۴۱}(t) &= ۸t-۷ \\ b_{۴۲}(t) &= \frac{۳}{۲}(۸t-۷)^{۲}-\frac{۱}{۲} \end{aligned}\right\} \frac{۳}{۴} \le t < ۱,$$

با استفاده از رابطه‌های بالا به ازای $i, j, k = ۱, ۲, ۳, ۴$ داریم

$$\begin{cases} b_{ij}(t)b_{kl}(t) = ۰, & i \neq k \\ b_{i۰}(t)b_{ij}(t) = b_{ij}(t), \\ b_{i۱}(t)b_{i۱}(t) = \frac{۱}{۳}b_{i۰}(t) + \frac{۲}{۳}b_{i۲}(t), \\ b_{i۱}(t)b_{i۲}(t) = \frac{۲}{۵}b_{i۱}(t) + \frac{۳}{۵}b_{i۳}(t), \\ b_{i۲}(t)b_{i۲}(t) = \frac{۱}{۵}b_{i۰}(t) + \frac{۲}{۷}b_{i۲}(t) + \frac{۱۸}{۳۵}b_{i۴}(t). \end{cases}$$

حال بنابر(۱۳.۲) و روابط فوق، ماتریس $B(t)B^T(t)$، یک ماتریس ۱۲×۱۲ به صورت زیر خواهد بود:

$$\begin{pmatrix} b_{۱۰}(t) & b_{۱۱}(t) & b_{۱۲}(t) & & & & \\ b_{۱۱}(t) & \frac{۱}{۳}b_{۱۰}(t)+\frac{۲}{۳}b_{۱۲}(t) & \frac{۲}{۵}b_{۱۱}(t) & & & O & \\ b_{۲۲}(t) & \frac{۲}{۵}b_{۱۱}(t) & \frac{۱}{۵}b_{۱۰}(t)+\frac{۲}{۷}b_{۱۲}(t) & & & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & & & b_{۴۰}(t) & b_{۴۱}(t) & b_{۴۲}(t) \\ & O & & & b_{۴۱}(t) & \frac{۱}{۳}b_{۴۰}(t)+\frac{۲}{۳}b_{۴۲}(t) & \frac{۲}{۵}b_{۴۱}(t) \\ & & & & b_{۴۲}(t) & \frac{۲}{۵}b_{۴۱}(t) & \frac{۱}{۵}b_{۴۰}(t)+\frac{۲}{۷}b_{۴۲}(t) \end{pmatrix}$$

در نتیجه طبق (۱۱.۲) و (۱۲.۲) ، $\tilde{C}$ یک ماتریس ۱۲ × ۱۲است که به صورت زیر نمایش داده می‌شود

$$\tilde{C} = \begin{pmatrix} \tilde{C}_۱ & O & O & O \\ O & \tilde{C}_۲ & O & O \\ O & O & \tilde{C}_۳ & O \\ O & O & O & \tilde{C}_۴ \end{pmatrix},$$

و $\tilde{C}_i$ها، $i = ۱, ۲, ۳, ۴$، ماتریس‌های ۳ × ۳ هستند که ساختاری به‌صورت زیر دارند

$$\tilde{C}_i = \begin{pmatrix} c_{i۰} & c_{i۱} & c_{i۲} \\ \frac{۱}{۵}c_{i۱} & c_{i۰} + \frac{۲}{۵}c_{i۲} & \frac{۲}{۳}c_{i۱} \\ \frac{۱}{۵}c_{i۱} & \frac{۲}{۵}c_{i۱} & c_{i۰} + \frac{۲}{۷}c_{i۲} \end{pmatrix}$$

۳.۴.۲ ماتریس عملیاتی انتگرال حاصل‌ضرب

تعریف ۵.۴.۲. با انتگرال‌گیری از ماتریس $B(t)B^T(t)$ ، روی بازه‌ی $[۰, t_f)$ ماتریس عملیاتی انتگرال حاصل ضرب L ، به‌دست می‌آید

$$L = \int_۰^{t_f} B(t)B^T(t)dt, \qquad (۱۴.۲)$$

L یک ماتریس قطری با ابعاد $NM \times NM$ است که به‌صورت زیر تعریف می‌شود

$$L = \begin{pmatrix} K & O & O & \cdots & O \\ O & K & O & \cdots & O \\ O & O & K & \cdots & O \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ O & O & O & \cdots & K \end{pmatrix}, \qquad (۱۵.۲)$$

که در آن O ، ماتریس صفر از مرتبه‌ی $M \times M$ است و K و K یک ماتریس قطری با بعد M است که به‌صورت زیر محاسبه می‌شود

$$K = \frac{t_f}{N} \begin{pmatrix} ۱ & ۰ & ۰ & \cdots & ۰ \\ ۰ & \frac{۱}{۳} & ۰ & \cdots & ۰ \\ ۰ & ۰ & \frac{۱}{۵} & \cdots & ۰ \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ ۰ & ۰ & ۰ & \cdots & \frac{۱}{۲M-۱} \end{pmatrix} . \qquad (۱۶.۲)$$

مثال ۲.۴.۶. فرض کنید $N = ۲$، $M = ۲$ و $t_f = ۱$. در این‌صورت ماتریس عملیاتی انتگرال حاصل‌ضرب توابع ترکیبی لژاندر-بلاک پالس روی بازه‌ی $[۰, ۱)$ به صورت زیر محاسبه می‌شود. طبق (۱۶.۲) ، ماتریس قری K به‌صورت زیر است

$$k = \frac{۱}{۲} \begin{pmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & \frac{۱}{۳} \end{pmatrix} ,$$

بنابراین طبق (۱۵.۲) ماتریس عملیاتی انتگرال حاصل‌ضرب توابع ترکیبی لژاندر-بلاک پالس ساختاری به‌صورت زیر دارد

$$L = \begin{pmatrix} \frac{۱}{۲} & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & \frac{۱}{۶} & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & \frac{۱}{۲} & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & \frac{۱}{۶} \end{pmatrix} .$$

فصل ۳

مثال‌ها

روش مستقیم مبتنی بر توابع ترکیبی لژاندر-بلاک پالس، یک روش برای حل مسائل کنترل بهینه و حساب تغییرات است. روش کار بدین صورت است که ابتدا تابع معیار اصلی را برحسب توابع ترکیبی لژاندر-بلاک پالس بسط می‌دهیم و سپس با استفاده از ماتریس‌های عملیاتی انتگرال و حاصل‌ضرب متناظر با توابع ترکیبی لژاندر-بلاک پالس، مسأله حساب تغییرات به یک مسأله بهینه سازی پارامتری تبدیل می‌شود که حل آن به مراتب ساده‌تر از حل مسأله اصلی است.

۱.۳ مثال ۱

۱.۱.۳ بیان مسأله

مسأله حساب تغییرات زیر را در نظر بگیرید:

$$J[x(t)] = \int_{0}^{1} [\dot{x}^{2} f(t)]dt, \tag{۱.۳}$$

که در آن

$$f(t)=\begin{cases}-۱, & ۰\le t\le \frac{۱}{۴}\\ ۱, & \frac{۱}{۴}\le t\le ۱,\end{cases} \tag{۲.۳}$$

با شرایط مرزی زیر:

$$x(۰)=۰, \tag{۳.۳}$$

$$x(۱)=۱. \tag{۴.۳}$$

هدف پیدا کردن تابع $x(t)$ است، به‌طوری که تابعک (۱.۳) را تحت شرایط مرزی (۳.۳) و (۴.۳)، مینیمم کند. جواب دقیق مسأله به‌صورت زیر است

$$x(t)=\begin{cases}-۲t, & ۰\le t\le \frac{۱}{۴},\\ ۲t-۱, & \frac{۱}{۴}\le t\le ۱.\end{cases}$$

۲.۱.۳ تقریب تابعی معیار

ابتدا با جایگذاری رابطه (۲.۳) در (۱.۳)، داریم :

$$J=-\int_۰^{\frac{۱}{۴}}\dot{x}^۲(t)dt+\int_{\frac{۱}{۴}}^{۱}\dot{x}^۲(t)dt. \tag{۵.۳}$$

رابطه‌ی (۵.۳) را می‌توان به فرم زیر نوشت:

$$J=-۲\int_۰^{\frac{۱}{۴}}\dot{x}^۲(t)dt+\int_۰^{۱}\dot{x}^۲(t)dt. \tag{۶.۳}$$

با بسط $\dot{x}(t)$ بر حسب توابع ترکیبی لژاندر-بلاک پالس نتیجه می‌شود :

$$\dot{x}(t) = C^T B(t). \qquad (۷.۳)$$

اکنون با انتگرال‌گیری از دو طرف رابطه (۷.۳) در بازه $[۰, t]$، و با استفاده از شرط مرزی (۳.۳)، داریم :

$$\int_۰^t \dot{x}(t)dt = \int_۰^t C^T B(t)dt.$$

در نتیجه

$$x(t) = C^T PB(t). \qquad (۸.۳)$$

با جایگذاری رابطه (۶.۳) در (۵.۳)، نتیجه می‌شود :

$$J = -۲\int_۰^{\frac{۱}{۴}} C^T B(t)B^T(t)Cdt + \int_۰^۱ C^T B(t)B^T(t)Cdt. \qquad (۹.۳)$$

فرض کنید :

$$V(t) = \int_۰^t B(t')dt' \qquad (۱۰.۳)$$

با توجه به تعریف $\tilde{C}$، در رابطه (۱۱.۲)، داریم :

$$B(t)B^T(t)C \simeq \tilde{C}B(t). \qquad (۱۱.۳)$$

با جایگذاری روابط (۱۴.۲) و (۱۰.۳) و (۱۱.۳) در (۹.۳)، نتیجه می‌شود:

$$J = -۲C^T\tilde{C}V(\frac{۱}{۴}) + C^T LC.$$

که L در رابطه‌ی بالا، همان ماتریس قطری بلوکی است که در رابطه‌ی (۱۵.۲) تعریف کردیم.
باتوجه به (۸.۳)، شرط مرزی (۴.۳) را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$C^T PB(۱) = ۱.$$

اکنون با استفاده از روش ضرایب لاگرانژ، تابع $\tilde{J}$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\tilde{J} = J + \lambda[C^T PB(t) - ۱].$$

شرایط لازم بهینگی عبارتند از :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial C_{nm}}\tilde{J} = ۰, n = ۱, ..., ۲^k - ۱, m = ۰, ..., M - ۱, \\ \dfrac{\partial}{\partial \lambda}\tilde{J} = ۰. \end{cases}$$

دستگاه فوق، دارای $۲^{k-۱}M + ۱$، معادله و $۲^{k-۱}M + ۱$، مجهول است. با انتخاب $M = ۲$ و $k = ۳$، این دستگاه ۹ معادله و ۹ مجهول دارد، که با حل این دستگاه بردار C و ضرایب λ، به‌دست می‌آیند. با جایگذاری بردار زیر

$$C = [\frac{-۱}{۴}, \frac{-۱}{۴} \mid \frac{-۱}{۴}, \frac{۱}{۴} \mid \frac{۱}{۴}, \frac{۱}{۴} \mid \frac{۳}{۴}, \frac{۱}{۴}]^T$$

در رابطه‌ی (۸.۳)، جواب‌های تقریبی $x(t)$ به‌دست می‌آید که همان جواب دقیق مسأله‌ی حساب تغییرات مورد مطالعه است.

۲.۳ مسأله انتقال حرارت

۱.۲.۳ بیان مسأله

مسأله حساب تغییرات زیر را در نظر بگیرید:

$$J = \int_{۰}^{۱} [\frac{۱}{۲}\dot{x}^{۲} - xg(t)]dt, \tag{۱۲.۳}$$

که درآن

$$g(t) = \begin{cases} -۱ & ۰ \leq t \leq \frac{۱}{۴}, \qquad \frac{۱}{۲} \leq t \leq ۱, \\ ۳ & \frac{۱}{۴} \leq t \leq \frac{۱}{۲}, \end{cases} \tag{۱۳.۳}$$

با شرایط مرزی زیر :

$$x(۰) = \dot{x}(۰) = ۰, \tag{۱۴.۳}$$

$$\dot{x}(۱) = ۰. \tag{۱۵.۳}$$

هدف پیدا کردن تابع $x(t)$ است، به‌طوری که تابعک داده شده در رابطه‌ی (۱۲.۳) را تحت شرایط مرزی (۱۴.۳) و (۱۵.۳)، مینیمم کند.
جواب دقیق مسأله به‌صورت زیر است :

$$x(t) = \begin{cases} \frac{۱}{۲}t^{۲}, & ۰ \leq t \leq \frac{۱}{۴}, \\ -\frac{۳}{۲}t^{۲} + t - \frac{۱}{۸}, & \frac{۱}{۴} \leq t \leq \frac{۱}{۲}, \\ \frac{۱}{۲}t^{۲} - t + \frac{۳}{۸}, & \frac{۱}{۲} \leq t \leq ۱. \end{cases}$$

۲.۲.۳ تقریب تابعی معیار

ابتدا، با جایگذاری رابطه (۱۳.۳) در (۱۲.۳)، داریم :

$$J=\frac{۱}{۲}\int_{۰}^{۱}\dot{x}^{۲}(t)dt+۴\int_{۰}^{\frac{۱}{۴}}x(t)dt-۴\int_{۰}^{\frac{۱}{۲}}x(t)dt+\int_{۰}^{۱}x(t)dt. \tag{۱۶.۳}$$

با بسط $\dot{x}(t)$ بر حسب توابع ترکیبی لژاندر-بلاک پالس نتیجه می‌شود :

$$\dot{x}(t)=C^{T}B(t). \tag{۱۷.۳}$$

اکنون با انتگرال‌گیری از دو طرف رابطه (۱۷.۳) در بازه $[۰,t]$، و با استفاده از شرط مرزی (۱۴.۳)، داریم :

$$\int_{۰}^{t}\dot{x}(t)dt=\int_{۰}^{t}C^{T}B(t)dt.$$

در نتیجه

$$x(t)=C^{T}PB(t). \tag{۱۸.۳}$$

با جایگذاری روابط (۱۷.۳) و (۱۸.۳)، در (۱۶.۳)،نتیجه می‌شود :

$$J=\frac{۱}{۲}\int_{۰}^{۱}C^{T}B(t)B^{T}(t)Cdt+۴\int_{۰}^{\frac{۱}{۴}}C^{T}PB(t)dt-۴\int_{۰}^{\frac{۱}{۲}}C^{T}PB(t)dt+\int_{۰}^{۱}C^{T}PB(t)dt. \tag{۱۹.۳}$$

با جایگذاری روابط (۱۴.۲) و (۱۰.۳) در (۱۹.۳)، داریم:

$$J=\frac{۱}{۲}C^{T}LC+C^{T}P[۴V(\frac{۱}{۴})-۴V(\frac{۱}{۲})+V(۱)].$$

با توجه به (۱۷.۳)، شرایط مرزی (۱۴.۳) و (۱۵.۳) را می‌توان به‌صورت زیر نوشت :

$$C^T B(0) = 0,$$
$$C^T B(1) = 0.$$

اکنون با استفاده از روش ضرایب لاگرانژ، تابع $\tilde{J}$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم :

$$\tilde{J} = J + \lambda_1[C^T B(0)] + \lambda_2[C^T B(1)].$$

شرایط لازم بهینگی عبارتند از:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial C_{nm}}\tilde{J} = 0, n = 1, ..., 2^k - 1, m = 0, ..., M - 1, \\ \dfrac{\partial}{\partial \lambda_1}\tilde{J} = 0, \\ \dfrac{\partial}{\partial \lambda_2}\tilde{J} = 0. \end{cases}$$

در نتیجه

$$\begin{cases} LC + P[4V(\frac{1}{4}) - V(\frac{1}{2}) + V(1)] + \lambda_1 B(0) + \lambda_2 B(1) = 0, \\ C^T B(0) = 0, \\ C^T B(1) = 0. \end{cases}$$

دستگاه فوق، دارای $2^{k-1}M + 2$، معادله و $2^{k-1}M + 2$، مجهول است. با انتخاب $M = 3$ و $k = 3$، این دستگاه ۱۴ معادله و ۱۴ مجهول دارد، که با حل این دستگاه بردار C و ضرایب λ_1 وλ_2، به‌دست می‌آیند. با جایگذاری بردار زیر

$$C = [\frac{1}{96}, \frac{1}{64}, \frac{1}{192} \mid \frac{1}{32}, \frac{-1}{64}, \frac{-1}{64} \mid \frac{-5}{96}, \frac{-3}{64}, \frac{1}{192} \mid \frac{-11}{96}, \frac{-1}{64}, \frac{1}{192}]^T$$

در رابطه‌ی (۱۸.۳)، جواب‌های تقریبی $x(t)$ به‌دست می‌آید که همان جواب دقیق مسأله‌ی حساب تغییرات مورد مطالعه است.

کتاب‌نامه

واژه‌نامهٔ فارسی به انگلیسی

واژه‌نامهٔ انگلیسی به فارسی

Abstract

In this research, we want to use the combined functions of Legendre-Block-Pulse to solve calculus problems that have solutions Let's calculate the intersections are smooth. Therefore, first, it is necessary to introduce composite functions and their properties Let's check and get the integral operational matrices corresponding to them. In general, two methods to solve the problems There are account changes:

1) Direct

2) Indirect

In this project, we solve our problems using the direct method. In fact, the problem of calculating the changes with the help Taking the combined Legendre-Block-Pulse functions becomes a parametric optimization problem and solves the problem.

Keywords Calculus of variations, combined Legendre-Black pulse functions

Isfahan University of Technology
Department of Mathematical Sciences
Faculty of Applied Mathematics
Optimization

Linear problems in the calculus of variations with piecewise smooth solutions

Bachelor of Science Thesis in Mathematics

By:
Niloofar Gheisari

Supervisor:
Dr. Hamid Reza Marzban

May 2024