معادلات اینشتین در نظریه نسبیت عام

تهیه کننده: محمد آقاجانی
استاد راهنما: دکتر لکزیان

فهرست مطالب

مقدمه

نظریه نسبیت عام یکی از عمیق‌ترین و بنیادی‌ترین نظریه‌های فیزیک نظری است که توسط آلبرت اینشتین در سال ۱۹۱۵ ارائه شد. این نظریه توصیف جدیدی از گرانش ارائه می‌دهد که به طور کامل با دیدگاه کلاسیک نیوتنی متفاوت است. در نظریه نیوتن، گرانش به عنوان نیرویی بین اجسام جرم‌دار در نظر گرفته می‌شود، اما در نظریه نسبیت عام، گرانش نتیجه‌ی خمیدگی فضا–زمان است.

برای درک دقیق این نظریه، لازم است که ابتدا ابزارهای ریاضی مناسب معرفی شوند. زبان ریاضی نسبیت عام، هندسه دیفرانسیل و به طور خاص هندسه ریمانی و لورنتسی است. در این چارچوب، فضا–زمان به صورت یک خمینه‌ی چهاربعدی مجهز به یک متریک لورنتسی مدل می‌شود. این متریک نه تنها فاصله‌ها، بلکه ساختار علّی فضا–زمان را نیز تعیین می‌کند.

یکی از مفاهیم کلیدی در این نظریه، مفهوم خمیدگی است. خمیدگی فضا–زمان توسط تانسور ریمن توصیف می‌شود که اطلاعات کامل هندسی مربوط به خمیدگی را در خود دارد. از این تانسور، کمیت‌های مهم دیگری مانند تانسور ریچی و اسکالر ریچی استخراج می‌شوند که نقش اساسی در فرمول‌بندی معادلات میدان اینشتین دارند.

هدف اصلی نظریه نسبیت عام، یافتن رابطه‌ای بین هندسه فضا–زمان و توزیع ماده و انرژی است. این رابطه توسط معادلات میدان اینشتین بیان می‌شود. این معادلات یک دستگاه معادلات دیفرانسیل جزئی غیرخطی هستند که متریک فضا–زمان را به تانسور انرژی–تکانه مرتبط می‌کنند.

در این پروژه، ساختار ریاضی و فیزیکی نظریه نسبیت عام به صورت مرحله به مرحله بررسی شده است. این پروژه شامل چهار فصل اصلی است.

در فصل اول، مفاهیم بنیادی هندسه ریمانی معرفی شده‌اند. این مفاهیم شامل خمینه‌ها، متریک، اتصال لوی–چیویتا، مشتق هموردا، تانسور ریمن، تانسور ریچی و اسکالر خمیدگی هستند. این ابزارها پایه ریاضی لازم برای مطالعه فضا–زمان خمیده را فراهم می‌کنند.

در فصل دوم، نظریه نسبیت خاص بررسی شده است. در این فصل، ساختار فضا–زمان مینکوفسکی، تبدیلات لورنتس، ناوردایی فاصله، و ساختار هندسی فضا–زمان تخت معرفی شده‌اند. نسبیت خاص حالت خاصی از نسبیت عام است که در آن خمیدگی صفر است.

در فصل سوم، اصول نظریه نسبیت عام معرفی شده‌اند. اصل هم‌ارزی، مفهوم خمینه لورنتسی، ژئودزیک‌ها و نقش متریک در تعیین حرکت ذرات مورد بررسی قرار گرفته‌اند. در این چارچوب، حرکت ذرات به عنوان ژئودزیک‌های فضا–زمان تفسیر می‌شود.

در فصل چهارم، معادلات میدان اینشتین به صورت کامل استخراج و بررسی شده‌اند. نقش تانسور ریچی، اسکالر ریچی، تانسور اینشتین، و تانسور انرژی–تکانه در ساختار این معادلات تحلیل شده است. همچنین تفسیر فیزیکی این معادلات و ارتباط آن‌ها با نظریه گرانش نیوتنی مورد بررسی قرار گرفته است.

هدف این پروژه، ارائه یک درک منسجم از ساختار هندسی گرانش و فرمول‌بندی دقیق معادلات میدان اینشتین است. این معادلات نشان می‌دهند که هندسه و فیزیک به طور عمیق به یکدیگر مرتبط هستند و ساختار فضا–زمان به طور مستقیم توسط ماده و انرژی تعیین می‌شود.

این پروژه نشان می‌دهد که نظریه نسبیت عام نه تنها یک نظریه فیزیکی، بلکه یک نظریه هندسی عمیق است که ساختار بنیادی جهان را توصیف می‌کند.

فصل ۱

هندسه ریمانی

۱.۱ منیفلد

۲.۱ تعریف دقیق منیفلد هموار

یک منیفلد n بعدی مجموعه‌ای به نام M است که دارای ویژگی‌های زیر است:

- همسایگی هر نقطه شبیه R^n است.
- فضا هاوسدورف است.
- شمارش‌پذیر دوم است.

برای هر نقطه $p \in M$ یک نگاشت مختصاتی وجود دارد:

$$\varphi : U \subset M \to R^n$$

که در آن U همسایگی باز از p است.
مجموعه تمام این نگاشت‌ها یک اطلس (Atlas) را تشکیل می‌دهد.
اگر تبدیلات بین مختصات مختلف هموار باشند، منیفلد را هموار (Smooth Manifold) می‌نامیم. منیفلد یک فضای ریاضی است که به طور موضعی شبیه فضای اقلیدسی است.
به طور دقیق، یک منیفلد M مجموعه‌ای است که برای هر نقطه p، یک نگاشت مختصاتی وجود دارد:

$$x^\mu : M \to R^n$$

که در آن $\mu = 0, 1, 2, ..., n - 1$
این مختصات ساختار محلی فضا را مشخص می‌کنند.

۳.۱ بردارهای مماسی

بردار مماسی به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$V = V^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}$$

که در آن

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu}$$

پایه فضای مماس است.

فضای مماس با نماد

$$T_pM$$

نمایش داده می‌شود.

۴.۱ بردار به عنوان عملگر مشتق

یک بردار مماسی در نقطه p یک نگاشت خطی است که روی توابع هموار تعریف می‌شود:

$$V : C^\infty(M) \to R$$

به طوری که خاصیت لایب‌نیتز را ارضا کند:

$$V(fg) = f(p)V(g) + g(p)V(f)$$

در مختصات محلی، پایه طبیعی فضای مماس به صورت زیر است:

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu}$$

و هر بردار به شکل زیر نوشته می‌شود:

$$V = V^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}$$

فضای مماس در نقطه p با نماد T_pM نمایش داده می‌شود.

۵.۱ متریک ریمانی

متریک به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$

این کمیت فاصله بین نقاط را تعیین می‌کند.
تانسور متریک ویژگی‌های هندسی فضا را مشخص می‌کند.
یک متریک ریمانی یک تانسور متقارن مرتبه دوم است:

$$g : T_pM \times T_pM \to R$$

که برای هر دو بردار X و Y داریم:

$$g(X, Y) = g_{\mu\nu} X^\mu Y^\nu$$

و شرط تقارن:

$$g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$$

و شرط مثبت معین بودن:

$$g(X, X) > 0 \quad \text{برای هر} X \neq 0$$

عنصر طول خط به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$

۶.۱ میدان‌های برداری

تا اینجا بردارها را در یک نقطه تعریف کردیم. اما در فیزیک و هندسه، معمولاً با میدان‌های برداری سروکار داریم.
یک میدان برداری نگاشتی است از منیفلد به فضای مماس:

$$V : M \to TM$$

به طوری که به هر نقطه p یک بردار در فضای مماس آن نقطه نسبت می‌دهد:

$$V(p) \in T_pM$$

در مختصات محلی، یک میدان برداری به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$V = V^\mu(x)\frac{\partial}{\partial x^\mu}$$

که در آن مولفه‌های $V^\mu(x)$ توابعی هموار از مختصات هستند.
این میدان‌ها نقش اساسی در تعریف مشتق و دینامیک روی منیفلد دارند.

۷.۱ تانسورها

تانسورها تعمیمی از بردارها و فرم‌ها هستند.
یک تانسور از نوع (r, s) یک نگاشت چندخطی است:

$$T : \underbrace{T_pM \times ... \times T_pM}_{r} \times \underbrace{T_p^*M \times ... \times T_p^*M}_{s} \to R$$

در مختصات محلی، یک تانسور به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$T = T^{\mu_1...\mu_r}_{\nu_1...\nu_s}\frac{\partial}{\partial x^{\mu_1}}...\frac{\partial}{\partial x^{\mu_r}}dx^{\nu_1}...dx^{\nu_s}$$

تانسورها اشیای بنیادی در نسبیت عام هستند، زیرا قوانین فیزیک باید مستقل از دستگاه مختصات باشند.

۸.۱ انتقال مختصاتی

اگر مختصات را تغییر دهیم:

$$x^\mu \to x'^\mu$$

بردارها به صورت زیر تبدیل می‌شوند:

$$V'^\mu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu}V^\nu$$

و فرم‌ها به صورت:

$$\omega'_\mu = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu}\omega_\nu$$

این قوانین تبدیل، ماهیت هندسی این کمیت‌ها را مشخص می‌کند.

۹.۱ اتصال

در یک منیفلد خمیده، مشتق معمولی بردار تعریف مناسبی ندارد، زیرا فضای مماس در نقاط مختلف متفاوت است.
برای حل این مشکل، مفهوم اتصال (Connection) معرفی می‌شود.
اتصال امکان تعریف مشتق بردار را فراهم می‌کند:

$$\nabla_\mu V^\nu$$

این کمیت مشتق هموردا نامیده می‌شود.

۱۰.۱ نمادهای کریستوفل

اتصال با استفاده از نمادهای کریستوفل تعریف می‌شود:

$$\nabla_\mu V^\nu = \partial_\mu V^\nu + \Gamma^\nu_{\mu\lambda} V^\lambda$$

که در آن:

$$\Gamma^\nu_{\mu\lambda}$$

نمادهای کریستوفل هستند.
این کمیت‌ها اتصال هندسی فضا را مشخص می‌کنند.
برای متریک ریمانی، نمادهای کریستوفل به صورت زیر هستند:

$$\Gamma^\rho_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\rho\sigma} (\partial_\mu g_{\nu\sigma} + \partial_\nu g_{\mu\sigma} - \partial_\sigma g_{\mu\nu})$$

این رابطه یکی از مهم‌ترین روابط در هندسه ریمانی است.

۱۱.۱ مشتق هموردا

مشتق هموردا یک تانسور نیز یک تانسور است.
برای یک بردار هم‌متغیر داریم:

$$\nabla_\mu V_\nu = \partial_\mu V_\nu - \Gamma^\lambda_{\mu\nu} V_\lambda$$

این تعریف تضمین می‌کند که قوانین تبدیل حفظ شوند.

۱۲.۱ ژئودزیک‌ها

ژئودزیک‌ها مسیرهایی هستند که کوتاه‌ترین فاصله بین نقاط را مشخص می‌کنند.
معادله ژئودزیک به صورت زیر است:

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\lambda^2} + \Gamma^\mu_{\nu\rho} \frac{dx^\nu}{d\lambda} \frac{dx^\rho}{d\lambda} = 0$$

این معادله مسیر حرکت آزاد ذرات را مشخص می‌کند.
در نسبیت عام، این مسیرها مسیر حرکت ذرات تحت تأثیر گرانش هستند.

۱۳.۱ تفسیر کامل معادله ژئودزیک

معادله ژئودزیک به صورت زیر است:

$$\frac{d^2x^\mu}{d\lambda^2} + \Gamma^\mu_{\nu\rho}\frac{dx^\nu}{d\lambda}\frac{dx^\rho}{d\lambda} = 0$$

این معادله تعمیم قانون حرکت یکنواخت در فضای تخت است.
در فضای تخت، داریم:

$$\Gamma^\mu_{\nu\rho} = 0$$

و معادله به شکل زیر ساده می‌شود:

$$\frac{d^2x^\mu}{d\lambda^2} = 0$$

که همان حرکت با سرعت ثابت است.
اما در فضای خمیده، جمله دوم ظاهر می‌شود.
این جمله نشان می‌دهد که مسیر حرکت تحت تأثیر ساختار هندسی فضا تغییر می‌کند.
در نسبیت عام، این معادله مسیر حرکت ذرات تحت تأثیر گرانش را مشخص می‌کند.
بنابراین، گرانش یک نیرو نیست، بلکه نتیجه هندسه فضا–زمان است.
ذرات آزاد کوتاه‌ترین مسیر را در فضا–زمان طی می‌کنند.
این مسیر ژئودزیک نامیده می‌شود.

۱۴.۱ انحنا

انحنا با استفاده از تانسور ریمان تعریف می‌شود:

$$R^\rho{}_{\sigma\mu\nu} = \partial_\mu\Gamma^\rho_{\nu\sigma} - \partial_\nu\Gamma^\rho_{\mu\sigma} + \Gamma^\rho_{\mu\lambda}\Gamma^\lambda_{\nu\sigma} - \Gamma^\rho_{\nu\lambda}\Gamma^\lambda_{\mu\sigma}$$

این تانسور میزان خمیدگی فضا را اندازه‌گیری می‌کند.

۱۵.۱ تانسور ریچی

تانسور ریچی از تانسور ریمان به دست می‌آید:

$$R_{\mu\nu} = R^\lambda{}_{\mu\lambda\nu}$$

این کمیت نقش مهمی در معادلات اینشتین دارد.

۱۶.۱ اسکالر ریچی

اسکالر ریچی برابر است با:

$$R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}$$

این کمیت یک اسکالر است که میزان کلی انحنا را مشخص می‌کند.

۱۷.۱ انتقال موازی

برای درک هندسی اتصال، مفهوم انتقال موازی را معرفی می‌کنیم.

فرض کنید برداری V^μ را در طول یک منحنی $x^\mu(\lambda)$ جابجا کنیم. می‌گوییم این بردار به صورت موازی منتقل می‌شود اگر مشتق هموردا آن در امتداد منحنی صفر باشد:

$$\frac{DV^\mu}{d\lambda} = \frac{dx^\nu}{d\lambda}\nabla_\nu V^\mu = 0$$

این رابطه تعریف انتقال موازی است.

در فضای تخت، انتقال موازی ساده است و بردار جهت خود را حفظ می‌کند. اما در فضای خمیده، نتیجه انتقال موازی به مسیر بستگی دارد.

این وابستگی به مسیر نشانه وجود انحنا است.

۱۸.۱ تفسیر هندسی تانسور ریمان

انحنا را می‌توان از طریق جابجایی دو مشتق هموردا تعریف کرد.

اگر V^ρ یک میدان برداری باشد، داریم:

$$(\nabla_\mu\nabla_\nu - \nabla_\nu\nabla_\mu)V^\rho = R^\rho{}_{\sigma\mu\nu}V^\sigma$$

این رابطه نشان می‌دهد که مشتق‌های هموردا به طور کلی جابجایی‌پذیر نیستند.

در فضای تخت:

$$R^\rho{}_{\sigma\mu\nu} = 0$$

اما در فضای خمیده این کمیت صفر نیست.

بنابراین تانسور ریمان میزان عدم جابجایی مشتق‌ها را اندازه‌گیری می‌کند، و این دقیقاً همان انحنا است.

۱۹.۱ همانی بیانکی

تانسور ریمان دارای تقارن‌های خاصی است:

$$R_{\rho\sigma\mu\nu} = -R_{\sigma\rho\mu\nu}$$

$$R_{\rho\sigma\mu\nu} = -R_{\rho\sigma\nu\mu}$$

و همچنین:

$$R_{\rho\sigma\mu\nu} = R_{\mu\nu\rho\sigma}$$

مهم‌تر از همه، همانی بیانکی به صورت زیر است:

$$\nabla_\lambda R^\rho{}_{\sigma\mu\nu} + \nabla_\mu R^\rho{}_{\sigma\nu\lambda} + \nabla_\nu R^\rho{}_{\sigma\lambda\mu} = 0$$

این رابطه نقش بنیادی در تضمین بقای انرژی–تکانه در نسبیت عام دارد. این اتصال، اتصال طبیعی هندسه ریمانی است.

۲۰.۱ اتصال لوی-چیویتا و سازگاری با متریک

در یک منیفلد هموار، فضای مماس در هر نقطه متفاوت است. این موضوع یک مشکل اساسی ایجاد می‌کند. اگر دو بردار در دو نقطه مختلف داشته باشیم، هیچ راه طبیعی برای مقایسه مستقیم آن‌ها وجود ندارد.

برای حل این مشکل، مفهوم اتصال معرفی می‌شود. اتصال روشی فراهم می‌کند تا بتوانیم مشتق یک میدان برداری را تعریف کنیم، به طوری که نتیجه نیز یک میدان برداری باشد.

به طور کلی، اتصال به صورت یک عملگر تعریف می‌شود:

$$\nabla_\mu$$

که به هر میدان برداری یک میدان برداری جدید نسبت می‌دهد:

$$\nabla_\mu V^\nu$$

این کمیت مشتق هموردا نامیده می‌شود.

در مختصات محلی، مشتق هموردا به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\nabla_\mu V^\nu = \partial_\mu V^\nu + \Gamma^\nu_{\mu\lambda} V^\lambda$$

که در آن $\Gamma^\nu_{\mu\lambda}$ ضرایب اتصال هستند.

این ضرایب نشان می‌دهند که چگونه پایه‌های فضای مماس از نقطه‌ای به نقطه دیگر تغییر می‌کنند.

۱.۲۰.۱ سازگاری با متریک

در هندسه ریمانی، یک شرط طبیعی وجود دارد: متریک باید تحت انتقال موازی تغییر نکند.

این شرط به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\nabla_\lambda g_{\mu\nu} = 0$$

این رابطه شرط سازگاری با متریک نامیده می‌شود.

این شرط تضمین می‌کند که طول بردارها و زاویه بین آن‌ها تحت انتقال موازی حفظ می‌شود.

برای درک اهمیت این موضوع، فرض کنید برداری را در امتداد یک مسیر منتقل کنیم. اگر متریک تغییر کند، طول بردار نیز تغییر خواهد کرد. اما در هندسه ریمانی، می‌خواهیم مفهوم طول به صورت سازگار تعریف شود.

۲.۲۰.۱ شرط بدون پیچش

یکی دیگر از شرایط مهم، شرط بدون پیچش است:

$$\Gamma^\rho_{\mu\nu} = \Gamma^\rho_{\nu\mu}$$

این شرط بیان می‌کند که ترتیب مشتق‌گیری مختصاتی اهمیتی ندارد.

اگر این شرط برقرار نباشد، ساختار هندسی دارای پیچش خواهد بود.

در نسبیت عام استاندارد، فرض می‌شود که پیچش صفر است.

۳.۲۰.۱ استخراج نمادهای کریستوفل

با استفاده از شرط سازگاری با متریک و شرط بدون پیچش، می‌توان نشان داد که ضرایب اتصال به صورت زیر هستند:

$$\Gamma^\rho_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\rho\sigma} (\partial_\mu g_{\nu\sigma} + \partial_\nu g_{\mu\sigma} - \partial_\sigma g_{\mu\nu})$$

این رابطه نشان می‌دهد که اتصال به طور کامل توسط متریک تعیین می‌شود.

این اتصال، اتصال لوی-چیویتا نامیده می‌شود.

۴.۲۰.۱ تفسیر هندسی اتصال

اتصال مشخص می‌کند که چگونه بردارها هنگام حرکت در فضا تغییر می‌کنند.
در فضای تخت، ضرایب اتصال صفر هستند:

$$\Gamma^{\rho}_{\mu\nu} = 0$$

اما در فضای خمیده، این ضرایب غیر صفر هستند.
بنابراین، اتصال بیانگر ساختار هندسی فضا است.
در نسبیت عام، گرانش به صورت اتصال ظاهر می‌شود، نه به صورت یک نیرو.
به عبارت دیگر، گرانش نتیجه خمیدگی فضا–زمان است.

۲۱.۱ تانسور اینشتین

با استفاده از تانسور ریچی و اسکالر ریچی، کمیت زیر تعریف می‌شود:

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R$$

به کمک همانی بیانکی می‌توان نشان داد:

$$\nabla^{\mu} G_{\mu\nu} = 0$$

این خاصیت بعداً تضمین می‌کند که:

$$\nabla^{\mu} T_{\mu\nu} = 0$$

که بیانگر بقای انرژی و تکانه است.

۲۲.۱ مشتق همورد تانسورها

در بخش‌های قبل، مشتق همورد یک میدان برداری را تعریف کردیم. اکنون این مفهوم را به تانسورهای عمومی تعمیم می‌دهیم.
فرض کنید یک تانسور از نوع $(1, 1)$ داشته باشیم:

$$T^{\mu}_{\nu}$$

هدف ما تعریف مشتق این تانسور به گونه‌ای است که نتیجه نیز یک تانسور باشد.
اگر از مشتق معمولی استفاده کنیم:

$$\partial_{\lambda} T^{\mu}_{\nu}$$

نتیجه یک تانسور نخواهد بود، زیرا مشتق معمولی تحت تبدیلات مختصاتی به صورت تانسوری تبدیل نمی‌شود.
برای حل این مشکل، مشتق همورد را تعریف می‌کنیم:

$$\nabla_{\lambda} T^{\mu}_{\nu} = \partial_{\lambda} T^{\mu}_{\nu} + \Gamma^{\mu}_{\lambda\sigma} T^{\sigma}_{\nu} - \Gamma^{\sigma}_{\lambda\nu} T^{\mu}_{\sigma}$$

این تعریف تضمین می‌کند که نتیجه یک تانسور باشد.

۱.۲۲.۱ تفسیر هندسی

هر شاخص بالا و پایین رفتار متفاوتی دارد.
برای هر شاخص بالا، یک جمله مثبت ظاهر می‌شود:

$$+\Gamma^{\mu}_{\lambda\sigma}$$

و برای هر شاخص پایین، یک جمله منفی ظاهر می‌شود:

$$-\Gamma^{\sigma}_{\lambda\nu}$$

این ساختار نشان‌دهنده نحوه تغییر پایه‌های فضای مماس و فضای هم‌مماس است.
به عبارت دیگر، مشتق همورد هم تغییر خود کمیت و هم تغییر دستگاه مختصات را در نظر می‌گیرد.

۲.۲۲.۱ حالت کلی

برای یک تانسور کلی:

$$T^{\mu_1\ldots\mu_r}_{\nu_1\ldots\nu_s}$$

مشتق همورد به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\nabla_\lambda T^{\mu_1\ldots\mu_r}_{\nu_1\ldots\nu_s} = \partial_\lambda T^{\mu_1\ldots\mu_r}_{\nu_1\ldots\nu_s} + \sum_{i=1}^{r} \Gamma^{\mu_i}_{\lambda\sigma} T^{\mu_1\ldots\sigma\ldots\mu_r}_{\nu_1\ldots\nu_s} - \sum_{j=1}^{s} \Gamma^{\sigma}_{\lambda\nu_j} T^{\mu_1\ldots\mu_r}_{\nu_1\ldots\sigma\ldots\nu_s}$$

این رابطه یکی از مهم‌ترین روابط در هندسه دیفرانسیل است.

۲۳.۱ تفسیر فیزیکی انحنا

انحنا نشان می‌دهد که فضا-زمان چگونه از حالت تخت منحرف شده است.
برای درک این موضوع، انتقال موازی یک بردار در یک مسیر بسته را در نظر بگیرید.
در فضای تخت، اگر یک بردار را در یک مسیر بسته منتقل کنیم، بردار به حالت اولیه باز می‌گردد.
اما در فضای خمیده، بردار پس از انتقال موازی تغییر می‌کند.
این تغییر توسط تانسور ریمان تعیین می‌شود.
اگر بردار اولیه V^μ باشد، تغییر آن برابر است با:

$$\delta V^\rho = R^\rho{}_{\sigma\mu\nu} V^\sigma A^{\mu\nu}$$

که در آن $A^{\mu\nu}$ مساحت حلقه است.
این رابطه نشان می‌دهد که انحنا یک ویژگی ذاتی فضا است، نه نتیجه انتخاب مختصات.

۱.۲۳.۱ مثال هندسی: سطح کره

سطح یک کره نمونه‌ای از یک فضای خمیده است.
اگر یک بردار را روی سطح کره انتقال موازی دهیم، جهت آن تغییر خواهد کرد.
این تغییر نتیجه مستقیم انحنای سطح است.
این مثال ساده نشان می‌دهد که انحنا یک مفهوم واقعی هندسی است.

۲۴.۱ انقباض تانسور ریمان

با انقباض شاخص‌های تانسور ریمان، تانسور ریچی به دست می‌آید:

$$R_{\mu\nu} = R^{\lambda}_{\ \mu\lambda\nu}$$

این تانسور اطلاعات مهمی درباره ساختار انحنا فراهم می‌کند.
انقباض بیشتر منجر به اسکالر ریچی می‌شود:

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$$

این کمیت یک اسکالر است، بنابراین مستقل از دستگاه مختصات است.
اسکالر ریچی میزان کلی انحنا را اندازه‌گیری می‌کند.

۲۵.۱ نقش هندسه در فیزیک

در هندسه ریمانی، متریک ساختار هندسی فضا را مشخص می‌کند.
در نسبیت عام، متریک همچنین میدان گرانشی است.
این بدان معناست که گرانش یک نیرو نیست، بلکه نتیجه خمیدگی فضا–زمان است.
تانسور ریمان ساختار کامل انحنا را مشخص می‌کند.
تانسور ریچی بخشی از این اطلاعات را استخراج می‌کند.
و تانسور اینشتین ترکیبی خاص از این کمیت‌ها است که در معادلات میدان ظاهر می‌شود.
این ساختار پایه ریاضی نظریه نسبیت عام است.

۲۶.۱ ساخت تانسور اینشتین و اهمیت آن

در بخش‌های قبل، تانسور ریمان، تانسور ریچی، و اسکالر ریچی را تعریف کردیم. این کمیت‌ها ساختار انحنای فضا را توصیف می‌کنند.
اما یک سوال اساسی مطرح می‌شود: کدام کمیت هندسی باید در معادله میدان گرانشی ظاهر شود؟
برای پاسخ به این سوال، باید یک شرط فیزیکی مهم را در نظر بگیریم.
در فیزیک، انرژی و تکانه پایسته هستند. این قانون به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0$$

که در آن $T^{\mu\nu}$ تانسور انرژی–تکانه است.
بنابراین، کمیت هندسی که در طرف دیگر معادله میدان ظاهر می‌شود نیز باید دارای همین خاصیت باشد.

۱.۲۶.۱ همانی بیانکی و نتیجه آن

همانی بیانکی که قبلاً معرفی شد، به صورت زیر است:

$$\nabla_\lambda R^{\rho}_{\ \sigma\mu\nu} + \nabla_\mu R^{\rho}_{\ \sigma\nu\lambda} + \nabla_\nu R^{\rho}_{\ \sigma\lambda\mu} = 0$$

با انجام انقباض مناسب روی این رابطه، نتیجه مهم زیر به دست می‌آید:

$$\nabla^\mu \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \right) = 0$$

این رابطه نشان می‌دهد که کمیت زیر دارای واگرایی صفر است:

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R$$

این کمیت تانسور اینشتین نامیده می‌شود.

۲.۲۶.۱ ویژگی‌های تانسور اینشتین

تانسور اینشتین دارای ویژگی‌های زیر است:

- یک تانسور متقارن است:

$$G_{\mu\nu} = G_{\nu\mu}$$

- فقط به متریک و مشتقات آن وابسته است.
- دارای واگرایی صفر است:

$$\nabla^{\mu} G_{\mu\nu} = 0$$

این ویژگی آخر اهمیت اساسی دارد، زیرا با قانون بقای انرژی–تکانه سازگار است.

۳.۲۶.۱ تفسیر هندسی

تانسور اینشتین ترکیبی خاص از انحنای فضا است.
تانسور ریچی بخشی از انحنا را توصیف می‌کند، و اسکالر ریچی میانگین انحنا را نشان می‌دهد.
ترکیب خاصی که در تعریف تانسور اینشتین ظاهر می‌شود، دقیقاً به گونه‌ای انتخاب شده است که قانون بقا را تضمین کند.
این یک نتیجه عمیق است، زیرا نشان می‌دهد که ساختار هندسی فضا به طور مستقیم با قوانین بقای فیزیکی مرتبط است.

۴.۲۶.۱ اهمیت برای نسبیت عام

در نسبیت عام، تانسور اینشتین نقش مرکزی دارد.
این تانسور در معادله میدان اینشتین ظاهر می‌شود:

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}$$

این معادله بیان می‌کند که انحنای فضا–زمان توسط توزیع ماده و انرژی تعیین می‌شود.
به عبارت دیگر، ماده ساختار هندسی فضا–زمان را تعیین می‌کند، و این ساختار هندسی حرکت ماده را کنترل می‌کند.
این رابطه اساس نظریه نسبیت عام است.

فصل ۲

نسبیت خاص

۱.۲ فضا–زمان تخت

در مکانیک کلاسیک، فضا و زمان مستقل از یکدیگر در نظر گرفته می‌شوند. فضا یک ساختار سه‌بعدی است و زمان یک پارامتر جداگانه است که به طور مستقل جریان دارد.

اما در نسبیت خاص، فضا و زمان به صورت یک ساختار چهار بعدی واحد به نام فضا–زمان (Spacetime) ترکیب می‌شوند.

هر رویداد در فضا–زمان با چهار مختصات مشخص می‌شود:

$$x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3)$$

که در آن:

$$x^0 = ct$$

و

$$x^1 = x, \quad x^2 = y, \quad x^3 = z$$

این چهار مختصات یک نقطه در فضا–زمان را مشخص می‌کنند.

۱.۱.۲ تفسیر هندسی

در این چارچوب، زمان دیگر یک کمیت جداگانه نیست، بلکه به عنوان بعد چهارم فضا–زمان در نظر گرفته می‌شود.

بنابراین، فضا–زمان یک منیفلد چهار بعدی است.

این دقیقاً همان ساختاری است که در فصل قبل معرفی کردیم، با این تفاوت که متریک آن خاص است.

۲.۲ متریک مینکوفسکی

در نسبیت خاص، فضا–زمان تخت است. این بدان معناست که انحنا صفر است:

$$R^\rho{}_{\sigma\mu\nu} = 0$$

متریک این فضا–زمان به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$ds^2 = -c^2dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$$

یا به صورت فشرده:

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu$$

که در آن $\eta_{\mu\nu}$ متریک مینکوفسکی است.
ماتریس این متریک به صورت زیر است:

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

۱.۲.۲ اهمیت فیزیکی

این متریک فاصله بین دو رویداد در فضا–زمان را مشخص می‌کند.
برخلاف فاصله اقلیدسی، این فاصله می‌تواند:

- مثبت باشد
- منفی باشد
- یا صفر باشد

این ویژگی ساختار علی فضا–زمان را تعیین می‌کند.

۳.۲ فاصله فضا–زمانی

کمیت زیر فاصله بین دو رویداد را تعریف می‌کند:

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$

این کمیت ناوردا است، یعنی تحت تبدیلات مختصاتی خاص تغییر نمی‌کند.
بر اساس علامت این کمیت، سه نوع فاصله داریم:

۱.۳.۲ فاصله زمانی

اگر:

$$ds^2 < 0$$

فاصله زمانی است.
در این حالت، یک رویداد می‌تواند علت رویداد دیگر باشد.

۲.۳.۲ فاصله فضایی

اگر:

$$ds^2 > 0$$

فاصله فضایی است.
در این حالت، هیچ ارتباط علی بین دو رویداد وجود ندارد.

۳.۳.۲ فاصله نوری

اگر:

$$ds^2 = 0$$

فاصله نوری است.
این مسیر مسیر حرکت نور را مشخص می‌کند.

۴.۲ تبدیلات لورنتس

تبدیلات لورنتس تبدیلاتی هستند که متریک مینکوفسکی را حفظ می‌کنند.
این شرط به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\eta_{\mu\nu} = \Lambda^{\rho}{}_{\mu}\Lambda^{\sigma}{}_{\nu}\eta_{\rho\sigma}$$

که در آن $\Lambda^{\rho}{}_{\mu}$ ماتریس تبدیل لورنتس است.
این رابطه نشان می‌دهد که فاصله فضا–زمانی تحت این تبدیلات ناوردا است.

۱.۴.۲ تفسیر فیزیکی

این تبدیلات ارتباط بین دستگاه‌های مرجع مختلف را مشخص می‌کنند.
برخلاف تبدیلات گالیله، در اینجا زمان مطلق نیست.
زمان و فضا به یکدیگر تبدیل می‌شوند.
این یکی از نتایج بنیادی نسبیت خاص است.

۵.۲ چهار–بردارها

در نسبیت خاص، کمیت‌های فیزیکی باید به صورت تانسوری بیان شوند تا مستقل از دستگاه مختصات باشند.
ساده‌ترین شیء تانسوری، یک چهار–بردار است.
یک چهار–بردار به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$A^{\mu} = (A^0, A^1, A^2, A^3)$$

که تحت تبدیلات لورنتس به صورت زیر تبدیل می‌شود:

$$A'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu}A^{\nu}$$

این قانون تبدیل تضمین می‌کند که ساختار هندسی حفظ شود.

۱.۵.۲ چهار–مکان

مهم‌ترین چهار–بردار، چهار–مکان است:

$$x^{\mu} = (ct, x, y, z)$$

این کمیت موقعیت یک رویداد در فضا–زمان را مشخص می‌کند.

۶.۲ زمان ویژه

در نسبیت خاص، زمان مطلق وجود ندارد. اما کمیتی وجود دارد که برای همه ناظران یکسان است: زمان ویژه.
زمان ویژه با استفاده از فاصله فضا–زمانی تعریف می‌شود:

$$d\tau^2 = -\frac{1}{c^2}ds^2$$

برای مسیر زمانی داریم:

$$d\tau = \sqrt{dt^2 - \frac{1}{c^2}(dx^2 + dy^2 + dz^2)}$$

این کمیت زمان اندازه‌گیری شده توسط ساعتی است که همراه ذره حرکت می‌کند.

۱.۶.۲ تفسیر فیزیکی

اگر سرعت ذره برابر v باشد، داریم:

$$d\tau = dt\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

این رابطه همان اتساع زمان است.
هرچه سرعت به c نزدیک‌تر شود، زمان ویژه کندتر می‌گذرد.

۷.۲ چهار–سرعت

چهار–سرعت به صورت مشتق چهار–مکان نسبت به زمان ویژه تعریف می‌شود:

$$U^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau}$$

مولفه زمانی آن:

$$U^0 = \frac{cdt}{d\tau}$$

و مولفه‌های فضایی:

$$U^i = \frac{dx^i}{d\tau}$$

۱.۷.۲ خاصیت مهم چهار–سرعت

با استفاده از متریک مینکوفسکی، داریم:

$$\eta_{\mu\nu}U^\mu U^\nu = -c^2$$

این رابطه مستقل از دستگاه مرجع است.
این یعنی اندازه چهار–سرعت ثابت است.

۸.۲ چهار–تکانه

چهار–تکانه به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$p^\mu = mU^\mu$$

که در آن m جرم سکون است.
مولفه زمانی چهار–تکانه:

$$p^0 = \frac{E}{c}$$

و مولفه‌های فضایی:

$$p^i = \gamma m v^i$$

که در آن:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

۱.۸.۲ رابطه بنیادی انرژی–تکانه

با استفاده از ناوردایی متریک داریم:

$$\eta_{\mu\nu}p^\mu p^\nu = -m^2c^2$$

که منجر به رابطه معروف می‌شود:

$$E^2 = p^2c^2 + m^2c^4$$

این رابطه یکی از نتایج بنیادی نسبیت خاص است.

۹.۲ حرکت آزاد در فضای تخت

در فضای تخت داریم:

$$\Gamma^\mu_{\nu\rho} = 0$$

بنابراین معادله ژئودزیک به صورت زیر ساده می‌شود:

$$\frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} = 0$$

این رابطه نشان می‌دهد که چهار–سرعت ثابت است.
در نتیجه، حرکت آزاد در نسبیت خاص همان حرکت یکنواخت است.
این نتیجه نشان می‌دهد که اصل اینرسی در چارچوب هندسی قابل بیان است.

۱۰.۲ تبدیل لورنتس صریح

تبدیل لورنتس رابطه بین مختصات یک رویداد در دو دستگاه لخت است که با سرعت ثابت نسبت به یکدیگر حرکت می‌کنند.
فرض کنید دستگاه S' با سرعت ثابت v در راستای x نسبت به دستگاه S حرکت کند.
تبدیل لورنتس به صورت زیر است:

$$x' = \gamma(x - vt)$$

$$t' = \gamma\left(t - \frac{vx}{c^2}\right)$$

$$y' = y$$

$$z' = z$$

که در آن:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

این تبدیلات ساختار فاصله فضا–زمانی را حفظ می‌کنند:

$$ds^2 = ds'^2$$

این ویژگی، تعریف بنیادی تبدیل لورنتس است.

۱۱.۲ اتساع زمان

فرض کنید ساعتی در دستگاه S' ساکن باشد.
در این صورت:

$$dx' = 0$$

از تبدیل لورنتس داریم:

$$dt = \gamma d\tau$$

که در آن $d\tau$ زمان ویژه است.
بنابراین:

$$d\tau = \frac{dt}{\gamma}$$

این نشان می‌دهد که زمان در دستگاه متحرک کندتر می‌گذرد.
این پدیده اتساع زمان نامیده می‌شود.

۱.۱۱.۲ تفسیر هندسی

اتساع زمان نتیجه مستقیم هندسه فضا–زمان است.
زمان ویژه طول مسیر در فضا–زمان است.
مسیرهای مختلف طول‌های مختلف دارند.
بنابراین ناظران مختلف زمان‌های متفاوتی اندازه‌گیری می‌کنند.

۱۲.۲ انقباض طول

فرض کنید میله‌ای در دستگاه S' ساکن باشد.
طول ویژه آن:

$$L_0 = x'_2 - x'_1$$

در دستگاه S طول به صورت زیر اندازه‌گیری می‌شود:

$$L = \frac{L_0}{\gamma}$$

بنابراین طول در راستای حرکت کوتاه‌تر می‌شود.
این پدیده انقباض طول نامیده می‌شود.

۱.۱۲.۲ منشا هندسی

انقباض طول نتیجه ساختار متفاوت همزمانی در دستگاه‌های مختلف است.
رویدادهایی که در یک دستگاه همزمان هستند، در دستگاه دیگر همزمان نیستند.
این یک نتیجه مستقیم تبدیل لورنتس است.

۱۳.۲ مخروط نوری

برای نور داریم:

$$ds^2 = 0$$

بنابراین:

$$c^2dt^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

این معادله مخروط نوری را تعریف می‌کند.

۱.۱۳.۲ ساختار علی

مخروط نوری فضا–زمان را به سه ناحیه تقسیم می‌کند:
ناحیه زمانی:

$$ds^2 < 0$$

ناحیه نوری:

$$ds^2 = 0$$

ناحیه فضایی:

$$ds^2 > 0$$

فقط رویدادهای داخل مخروط نوری می‌توانند به صورت علی به یکدیگر مرتبط باشند.
این ساختار علی یکی از بنیادی‌ترین ویژگی‌های فضا–زمان است.

۱۴.۲ چهار–نیرو

چهار–نیرو به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$F^\mu = \frac{dp^\mu}{d\tau}$$

این تعمیم قانون دوم نیوتن است.
در نسبیت خاص، این معادله جایگزین رابطه:

$$F = ma$$

می‌شود.

۱.۱۴.۲ خاصیت مهم

چهار–نیرو بر چهار–سرعت عمود است:

$$F^\mu U_\mu = 0$$

این نتیجه از ثابت بودن اندازه چهار–سرعت ناشی می‌شود.

۱۵.۲ انرژی سکون

برای ذره در حال سکون:

$$p^i = 0$$

بنابراین:

$$E = mc^2$$

این رابطه نشان می‌دهد که جرم شکلی از انرژی است.
این یکی از مهم‌ترین نتایج فیزیک مدرن است.

۱۶.۲ تفسیر هندسی کامل

در نسبیت خاص، فضا–زمان یک منیفلد چهار بعدی تخت است.
متریک:

$$\eta_{\mu\nu}$$

اتصال:

$$\Gamma^\rho_{\mu\nu} = 0$$

انحناء:

$$R^\rho_{\sigma\mu\nu} = 0$$

حرکت آزاد:

$$\frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} = 0$$

این معادله نشان می‌دهد که ذرات مسیرهای مستقیم در فضا–زمان را دنبال می‌کنند.
این مسیرها ژئودزیک نامیده می‌شوند.

۱۷.۲ محدودیت نسبیت خاص

نسبیت خاص فقط در غیاب گرانش معتبر است.
در حضور گرانش، فضا–زمان دیگر تخت نیست.
در این حالت:

$$\eta_{\mu\nu} \to g_{\mu\nu}(x)$$

و:

$$\Gamma^\rho_{\mu\nu} \neq 0$$

و:

$$R^\rho_{\sigma\mu\nu} \neq 0$$

در این حالت، حرکت ذرات توسط معادله ژئودزیک در فضای خمیده تعیین می‌شود.
این اساس نسبیت عام است.

فصل ۳

نسبیت عام

۱.۳ اصل هم‌ارزی

اصل هم‌ارزی (Equivalence Principle) پایه فیزیکی نظریه نسبیت عام است.
این اصل بیان می‌کند که در یک ناحیه کوچک از فضا–زمان، اثرات گرانش را می‌توان با انتخاب یک دستگاه مختصات مناسب حذف کرد.
به بیان دقیق‌تر، در هر نقطه از فضا–زمان می‌توان دستگاهی یافت که در آن قوانین فیزیک به صورت قوانین نسبیت خاص ظاهر شوند.

۱.۱.۳ توضیح فیزیکی

فرض کنید فردی در یک آسانسور بسته قرار دارد.
دو حالت ممکن است:

- آسانسور در میدان گرانشی زمین ساکن است.
- آسانسور در فضای بدون گرانش با شتاب ثابت حرکت می‌کند.

از دید ناظر داخل آسانسور، این دو حالت غیر قابل تمایز هستند.
این اصل نشان می‌دهد که گرانش و شتاب از نظر فیزیکی معادل هستند.
این نتیجه بسیار عمیق است، زیرا نشان می‌دهد که گرانش یک نیروی معمولی نیست.
بلکه نتیجه انتخاب دستگاه مختصات است.

۲.۱.۳ نتیجه هندسی

اصل هم‌ارزی نشان می‌دهد که می‌توان در هر نقطه مختصاتی انتخاب کرد که در آن:

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$$

و:

$$\Gamma^{\rho}_{\mu\nu} = 0$$

در آن نقطه خاص.
اما این فقط به صورت محلی درست است.
در نواحی بزرگ‌تر، این امکان وجود ندارد.
این نشان می‌دهد که فضا–زمان دارای انحناء است.
این همان چیزی است که گرانش را ایجاد می‌کند.

۲.۳ متریک فضا–زمان خمیده

در نسبیت عام، فضا–زمان یک منیفلد چهار بعدی خمیده است.
ساختار هندسی این فضا توسط متریک تعیین می‌شود:

$$g_{\mu\nu}(x)$$

این کمیت یک تابع از مختصات است.
بر خلاف نسبیت خاص، متریک دیگر ثابت نیست.
عنصر فاصله به صورت زیر است:

$$ds^2 = g_{\mu\nu}(x) dx^\mu dx^\nu$$

این رابطه تمام اطلاعات هندسی فضا–زمان را در خود دارد.

۱.۲.۳ تفسیر فیزیکی

این کمیت تعیین می‌کند:

- فاصله بین نقاط
- گذر زمان
- مسیر حرکت ذرات
- انتشار نور

بنابراین متریک مهم‌ترین کمیت در نسبیت عام است.
تمام اثرات گرانشی در $g_{\mu\nu}$ کدگذاری شده‌اند.

۳.۳ معادله ژئودزیک

در نسبیت عام، ذرات آزاد تحت تاثیر هیچ نیرویی نیستند.
آن‌ها مسیرهای طبیعی فضا–زمان را دنبال می‌کنند.
این مسیرها ژئودزیک نامیده می‌شوند.
معادله ژئودزیک به صورت زیر است:

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma^\mu_{\rho\sigma} \frac{dx^\rho}{d\tau} \frac{dx^\sigma}{d\tau} = 0$$

این معادله تعمیم قانون حرکت نیوتن است.

۱.۳.۳ توضیح فیزیکی

در مکانیک نیوتنی داریم:

$$F = ma$$

اما در نسبیت عام، نیروی گرانش وجود ندارد.
در عوض، انحناء فضا–زمان باعث انحراف مسیر می‌شود.
بنابراین این معادله حرکت ذرات در میدان گرانشی را تعیین می‌کند.

۲.۳.۳ تفسیر هندسی

این معادله بیان می‌کند که بردار سرعت به صورت موازی با خودش انتقال می‌یابد.
به بیان ریاضی:

$$\nabla_U U = 0$$

این تعریف دقیق ژئودزیک است.

۴.۳ نمادهای کریستوفل

نمادهای کریستوفل به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\Gamma^\rho_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\rho\sigma} \left(\partial_\mu g_{\nu\sigma} + \partial_\nu g_{\mu\sigma} - \partial_\sigma g_{\mu\nu} \right)$$

این کمیت‌ها از مشتقات متریک ساخته می‌شوند.

۱.۴.۳ تفسیر هندسی

این کمیت‌ها نشان می‌دهند که پایه‌های مختصاتی چگونه تغییر می‌کنند.
اگر:

$$\Gamma^\rho_{\mu\nu} = 0$$

فضا تخت است.
اگر:

$$\Gamma^\rho_{\mu\nu} \neq 0$$

فضا خمیده است.

۲.۴.۳ تفسیر فیزیکی

این کمیت‌ها اثرات گرانش را تعیین می‌کنند.
در واقع، آن‌ها جایگزین نیروی گرانش نیوتنی می‌شوند.

۵.۳ گرانش به عنوان هندسه

معادله ژئودزیک را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\frac{d^2 x^i}{dt^2} = -\Gamma^i_{00}$$

این رابطه نشان می‌دهد که شتاب گرانشی توسط اتصال تعیین می‌شود.
بنابراین:
گرانش یک نیرو نیست.
بلکه نتیجه هندسه فضا–زمان است.
این مهم‌ترین نتیجه نسبیت عام است.

۶.۳ تانسور انحناء ریمان

تانسور انحناء ریمان (Riemann Curvature Tensor) کمیتی است که انحناء فضا–زمان را به صورت دقیق توصیف می‌کند.
این تانسور به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$R^{\rho}{}_{\sigma\mu\nu} = \partial_\mu \Gamma^{\rho}_{\nu\sigma} - \partial_\nu \Gamma^{\rho}_{\mu\sigma} + \Gamma^{\rho}_{\mu\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\nu\sigma} - \Gamma^{\rho}_{\nu\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\mu\sigma}$$

این کمیت یک تانسور مرتبه چهار است.

۱.۶.۳ تفسیر هندسی

این تانسور میزان عدم جابجایی‌پذیری مشتق هموردای را اندازه می‌گیرد.
اگر یک بردار را در یک مسیر بسته انتقال موازی دهیم، در فضای تخت به حالت اولیه باز می‌گردد.
اما در فضای خمیده، بردار تغییر می‌کند.
این تغییر توسط تانسور ریمان تعیین می‌شود.

۲.۶.۳ تفسیر فیزیکی

این تانسور مسئول اثرات واقعی گرانش است.
اگر:

$$R^{\rho}{}_{\sigma\mu\nu} = 0$$

فضا–زمان تخت است.
اگر:

$$R^{\rho}{}_{\sigma\mu\nu} \neq 0$$

فضا–زمان خمیده است.

۷.۳ تانسور ریچی

تانسور ریچی با انقباض تانسور ریمان تعریف می‌شود:

$$R_{\mu\nu} = R^{\rho}{}_{\mu\rho\nu}$$

این تانسور مرتبه دوم است.
تانسور ریچی اطلاعات مهمی درباره انحناء فضا–زمان ارائه می‌دهد.

۱.۷.۳ تفسیر هندسی

این تانسور تغییر حجم یک دسته از ژئودزیک‌ها را توصیف می‌کند.
اگر:

$$R_{\mu\nu} = 0$$

فضا–زمان در آن ناحیه بدون انحناء ناشی از ماده است.

۲.۷.۳ تفسیر فیزیکی

این تانسور مستقیماً با توزیع جرم و انرژی مرتبط است.
در واقع، این کمیت در معادلات اینشتین ظاهر می‌شود.

۸.۳ اسکالر انحناء

اسکالر انحناء به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$$

این کمیت یک اسکالر است.
بنابراین مستقل از دستگاه مختصات است.

۱.۸.۳ تفسیر هندسی

این کمیت میزان کلی انحناء فضا–زمان را اندازه می‌گیرد.
این ساده‌ترین کمیت انحناء است.

۲.۸.۳ تفسیر فیزیکی

این کمیت در معادلات میدان اینشتین ظاهر می‌شود.
این کمیت اثر کلی ماده بر انحناء فضا–زمان را توصیف می‌کند.

۹.۳ تانسور اینشتین

تانسور اینشتین به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R$$

این تانسور مرتبه دوم است.

۱.۹.۳ خاصیت مهم

این تانسور دارای خاصیت زیر است:

$$\nabla^{\mu} G_{\mu\nu} = 0$$

این خاصیت برای سازگاری معادلات فیزیکی ضروری است.

۲.۹.۳ تفسیر هندسی

این تانسور خلاصه‌ای از اطلاعات انحناء فضا–زمان است.
این کمیت مناسب‌ترین فرم برای ارتباط با ماده است.

۱۰.۳ تانسور انرژی–تکانه

تانسور انرژی–تکانه با نماد:

$$T_{\mu\nu}$$

نمایش داده می‌شود.
این تانسور شامل اطلاعات زیر است:

- چگالی انرژی
- چگالی تکانه

- فشار
- جریان انرژی

۱.۱۰.۳ تفسیر فیزیکی

این تانسور توزیع ماده و انرژی را توصیف می‌کند.
این کمیت منبع میدان گرانشی است.

۱۱.۳ اصل اکسترمم بودن زمان ویژه

در نسبیت عام، مسیر واقعی یک ذره آزاد مسیری است که زمان ویژه را اکسترمم می‌کند.
زمان ویژه به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\tau = \int \sqrt{-g_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\lambda}\frac{dx^\nu}{d\lambda}}\, d\lambda$$

که در آن λ یک پارامتر دلخواه است.
این کمیت طول مسیر در فضا–زمان است.
مسیر واقعی ذره مسیری است که این کمیت را اکسترمم می‌کند.
این اصل مشابه اصل کمترین کنش در مکانیک کلاسیک است.

۱۲.۳ لاگرانژین حرکت

لاگرانژین به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$L = g_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\lambda}\frac{dx^\nu}{d\lambda}$$

اکنون از معادلات اویلر–لاگرانژ استفاده می‌کنیم:

$$\frac{d}{d\lambda}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\rho}\right) - \frac{\partial L}{\partial x^\rho} = 0$$

که در آن:

$$\dot{x}^\mu = \frac{dx^\mu}{d\lambda}$$

۱۳.۳ استخراج معادله ژئودزیک

ابتدا داریم:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\rho} = 2g_{\rho\nu}\dot{x}^\nu$$

اکنون مشتق نسبت به λ:

$$\frac{d}{d\lambda}\left(g_{\rho\nu}\dot{x}^\nu\right) = \partial_\sigma g_{\rho\nu}\dot{x}^\sigma\dot{x}^\nu + g_{\rho\nu}\ddot{x}^\nu$$

اکنون:

$$\frac{\partial L}{\partial x^\rho} = \partial_\rho g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu$$

جایگذاری در معادله اویلر–لاگرانژ:

$$g_{\rho\nu}\ddot{x}^{\nu} + \partial_{\sigma} g_{\rho\nu}\dot{x}^{\sigma}\dot{x}^{\nu} - \frac{1}{2}\partial_{\rho} g_{\mu\nu}\dot{x}^{\mu}\dot{x}^{\nu} = 0$$

با ضرب در $g^{\lambda\rho}$:

$$\ddot{x}^{\lambda} + \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}\dot{x}^{\mu}\dot{x}^{\nu} = 0$$

این معادله ژئودزیک است.

۱۴.۳ تفسیر فیزیکی معادله ژئودزیک

این معادله نشان می‌دهد که حرکت ذرات آزاد نتیجه مستقیم ساختار هندسی فضا–زمان است.
هیچ نیرویی در کار نیست.
آنچه وجود دارد فقط هندسه است.
در فضای تخت:

$$\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} = 0$$

بنابراین:

$$\ddot{x}^{\lambda} = 0$$

که حرکت یکنواخت است.
در فضای خمیده:

$$\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} \neq 0$$

و مسیر منحرف می‌شود.
این همان چیزی است که ما به عنوان گرانش مشاهده می‌کنیم.

۱۵.۳ ژئودزیک‌های نوری

برای نور داریم:

$$ds^2 = 0$$

این مسیرها ژئودزیک‌های نوری نامیده می‌شوند.
این مسیرها انتشار نور در میدان گرانشی را تعیین می‌کنند.

۱.۱۵.۳ نتیجه فیزیکی

انحناء فضا–زمان باعث خم شدن مسیر نور می‌شود.
این اثر به صورت تجربی مشاهده شده است.
این یکی از اولین تاییدهای نظریه نسبیت عام بود.

۱۶.۳ مختصات لخت موضعی

در هر نقطه می‌توان مختصاتی انتخاب کرد که:

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$$

و:

$$\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} = 0$$

در آن نقطه.
این مختصات، مختصات لخت موضعی نامیده می‌شوند.

۱.۱۶.۳ تفسیر فیزیکی

در این مختصات، قوانین فیزیک مانند نسبیت خاص هستند.
این نتیجه مستقیم اصل هم‌ارزی است.

۱۷.۳ جمع‌بندی

در این فصل نشان دادیم که:
فضا–زمان یک منیفلد خمیده است.
متریک:

$$g_{\mu\nu}$$

ساختار هندسی را تعیین می‌کند.
اتصال:

$$\Gamma^{\rho}_{\mu\nu}$$

نحوه تغییر بردارها را تعیین می‌کند.
تانسور ریمان:

$$R^{\rho}_{\sigma\mu\nu}$$

انحناء فضا–زمان را توصیف می‌کند.
تانسور ریچی:

$$R_{\mu\nu}$$

و اسکالر انحناء:

$$R$$

کمیت‌های مشتق شده از انحناء هستند.
حرکت ذرات توسط معادله ژئودزیک تعیین می‌شود:

$$\frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma^{\mu}_{\rho\sigma}\frac{dx^\rho}{d\tau}\frac{dx^\sigma}{d\tau} = 0$$

این معادله نتیجه مستقیم هندسه فضا–زمان است.
بنابراین گرانش یک نیرو نیست.
بلکه نتیجه انحناء فضا–زمان است.

فصل ۴

معادلات میدان اینشتین

۱.۴ نیاز به معادله میدان

در فصل قبل نشان دادیم که ساختار هندسی فضا–زمان توسط متریک تعیین می‌شود:

$$g_{\mu\nu}(x)$$

و انحناء فضا–زمان توسط تانسور ریمان، تانسور ریچی، و اسکالر انحناء توصیف می‌شود:

$$R^{\rho}{}_{\sigma\mu\nu}$$

$$R_{\mu\nu}$$

$$R$$

همچنین نشان دادیم که حرکت ذرات توسط انحناء تعیین می‌شود.
بنابراین، برای توصیف کامل گرانش، باید رابطه‌ای پیدا کنیم که مشخص کند چگونه ماده انحناء فضا–زمان را تعیین می‌کند.
این رابطه، معادله میدان نامیده می‌شود.

۲.۴ تانسور انرژی–تکانه

در نسبیت خاص، انرژی و تکانه در یک کمیت واحد به نام چهار–تکانه ترکیب می‌شوند.
در نسبیت عام، توزیع انرژی و تکانه توسط تانسور انرژی–تکانه توصیف می‌شود:

$$T_{\mu\nu}$$

این تانسور شامل اطلاعات زیر است:

$$T_{00}$$

چگالی انرژی

$$T_{0i}$$

جریان انرژی

$$T_{i0}$$

چگالی تکانه

T_{ij}

تنش و فشار
این تانسور منبع میدان گرانشی است.

۳.۴ شرایط لازم برای معادله میدان

معادله میدان باید شرایط زیر را ارضا کند:

- یک معادله تانسوری باشد
- فقط به متریک و مشتقات آن وابسته باشد
- با اصل هم‌ارزی سازگار باشد
- بقای انرژی و تکانه را تضمین کند

شرط آخر بسیار مهم است.
در نسبیت خاص داریم:

$$\partial^\mu T_{\mu\nu} = 0$$

در نسبیت عام، این رابطه به صورت زیر تعمیم می‌یابد:

$$\nabla^\mu T_{\mu\nu} = 0$$

بنابراین طرف چپ معادله میدان نیز باید این خاصیت را داشته باشد.

۴.۴ تانسور اینشتین

تانسور اینشتین به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R$$

این تانسور دارای خاصیت بسیار مهم زیر است:

$$\nabla^\mu G_{\mu\nu} = 0$$

این خاصیت به طور خودکار از هندسه فضا-زمان ناشی می‌شود.
این خاصیت برای سازگاری با بقای انرژی ضروری است.
بنابراین این تانسور بهترین گزینه برای طرف چپ معادله میدان است.

۵.۴ فرم کلی معادله میدان

بر اساس استدلال‌های قبلی، معادله میدان باید به صورت زیر باشد:

$$G_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}$$

که در آن κ یک ثابت است.
این معادله رابطه بین هندسه و ماده را بیان می‌کند.

۶.۴ حد نیوتنی

در حد میدان ضعیف، متریک به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$$

که در آن:

$$h_{\mu\nu} \ll 1$$

در این حد، معادله میدان باید به معادله پواسون تبدیل شود:

$$\nabla^2\phi = 4\pi G\rho$$

با مقایسه این روابط، مقدار ثابت به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\kappa = \frac{8\pi G}{c^4}$$

۷.۴ معادلات میدان اینشتین

معادلات میدان اینشتین به صورت زیر هستند:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}$$

این معادلات رابطه بین هندسه و ماده را توصیف می‌کنند.

۸.۴ تفسیر فیزیکی معادلات اینشتین

طرف چپ معادله:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R$$

انحناء فضا–زمان را توصیف می‌کند.
طرف راست معادله:

$$T_{\mu\nu}$$

توزیع ماده و انرژی را توصیف می‌کند.
بنابراین این معادله بیان می‌کند:
ماده باعث انحناء فضا–زمان می‌شود.
این انحناء حرکت ماده را تعیین می‌کند.
این یک رابطه دو طرفه است.
این معادله قانون بنیادی گرانش است.

۹.۴ معادله میدان در خلأ

در غیاب ماده داریم:

$$T_{\mu\nu} = 0$$

بنابراین:

$$R_{\mu\nu} = 0$$

این معادله میدان در خلأ است.
این معادله ساختار فضا-زمان در غیاب ماده را تعیین می‌کند.

۱۰.۴ کنش اینشتین-هیلبرت

برای استخراج معادلات میدان اینشتین به صورت اصولی، از اصل کمترین کنش استفاده می‌کنیم.
این اصل بیان می‌کند که مسیر واقعی یک سیستم فیزیکی مسیری است که کنش را اکسترمم می‌کند.
در نسبیت عام، کنش گرانشی به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$S = \frac{c^3}{16\pi G} \int R\sqrt{-g}\, d^4x$$

که در آن:

- R اسکالر انحناء است.
- g دترمینان متریک است.
- $\sqrt{-g}$ عامل حجم در فضا-زمان خمیده است.

۱.۱۰.۴ تفسیر هندسی عامل حجم

در فضای تخت، عنصر حجم به صورت زیر است:

$$d^4x$$

اما در فضای خمیده، عنصر حجم واقعی به صورت زیر است:

$$\sqrt{-g}\, d^4x$$

این عامل نشان می‌دهد که حجم در فضای خمیده با فضای تخت متفاوت است.
این کمیت مستقیماً از متریک ناشی می‌شود.
بنابراین کل کنش فقط به متریک بستگی دارد.

۱۱.۴ تغییرات کنش

برای استخراج معادلات میدان، تغییرات کنش نسبت به متریک را محاسبه می‌کنیم:

$$\delta S = \frac{c^3}{16\pi G} \int \delta\left(R\sqrt{-g}\right) d^4x$$

با استفاده از رابطه زیر:

$$\delta(R\sqrt{-g}) = \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R\right) \sqrt{-g}\delta g^{\mu\nu}$$

بنابراین:

$$\delta S = \frac{c^3}{16\pi G} \int \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R\right) \sqrt{-g}\delta g^{\mu\nu} d^4x$$

۱۲.۴ کنش ماده

کنش کل شامل دو بخش است:

$$S = S_{gravity} + S_{matter}$$

کنش ماده به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$S_{matter} = \int \mathcal{L}_{matter}\sqrt{-g}\, d^4x$$

تغییرات این کنش به صورت زیر تعریف‌کننده تانسور انرژی–تکانه است:

$$\delta S_{matter} = \frac{1}{2}\int T_{\mu\nu}\sqrt{-g}\delta g^{\mu\nu}\, d^4x$$

این رابطه در واقع تعریف تانسور انرژی–تکانه است.
این نشان می‌دهد که $T_{\mu\nu}$ پاسخ ماده به تغییرات متریک است.

۱۳.۴ استخراج معادلات میدان

کنش کل:

$$S = S_{gravity} + S_{matter}$$

بنابراین:

$$\delta S = \delta S_{gravity} + \delta S_{matter}$$

جایگذاری روابط قبلی:

$$\delta S = \int \left[\frac{c^3}{16\pi G}\left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R\right) + \frac{1}{2}T_{\mu\nu}\right]\sqrt{-g}\delta g^{\mu\nu} d^4x$$

برای اینکه کنش اکسترمم باشد:

$$\delta S = 0$$

بنابراین:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}$$

این معادلات میدان اینشتین هستند.

۱۴.۴ تفسیر بنیادی معادلات میدان

معادلات میدان اینشتین یک رابطه بین هندسه و ماده هستند.
طرف چپ:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R$$

کاملاً از متریک ساخته شده است.
بنابراین این طرف فقط هندسه فضا–زمان را توصیف می‌کند.
طرف راست:

$$T_{\mu\nu}$$

توزیع ماده و انرژی را توصیف می‌کند.
بنابراین این معادله بیان می‌کند که:
توزیع ماده، هندسه فضا–زمان را تعیین می‌کند.
این نتیجه کاملاً متفاوت از فیزیک نیوتنی است.
در نظریه نیوتنی، فضا ثابت بود.
اما در نسبیت عام، فضا–زمان یک کمیت دینامیکی است.
متریک یک میدان فیزیکی است.

۱۵.۴ غیرخطی بودن معادلات میدان

معادلات اینشتین غیرخطی هستند.
زیرا:

$$R_{\mu\nu}$$

شامل مشتقات متریک و همچنین خود متریک است.
بنابراین:
گرانش خودش منبع گرانش است.
این ویژگی در نظریه نیوتنی وجود ندارد.
این ویژگی باعث ساختارهای پیچیده‌ای مانند:

- سیاه‌چاله‌ها
- امواج گرانشی
- انبساط کیهان

می‌شود.

۱۶.۴ معادلات میدان در خلأ

در غیاب ماده:

$$T_{\mu\nu} = 0$$

بنابراین:

$$R_{\mu\nu} = 0$$

این معادله ساختار فضا–زمان در خلأ را تعیین می‌کند.
این معادله نشان می‌دهد که حتی در غیاب ماده، فضا–زمان می‌تواند ساختار پیچیده‌ای داشته باشد.
این منجر به وجود امواج گرانشی می‌شود.

۱۷.۴ تفسیر مفهومی نهایی

معادلات اینشتین نشان می‌دهند که گرانش یک نیرو نیست.
گرانش نتیجه انحناء فضا–زمان است.
ماده باعث انحناء می‌شود.
انحناء حرکت ماده را تعیین می‌کند.
این یک رابطه خودسازگار است.
در این نظریه، متریک نقش پتانسیل گرانشی را بازی می‌کند.
اما برخلاف نظریه نیوتنی، این پتانسیل یک کمیت هندسی است.
این نظریه ساختار بنیادی فضا و زمان را توصیف می‌کند.

۱۸.۴ ثابت کیهان‌شناسی

معادلات میدان اینشتین را می‌توان به صورت کلی‌تری نوشت:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}$$

که در آن Λ ثابت کیهان‌شناسی است.

۱.۱۸.۴ منشا هندسی

ترم $\Lambda g_{\mu\nu}$ تنها جمله‌ای است که:

- از متریک ساخته می‌شود،
- تانسوری است،
- و مشتق همورداى آن صفر است.

بنابراین از نظر هندسی مجاز است.

۲.۱۸.۴ تفسیر فیزیکی

این جمله معادل یک چگالی انرژی خلأ است.
اگر:

$$T_{\mu\nu}^{(vac)} = -\frac{c^4\Lambda}{8\pi G}g_{\mu\nu}$$

در نظر گرفته شود، می‌توان آن را به عنوان انرژی خلأ تفسیر کرد.
این کمیت مسئول انبساط شتابدار کیهان است.

۱۹.۴ حد میدان ضعیف و خطی‌سازی

فرض می‌کنیم متریک به صورت زیر باشد:

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$$

که در آن:

$$|h_{\mu\nu}| \ll 1$$

در این تقریب، فقط جملات مرتبه اول در $h_{\mu\nu}$ را نگه می‌داریم.

اتصال کریستوفل به صورت زیر تقریب زده می‌شود:

$$\Gamma^{\rho}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\eta^{\rho\sigma}(\partial_\mu h_{\nu\sigma} + \partial_\nu h_{\mu\sigma} - \partial_\sigma h_{\mu\nu})$$

اکنون تانسور ریچی مرتبه اول به صورت زیر می‌شود:

$$R_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(\partial_\rho\partial_\mu h^{\rho}{}_{\nu} + \partial_\rho\partial_\nu h^{\rho}{}_{\mu} - \Box h_{\mu\nu} - \partial_\mu\partial_\nu h)$$

که در آن:

$$h = h^{\rho}{}_{\rho}$$

و:

$$\Box = \eta^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu$$

۲۰.۴ پیمانه لورنتس

تعریف می‌کنیم:

$$\bar{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}h$$

و شرط پیمانه:

$$\partial^\mu \bar{h}_{\mu\nu} = 0$$

در این صورت معادلات میدان خطی‌شده به صورت ساده زیر درمی‌آیند:

$$\Box\bar{h}_{\mu\nu} = -\frac{16\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}$$

این یک معادله موج است.

۲۱.۴ امواج گرانشی

در خلأ:

$$T_{\mu\nu} = 0$$

بنابراین:

$$\Box\bar{h}_{\mu\nu} = 0$$

این معادله موج است.
بنابراین اختلالات متریک با سرعت نور منتشر می‌شوند.
این امواج، امواج گرانشی نام دارند.

۱.۲۱.۴ تفسیر فیزیکی

گرانش می‌تواند به صورت موج منتشر شود.
این نتیجه مستقیماً از غیرخطی بودن معادلات اینشتین ناشی می‌شود.
امواج گرانشی در سال ۲۰۱۵ به طور مستقیم مشاهده شدند.

۲۲.۴ حل شوارتزشیلد

در خلأ داریم:

$$R_{\mu\nu} = 0$$

فرض می‌کنیم تقارن کروی و ایستایی برقرار باشد.
فرم کلی متریک:

$$ds^2 = -e^{2\Phi(r)}c^2dt^2 + e^{2\Lambda(r)}dr^2 + r^2d\Omega^2$$

با حل معادلات میدان به دست می‌آید:

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2GM}{c^2r}\right)c^2dt^2 + \left(1 - \frac{2GM}{c^2r}\right)^{-1}dr^2 + r^2d\Omega^2$$

این متریک شوارتزشیلد است.

۲۳.۴ شعاع شوارتزشیلد و افق رویداد

تعریف می‌کنیم:

$$r_s = \frac{2GM}{c^2}$$

اگر:

$$r = r_s$$

ضریب g_{tt} صفر می‌شود.
این سطح، افق رویداد نام دارد.
در این سطح، نور نیز نمی‌تواند فرار کند.
اگر جرم در شعاعی کمتر از r_s متمرکز شود، سیاه‌چاله تشکیل می‌شود.

۲۴.۴ جمع‌بندی نهایی فصل

معادلات میدان اینشتین رابطه‌ای بین هندسه و ماده هستند.
در حد میدان ضعیف، این معادلات به گرانش نیوتنی کاهش می‌یابند.
در تقریب خطی، امواج گرانشی ظاهر می‌شوند.
در خلأ با تقارن کروی، متریک شوارتزشیلد به دست می‌آید.
این نتایج نشان می‌دهند که معادلات اینشتین:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}$$

یک نظریه کامل برای گرانش هستند.

جمع‌بندی نهایی معادلات میدان اینشتین

در این فصل مشاهده کردیم که چگونه ساختار هندسی یک خمینه‌ی لورنتسی با ساختار فیزیکی توزیع ماده و انرژی در جهان مرتبط می‌شود.
نتیجه‌ی نهایی این فرایند تحلیلی، معادله‌ی میدان اینشتین است:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu} \tag{۱.۴}$$

در این رابطه:
$R_{\mu\nu}$ تانسور ریچی است که انقباض تانسور ریمن می‌باشد و میزان خمیدگی موضعی فضا–زمان را نشان می‌دهد.
R اسکالر ریچی است که از انقباض دوباره‌ی $R_{\mu\nu}$ حاصل می‌شود و یک کمیت اسکالر از خمیدگی کلی در هر نقطه است.
$g_{\mu\nu}$ متریک لورنتسی فضا–زمان است که ساختار علّی و هندسی را تعیین می‌کند.
Λ ثابت کیهان‌شناسی است که می‌تواند به عنوان چگالی انرژی خلأ تفسیر شود.
$T_{\mu\nu}$ تانسور انرژی–تکانه‌ی ماده است که چگالی انرژی، شار تکانه و تنش‌های ماده را در بر می‌گیرد.
ضریب $\frac{8\pi G}{c^4}$ تضمین می‌کند که در حد میدان ضعیف و سرعت‌های کوچک، نظریه به قانون گرانش نیوتنی بازگردد.

تفسیر هندسی ـ فیزیکی معادله

سمت چپ معادله کاملاً هندسی است. این سمت فقط از متریک و مشتقات آن ساخته شده است. بنابراین بیان‌کننده‌ی ساختار خمیدگی فضا–زمان است.
سمت راست معادله کاملاً فیزیکی است. این سمت توزیع ماده و انرژی را مشخص می‌کند.
در نتیجه، معادله میدان اینشتین بیان ریاضی جمله‌ی مشهور زیر است:

ماده به فضا–زمان می‌گوید چگونه خم شود، و فضا–زمان به ماده می‌گوید چگونه حرکت کند.

حرکت ماده از طریق معادله ژئودزیک تعیین می‌شود:

$$\frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma^\mu_{\alpha\beta}\frac{dx^\alpha}{d\tau}\frac{dx^\beta}{d\tau} = 0 \tag{۲.۴}$$

که در آن ضرایب کریستوفل $\Gamma^\mu_{\alpha\beta}$ از متریک استخراج می‌شوند. بنابراین حرکت ذرات نتیجه‌ی مستقیم هندسه است، نه نیرویی در معنای کلاسیک.

ساختار دستگاه معادلات

معادله میدان اینشتین یک دستگاه ۱۰ معادله‌ی دیفرانسیل جزئی غیرخطی مرتبه دوم برای مؤلفه‌های متریک $g_{\mu\nu}$ است.
غیرخطی بودن معادلات ناشی از این است که:

- تانسور ریچی شامل مشتقات دوم متریک است،
- ضرایب کریستوفل خود شامل مشتقات اول متریک‌اند،
- و در ساختار کامل، متریک در ضرب با مشتقات خودش ظاهر می‌شود.

این غیرخطی بودن باعث می‌شود که:

- اصل برهم‌نهی برقرار نباشد،
- میدان گرانشی خودش منبع گرانش باشد،
- حل دقیق معادلات بسیار دشوار باشد.

جایگاه معادلات اینشتین در فیزیک نظری

معادلات میدان اینشتین پایه‌ی نظریه‌های زیر هستند:

- کیهان‌شناسی نسبیتی
- سیاهچاله‌ها
- امواج گرانشی
- ساختار مقیاس بزرگ جهان

حل‌های خاص این معادلات شامل:

- متریک Schwarzschild
- متریک Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker
- متریک Kerr

می‌باشند که هر کدام مدل‌های فیزیکی مهمی را توصیف می‌کنند.

نتیجه‌گیری نهایی پروژه

در این پروژه مسیر زیر طی شد:

- در فصل اول، ساختار کامل هندسه‌ی ریمانی شامل متریک، اتصال لوی–چیویتا، تانسور ریمن، ریچی و اسکالر خمیدگی بررسی شد.
- در فصل دوم، ساختار هندسی فضا–زمان مینکوفسکی و نسبیت خاص تحلیل گردید.
- در فصل سوم، گذار از هندسه تخت به خمینه لورنتسی و اصل هم‌ارزی و معادله ژئودزیک مطرح شد.
- در فصل چهارم، با استفاده از تانسور ریچی و هویت بیانکی، ساختار دقیق معادلات میدان اینشتین استخراج شد.

معادلات اینشتین نقطه تلاقی هندسه دیفرانسیل و فیزیک نظری هستند. این نظریه نشان داد که گرانش یک نیرو نیست، بلکه تجلی هندسه‌ی پویا و وابسته به ماده‌ی فضا–زمان است.

مرجع

کتاب‌نامه

[۱] Introduction to General Relativity

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

خمینه Manifold

خمینه ریمانی Riemannian Manifold

خمینه لورنتسی Lorentzian Manifold

فضا-زمان Spacetime

متریک Metric

تانسور متریک Metric Tensor

امضای متریک Metric Signature

اتصال Connection

اتصال لوی-چیویتا Levi-Civita Connection

مشتق هموردا Covariant Derivative

انتقال موازی Parallel Transport

ضرایب کریستوفل Christoffel Symbols

ژئودزیک Geodesic

پارامتر آفین Affine Parameter

بردار مماس Tangent Vector

فضای مماس Tangent Space

تانسور ریمن Riemann Curvature Tensor

تانسور ریچی Ricci Tensor

اسکالر ریچی Ricci Scalar

تانسور اینشتین Einstein Tensor

انقباض Contraction

نسبیت خاص Special Relativity

نسبیت عام General Relativity

فضا–زمان مینکوفسکی Minkowski Spacetime

تبدیل لورنتس Lorentz Transformation

اصل هم‌ارزی Equivalence Principle

معادلات میدان اینشتین Einstein Field Equations

تانسور انرژی–تکانه Energy-Momentum Tensor

چگالی انرژی Energy Density

تنش Stress

ثابت کیهان‌شناسی Cosmological Constant

حد نیوتنی Newtonian Limit

معادله ژئودزیک Geodesic Equation

منابع

Introduction to General Relativity Black Holes and Cosmology
Yvonne Choquet-Bruhat