دانشگاه صنعتی اصفهان

دانشکده علوم ریاضی

پروژه کارشناسی ریاضیات و کاربردها

# مطالعه‌ای بر روی گروه‌های CLT و NCLT

استاد راهنما

**دکتر بیژن طائری**

پژوهشگر:

**احسان ذبیحی**

اردیبهشت ۱۴۰۳

# فهرست مطالب

# چکیده

گروه متناهی $G$ یک گروه CLT نامیده می‌شود هرگاه در عکس قضیه‌ی لاگرانژ صدق کند. به عبارت دیگر اگر $G$ یک گروه CLT باشد، آنگاه برای هر عدد صحیح مثبت $d$ به‌طوری که $d \mid |G|$، $G$ دارای یک زیرگروه از مرتبه‌ی $d$ است. این کلاس از گروه‌ها در قرن بیستم به‌طور جدی مورد مطالعه قرار گرفتند و رابطه‌ی آنها با کلاس گروه‌های حل‌پذیر و ابرحل‌پذیر بررسی شدند. در این نوشتار سعی بر این داریم که گروه‌های CLT و گروه‌های غیر CLT (NCLT) را بررسی کنیم.

**کلمات کلیدی:** قضیه لاگرانژ ، عکس قضیه‌ی لاگرانژ ، گروه‌های حل‌پذیر ، گروه‌های ابرحل‌پذیر ، گروه‌های پوچتوان.

# پیش‌گفتار

اسرار ازل را نه تو دانی و نه من    وین حل معما نه تو خوانی و نه من
هست از پس پرده گفتگوی من و تو    چون پرده برافتد نه تو مانی و نه من

در نظریه‌ی گروه‌ها قضیه‌ی لاگرانژ به طور معمول به این صورت بیان می‌شود؛ " مرتبه‌ی هر زیرگروه یک گروه متناهی مانند $G$، مرتبه‌ی $G$ را عاد می‌کند." اما در خلال سالهای ۱۷۷۱-۱۷۷۰ که این قضیه صورت بندی شد، هنوز نظریه‌ی گروه‌ها به وجود نیامده بود و این قضیه به صورت کنونی بیان نمی‌شد. اولین اثبات از این قضیه مبتنی بر ایده‌ی "آرایه مستطیلی [۱]" بود که این روش تفاوت چندانی با روش شمارش همدسته‌ها ندارد. اولین اثبات این قضیه با استفاده از همدسته‌ها مربوط به سال ۱۹۰۴ است [۱۶].

یکی از اولین سوالاتی که در مورد قضیه‌ی لاگرانژ مطرح شد، این بود که آیا عکس این قضیه صادق است یا خیر؟ یکی از اولین مثال‌های نقضی که درمورد عکس این قضیه ارائه شد، گروه $A_۴$ بود. گروه $A_۴$ از مرتبه‌ی ۱۲ است، اما زیرگروهی از مرتبه‌ی ۶ ندارد. در ادامه این سوال مطرح شد که چه کلاسی از گروه‌ها در عکس قضیه‌ی لاگرانژ صدق می‌کنند؟ در بررسی های ابتدایی محققین دریافتند که کلاس گروه‌های دوری و آبلی در عکس قضیه‌ی لاگرانژ صدق می‌کنند [۴].

محققین همزمان با تلاش برای یافتن کلاس‌هایی که در عکس قضیه‌ی لاگرانژ صدق می‌کنند، مطالعه‌ی خواص این نوع از گروه‌ها را شروع کردند. در سال ۱۹۶۶ هولمز [۲] نشان داد که گروه متناهی $G$ پوچتوان است اگر و تنها اگر برای هر عدد صحیح مثبت $d$ به‌طوری که $d \mid |G|$، $G$ شامل یک زیرگروه نرمال از مرتبه‌ی $d$ باشد [۹]. در سال ۱۹۶۸ دسکینز [۳] نشان داد که گروه متناهی $G$ ابرحل‌پذیر است اگر و فقط اگر برای هر عدد صحیح مثبت $d$ به‌طوری که $d \mid |G|$، $G$ شامل یک زیرگروه از مرتبه‌ی $d$ باشد [۶]. در سال ۱۹۶۸ بری [۴] ثابت کرد که اگر $G$ یک گروه باشد که در عکس قضیه‌ی لاگرانژ صدق کند، آنگاه $G$ حل‌پذیر است [۵]. در سال ۱۹۷۸ مکارتی [۵] دو سوال زیر را مطرح کرد [۱۲]

[۱] Array rectangular    [۲] Holmes V. C.    [۳] Deskins E. W.    [۴] Bray G. H.    [۵] McCarthy J. D.

**سوال ۱.** چه اعداد صحیح مثبتی مانند $n$ وجود دارند، به‌طوری که هر گروه از مرتبه‌ی $n$ در عکس قضیه‌ی لاگرانژ صدق کند؟

**سوال ۲.** فرض کنید $d$ و $n$ دوعدد صحیح باشند به‌طوری که $d \mid n$. شرط‌های لازم و کافی بر روی زوج $\{d, n\}$ به‌طوری که هر گروه از مرتبه‌ی $n$ دارای زیرگروه از مرتبه‌ی $d$ باشد، چیست؟

پاسخ کامل سوال (۱) توسط استرویک[۱] در سال ۱۹۷۸ ارائه شد [۱۹]. قضایای سیلو حالت خاصی از سوال (۲) است. بعضی از حالات خاص سوال (۲) در سال ۱۹۷۰ توسط مکارتی [۱۱] و در سال ۱۹۸۱ توسط استرویک [۲۰] پاسخ داده شد.

فصل اول به بررسی مقدمات مورد نیاز در نظریه گروه ها اختصاص داده شده است. در بخش آغازین مطالعه خود را با بررسی عمل گروه روی یک مجموعه شروع می‌کنیم. در بخش دوم قضایای سیلو را بیان می‌کنیم و در بخش سوم سری زیر گروه‌ها و به خصوص سری‌های حل‌پذیری و ابرحل‌پذیری را بررسی می‌کنیم. در نهایت ضرب نیم مستقیم دو گروه را بیان می‌کنیم.

در فصل دوم گروه‌های CLT را بررسی می‌کنیم. در بخش آغازین این فصل خاصیت‌های اولیه‌ی گروه‌های CLT را بررسی می‌کنیم و سپس نشان می‌دهیم هر گروه پوچتوان یک گروه CLT است. به عنوان مهمترین نتیجه در این بخش نشان می‌دهیم اگر مرتبه‌ی گروه $G$ خالی از مربع باشد، آنگاه $G$ یک گروه CLT است. در بخش دوم نشان می‌دهیم هر گروه CLT حل‌پذیر است و سپس نشان می‌دهیم هر گروه ابرحل‌پذیر یک گروه CLT است. در بخش سوم ابتدا زیرگروه فراتینی و زیرگروه فیتینگ را بررسی کرده و سپس محکی برای تعیین پوچتوانی یک گروه ارائه می‌دهیم. در بخش چهارم ویژگی‌های گروه‌های ابرحل‌پذیر و رابطه‌ی آنها با CLT بودن را بررسی کرده و درنهایت شرطی را بیان می‌کنیم که تحت آن یک گروه از مرتبه‌ی $pq^r$ برای اعداد اول $p$ و $q$ یک گروه CLT باشد. در آخرین بخش از این فصل دو نوع گروه CCLT و ACLT را به عنوان دو زیرکلاس مهم از کلاس گروه‌های CLT، را بررسی کرده و آنها را به‌طور کامل طبقه‌بندی می‌کنیم.

در فصل سوم گروه‌های NCLT را بررسی می‌کنیم. گروه‌های NCLT دامنه‌ی محدودتری نسبت به گروه‌های CLT دارند. در این بخش ابتدا نشان می‌دهیم چه موقع یک گروه از مرتبه‌ی $p^۲q^۲$ و یک گروه از مرتبه $pq^۳$ یک گروه NCLT است. در بخش دوم شرایط NCLT بودن گروه $G$ با $|G'| < ۱۶$ را بررسی می‌کنیم.

در پایان لازم است که از زحمات استاد گرانقدر دکتر بیژن طائری سپاس گزارم که مشفقانه و بردبارانه یاریگر اینجانب بوده‌اند و رهنمون‌های برافروزندهٔ خود را هیچ گاه دریغ نداشتند.

[۱] Struik R. R.

# فصل ۱

# مقدمات

در این نوشتار برخی مفاهیم مقدماتی از نظریه‌ی گروه‌ها دانسته فرض شده است. فصل اول به بررسی مقدمات مورد نیاز در نظریه گروه ها اختصاص داده شده است. در بخش آغازین مطالعه خود را با بررسی عمل گروه روی یک مجموعه شروع می‌کنیم. در بخش دوم قضایای سیلو را بیان می‌کنیم و در بخش سوم سری زیرگروه‌ها و به خصوص سری‌های حل‌پذیری و ابرحل‌پذیری را بررسی می‌کنیم. در نهایت ضرب نیم مستقیم دو گروه را بیان می‌کنیم. مطالب این فصل از منابع [۱۵] و [۱۷] انتخاب شده‌اند.

## ۱-۱ عمل گروه روی مجموعه

**تعریف ۱-۱-۱.** فرض کنید $X$ یک مجموعه و $G$ یک گروه دلخواه باشد، گوییم $G$ روی $X$ عمل می‌کند هرگاه نگاشت $\cdot : G \times X \longrightarrow G$ با دستور $(g, x) \mapsto g \cdot x$ همراه با خواص زیر وجود داشته باشد

**الف.** برای هر $x \in G$ داشته باشیم، $1 \cdot x = x$.

**ب.** برای هر $g, h \in G$ و $x \in X$ داشته باشیم، $g \cdot (h \cdot x) = (gh) \cdot x$.

فرض کنید گروه $G$ روی مجموعه $X$ عمل کند. دراین‌صورت نگاشت $\phi : G \longrightarrow S_X$، که درآن $S_X$ گروه جایگشت‌ها روی $X$ است، را با ضابطه زیر تعریف می‌کنیم

$$\phi(g) = \phi_g$$

به‌طوری که در آن برای هر $x \in X$، $\phi_g(x)$ به صورت زیر تعریف شود

$$\phi_g(x) = g \cdot x.$$

با اندکی بررسی می‌توان دریافت که نگاشت $\phi$ یک همریختی گروهی است. بنابراین متناظر با هر عمل $G$ روی $X$ همریختی $\phi : G \longrightarrow S_X$ وجود دارد. حال فرض کنید نگاشت $\psi : G \longrightarrow S_X$ با ضابطه‌ی $\psi(g) = \psi_g$ یک همریختی باشد. دراین‌صورت نگاشت $\alpha : G \times X \longrightarrow X$ را با ضابطه $\alpha(g, x) = \psi_g(x)$ تعریف می‌کنیم. به وضوح دیده می‌شود نگاشت $\alpha$ شرایط تعریف ۱-۱-۱ را برآورده می‌کند. پس می‌توان نتیجه گرفت که متناظر با هر همریختی گروهی $\psi : G \longrightarrow S_X$ عملی از $G$ بر روی $X$ وجود دارد.

در مورد عمل گروه $G$ روی مجموعه $X$ دو تعریف اساسی وجود دارد.

**تعریف ۲-۱-۱.** فرض کنید گروه $G$ روی مجموعه $X$ عمل کند و $x \in X$ عضوی دلخواه باشد. دراین‌صورت مدار $x$ تحت $G$ به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\operatorname{orb}_G(x) = \{y \cdot x \mid y \in X\}.$$

**تعریف ۳-۱-۱.** فرض کنید گروه $G$ روی مجموعه $X$ عمل کند و $x \in X$ عضوی دلخواه باشد. دراین‌صورت ثابت ساز $x$ تحت $G$ به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\operatorname{stab}_G(x) = \{g \in G \mid \forall x \in X, g \cdot x = x\}.$$

به راحتی می‌توان نشان داد که $\operatorname{stab}_G(x)$ یک زیرگروه از $G$ است.

**قضیه ۴-۱-۱** (ثابت ساز-مدار)**.** اگر گروه $G$ روی مجموعه $X$ عمل کند و $x \in X$ عضوی دلخواه باشد، آنگاه

$$|\operatorname{orb}_G(x)| = [G : \operatorname{stab}_G(x)].$$

**برهان.** به قضیه‌ی ۱۹-۳ از منبع [۱۷] مراجعه کنید. $\square$

فرض کنید گروه $G$ روی مجموعه $X$ عمل کند. دراین‌صورت رابطه $\sim$ روی $X$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$X \sim Y \iff \exists\, g \in G \quad g \cdot x = y.$$

به سادگی می‌توان نشان داد $\sim$ یک رابطه هم ارزی روی $X$ است. کلاس هم ارزی $x \in X$ تحت $G$ به صورت زیر است

$$\begin{aligned}[x] &= \{y \in X \mid \exists\, g \in G,\ g \cdot y = x\} \\ &= \{g \cdot y \mid g \in G\} \\ &= \operatorname{orb}_G(x).\end{aligned}$$

بنابراین می‌توان نتیجه اساسی زیر را بدست آورد.

**نتیجه ۵-۱-۱.** اگر گروه متناهی $G$ روی مجموعه متناهی $X$ عمل کند و $x \in X$ عضوی دلخواه باشد، آنگاه

$$|X| = \sum_{x \in X} [x] = \sum_{x \in X} [G : \mathrm{stab}_G(x)].$$

**تعریف ۶-۱-۱.** فرض کنید گروه $G$ روی مجموعه $X$ عمل کند و $x \in X$ عضوی دلخواه باشد. دراین‌صورت مجموعه $X_f$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$X_f = \{x \in X \mid \mathrm{orb}_G(x) = \{x\}\}.$$

با کمک گرفتن از مفاهیم تعریف شده و قضایای بیان شده، قضیه پر کاربرد زیر را می‌توان اثبات کرد.

**قضیه ۷-۱-۱.** اگر گروه $G$ روی مجموعه متناهی $X$ عمل کند و $x \in X$ عضوی دلخواه باشد و همچنین مرتبه گروه $G$ متناهی و برابر $n$ باشد، آنگاه

$$|X| = |X_f| + \sum_{i=۱}^{s} [G : \mathrm{stab}_G(x_i)].$$

که در آن $x_۱$ ، $x_۲$ ، ... ، $x_s$ عناصری از $X$ هستند به‌طوری که برای هر $i = ۱, ۲, \ldots, s$، $|\mathrm{orb}_G(x_i)| > ۱$.

**برهان.** با استفاده از قضایای قبل اثبات به سهولت انجام می‌شود. $\square$

به عنوان مثال فرض کنید $G$ یک گروه متناهی باشد. دراین‌صورت گروه $G$ بر روی خودش به صورت مزدوجی عمل می‌کند. یعنی نگاشت $\cdot : G \times G \longrightarrow G$ با ضابطه $(g, x) \mapsto gxg^{-۱}$ در شرایط تعریف ۱-۱-۱ صدق می‌کند. حال مدارها و ثابت سازهای این عمل را بررسی می‌کنیم.
فرض کنید $x$ عضوی دلخواه از $G$ باشد. دراین‌صورت

$$\begin{aligned}\mathrm{stab}_G(x) &= \{g \in G \mid g \cdot x = x\}\\ &= \{g \in G \mid gxg^{-۱} = x\}\\ &= \{g \in G \mid gx = xg\}\\ &= C_G(x)\end{aligned}$$

که در آن $C_G(x)$ مرکز ساز $x$ تحت $G$ است. همچنین

$$\mathrm{orb}_G(x) = \{gxg^{-۱} \mid g \in G\}$$

که این همان کلاس مزدوجی $x$ تحت $G$ است. با استفاده از قضیه ۴-۱-۱ می‌توان نتیجه گرفت تعداد عناصر کلاس مزدوجی $x$ برابر $[G : C_G(x)]$ است.

در ادامه مجموعه $G_f$ را بررسی می‌کنیم. فرض کنید $x \in G_f$. دراین‌صورت

$$\begin{aligned} \mathrm{orb}_G(x) = \{x\} &\iff \forall\, g \in G \quad g \cdot x = x \\ &\iff \forall\, g \in G \quad gxg^{-1} = x \\ &\iff x \in Z(G) \end{aligned}$$

که درآن مجموعه $Z(G)$ مرکز $G$ است.

در نهایت با استفاده از قضیه ثابت ساز-مدار می‌توان نتیجه گرفت

$$|G| = |Z(G)| + \sum_{i=1}^{k} [G : C_G(x_i)]$$

که درآن $\mathrm{orb}_G(x_1)$ ، ... ، $\mathrm{orb}_G(x_k)$ همه رده‌های مزدوجی متمایز در $G$ با بیش از یک عضو هستند. این تساوی، معادله رده ای نامیده می‌شود و در بخش بعد از آن استفاده خواهیم کرد.

## ۱-۲ قضایای سیلو

در این بخش $p$-گروه‌ها و قضایای سیلو را بررسی خواهیم کرد.

**تعریف ۱-۲-۱.** فرض کنید $G$ یک گروه و $p$ عددی اول باشد، دراین‌صورت $G$ را یک $p$-گروه نامیم هرگاه مرتبه هر عنصر آن توانی از $p$ باشد.

**قضیه ۲-۲-۱** (قضیه کوشی). فرض کنید $G$ گروهی متناهی و $p$ عددی اول باشد به‌طوری که $p \mid |G|$ در اینصورت $G$ دارای زیرگروهی از مرتبه $p$ است.

**برهان.** به قضیه‌ی ۲-۴ منبع [۱۷] مراجعه کنید. □

**لم ۳-۲-۱.** مرتبه‌ی هر $p$-گروه متناهی توانی از عدد اول $p$ است.

**برهان.** فرض کنید $G$ یک $p$-گروه متناهی باشد. دراین‌صورت اگر عدد اول $q \neq p$ وجود داشته باشد به‌طوری که $q \mid |G|$، آنگاه بنابر قضیه‌ی کشی $G$ دارای عنصری از مرتبه‌ی $q$ است، که با فرض $p$-گروه بودن $G$ در تناقض است. □

**قضیه ۴-۲-۱.** اگر $G$ یک $p$-گروه متناهی و نابدیهی باشد، آنگاه مرکز $G$ نابدیهی است.

**برهان.** فرض کنید $x$ عضوی دلخواه از $G$ باشد. دراین‌صورت بنابر قضیه لاگرانژ داریم

$$|G| = |C_G(x)|[G : C_G(x)].$$

بنابراین $p$ شمارنده ای از $[G : C_G(x)]$ است. درنتیجه

$$p \mid \sum_i [G : C_G(x_i)].$$

بنابراین

$$p \mid |G| - \sum_i [G : C_G(x_i)].$$

بنابر معادله رده ای می‌توان نتیجه گرفت $p \mid |Z(G)|$. بنابراین $Z(G)$ نابدیهی است. $\square$

از قضیه بیان شده می‌توان دو نتیجه جالب زیر را استخراج کرد.

**نتیجه ۵-۲-۱.** هر $p$-گروه ساده متناهی، دوری است.

**برهان.** هر $p$-گروه ساده متناهی، آبلی است و چون هر گروه آبلی ساده متناهی، دوری و از مرتبه عدد اول است، پس هر $p$-گروه ساده متناهی، دوری است. $\square$

**نتیجه ۶-۲-۱.** هر گروه از مرتبه‌ی $p^۲$ برای عدد اول $p$، آبلی است.

**برهان.** اگر $G$ گروهی از مرتبه‌ی $p^۲$ باشد که درآن $p$ یک عدد اول است، آنگاه بنابر قضیه‌ی قبل $|Z(G)| = p$ یا $|Z(G)| = p^۲$. فرض کنید $|Z(G)| = p$. دراین‌صورت $|G/Z(G)| = p$ و بنابراین $G/Z(G)$ دوری است. فرض کنید $G/Z(G) = \langle xZ(G) \rangle$. دراین‌صورت برای هر $g_۱, g_۲ \in G$ اعداد صحیح مثبت $m$ و $n$ وجود دارند به‌طوری که

$$g_۱Z(G) = (xZ(G))^n = x^nZ(G)$$
$$g_۲Z(G) = (xZ(G))^m = x^mZ(G).$$

درنتیجه $h_۱ = g_۱x^{-n}$ و $h_۲ = g_۲x^{-m}$ عناصری از $Z(G)$ هستند. اکنون

$$\begin{aligned} g_۱g_۲ &= h_۱x^nx^mh_۲ \\ &= h_۲x^mx^nh_۱ \\ &= g_۲g_۱. \end{aligned}$$

پس $G$ آبلی است. درنتیجه $|G| = |Z(G)| = p$، که این خلاف فرض اولیه است. بنابراین $|Z(G)| = p^۲$ در نتیجه $G = Z(G)$ که یعنی $G$ آبلی است. $\square$

**قضیه ۷-۲-۱.** فرض کنید $G$ یک $p$-گروه متناهی باشد.

**الف.** اگر $H$ زیرگروه سره از $G$ باشد، آنگاه $H$ زیرگروه سره از $N_G(H)$ است، که درآن $N_G(H)$ نرمال ساز $H$ در $G$ است.

**ب.** هر زیرگروه ماکسیمال گروه $G$، نرمال و دارای شاخص $p$ است.

**برهان.** به قضیه‌ی ۶-۴ از منبع [۱۷] مراجعه کنید. □

**قضیه ۸-۲-۱** (قضیه اول سیلو)**.** فرض کنید $G$ گروهی از مرتبه $p^n m$ باشد و $\gcd(p,m) = ۱$. دراین‌صورت $G$ دارای زیرگروهی از مرتبه $p^n$ است. این زیرگروه را $p$-زیرگروه سیلوی $G$ نامیم.

**برهان.** به قضیه‌ی ۱۷-۴ منبع [۱۷] مراجعه کنید. □

از این به بعد مجموعه تمام $p$-زیرگروه‌های سیلو گروه $G$ را با نماد $\mathrm{Syl}_p(G)$ نشان خواهیم داد.

**قضیه ۹-۲-۱** (قضیه دوم سیلو)**.** هر دو $p$-زیرگروه سیلو با هم مزدوج اند.

**برهان.** به قضیه‌ی ۱۲-۴ از منبع [۱۷] مراجعه کنید. □

از قضیه دوم سیلو می‌توان نتیجه گرفت، اگر $P$ یک $p$-زیرگروه سیلو باشد، آنگاه تعداد اعضای مجموعه $\mathrm{Syl}_p(G)$ که آنرا با $n_p$ نمایش می‌دهیم، برابر کلاس‌های مزدوجی گروه $P$ است. درنتیجه

$$|\mathrm{Syl}_p(G)| = [G : N_G(P)].$$

فرض کنید $P$ یک $p$-زیرگروه سیلوی گروه متناهی $G$ باشد. دراین‌صورت

$$P \leq N_G(P) \leq G.$$

بنابراین

$$\begin{aligned}[G : P] &= [G : N_G(P)][N_G(P) : P] \\ &= n_p[N_G(P) : P].\end{aligned}$$

پس اگر $|G| = p^n m$ به‌طوری که $\gcd(p,m) = ۱$ آنگاه، $n_p \mid m$.

**قضیه ۱۰-۲-۱** (قضیه سوم سیلو)**.** فرض کنید $G$ یک گروه متناهی و $P$ یک $p$-زیرگروه سیلوی آن باشد. دراین‌صورت

$$n_p \equiv ۱ \pmod p.$$

**برهان.** به قضیه‌ی ۱۲-۴ منبع [۱۷] مراجعه کنید. $\square$

**لم ۱۱-۲-۱.** گروه متناهی $G$ دارای $p$-زیرگروه سیلوی یکتای $P$ است اگر و تنها اگر $P$ زیرگروه نرمال $G$ باشد.

**برهان.** ابتدا فرض کنید $n_p = ۱$. دراین‌صورت بنا بر قضیه دوم سیلو برای هر $g \in G$ داریم $gPg^{-۱} = P$. پس $N_G(P) = G$ و بنابراین $P$ زیرگروه نرمال $G$ است. به عکس فرض کنید $P$ در $G$ نرمال باشد. دراین‌صورت بنایر قضیه دوم سیلو $n_p = |\mathrm{Syl}_p(G)| = ۱$. $\square$

این بخش را با قضیه مهم زیر به پایان می‌رسانیم.

**قضیه ۱۲-۲-۱** (استدلال فراتینی). فرض کنید $K$ زیرگروه نرمال گروه متناهی $G$ باشد و $P$ یک $p$-زیرگروه سیلوی $K$ باشد . (برای عدد اول دلخواه $p$) دراین‌صورت

$$G = KN_G(P)$$

**برهان.** اگر $g \in G$، آنگاه $gPg^{-۱} \leq gKg^{-۱} = K$. بنابراین $gPg^{-۱}$ یک $p$-زیرگروه سیلوی $K$ است. بنابر قضیه دوم سیلو $k \in K$ وجود دارد به‌طوری که $kPk^{-۱} = gPg^{-۱}$، بنابراین $P = (k^{-۱}g)P(k^{-۱}g)$ که یعنی $k^{-۱}g \in N_G(p)$ و در نهایت $g = k(k^{-۱}g)$. $\square$

## ۱-۳ سری زیرگروه‌ها

**تعریف ۱-۳-۱.** یک سری نرمال از گروه $G$ عبارت است از دنباله ای از زیرگروه‌های

$$G = G_۰ \geq G_۱ \geq \cdots \geq G_n = \{۱\}$$

که درآن برای هر $i = ۰, ۱, \ldots, n - ۱$، $G_{i+۱}$ زیرگروه نرمالی از $G_i$ است. عامل‌های این سری ، عبارتند از گروه‌های خارج قسمتی $G_i/G_{i+۱}$. به تعداد عوامل نابدیهی، طول سری گفته می‌شود.

**تعریف ۲-۳-۱.** گروه متناهی $G$ حل‌پذیر است، هرگاه دارای سری نرمالی باشد به‌طوری که عامل‌های آن آبلی باشند.

یکی از اهمیت‌های گروه‌های حل‌پذیر این است که رابطه تنگاتنگی با قضایای گالوا دارند؛ در واقع ثابت شده است که یک چند جمله ای توسط رادیکال قابل حل است اگر وتنها اگر گروه گالوای متناظر آن حل‌پذیر باشد.

**تعریف ۳-۳-۱.** سری نرمال

$$G = G_0 \geq G_1 \geq \cdots \geq G_n = \{1\}$$

تظریفی از سری نرمال

$$G = H_0 \geq H_1 \geq \cdots \geq H_m = \{1\}$$

است هرگاه

$$\{H_0, H_1, \ldots, H_m\} \subseteq \{G_0, G_1, \ldots, G_n\}.$$

**تعریف ۴-۳-۱.** سری نرمال

$$G = G_0 \geq G_1 \geq \cdots \geq G_n = \{1\}$$

سری ترکیبی نامیده می‌شود، هرگاه برای هر $i = 0, 1, \ldots, n-1$ ، $G_{i+1}$ یک زیرگروه نرمال ماکسیمال $G_i$ باشد یا $G_{i+1} = G_i$.

نکته مهمی که در خصوص سری‌های ترکیبی حائز اهمیت است این است که هر تظریف از این سری دارای طول برابر با سری اولیه است.

**مثال ۵-۳-۱.** فرض کنید $G = \langle x \rangle$ گروهی دوری از مرتبه ۳۰ باشد. دو سری ترکیبی زیر از گروه $G$ را در نظر بگیرید.

$$G \geq \langle x^5 \rangle \geq \langle x^{10} \rangle \geq \{1\},$$
$$G \geq \langle x^2 \rangle \geq \langle x^6 \rangle \geq \{1\}.$$

عامل‌های سری اول برابر $G/\langle x^5 \rangle \cong \mathbb{Z}_5$ ، $\langle x^5 \rangle/\langle x^{10} \rangle \cong \mathbb{Z}_2$ و $\langle x^{10} \rangle/\{1\} \cong \mathbb{Z}_3$ و عامل‌های سری دوم برابر $G/\langle x^2 \rangle \cong \mathbb{Z}_2$ ، $\langle x^2 \rangle/\langle x^6 \rangle \cong \mathbb{Z}_3$ و $\langle x^6 \rangle/\{1\} \cong \mathbb{Z}_5$ است.

پدیده ای که در مثال فوق مشاهده کردید را در ادامه تحت عنوان قضیه ژردن-هولدر بیان می‌کنیم، پیش از آن تعریف زیر را در نظر بگیرید.

**تعریف ۶-۳-۱.** دو سری نرمال از گروه $G$ هم ارز نامیده می‌شوند، هرگاه تناظر یک به یکی بین عامل‌های آنها وجود داشته باشد و دو عامل متناظر با هم یکریخت باشند.

**قضیه ۷-۳-۱ (قضیه تظریف شرایر).** هر دو سری نرمال از گروه دلخواه $G$ دارای تظریف هم ارز هستند.

**برهان.** به قضیه‌ی ۱۱-۵ منبع [۱۷] مراجعه کنید. $\square$

**نتیجه ۸-۳-۱** (ژردن-هولدر). هر دو سری ترکیبی از گروه $G$ با هم، هم‌ارز هستند.

در ادامه به طور ویژه گروه‌های حل‌پذیر را بررسی می‌کنیم. پیش از آن زیرگروه جابه‌جاگر از گروه $G$ و رابطه آن با گروه حل‌پذیر را مطالعه می‌کنیم.

**تعریف ۹-۳-۱.** فرض کنید $G$ یک گروه و $x$ و $y$ دو عنصر دلخواه از آن باشد. دراین‌صورت جابه‌جاگر $x$ و $y$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$[x,y]=xyx^{-1}y^{-1}.$$

**تعریف ۱۰-۳-۱.** زیرگروه جابه‌جاگر از گروه $G$ عبارت است از گروه تولید شده توسط جابه‌جاگرهای $G$ و آنرا با $G'$ نشان می‌دهیم. به طور معادل

$$G'=\langle\, [x,y] \mid x,y\in G\,\rangle.$$

می‌توان تعریف فوق را به طور استقرایی تعمیم داد.

**تعریف ۱۱-۳-۱.** اگر $G$ یک گروه دلخواه باشد به طور استقرایی زیرگروه جابه‌جاگر از مراتب بالاتر را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$G^{(0)}=G, \qquad G^{(i+1)}=G^{(i)\prime}.$$

سری

$$G=G^{(0)}\geq G^{(1)}\geq\cdots$$

سری مشتق گروه $G$ نامیده می‌شود.

**تعریف ۱۲-۳-۱.** فرض کنید $H$ و $K$ دو زیرگروه از گروه $G$ باشد. زیرگروه $[H,K]$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$[H,K]=\langle\, [x,y] \mid x\in H, y\in K\,\rangle.$$

با استفاده از تعریف قبل می‌توان نوشت

$$G^{(1)}=[G,G], \qquad G^{(i+1)}=[G^{(i)},G^{(i)}].$$

**قضیه ۱۳-۳-۱.** اگر $H,K\leq G$ و $f:G\longrightarrow L$ همریختی باشد، آنگاه $f([H,K])=[f(H),f(K)]$

**برهان.** برای هر $h \in H$ و هر $k \in K$ داریم

$$\begin{aligned} f([h,k]) &= f(hkh^{-1}k^{-1}) \\ &= f(h)f(k)f(h^{-1})f(k^{-1}) \\ &= f(h)f(k)f(h)^{-1}f(k)^{-1} \\ &= [f(h), f(k)]. \end{aligned}$$

پس بنابر تعریف قبل می‌توان نوشت $f([H,K]) = [f(H), f(K)]$. $\square$

در ادامه زیرگروه کاملاً پایا و زیرگروه مشخصه را تعریف می‌کنیم و سپس نشان می‌دهیم زیرگروه جابه‌جاگر یک زیرگروه کاملاً پایا است.

**تعریف ۱-۳-۱۴.** فرض کنید $G$ یک گروه باشد. دراین‌صورت زیرگروه $H$ از $G$ را کاملاً پایا نامیم هرگاه برای هر درون ریختی $\phi$ از $G$

$$\phi(H) \subseteq H.$$

**تعریف ۱-۳-۱۵.** فرض کنید $G$ یک گروه باشد. دراین‌صورت زیرگروه $H$ از $G$ را مشخصه نامیم هرگاه برای هر خود ریختی $\phi$ از $G$

$$\phi(H) \subseteq H.$$

به طور مشابه دو تعریف فوق می‌توان یک تعریف دیگر برای زیرگروه نرمال ارائه داد.

**تعریف ۱-۳-۱۶.** فرض کنید $G$ یک گروه باشد. زیرگروه $H$ از $G$ را نرمال نامیم هرگاه برای هر خودریختی داخلی $\phi$ از $G$

$$\phi(H) \subseteq H.$$

با استفاده از تعاریف فوق می‌توان نتیجه گرفت هر زیرگروه کاملاً پایا یک زیرگروه مشخصه است و هر زیرگروه مشخصه یک زیرگروه نرمال است. اما عکس آن ممکن است برقرار نباشد.

**قضیه ۱-۳-۱۷.** زیرگروه جابه‌جاگر گروه دلخواه $G$ ، کاملاً پایا است .

**برهان.** فرض کنید $f : G \longrightarrow G$ یک همریختی باشد. دراین‌صورت بنابر قضیه ۱-۳-۱۳ و استفاده از تعریف ۱-۳-۱۲ داریم

$$f(G') = f([G,G]) = [f(G), f(G)] \subseteq [G,G] = G'.$$

بنابراین اثبات کامل است. $\square$

**نتیجه ۱۸-۳-۱.** $G'$ زیرگروه نرمالی از $G$ است.

**لم ۱۹-۳-۱.** اگر $N$ زیرگروه نرمال $G$ باشد، و گروه $G/N$ آبلی باشد آنگاه $G' \leq N$

**برهان.** فرض کنید $x, y \in G$. دراین‌صورت از آنجا که $G/N$ آبلی است داریم

$$\begin{aligned} NxNy = NyNx &\iff Nxy = Nyx \\ &\iff xyx^{-1}y^{-1} \in N. \end{aligned}$$

بنابراین $G' \leq N$. □

قضیه مهم زیر رابطه‌ی بین سری حل‌پذیری گروه $G$ و مشتق $i$ام $G$ را نشان می‌دهد.

**قضیه ۲۰-۳-۱.** اگر $G = G_0 \geq G_1 \geq \cdots \geq G_n = \{1\}$ سری حل‌پذیری گروه $G$ باشد، آنگاه برای هر $i$ داریم $G^{(i)} \leq G_i$.

**برهان.** اثبات با استقرا روی $n$ انجام می‌پذیرد. اگر $n = 0$، آنگاه قضیه واضح است. فرض کنید $n > 0$. دراین‌صورت بنابر لم قبل $G'_i \leq G_{i+1}$ زیرا $G_i/G_{i+1}$ آبلی است. بنابر فرض استقرا $G^{(i)} \leq G_i$. درنتیجه $G^{(i+1)} = G^{(i)'} \leq G'_i$. پس در نتیجه $G^{(i+1)} \leq G_{i+1}$. □

**نتیجه ۲۱-۳-۱.** گروه $G$ حل‌پذیر است اگر و تنها اگر عدد صحیح مثبتی مانند $n$ وجود داشته باشد به‌طوری که $G^{(n)} = \{1\}$. کوچکترین عدد با این خاصیت را طول حل‌پذیری $G$ نامیم.

**نتیجه ۲۲-۳-۱.** هر گروه آبلی، گروه حل‌پذیری با طول حل‌پذیری ۱ است.

در ادامه به بیان چهار خاصیت مهم گروه‌های حل‌پذیر در قالب چهار قضیه می‌پردازیم.

**قضیه ۲۳-۳-۱.** فرض کنید $G$ و $L$ دو گروه باشند. دراین‌صورت اگر $G$ یک گروه حل‌پذیر باشد و همچنین $f : G \longrightarrow L$ یک همریختی پوشا باشد، آنگاه $L$ حل‌پذیر است.

**برهان.** فرض کنید

$$G = G_0 \geq G_1 \geq \cdots \geq G_n = \{1\}$$

سری حل‌پذیری گروه $G$ باشد. تابع $\phi : G_i/G_{i+1} \longrightarrow f(G_i)/f(G_{i+1})$ را برای هر $0 \leq i \leq n-1$ با دستور

$$\phi(g_iG_{i+1}) = f(g_i)f(G_{i+1})$$

تعریف کنید. به راحتی می‌توان نشان داد $\phi$ یک همریختی پوشا است. بنابراین سری

$$L = f(G) = f(G_۰) \geq f(G_۱) \geq \cdots \geq f(G_n) = f(\{۱\}) = \{۱\}$$

یک سری حل‌پذیری از گروه $L$ است. در نتیجه $L$ حل‌پذیر است. $\square$

**نتیجه ۲۴-۳-۱.** اگر گروه $G$ حل‌پذیر باشد، آنگاه برای هر زیرگروه نرمال $N$ از $G$، $G/N$ حل‌پذیر است.

**برهان.** همریختی طبیعی $\pi : G \longrightarrow G/N$ را درنظر بگیرید. با استفاده از قضیه‌ی قبل می‌توان نتیجه گرفت که $G/N$ حل‌پذیر است. $\square$

**قضیه ۲۵-۳-۱.** اگر گروه $G$ حل‌پذیر باشد، آنگاه هر زیرگروه آن حل‌پذیر است.

**برهان.** از آنجا که $G$ حل‌پذیر است، عدد صحیحی مثبتی مانند $n$ وجود دارد به‌طوری که $G^{(n)} = \{۱\}$. پس اگر $H \leq G$، آنگاه $H^{(n)} \leq G^{(n)} = \{۱\}$. بنابراین $H^{(n)} = \{۱\}$. پس $H$ حل‌پذیر است. $\square$

**قضیه ۲۶-۳-۱.** اگر $N$ زیرگروه نرمال و حل‌پذیر از گروه $G$ باشد، و $G/N$ حل‌پذیر باشد، آنگاه $G$ حل‌پذیر است.

**برهان.** همریختی طبیعی $\pi : G \longrightarrow G/N$ را در نظر بگیرید. از آنجا که $K = G/N$ حل‌پذیر است عدد صحیح مثبت $n$ وجود دارد به‌طوری که $K^{(n)} = \{۱\}$. بنابراین $\pi(G^{(n)}) = \{N\}$. درنتیجه $G^{(n)} \leq N$. از آنجا که $N$ حل‌پذیر است عدد صحیح مثبتی مانند $m$ وجود دارد به‌طوری که $N^{(m)} = \{۱\}$. در نتیجه $G^{(n+m)} \leq N^{(m)} = \{۱\}$. بنابراین $G$ حل‌پذیر است. $\square$

**نتیجه ۲۷-۳-۱.** اگر $H$ و $K$ دو گروه حل‌پذیر باشد آنگاه $H \times K$ حل‌پذیر است.

**برهان.** می‌دانیم $H \times \{۱\}$ یک زیرگروه نرمال از $H \times K$ است. ازآنجا که $H \cong H \times \{۱\}$ و $H$ حل‌پذیر است، می‌توان نتیجه گرفت که $H \times \{۱\}$ حل‌پذیر است. از طرفی از اینکه

$$\frac{H \times K}{H \times \{۱\}} \cong \{۱\} \times K \cong K$$

و $K$ حل‌پذیر است، می‌توان نتیجه گرفت

$$\frac{H \times K}{H \times \{۱\}}$$

حل‌پذیر است. بنابر قضیه‌ی قبل $H \times K$ حل‌پذیر است. $\square$

**قضیه ۲۸-۳-۱.** هر $p$-گروه متناهی حل‌پذیر است.

**برهان.** فرض کنید $G$ یک گروه از مرتبه‌ی $p^n$ باشد. قضیه را با استقرا روی $n$ ثابت می‌کنیم. فرض کنید $n = ۱$. دراین‌صورت $|G| = p$ . درنتیجه $G$ یک گروه آبلی است و بنابر نتیجه **۱-۳-۲۲** ، $G$ حل‌پذیر است. فرض کنید $n > ۱$. دراین‌صورت اگر $Z(G) = G$، آنگاه $G$ آبلی و بنابراین حل‌پذیر است. اگر $Z(G) \neq G$، آنگاه $|Z(G)| = p^m$ به‌طوری که $۱ \leq m < n$. بنابراین $Z(G)$ و $G/Z(G)$ حل‌پذیر است. درنتیجه بنابر قضیه‌ی **۱-۳-۲۶**، $G$ حل‌پذیر است. $\square$

**قضیه ۱-۳-۲۹.** اگر $G$ گروهی متناهی باشد به‌طوری که تمام زیرگروه‌های سیلوی آن نرمال باشند، آنگاه $G$ را می‌توان به صورت حاصلضرب مستقیم زیرگروه‌های سیلویش نوشت.

**برهان.** فرض کنید $|G| = p_۱^{n_۱} p_۲^{n_۲} \ldots p_k^{n_k}$ تجزیه‌ی $|G|$ به عوامل اول متمایز باشد و برای هر $i = ۱, ۲, \ldots, k$، $P_i \in \mathrm{Syl}_{p_i}(G)$. بنابر فرض برای هر $i = ۱, ۲, \ldots, k$، $P_i$ نرمال است. درنتیجه $P_۱P_۲ \leq G$ و همچنین $P_۱ \cap P_۲ = \{۱\}$. بنابراین

$$|P_۱P_۲| = \frac{|P_۱||P_۲|}{|P_۱ \cap P_۲|} = |P_۱||P_۲| = p_۱^{n_۱} p_۲^{n_۲}.$$

به صورت مشابه $(P_۱P_۲)P_۳ \leq G$ و همچنین $P_۱P_۲ \cap P_۳ = \{۱\}$. بنابراین $|P_۱P_۲P_۳| = p_۱^{n_۱} p_۲^{n_۲} p_۳^{n_۳}$. با تکرار همین عمل می‌توان یافت که $(P_۱P_۲ \ldots P_{k-۱})P_k \leq G$ و علاوه برآن $P_۱P_۲ \ldots P_{n-۱} \cap P_k = \{۱\}$. درنتیجه $|P_۱P_۲P_۳ \ldots P_n| = p_۱^{n_۱} p_۲^{n_۲} p_۳^{n_۳} \ldots p_k^{n_k} = |G|$. بنابراین $G = P_۱P_۲ \ldots P_k$. از طرفی چون $P_i$ برای هر $i = ۱, ۲, \cdots, k$ یک $p_i$=زیرگروه سیلو است. برای هر $i = ۱, ۲, \cdots, k$ داریم

$$P_۱ \cdots P_{i-۱}P_{i+۱} \cdots P_k \cap P_i = \{۱\}.$$

بنابراین

$$G \cong P_۱ \times P_۲ \times \cdots \times P_k.$$

درنتیجه اثبات کامل است. $\square$

**نتیجه ۱-۳-۳۰.** اگر $G$ گروهی متناهی و آبلی باشد، آنگاه $G$ را می‌توان به صورت حاصلضرب مستقیم زیرگروه‌های سیلویش نوشت.

**قضیه ۱-۳-۳۱.** فرض کنید $G$ یک گروه متناهی باشد. دراین‌صورت گزاره‌های زیر باهم معادلند

**الف.** $G$ برابر حاصلضرب مستقیم داخلی زیرگروه‌های سیلویش است.

**ب.** هر زیرگروه ماکسیمال از $G$ در $G$ نرمال است.

**ج.** هر زیرگروه سیلوی $G$ در $G$ نرمال است.

**برهان.** به قضیه‌ی ۹-۷ از منبع [۱۵] مراجعه کنید. $\square$

تعریف زیر دسته ای از گروه‌ها را مشخص می‌کند که علاوه بر حل‌پذیری عکس قضیه لاگرانژ برای آنها صدق می‌کند؛ این خاصیت را در فصل آتی مطالعه می‌کنیم.

**تعریف ۳۲-۳-۱.** گروه $G$ را ابرحل‌پذیر نامیم، هرگاه دارای سری نرمالی باشد به‌طوری که عوامل آن دوری باشند.

بنابر تعریف ابرحل‌پذیری می‌توان نتیجه گرفت که هر گروه دوری ابرحل‌پذیر است. همچنین بنابر تعریف، هرگروه ابرحل‌پذیر همواره یک زیرگروه دوری نرمال دارد.

**لم ۳۳-۳-۱.** فرض کنید $G$ یک گروه دلخواه و ابرحل‌پذیر باشد. دراین‌صورت اگر $N$ یک زیرگروه نرمال از $G$ باشد، آنگاه $N$ و $G/N$ ابرحل‌پذیر هستند.

**برهان.** فرض کنید

$$\{1\} = G_0 \leq G_1 \leq \cdots \leq G_n = G$$

سری ابرحل‌پذیری گروه $G$ باشد. از آنجا که $G_i \trianglelefteq G$ می‌توان نتیجه گرفت که $G_i \cap H \trianglelefteq H$. بنابراین سری

$$\{1\} = H \cap G_0 \leq H \cap G_1 \leq \cdots \leq H \cap G_n = H$$

یک سری نرمال از $H$ است. از طرفی

$$\begin{aligned}\frac{H \cap G_i}{H \cap G_{i-1}} &= \frac{H \cap G_i}{(H \cap G_i) \cap G_{i-1}} \\ &\cong \frac{(H \cap G_i)G_{i-1}}{G_{i-1}} \leq \frac{G_i}{G_{i-1}}.\end{aligned}$$

می‌دانیم $G_i/G_{i-1}$ دوری است. درنتیجه سری فوق یک سری ابرحل‌پذیری برای $H$ است. حال از آنجا که $N \trianglelefteq G$. بنابراین $G_iN$ برای هر $i = 1, 2, \cdots, n$ یک زیرگروه نرمال از $G$ است. اکنون بنابر قضیه‌ی تناظر، سری نرمال زیر را داریم

$$\frac{N}{N} = \frac{G_0N}{N} \leq \frac{G_1N}{N} \leq \cdots \leq \frac{G_nN}{N} = \frac{G}{N}. \tag{1-1}$$

حال با استفاده از قضایای یکریختی داریم

$$\begin{aligned}\frac{G_iN/N}{G_{i-1}N/N} &\cong \frac{G_iN}{G_{i-1}N}\\ &= \frac{G_iG_{i-1}N}{G_{i-1}N}\\ &\cong \frac{G_i}{G_i\cap G_{i-1}N}\\ &\cong \frac{G_i/G_{i-1}}{(G_i\cap G_{i-1}N)/G_{i-1}}\end{aligned}$$

که درآن $(G_i/G_{i-1})/((G_i\cap G_{i-1}N)/G_{i-1})$ دوری است. بنابراین سری (۱-۱) یک سری ابرحل‌پذیری برای $G/N$ است. □

عکس لم فوق همواره برقرار نیست. به عنوان مثال زیرگروه

$$V=\{(۱),(۱۲)(۳۴),(۱۳)(۲۴),(۱۴)(۲۳)\}$$

از $A_۴$ را درنظر بگیرید. $V$ ابرحل‌پذیر است، زیرا دارای سری ابرحل‌پذیری

$$\{۱\}\le\langle(۱۲)(۳۴)\rangle\le V$$

است به‌طوری که عامل‌های آن با $C_۲$ یکریخت هستند. علاوه بر آن $A_۴/V\cong C_۳$. پس $A_۴/V$ ابرحل‌پذیر است. اما $A_۴$ ابرحل‌پذیر نیست.

سوالی که در خصوص ابرحل‌پذیری پیش می‌آید این است که آیا هر گروه ابرحل‌پذیر، حل‌پذیر است؟ و آیا عکس آن مبنی بر اینکه هر گروه حل‌پذیر، ابرحل‌پذیر است درست است یا خیر. همانطور که در قضیه بعد مشاهده می‌کنید هر گروه ابرحل‌پذیر، حل‌پذیر نیز هست اما عکس آن همواره صادق نیست. به عنوان مثال $S_۴$ حل‌پذیر است اما ابرحل‌پذیر نیست.

**قضیه ۱-۳-۳۴.** هر گروه ابرحل‌پذیر، حل‌پذیر است.

**برهان.** این قضیه نتیجه‌ای واضح از تعریف حل‌پذیری و ابرحل‌پذیری است. □

سه قضیه بعد از قضایای مهم در نظریه‌ی گروه‌ها هستند. این قضایا از منبع [۱۷] انتخاب شده‌اند.

**قضیه ۱-۳-۳۵** (فیت-تامپسون ۱۹۶۳[۱]). هر گروه از مرتبه فرد حل‌پذیر است.

**قضیه ۱-۳-۳۶** (برنساید ۱۹۰۴[۲]). هر گروه از مرتبه $p^rq^s$ برای هر دو عدد اول متمایز $p$ و $q$ حل‌پذیر است.

[۱] Feit-Thompson [۲] Burnside

**قضیه ۱-۳-۳۷** (هال ۱۹۲۸[۱]). اگر $G$ گروهی حل‌پذیر از مرتبه $ab$ باشد به‌طوری که $\gcd(a, b) = ۱$، آنگاه $G$ دارای زیرگروهی از مرتبه $a$ است و هر دو زیرگروه از مرتبه $a$ با هم مزدوج اند.

این بخش را با مطالعه گروه‌های پوچتوان به پایان می‌رسانیم.

**تعریف ۱-۳-۳۸.** زیرگروه مشخصه‌ی $\gamma_i(G)$ از $G$ را به طور استقرایی به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\gamma_۱(G) = G, \qquad \gamma_{i+۱} = [\gamma_i(G), G].$$

**لم ۱-۳-۳۹.** اگر $K$ زیرگروه نرمالی از گروه $G$ باشد و $K \leq H \leq G$، آنگاه $[H, G] \leq K$ اگر و تنها اگر $H/K \leq Z(G/K)$

**برهان.** به لم ۳۰-۵ از منبع [۱۷] مراجعه کنید. □

**تعریف ۱-۳-۴۰.** سری مرکزی پایینی از $G$ عبارت است از سری

$$G = \gamma_۱(G) \geq \gamma_۲(G) \geq \cdots .$$

بنابر لم قبل می‌توان نتیجه گرفت

$$\gamma_i(G)/\gamma_{i+۱}(G) \leq Z(G/\gamma_{i+۱}(G)).$$

**تعریف ۱-۳-۴۱.** برای هر عدد صحیح مثبت $i$ زیرگروه مشخصه $\zeta^i(G)$ از گروه $G$ به طور استقرایی به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\zeta^۰(G) = \{۱\}, \qquad \zeta^{i+۱}(G)/\zeta^i(G) = Z(G/\zeta^i(G)).$$

**تعریف ۱-۳-۴۲.** سری مرکزی بالایی از گروه $G$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\{۱\} = \zeta^۰(G) \leq \zeta^۱(G) \leq \cdots .$$

**قضیه ۱-۳-۴۳.** فرض کنید $G$ یک گروه باشد. دراین‌صورت عدد صحیح نامنفی $c$ وجود دارد به‌طوری که $\zeta^c(G) = G$ اگر و تنها اگر $\gamma_{c+۱}(G) = \{۱\}$. به طور کلی برای هر عدد صحیح نامنفی $i$ داریم

$$\gamma_{i+۱}(G) \leq \zeta^{c-i}(G).$$

**برهان.** به قضیه‌ی ۳۱-۵ از منبع [۱۷] مراجعه کنید. □

---
[۱] Hall

نتیجه زیر رابطه‌ی دیگری بین این دو سری را نشان می‌دهد.

**قضیه ۴۴-۳-۱** (شور[۱]). اگر $G$ یک گروه باشد که درآن $G/Z(G)$ متناهی باشد، آنگاه $G'$ نیز متناهی است.

**برهان.** به قضیه‌ی ۳۲-۵ از منبع [۱۷] مراجعه کنید. $\square$

با توجه به مقدمات ذکر شده به تعریف گروه پوچتوان می‌رسیم.

**تعریف ۴۵-۳-۱.** گروه $G$ پوچتوان نامیده می‌شود هرگاه عدد صحیح مثبتی چون $c$ وجود داشته باشد به‌طوری که $\gamma_{i+1}(G) = \{1\}$ . کوچکترین عدد $c$ با این خاصیت را کلاس پوچتوانی $G$ نامیم.

**لم ۴۶-۳-۱.** گروه $G$ پوچتوان با کلاس پوچتوانی $c$ است اگر و تنها اگر $\zeta^c(G) = G$ و $\zeta^{c-1}(G) < G$.

**برهان.** این لم نتیجه مستقیم قضیه ۴۳-۳-۱ است. $\square$

اگر $G$ یک گروه پوچتوان باشد، آنگاه بنابر قضیه ۴۳-۳-۱ سری مرکزی پایین و سری مرکزی بالایی $G$، سری نرمال و از یک طول هستند

پیش از این گفته بودیم گروه‌هایی آبلی، گروه‌هایی حل‌پذیر با طول حل‌پذیری ۱ هستند. بنابر تعریف ۳۸-۳-۱ هر گروه آبلی گروهی پوچتوان با کلاس پوچتوانی ۱ است.

**قضیه ۴۷-۳-۱.** هر $p$-گروه متناهی پوچتوان است.

**برهان.** فرض کنید $G$ یک $p$-گروه متناهی و پوچتوان باشد. بنابر قضیه ۴-۲-۱ مرکز $G$ نابدیهی است. اگر $i$ عدد صحیح مثبتی باشد به‌طوری که $\zeta^i(G) < G$، آنگاه $Z(G/\zeta^i(G)) \neq \{1\}$. بنابراین $\zeta^i(G) < \zeta^{i+1}(G)$. از آنجا که $G$ متناهی است، عدد صحیح متبت $c$ وجود دارد به‌طوری که $\zeta^c(G) = G$. درنتیجه $G$ پوچتوان است. $\square$

بدون فرض متناهی بودن، قضیه فوق نادرست است، درواقع در سال ۱۹۵۴ مک لین [۲]، یک $p$- گروه نامتناهی و غیر پوچتوانی را بدست آورد.

برخی از خواص گروه پوچتوان را در قالب قضایای زیر بیان می‌کنیم. اثبات این قضایا را می‌توان در بخش ۵ از فصل ۵ از منبع [۱۷] یاقت.

**قضیه ۴۸-۳-۱.** **الف.** هر گروه پوچتوان حل‌پذیر است.

**ب.** $S_3$ گروه حل‌پذیر و غیر پوچتوان است.

---

[۱] Schur [۲] Mclain

**قضیه ۴۹-۳-۱.** **الف.** هر زیرگروه یک گروه پوچتوان، پوچتوان است.

**ب.** اگر گروه $G$ پوچتوان باشد، آنگاه برای هر زیرگروه نرمال $N$ از $G$، $G/N$ پوچتوان است.

**ج.** اگر $H$ و $K$ دو گروه پوچتوان باشد، آنگاه $H \times K$ پوچتوان است.

**قضیه ۵۰-۳-۱.** گروه متناهی $G$ پوچتوان است اگر و تنها اگر $G$ را بتوان به صورت ضرب داخلی زیرگروه‌های سیلوی $G$ نوشت.

**قضیه ۵۱-۳-۱.** **الف.** هر گروه پوچتوان نابدیهی دارای مرکز نابدیهی است.

**ب.** اگر $H < G$، آنگاه $H < N_G(H)$

**ج.** هر زیرگروه ماکسیمال گروه $G$، نرمال و دارای شاخص $p$ که در آن $p$ عددی اول است.

با مقایسه قضایای قبل و قضیه‌ی ۷-۲-۱ و قضیه‌ی ۴-۲-۱ می‌توان شاهد شباهت چشمگیر گروه‌های پوچتوان و $p$-گروه‌های متناهی بود.

## ۱-۴ ضرب نیم مستقیم

این فصل را با تعریف ضرب نیم مستقیم و چند مثالی از آن به پایان می‌رسانیم.

فرض کنید $G$ یک گروه باشد. اگر $H \trianglelefteq G$ و $K \leq G$ به‌طوری که $H \cap K = \{۱\}$ و $G = HK$، آنگاه نگاشت $\phi : H \times K \longrightarrow G$ با ضابطه‌ی $\phi(h, k) = hk$ را در نظر بگیرید. بسیار واضح است که نگاشت فوق یک تناظر یک‌به‌یک است. می‌خواهیم عمل گروه $H \times K$ را به شکلی تعریف کنیم به‌طوری که $\phi$ یک یکریختی گروهی بشود. فرض کنید $\phi$ یک یکریختی گروهی باشد. دراین‌صورت اگر $(h_۱, k_۱), (h_۲, k_۲) \in H \times G$ دو عضو دلخواه باشند، آنگاه

$$\begin{aligned}
\phi((h_۱, k_۱), (h_۲, k_۲)) &= \phi((h_۱, k_۱))\phi((h_۲, k_۲)) \\
&= h_۱k_۱h_۲k_۲ \\
&= h_۱(k_۱h_۲k_۱^{-۱})k_۱k_۲ \\
&= \phi((h_۱(k_۱h_۲k_۱^{-۱}), k_۱k_۲)).
\end{aligned}$$

بنابراین چون $\phi$ یکه به یک است،

$$(h_۱, k_۱)(h_۲, k_۲) = (h_۱(k_۱h_۲k_۱^{-۱}), k_۱k_۲). \qquad (۱-۲)$$

در نتیجه برای آنکه $\phi$ یک یکریختی گروهی باشد باید عمل روی گروه $H \times K$ را به صورت فوق تعریف کنیم.
در این مرحله نگاشت $\Psi : K \longrightarrow \mathrm{Aut}(H)$ را به صورت زیر تعریف کنید

$$\Psi(k) = \tau_k$$

که در آن $\tau_k : H \longrightarrow H$ با ضابطه‌ی $\tau_k(h) = khk^{-۱}$ تعریف می‌شود. با توجه به آنچه گفته شد رابطه (۲-۱) را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$(h_۱, k_۱), (h_۲, k_۲) = (h_۱\tau_{k_۱}(h_۲), k_۱k_۲).$$

دراین‌صورت می‌نویسیم $G = H \rtimes_{\Psi} K$ و $G$ را ضرب نیم مستقیم داخلی $H$ و $K$ نامیم.

آنچه تا به اینجا بیان کردیم را در قالب قضیه زیر می‌آوریم.

**قضیه ۱-۴-۱.** $G$ را ضرب نیم مستقیم داخلی $H$ و $K$ نامیم و می‌نویسیم $G = H \rtimes_{\Psi} K$، هرگاه

**الف.** $H \trianglelefteq G$ و $K \leq G$،

**ب.** $H \cap K = \{۱\}$،

**ج.** $G = HK$.

**تعریف ۲-۴-۱.** فرض کنید $H$ و $K$ دو گروه باشد و همریختی گروهی $\phi : K \longrightarrow \mathrm{Aut}(H)$ را در نظر بگیرید، دراین‌صورت ضرب نیم مستقیم متناظر با $\phi$ به صورت $H \rtimes_{\phi} K$ نمایش داده می‌شود و عبارت است از تمام زوج مرتب‌های $(h,k)$ به‌طوری که $h \in H$ و $k \in K$. با عمل گروهی

$$(h,k)(h',k') = (h\phi_k(h'), kk').$$

به راحتی می‌توان بررسی کرد که $G = H \rtimes_{\phi} K$ یک گروه است و $G$ را ضرب نیم مستقیم خارجی $H$ و $K$ نامیم.

**مثال ۳-۴-۱.** اگر $\phi : K \longrightarrow \mathrm{Aut}(H)$ همریختی بدیهی باشد، آنگاه عمل گروه $H \rtimes_{\phi} K$ به صورت زیر است

$$(h,k)(h',k') = (h\phi_k(h'), kk') = (hh', kk').$$

در مثال بعد به عنوان آخرین مثال این فصل نشان می‌دهیم گروه $D_{۲n}$ برابر حاصل ضرب نیم مستقیم $C_n$ و $C_۲$ نوشت.

**مثال ۴-۴-۱.** گروه دو وجهی $D_{2n}$ به صورت زیر تعریف می‌شود

$$D_{2n} = \langle r, s \rangle$$

که در آن $r^n = 1$ و $s^2 = 1$ و علاوه بر آن برای هر $k \in \mathbb{Z}$ داریم $sr^k s = r^{-k}$. دو زیرگروه $H = \langle r \rangle$ و $K = \langle s \rangle$ از $D_{2n}$ را در نظر بگیرید. واضح است که $H \cap K = \{1\}$ و $H \trianglelefteq D_{2n}$، علاوه بر آن به سهولت می‌توان یافت که $D_{2n} = HK$. پس بنابر قضیه ۱-۴-۱

$$D_{2n} = H \rtimes K$$

و چون $H \cong C_n$ و $K \cong C_2$،

$$D_{2n} \cong C_n \rtimes C_2.$$

# فصل ۲

# گروه‌های CLT

در این فصل تمامی‌گروه‌ها متناهی فرض شده‌اند. مطالب این فصل از منابع [۱]، [۵]، [۶]، [۷]، [۸]، [۱۰]، [۱۳]، [۱۴] و [۱۸] انتخاب شده‌اند

## ۲-۱ گروه‌های CLT مقدماتی

دراین بخش خاصیت‌های اولیه‌ی گروه‌های CLT را بررسی و سپس نشان می‌دهیم هر گروه پوچتوان یک گروه CLT است. به عنوان مهمترین نتیجه در این بخش نشان می‌دهیم اگر مرتبه‌ی گروه $G$ خالی از مربع باشد، آنگاه $G$ یک گروه CLT است. در بخش دوم نشان می‌دهیم هر گروه CLT حل‌پذیر هستند و سپس نشان می‌دهیم هر گروه ابرحل‌پذیر یک گروه CLT است.

**قضیه ۲-۱-۱ (قضیه لاگرانژ).** فرض کنید $G$ یک گروه باشد. دراین‌صورت اگر $H$ یک زیرگروه از گروه $G$ باشد، آنگاه $|H|\,|\,|G|$. به طور دقیق تر $|G| = |H|[G : H]$.

گروه جایگشت‌ها روی $n$ حرف را با $S_n$ و زیرگروه $S_n$ متشکل از جایگشت‌های زوج را با $A_n$ نمایش می‌دهیم. عکس قضیه لاگرانژ در حالت کلی برقرار نیست، به عنوان مثال $A_۵$ گروهی از مرتبه ۶۰ است که هیچ زیرگروهی از مرتبه ۳۰ ندارد.

**تعریف ۲-۱-۲.** گروه $G$ را CLT نامیده می‌شود هرگاه عکس قضیه لاگرانژ برای آن برقرار باشد. در غیراین‌صورت آنرا NCLT نامیده می‌شود.

**مثال ۲-۱-۳.** $S_۴$ یک گروه CLT است، زیرا دارای زیرگروه

$$\{(), (۱۲)\}$$

از مرتبه ۲، زیرگروه

$$\langle (1234) \rangle$$

از مرتبه‌ی ۴، زیرگروه

$$\langle (123), (12) \rangle$$

از مرتبه‌ی ۶، زیرگروه

$$\langle (1234), (13) \rangle$$

از مرتبه‌ی ۸ و $A_4$ یک زیرگروه از مرتبه‌ی ۱۲ است.

هدف این بخش و به طور کلی این فصل مطالعه گروه‌های CLT و طبقه بندی آنهاست.

**قضیه ۴-۱-۲.** هر گروه دوری CLT است.

**برهان.** فرض کنید $G = \langle x \rangle$ و $d \| G|$. دراین‌صورت عدد صحیح $s$ وجود دارد به‌طوری که $|G| = ds$. درنتیجه $H = \langle x^s \rangle$ زیرگروهی از مرتبه $d$ است. $\square$

**لم ۵-۱-۲.** اگر $G$ یک گروه CLT و $G \cong L$ یکریختی گروهی باشد، آنگاه $L$ نیز CLT است.

**برهان.** اگر $\Psi : G \longrightarrow L$ یکریختی گروهی باشد، آنگاه به ازای هر $d \mid |L|$، می‌توان نتیجه گرفت که $d \mid |G|$. از آنجا که $G$ یک گروه CLT است، $G$ دارای زیرگروهی مانند $H$ از مرتبه‌ی $d$ است و در نتیجه $\Psi(H)$ زیرگروهی از مرتبه $d$ از $L$ است. $\square$

قضیه اول سیلو تضمین وجود یک $p$-زیرگروه از مرتبه ماکسیمم را به ما می‌دهد. اما اگر $|G| = p^\alpha m$ به‌طوری که $\gcd(p, m) = 1$، قضیه اول سیلو وجود زیرگروهی از مرتبه $p^\beta$ را برای هر $1 < \beta < \alpha$ تضمین نمی‌کند. پس باید به نحوی قضیه کوشی را تعمیم دهیم. برای تعمیم قضیه‌ی کوشی به لم زیر نیاز داریم.

**لم ۶-۱-۲.** اگر $H$ یک $p$-زیرگروه گروه $G$ باشد، آنگاه

$$[G : H] \equiv [N_G(H) : H] \pmod p.$$

**برهان.** فرض کنید $X = \{gH \mid g \in G\}$ و عمل $H$ روی $X$ را به صورت زیر در نظر بگیرید

$$h \cdot gH = hgH.$$

دراین‌صورت بنابر قضیه ۷-۱-۱ می‌توان نوشت

$$[G : H] = |X| = |X_f| + \sum_{i=1}^{s} [H : \mathrm{stab}_H(x_i)].$$

حال چون $H$ یک $p$-گروه است. بنابراین $p \mid \sum_{i=1}^{s}[H : \mathrm{stab}_H(x_i)]$. درنتیجه

$$[G : H] \equiv |X_f| \pmod p.$$

اکنون مجموعه $X_f$ را می‌یابیم

$$\begin{aligned} xH \in X_f &\iff \mathrm{orb}_H(xH) = \{xH\} \\ &\iff \forall h \in H \quad h \cdot xH = xH \\ &\iff \forall h \in H \quad hxH = xH \\ &\iff \forall h \in H \quad x^{-1}hx \in H \\ &\iff \forall\, h \in H \quad h \in xHx^{-1} \\ &\iff H \subseteq xHx^{-1} \\ &\iff H = xHx^{-1} \\ &\iff x \in N_G(H). \end{aligned}$$

بنابراین $X_f = N_G(H)/H$ و در نتیجه

$$[G : H] \equiv [N_G(H) : H] \pmod p.$$

در این مرحله اثبات قضیه به پایان می‌رسد. □

**قضیه ۷-۱-۲ (تعمیم قضیه کوشی).** فرض کنید $G$ گروهی دلخواه و $p$ عددی اول باشد به‌طوری که برای عدد صحیح $r$، $p^r \,\big|\, |G|$. دراین‌صورت $G$ دارای زیرگروهی از مرتبه $p^r$ است.

**برهان.** اثبات را با استقرا روی $r$ تکمیل می‌کنیم. اگر $r = 1$، آنگاه این حالت همان قضیه‌ی کوشی است که پیش از این بیان شده است. فرض کنید $r > 1$. از آنجا که $p^r \mid p^{r-1}$ بنابر فرض استقرا $G$ دارای زیرگروهی از مرتبه $p^{r-1}$ مانند $H$ است. بنابر لم قبل

$$0 \equiv [G : H] \equiv [N_G(H) : H] \pmod p$$

پس $p \mid [N_G(H) : H]$. بنابر قضیه کوشی $N_G(H)/H$ دارای زیرگروهی از مرتبه $p$ مانند $K/H$ است. در نتیجه $K$ زیرگروهی از $G$ با مرتبه $|K| = |K/H||H| = p^r$ است. □

**نتیجه ۸-۱-۲.** هر $p$-گروه متناهی CLT است.

**برهان.** این گزاره نتیجه‌ی بدیهی قضیه قبل است. □

**قضیه ۹-۱-۲.** حاصل ضرب مستقیم گروه‌های CLT، مجدداً CLT است.

**برهان.** اثبات را با استقرا روی تعداد گروه‌ها تکمیل می‌کنیم. اگر مرتبه‌ی $G_۱$ برابر $n_۱$ و مرتبه‌ی $G_۲$ برابر $n_۲$ باشد، آنگاه $|G_۱ \times G_۲| = n_۱ n_۲$. فرض کنید $a \mid n_۱ n_۲$ آنگاه $a = a_۱ a_۲$ به‌طوری که $a_۱ \mid n_۱$ و $a_۲ \mid n_۲$. از آنجا که $G_۱$ و $G_۲$، CLT هستند. بنابراین دو زیرگروه $H_۱ \leq G_۱$ و $H_۲ \leq G_۲$ وجود دارند به‌طوری که $|H_۱| = a_۱$ و $|H_۲| = a_۲$. در نتیجه $H_۱ \times H_۲$ زیرگروهی از $G_۱ \times G_۲$ از مرتبه $|H_۱ \times H_۲| = a_۱ a_۲ = a$ است. فرض کنید $G_۱$،$G_۲$، . . .، $G_n$، CLT باشند. بنابر فرض استقرا $\prod_{k=۱}^{n-۱} G_k$ گروهی CLT است. از طرفی

$$\prod_{k=۱}^{n} G_k = \prod_{k=۱}^{n-۱} G_k \times G_n$$

بنابر پایه استقرا $\prod_{k=۱}^{n} G_k$ گروهی CLT است. □

**قضیه ۱۰-۱-۲.** هر گروه پوچتوان ، CLT است. به ویژه هر گروه آبلی CLT است.

**برهان.** فرض کنید $G$ یک گروه پوچتوان دلخواه باشد. بنابر قضیه ۵۰-۳-۱، $G$ برابر حاصل ضرب مستقیم زیرگروه‌های سیلویش است . درنتیجه بنابر قضیه ۸-۱-۲ و قضیه ۹-۱-۲ و لم ۵-۱-۲ نتیجه حاصل می‌شود. □

در قضیه ۹-۱-۲ نشان دادیم که گروه‌های CLT تحت ضرب مستقسم بسته است. سوالی که پیش می‌آید این است که آیا خارج قسمت یک گروه CLT و زیرگروه یک گروه CLT مجدداً CLT است یا خیر؟ در جواب باید بگویم که اینگونه نیست؛ به مثال‌های زیر توجه کنید.

**مثال ۱۱-۱-۲.** $S_۴$ یک گروه CLT است اما $A_۴$ یک گروه CLT نیست زیرا زیرگروهی از مرتبه ۶ ندارد .

**مثال ۱۲-۱-۲.** گروه $G = A_۴ \times C_۲$ را در نظر بگیرید. این گروه از مرتبه $۲^۳ \times ۳$ است. زیرگروه‌های $G$ از مرتبه ۲۴ و ۱ به طور بدیهی وجود دارد. بنابر آنچه تا به اینجا بیان کردیم $G$ دارای زیرگروه‌هایی از مرتبه ۸،۴،۳،۲ است. حال $A_۴$ زیرگروهی از مرتبه ۱۲ و $A_۳ \times C_۲$ زیرگروهی از مرتبه ۶ است. در نتیجه $G$ گروهی CLT است. می‌دانیم

$$\frac{G}{C_۲} = \frac{A_۴ \times C_۲}{C_۲} \cong A_۴.$$

اما $A_۴$ گروهی CLT نیست.

نکته‌ای حائز توجه‌ای که از مثال قبل می‌توان متذکر شد این است که حاصل ضرب دو گروه می‌تواند CLT باشد اما یکی از جزء‌های ضرب مستقیم CLT نباشد.

**قضیه ۱۳-۱-۲.** هر گروه از مرتبه $pq$ به‌طوری که $p$ و $q$ دو عدد اول باشند، CLT است.

**برهان.** اثبات بسیار واضح است. $\square$

**تعریف ۱۴-۱-۲.** عدد طبیعی $n$ را خالی از مربع نامیده می‌شود هرگاه برای هر عدد اول $p$ به‌طوری که $p \mid n$، $p^{۲} \nmid n$

در ادامه به طور دقیق گروه‌هایی را مطالعه می‌کنیم که مرتبه آنها خالی از مربع است.

**تعریف ۱۵-۱-۲.** فرض کنید $p$ عددی اول باشد به‌طوری که $p \mid |G|$ و همچنین $P \in \mathrm{Syl}_p(G)$. دراین‌صورت $Q$ را $p$-مکمل نرمال $P$ نامیده می‌شود هرگاه $Q$ زیرگروهی نرمال از $G$ باشد به‌طوری که $Q \cap P = \{۱\}$ و $G = PQ$.

**لم ۱۶-۱-۲.** فرض کنید $G$ یک گروه باشد. اگر $P \in \mathrm{Syl}_p(G)$ و $P \leq Z(N_G(P))$، آنگاه $P$ دارای $p$-مکمل نرمال در $G$ است.

**برهان.** به لم ۱۳-۳ از منبع [۸] مراجعه کنید. $\square$

**لم ۱۷-۱-۲.** فرض کنید $p$ کوچکترین عدد اولی باشد به‌طوری که $p \mid |G|$. دراین‌صورت اگر $P \in \mathrm{Syl}_p(G)$ و $P$ دوری باشد، آنگاه $P$ دارای مکمل نرمال در $G$ است.

**برهان.** فرض کنید $x \in N_G(P)$. دراین‌صورت $xPx^{-۱} = P$. فرض کنید $\phi : N_G(P) \longrightarrow \mathrm{Aut}(P)$ با ضابطه‌ی $\phi(x) = \tau_x$ تعریف شود که در آن $\tau_x$ یکریختی از $P$ به $P$ است که با ضابطه‌ی $\tau_x(g) = xgx^{-۱}$ تعریف می‌شود. از آنجا که $P$ دوری است، $P$ آبلی است. بنابراین $P \leq \mathrm{Ker}(\phi)$. بنابراین همریختی القا شده‌ی

$$\theta : N_G(P)/P \longrightarrow \mathrm{Aut}(P)$$

را داریم. فرض کنید $|P| = p^k$. دراین‌صورت از آنجا که $k$ بزرگترین توان از $p$ است به‌طوری که $p^k \mid |G|$؛ می‌توان نتیجه گرفت $p \nmid |N_G(P)/P|$. بنابراین هر عدد اول شمارنده‌ی $|N_G(P)/P|$ از $p$ بزرگتر است. از آنجا که $P$ دوری و از مرتبه $p^k$ است، پس $|\mathrm{Aut}(P)| = (p-۱)p^{k-۱}$. درنتیجه $\gcd(|N_G(P)/P|, |\mathrm{Aut}(P)|) = ۱$. پس همریختی $\theta$ بدیهی است. فرض کنید $g \in P$ عضوی دلخواه باشد دراین‌صورت

$$\theta(xP)(g) = \tau_x(g) = xgx^{-۱} = g.$$

پس $xg = gx$. در نتیجه $P \leq Z(N_G(P))$. بنابر لم قبل $P$ دارای $p$-مکمل نرمال در $G$ است. $\square$

**قضیه ۱۸-۱-۲.** اگر گروه $G$ از مرتبه $n$ باشد به‌طوری که درآن $n$ عددی خالی از مربع است، آنگاه $G$ حل‌پذیر است.

**برهان.** فرض کنید $|G| = p_1p_2 \dots p_r$. با استقرا روی $r$ قضیه را ثابت می‌کنیم. اگر $r = 1$، آنگاه $|G| = p_1$ و چون $G$ دوری است، پس حل‌پذیر است. فرض کنید گزاره برای $r = k$ برقرار باشد و فرض کنید $r = k + 1$، یعنی $|G| = p_1p_2 \dots p_kp_{k+1}$. بدون کاسته شدن از کلیت فرض کنید

$$p_1 < p_2 < \dots < p_k < p_{k+1}.$$

بنابر لم قبل زیرگروه نرمال $N$ از $G$ وجود دارد به‌طوری که $|G/N| = p_1$. بنابراین $G/N$ دوری و درنتیجه حل‌پذیر است. از طرفی $|N| = p_2 \dots p_kp_{k+1}$، درنتیجه بنابر فرض استقرا $N$ حل‌پذیر است. بنابر قضیه ۲۶-۳-۱، $G$ حل‌پذیر است. □

**لم ۱۹-۱-۲.** اگر $N$ عددی خالی از مربع باشد و $N = nm$، آنگاه $\gcd(n, m) = 1$.

**برهان.** بنابر برهان خلف فرض کنید $\gcd(m, n) = d > 1$. دراین‌صورت $d \mid n$ و $d \mid m$. بنابراین اعداد صحیح $r$ و $s$ موجودند به‌طوری که $m = dr$ و $n = ds$. درنتیجه

$$N = nm = dsdr = d^2rs.$$

بنابراین $d^2|N$ که با فرض خالی از مربع بودن $N$ در تناقض است. □

**قضیه ۲۰-۱-۲.** هر گروه با مرتبه‌ی خالی از مربع CLT است.

**برهان.** فرض کنید $G$ یک گروه با مرتبه‌ی خالی از مربع دلخواه باشد. دراین‌صورت از آنجا که $|G|$ خالی از مربع است، بنابر قضیه ۱۸-۱-۲ می‌توان نتیجه گرفت که $G$ حل‌پذیر است. فرض کنید $m \mid |G|$ پس عدد صحیح $n$ وجود دارد به‌طوری که $|G| = mn$ بنابر لم قبل می‌توان نتیجه گرفت که $\gcd(m, n) = 1$ پس بنابر قضیه ۳۷-۳-۱، $|G|$ دارای زیرگروهی از مرتبه $m$ است. □

## ۲-۲ رابطه‌ی حل‌پذیری و گروه‌های CLT

در بخش قبل قضایای مقدماتی را در خصوص گروه‌های CLT مطالعه کردیم. در این بخش به رابطه‌ی حل‌پذیری و ابرحل‌پذیری با گروه‌های CLT می‌پردازیم؛ درواقع ثابت می‌کنیم هر گروه ابرحل‌پذیر، CLT است و هر گروه CLT، حل‌پذیر است.

**لم ۱-۲-۲.** فرض کنید $G$ گروهی باشد به‌طوری که برای هر عدد اول $p$ که $p \mid |G|$، $G$ شامل $p$-مکمل باشد، دراین‌صورت $G$ حل‌پذیر است.

**برهان.** به قضیه‌ی ۳-۳-۹ منبع [۷] مراجعه کنید. $\square$

**لم ۲-۲-۲.** فرض کنید $|G| = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_k^{a_k}$ و برای هر $i = 1, 2, \dots, k$، $n_i = n/p_i^{a_i}$.دراین‌صورت $G$ حل‌پذیر است اگر و تنها اگر $G$ دارای زیرگروهی از مرتبه‌ی $n_i$ برای هر $i = 1, 2, \dots, k$ باشد.

**برهان.** ابتدا فرض کنید $G$ حل‌پذیر باشد. بنابر فرض سوال $|G| = n_i p_i^{a_i}$. و $\gcd(n_i, p_i^{a_i}) = 1$ درنتیجه بنابر قضیه‌ی‌هال $G$ دارای زیرگروهی از مرتبه $n_i$ است. به عکس فرض کنید برای هر $i = 1, 2, \dots, k$، $G$ دارای زیرگروهی از مرتبه‌ی $n_i$ مانند $H_i$ باشد، دراین‌صورت $H_i$ یک $p$-مکمل برای هر شمارنده‌ی اول $|G|$ است، درنتیجه بنابر لم قبل $G$ حل‌پذیر است. $\square$

حال که لم قبل را ثابت کردیم، تمام ابزار مورد نیاز برای اثبات قضیه‌ی مهم زیر را داریم.

**قضیه ۳-۲-۲.** هر گروه CLT حل‌پذیر است.

**برهان.** فرض کنید $G$ یک گروه CLT باشد. دراین‌صورت اگر $|G| = n$ و $n = p_1^{r_1} p_2^{r_2} \dots p_k^{r_k}$ تجزیه‌ی $n$ به عوامل اول متمایز باشد، آنگاه برای هر $i = 1, 2, \dots, k$، $n_i$ را برابر $n/p_i^{r_i}$ تعریف کنید. از آنجا که $G$ یک گروه CLT است، $G$ دارای زیرگروهی از مرتبه $n_i$ است. بنابر لم قبل، $G$ حل‌پذیر است. $\square$

اما عکس قضیه‌ی فوق همواره درست نیست، به عنوان مثال فرض کنید $H$ یک گروه دلخواه از مرتبه‌ی $h$ باشد. فرض کنید $h$ عددی فرد باشد. دراین صورت $|A_4 \times H| = 12h$ و $A_4 \times H$ دارای زیرگروهی از مرتبه‌ی $6h$ نیست. فرض کنید چنین نباشد و $A_4 \times H$ دارای زیرگروهی از مرتبه‌ی $6h$ مانند $K$ باشد. دراین‌صورت $K$ زیرگروهی از شاخص ۲ است. بنابراین $K$ زیرگروهی نرمال از $A_4 \times H$ است. از طرفی $|A_4 \times H/K| = 2$. پس گروه $A_4 \times H/K$ آبلی است، بنابر لم ۱۹-۳-۱، $(A_4 \times H)' = A_4' \times H'$ زیرگروهی از $K$ است. بنابراین مرتبه‌ی $A_4'$ مرتبه‌ی $K$ را عاد می‌کند. می‌دانیم $A_4' = \{1, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$. پس $4 \mid |K| = 6h$. اما از آنجا که $h$ فرد است، $4 \mid 6h$ منجر به تناقض می‌شود. بنابراین $A_4 \times H$ دارای زیرگروهی از مرتبه‌ی $6h$ نیست. درنتیجه $A_4 \times H$ گروهی NCLT است. بنابر قضیه‌ی فیت-تامپسون $H$ حل‌پذیر است و می‌دانیم $A_4$ نیز حل‌پذیر است، بنابراین $A_4 \times H$ گروهی حل‌پذیر است. اما بنابر آنچه تا به اینجا بیان کردیم $A_4 \times H$ یک گروه NCLT است.

**لم ۴-۲-۲.** فرض کنید $|G| = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_t^{a_t}$ تجزیه‌ی مرتبه‌ی $G$ به عوامل اول متمایز باشد، به‌طوری که $p_1 < p_2 < \dots < p_t$. اگر $G$ ابرحل‌پذیر باشد، آنگاه $G$ دارای زیرگروه‌های نرمال از مرتبه‌های $1$، $p_t$، …، $p_t^{a_t}$ است.

**برهان.** این لم نتیجه‌ی مستقیم قضیه‌ی ۳-۵-۱۰ از منبع [۷] است. □

**قضیه ۵-۲-۲.** هر گروه ابرحل‌پذیر، CLT است.

**برهان.** با استقرا روی تعداد اعداد اولی که $|G|$ را عاد می‌کنند، قضیه را ثابت می‌کنیم. اگر $G$ گروه بدیهی باشد قضیه واضح است. اگر $|G| = p^a$، آنگاه $G$ یک $p$-گروه متناهی است و بنابر قضیه ۸-۱-۲، $G$ یک گروه CLT است. فرض کنید حکم برای هر گروه از مرتبه‌ی $|G| = p_1^{a_1}p_2^{a_2}\dots p_n^{a_n}$ برقرار باشد. اکنون فرض کنید $|G| = p_1^{a_1}p_2^{a_2}\dots p_n^{a_n}p_{n+1}^{a_{n+1}}$ به‌طوری که در آن $p_1 < p_2 < \dots < p_{n+1}$ و همچنین $d$ مرتبه‌ی $G$ را عاد کند. درنتیجه

$$d = p_1^{b_1}p_2^{b_2}\dots p_n^{b_n}p_{n+1}^{b_{n+1}} = rp_{n+1}^{b_{n+1}}$$

به‌طوری که $0 \le b_i \le a_i$ و $r = p_1^{b_1}p_2^{b_2}\dots p_n^{b_n}$. می‌دانیم $G$ ابرحل‌پذیر است. پس می‌توان نتیجه گرفت $G$ حل‌پذیر است، بنابر لم ۲-۲-۲ می‌توان زیرگروه $H$ از $G$ را یافت به‌طوری که

$$|H| = |G|/p_{n+1}^{a_{n+1}} = p_1^{a_1}p_2^{a_2}\dots p_n^{a_n}.$$

از آنجا که $G$ ابرحل‌پذیر است. بنابراین $H$ نیز ابرحل‌پذیر است. درنتیجه بنابر فرض استقرا $H$ یک گروه CLT است. از آنجا که $r \mid |H|$. $H$ دارای زیرگروهی از مرتبه‌ی $r$ مانند $R$ است. بنابراین $R$ زیرگروهی از $G$ از مرتبه‌ی $r$ است. بنابر لم قبل $G$ دارای زیرگروهی نرمالی مانند $P$ از مرتبه‌ی $p_{n+1}^{b_{n+1}}$ است. در نتیجه $RP \le G$. حال می‌دانیم مرتبه‌ی $R$ و $P$ نسبت به هم اول هستند. درنتیجه

$$|RP| = |R||P| = rp_{n+1}^{b_{n+1}} = d.$$

بنابراین $G$ دارای زیرگروهی از مرتبه‌ی $d$ است. درنتیجه $G$ گروهی CLT است. □

عکس قضیه‌ی فوق در حالت کلی برقرار نیست. به عنوان مثال فرض کنید $G$ یک گروه CLT باشد. از طرفی بنابر مثال ۱۲-۱-۲ می‌دانیم $A_4 \times C_2$ گروهی CLT است. دراین‌صورت بنابر قضیه ۹-۱-۲ می‌توان نتیجه گرفت $(A_4 \times C_2) \times G$ نیز CLT است. اما $A_4$ یک گروه CLT نیست. درنتیجه بنابر قضیه ۵-۲-۲، $A_4$ یک گروه ابرحل‌پذیر نیست. پس می‌توان نتیجه گرفت $(A_4 \times C_2) \times G$ نیز ابرحل‌پذیر نیست.

بنابر آنچه در بخش قبل و این بخش ثابت کردیم رابطه‌ی زیر را بین کلاس گروه‌ها داریم

دوری $\subset$ آبلی $\subset$ پوچتوان $\subset$ ابرحل‌پذیر $\subset$ CLT $\subset$ حل‌پذیر

## ۳-۲ گروه‌های پوچتوان

در بخش قبل ثابت کردیم هر گروه پوچتوان یک گروه CLT است. در این بخش ابتدا دو زیرگروه مهم را تعریف و خواص آنرا مطالعه می‌کنیم. در ادامه‌ی این بخش چند محک برای شناسایی گروه‌های پوچتوان ارائه می‌کنیم.

**تعریف ۲-۳-۱.** فرض کنید $G$ یک گروه باشد. دراین‌صورت اشتراک تمام زیرگروه‌های ماکسیمال $G$ را زیرگروه فراتینی $G$ نامیده می‌شود و آنرا با $\Phi(G)$ نشان می‌دهیم.

**مثال ۲-۳-۲.** **الف.** اگر $G = A_5$، آنگاه $\Phi(G) = \{e\}$.

**ب.** اگر $G = S_n$ و $n \geq 3$، آنگاه $\Phi(G) = \{1\}$.

می‌دانیم اشتراک هر تعداد از زیرگروه‌های $G$، زیرگروهی از $G$ است. بنابراین $\Phi(G)$ زیرگروهی از $G$ است. این نوع از زیرگروه‌ها اولین بار توسط جیوانی فراتینی [1] (۱۸۵۲-۱۹۲۵) در سال ۱۸۸۵ میلادی معرفی شد. در واقع فراتینی ثابت کرد، گروه $\Phi(G)$ زیرگروهی متشکل از تمامی‌عناصر نامولد $G$ است.

**تعریف ۲-۳-۳.** عنصر $a$ از گروه $G$ نامولد خوانده می‌شود، هرگاه اگر $X$ یک مجموعه مولد از $G$ باشد، آنگاه $X \setminus \{a\}$ نیز یک مجموعه مولد از $G$ باشد.

زیرگروه فراتینی خواص مهمی‌دارد که در ادامه آنها را بررسی می‌کنیم.

**قضیه ۲-۳-۴.** برای هر گروه $G$، مجموعه‌ی عناصر نامولد $G$ برابر $\Phi(G)$ است.

**برهان.** فرض کنید $a$ عنصری نامولد دلخواه از $G$ و $H$ زیرگروهی ماکسیمال و دلخواه باشد. فرض کنید $a \notin H$ دراینصورت $H < \langle H, a\rangle$ و از آنجا که $H$ ماکسیمال است پس $\langle H, a\rangle = G$ و از آنجا که $a$ عنصری نامولد از $G$ است می‌توان نتیجه گرفت $G = H$. اما این برخلاف فرض ماکسیمال بودن $G$ است. بنابراین $a \in H$. از آنجا که $H$ دلخواه درنظر گرفته شده است می‌توان نتیجه گرفت $a \in \Phi(G)$.

به عکس فرض کنید $a \in \Phi(G)$. درنتیجه $a$ متعلق به تمامی‌زیرگروه‌های ماکسیمال $G$ است. می‌خواهیم نشان دهیم $a$ عنصری نامولد از $G$ است. فرض کنید مجموعه $X$ وجود داشته باشد به‌طوری که $a \in X$ و $X \cup \{a\}$ یک مجموعه مولد از $G$ باشد. دراین‌صورت اگر $\langle X\rangle \neq G$، آنگاه زیرگروه ماکسیمالی چون $J$ وجود دارد به‌طوری که

$$\langle X\rangle \leq J < G.$$

---

[1] Giovanni Frattini

بنابر فرض $a \in J$. بنابراین $\langle X, a\rangle \leq J$. اما بنابر فرض $\langle X, a\rangle = G$. درنتیجه $G \leq J$. که این با فرض ماکسیمال بودن $J$ درتناقض است. بنابراین فرض خلف باطل است و $G = \langle X\rangle$. درنتیجه $a$ عنصری نامولد از $G$ است. $\square$

**قضیه ۵-۳-۲.** اگر $G$ یک گروه باشد، آنگاه $\Phi(G)$ یک زیرگروه مشخصه از $G$ است.

**برهان.** فرض کنید $f \in \mathrm{Aut}(G)$ و $H$ یک زیرگروه ماکسیمال از $G$ باشد. دراین‌صورت $f(H)$ یک زیرگروه ماکسیمال از $G$ است، زیرا اگر $J$ زیرگروهی ماکسیمال باشد و $f(H) \leq J \leq G$. دراین‌صورت

$$H \leq f^{-1}(J) \leq G$$

و از آنجا که $H$ ماکسیمال است، $H = f^{-1}(J)$ یا $f^{-1}(J) = G$. بنابراین $f(H) = J$ یا $J = G$. درنتیجه $H_f := f(H) \in \Phi(G)$. حال برای هر $f \in \mathrm{Aut}(G)$ داریم

$$\begin{aligned} f(\Phi(G)) &= f\left(\bigcap H\right) \\ &\subseteq \bigcap f(H) \\ &= \bigcap H_f \\ &= \Phi(G). \end{aligned}$$

بنابراین $f(\Phi(G)) \subseteq \Phi(G)$. درنتیجه $\Phi(G)$ یک زیرگروه مشخصه از $G$ است. $\square$

**نتیجه ۶-۳-۲.** $\Phi(G)$ یک زیرگروه نرمال از $G$ است.

برای ثابت کردن این که $\Phi(G)$ پوچتوان است، به لم زیر نیاز داریم. این لم اولین بار توسط فراتینی در سال ۱۸۸۵ ثابت شده است.

**لم ۷-۳-۲.** اگر $G$ یک گروه باشد و $H \leq G$ به‌طوری که $G = H\Phi(G)$، آنگاه $H = G$.

**برهان.** فرض کنید $H \neq G$. دراینصورت زیرگروه ماکسیمال $J$ از $G$ موجود است به‌طوری که شامل $H$ باشد (ممکن است $J$ خود $H$ هم باشد). ازطرفی $\Phi(G) \leq J$. پس می‌توان نتیجه گرفت که $G = H\Phi(G) \leq J$. که این خلاف فرض ماکسیمال بودن $J$ است. بنابراین فرض خلف باطل است. درنتیجه $H = G$. $\square$

**قضیه ۸-۳-۲.** اگر $G$ یک گروه دلخواه باشد، آنگاه $\Phi(G)$ پوچتوان است.

**برهان.** کافیست ثابت کنیم هر زیرگروه سیلوی $\Phi(G)$ در $\Phi(G)$ نرمال است. اگر $\Phi(G) = \{۱\}$، آنگاه قضیه بدیهی است. فرض کنید $\Phi(G)$ نابدیهی باشد و $P$ یک زیرگروه سیلوی آن باشد. بنابر نتیجه‌ی ۶-۳-۲، $\Phi(G)$

در $G$ نرمال است. درنتیجه بنابر قضیه‌ی ۱۲-۲-۱، $G = N_G(P)\Phi(G)$. بنابر لم قبل می‌توان نتیجه گرفت که $G = N_G(P)$. پس $P$ یک زیرگروه نرمال $\Phi(G)$ است. بنابر قضیه ۲۹-۳-۱ و قضیه ۵۰-۳-۱ اثبات قضیه تکمیل می‌شود. $\square$

**نتیجه ۹-۳-۲.** برای هر گروه $G$، $\Phi(G)$ یک گروه CLT است.

**برهان.** بنابر قضیه‌ی قبل و قضیه‌ی ۱۰-۱-۲، اثبات تکمیل می‌شود. $\square$

در ادامه محک‌هایی برای تشخیص پوچتوانی یک گروه با استفاده از زیرگروه فراتینی ارائه می‌کنیم و از آنجا که بنابر قضیه ۱۰-۱-۲ هر گروه پوچتوان CLT است؛ این محک ها ما را در شناخت بیشتر گروه‌های CLT کمک می‌کند.

**قضیه ۱۰-۳-۲.** فرض کنید $G$ یک گروه باشد. دراین‌صورت $G$ پوچتوان است اگر و تنها اگر $G/\Phi(G)$ پوچتوان باشد.

**برهان.** اگر $G$ پوچتوان باشد، آنگاه بنابر قضیه ۴۹-۳-۱، اثبات تکمیل می‌شود. به عکس فرض کنید $G/\Phi(G)$ پوچتوان باشد. اگر $P$ یک زیرگروه سیلوی دلخواه از $G$ باشد، دراین‌صورت آنگاه $P\Phi(G)/\Phi(G)$ یک زیرگروه سیلو از $G/\Phi(G)$ است. از آنجا که $G/\Phi(G)$ پوچتوان است،

$$P\Phi(G)/\Phi(G) \trianglelefteq G/\Phi(G).$$

بنابراین $P\Phi(G) \trianglelefteq G$. از آنجا که $P$ یک زیرگروه سیلوی $P\Phi(G)$ است، درنتیجه بنابر استدلال فراتینی

$$G = N_G(P)P\Phi(G) = N_G(P)\Phi(G).$$

بنابر لم ۷-۳-۲ می‌توان نتیجه گرفت $G = N_G(P)$. بنابراین $P$ یک زیرگروه نرمال از $G$ است. درنتیجه چون $P$ دلخواه انتخاب شده بود، می‌توان نتیجه گرفت هر زیرگروه سیلوی $G$ نرمال است. پس بنابر قضیه ۵۰-۳-۱ و ۲۹-۳-۱، $G$ پوچتوان است. $\square$

در حالت کلی می‌توان مشاهده کرد، اگر $G$ یک گروه باشد و $H \trianglelefteq G$ پوچتوان و $G/H$ پوچتوان باشد، آنگاه نمی‌توان نتیجه گرفت $G$ پوچتوان است. به عنوان مثال $S_۳$ پوچتوان نیست. اما اگر $N = \langle(۱, ۲, ۳)\rangle$، آنگاه $N$ و $G/N$ هردو پوچتوان اند.

**نتیجه ۱۱-۳-۲.** فرض کنید $G$ یک گروه باشد. دراین‌صورت $G$ حل‌پذیر است اگر و تنها اگر $G/\Phi(G)$ حل‌پذیر باشد.

**برهان.** این گزاره نتیجه مستقیم قضیه‌ی قبل و قضیه ۴۸-۳-۱ است. □

**قضیه ۱۲-۳-۲.** فرض کنید $G$ یک گروه باشد. دراین‌صورت $G$ پوچتوان است اگر و تنها اگر $G' \leq \Phi(G)$.

**برهان.** ابتدا فرض کنید $G$ پوچتوان باشد. دراین‌صورت بنابر قضیه ۵۱-۳-۱ هر زیرگروه ماکسیمال $G$ نرمال و از شاخص عدد اول $p$ است. فرض کنید $H$ یک زیرگروه دلخواه ماکسیمال از $G$ باشد. دراین‌صورت $G/H$ آبلی است. درنتیجه بنابر لم ۱۹-۳-۱ می‌توان نتیجه گرفت $G' \leq H$. بنابراین چون $H$ دلخواه انتخاب شده است، $G' \leq \Phi(G)$.

به عکس فرض کنید $G' \leq \Phi(G)$ و $H$ زیرگروهی دلخواه ماکسیمال از $G$ باشد. دراین‌صورت $G' \leq H$ و بنابراین $G' \trianglelefteq H$. درنتیجه $H/G' \leq G/G'$ و چون $G/G'$ آبلی است، داریم $H/G' \trianglelefteq G/G'$ و بنابر قضیه‌ی تناظر می‌توان نتیجه گرفت $H \trianglelefteq G$. بنابراین چون $H$ دلخواه انتخاب شده است، بنابر قضیه ۳۱-۳-۱ می‌توان نتیجه گرفت $G$ را می‌توان به صورت حاصلضرب زیرگروه‌های سیلویش نوشت درنتیجه بنابر قضیه‌ی ۵۰-۳-۱ قضیه ثابت می‌شود. □

در ادامه زیرگروه فیتینگ[1] را بررسی می‌کنیم. اما پیش از تعریف آن به قضیه‌ی زیر نیاز داریم.

**قضیه ۱۳-۳-۲** (قضیه فیتینگ). فرض کنید $K$ و $J$ دو زیرگروه نرمال و پوچتوان از گروه $G$ با کلاس پوچتوانی به ترتیب $s$ و $r$ باشد. دراین‌صورت $JK$ زیرگروه نرمال پوچتوان با کلاس پوچتوانی $t$ است که درآن $t \leq s + r$.

**برهان.** نرمال بودن $JK$ واضح است. فرض کنید برای $i = ۱, ۲, ۳$، $L_i \trianglelefteq G$. دراین‌صورت تساوی‌های زیر را داریم

$$[L_۱L_۲, L_۳] = [L_۱, L_۳][L_۲, L_۳], \qquad [L_۱, L_۲L_۳] = [L_۱, L_۲][L_۱, L_۳]. \qquad (۲-۱)$$

حال فرض کنید $L_۱ = \gamma_i(JK)$ ، $L_۲ = J$ و $L_۳ = K$. دراین‌صورت بنابر آنچه گفتیم

$$\gamma_{i+۱}(JK) = [\gamma_i(JK), JK] = [\gamma_i(JK), J][\gamma_i(JK), K].$$

فرض کنید $H_i$ برای هر $i = ۱, ۲, \ldots, n$ زیرگروه‌هایی از $G$ باشد. به‌صورت استقرایی تعریف زیر را درنظر بگیرید

$$[H_۱] = H_۱ \quad [H_۱, \ldots, H_i, H_{i+۱}] = [[H_۱, H_۲, \ldots, H_i], H_{i+۱}].$$

دراین‌صورت باتوجه به رابطه‌ی (۱-۲) و با استقرا می‌توان نتیجه گرفت که $\gamma_{i+۱}(JK)$ به‌صورت حاصلضرب تمام جملات به‌صورت $[H_۱, \ldots, H_i]$ است که درآن برای هر $j = ۱, ۲, \ldots, i$ یا $H_j = J$ و یا $H_j = K$. حال

[1] Fitting

فرض کنید $i = r + s + ۱$. دراین‌صورت در جمله‌ی $L = [H_۱, H_۲, \dots, H_{r+s+۱}]$، $K$ حداقل $s + ۱$ بار ظاهر می‌شود یا $J$ حداقل $r + ۱$ بار ظاهر می‌شود. درنتیجه $L$ مشمول در $\gamma_{s+۱}(K)$ است یا $L$ مشمول در $\gamma_{r+۱}(J)$ که هردوی اینها بنابر فرض برابر $\{۱\}$ است، که این نشان می‌دهد $\gamma_{r+s+۱}(JK) = \{۱\}$. بنابراین اثبات قضیه به پایان می‌رسد. $\square$

**تعریف ۱۴-۳-۲** (زیرگروه فیتینگ). فرض کنید $G$ یک گروه باشد، دراین‌صورت حاصل‌ضرب تمام زیرگروه‌های نرمال و پوچتوان از $G$ را زیرگروه فیتینگ $G$ نامند و آنرا با $F(G)$ نشان می‌دهیم.

قضیه فیتینگ نشان می‌دهد که $F(G)$ یک زیرگروه نرمال و پوچتوان است، در واقع $F(G)$ بزرگترین زیرگروه نرمال و پوچتوان از $G$ است. بنابر نتیجه‌ی ۶-۳-۲ و قضیه‌ی ۸-۳-۲ می‌توان نتیجه گرفت که $\Phi(G) \le F(G)$. درمثال بعد زیرگروه فیتینگ برای گروه $S_n$ را بررسی می‌کنیم.

**مثال ۱۵-۳-۲.** فرض کنید $n = ۲$. دراین‌صورت $S_۲$ دوری است. بنابراین $S_۲$ پوچتوان است. درنتیجه $F(S_۲) = S_۲$. می‌دانیم برای $n > ۲$ گروه $S_n$ غیر پوچتوان است. بنابراین $F(S_n) < S_n$. فرض کنید $n = ۳$. دراین‌صورت زیرگروه‌های نرمال $S_۳$ برابر $\{۱\}$ ، $S_۳$ و $A_۳$ است. بنابراین $F(S_۳) = A_۳$.
فرض کنید $n = ۴$. دراین‌صورت زیرگروه‌های نرمال $S_۴$ برابر $\{۱\}$ ، $S_۴$ ، $A_۴$ و $H = \langle (۱۲)(۳۴), (۱۳)(۲۴) \rangle$ و چون $H$ دوری نیست، اما آبلی است، $H \cong C_۲ \times C_۲$. بنابراین $H$ پوچتوان است. درنهایت $F(S_۴) = H$.
اگر $n \geq ۵$، آنگاه $A_n$ تنها زیرگروه‌های نرمال نابدیهی گروه $S_n$ است و همچنین $S_n$ دارای زیرگروه نرمال و پوچتوان نیست، بنابراین $F(S_n) = \{۱\}$.

**تعریف ۱۶-۳-۲.** فرض کنید $G$ یک گروه باشد. دراین‌صورت اگر $p$ یک عدد اول باشد و $P_۱$، $P_۲$، ...، $P_k$، $p$-زیرگروه‌های سیلوی $G$ باشند، آنگاه زیرگروه $p$-رادیکال از $G$ به صورت زیر تعریف می‌شود

$$O_p(G) = \bigcap_{i=۱}^{k} P_i.$$

اگر $G$ تنها دارای یک $p$-زیرگروه سیلو مانند $P$ باشد، آنگاه $P \trianglelefteq G$ و $O_p(G) = P$. اما اگر $G$ بیش از یک $p$- زیرگروه سیلو داشته باشد، آیا می‌توان گفت که $O_p(G) \trianglelefteq G$؟

**لم ۱۷-۳-۲.** اگر $G$ یک گروه باشد، آنگاه $O_p(G) \trianglelefteq G$

**برهان.** ابتدا فرض کنید $P_۱$، $P_۲$، ...، $P_k$، $p$-زیرگروه‌های سیلوی $G$ باشند و $g$ عضوی دلخواه از گروه $G$ باشد.

دراین‌صورت

$$\begin{aligned}\tau_g(O_p(G)) &= \tau_g(\bigcap_{i=1}^{k} P_i)\\ &\subseteq \bigcap_{i-1}^{k} \tau_g(P_i)\\ &= \bigcap_{i=1}^{k} gP_ig^{-1}.\end{aligned}$$

بنابر قضیه‌ی دوم سیلو هر دو $p$-زیرگروه سیلو باهم مزدوج‌اند. بنابراین

$$\bigcap_{i=1}^{k} gP_ig^{-1} = \bigcap_{i=1}^{k} P_i.$$

درنتیجه $O_p(G)$ در $G$ نرمال است. $\square$

فراتر از لم قبل به سادگی می‌توان نشان داد که درحقیقت $O_p(G)$ یک زیرگروه مشخصه از $G$ است، زیرا هر خودریختی یک $p$-زیرگروه سیلو را به یک $p$-زیرگروه سیلو نظیر می‌کند.

**لم ۱۸-۳-۲.** اگر $K$ یک $p$-زیرگروه نرمال از $G$ باشد، آنگاه برای هر $p$-زیرگروه سیلوی $G$ چون $P$ داریم $K \leq P$.

**برهان.** ابتدا صورت کلی‌تر قضیه را برای $p$-زیرگروه دلخواه $H$ ثابت می‌کنیم. فرض کنید $P \in \mathrm{Syl}_p(G)$ دلخواه باشد و مجموعه‌ی $X = \{xP \mid x \in G\}$ را درنظر بگیرید. دراین‌صورت $H$ با ضرب چپ روی مجموعه‌ی $X$ عمل می‌کند. از آنجا که $H$ یک $p$-زیرگروه است، می‌توان نتیجه گرفت اگر برای هر $i = 1, 2, \ldots, s$، $\mathrm{orb}(x_iP) > 1$، آنگاه $p \mid [H : \mathrm{stab}(x_iP)]$. درنتیجه $p \mid \sum_{i=1}^{s}[H : \mathrm{stab}(x_iP)]$. بنابراین

$$0 \not\equiv [G : P] \equiv |X_f| \mod p.$$

درنتیجه $|X_f| \geq 1$. بنابراین $xP \in X_f$ وجود دارد به‌طوری که

$$\forall\, h \in H \quad hxP = xP.$$

بنابراین

$$\forall\, h \in H \quad x^{-1}hx = P.$$

درنهایت

$$\forall\, h \in H \quad h = xPx^{-1}$$

بنابراین $H \leq xPx^{-۱}$. این به این معناست که هر $p$-زیرگروه داخل یک $p$-زیرگروه سیلو قرار دارد.
حال فرض کنید $K$ نرمال باشد. دراین‌صورت اگر $P$ یک $p$-زیرگروه دلخواه از گروه $G$ باشد، آنگاه بنابر آنچه پیش از این بیان شد و قضیه دوم سیلو، $x \in G$ وجود دارد به‌طوری که $K \leq xPx^{-۱}$. درنتیجه

$$K = x^{-۱}Kx \leq x^{-۱}(xPx^{-۱})x = P.$$

بنابراین اثبات کامل است. □

**لم ۱۹-۳-۲.** $O_p(G)$ بزرگترین $p$-زیرگروه نرمال گروه $G$، مشمول در تمامی $p$-زیرگروه‌های سیلو است.

**برهان.** این لم نتیجه‌ی مستقیم لم قبل است. □

**قضیه ۲۰-۳-۲.** اگر $p_۱$ ، $p_۲$ ، ... ، $p_n$ شمارنده‌های اول متمایز $|G|$ باشد. دراین‌صورت

$$F(G) = O_{p_۱}(G) \times O_{p_۲}(G) \times \cdots \times O_{p_n}(G).$$

**برهان.** به قضیه‌ی ۲۴-۱۰ از منبع [۱۵] مراجعه کنید. □

در ادامه محکی برای شناخت گروه‌های پوچتوان بیان می‌کنیم. اگر $G$ گروهی دلخواه باشد و $a, b \in G$ دو عنصر دلخواهی باشند به‌طوری که با هم جابه‌جا می‌شوند، یعنی $ab = ba$ دراین‌صورت به راحتی می‌توان نشان داد اگر $\gcd(o(a), o(b)) = ۱$، آنگاه $o(ab) = o(a)o(b)$. بنابراین در حالت کلی می‌توان نتیجه گرفت.

**نتیجه ۲۱-۳-۲.** فرض کنید $G$ یک گروه آبلی باشد.دراین‌صورت اگر $a, b \in G$ و $\gcd(o(a), o(b)) = ۱$، آنگاه $o(ab) = o(a)o(b)$.

در حالت کلی این ویژگی برای گروه‌های پوچتوان نیز برقرار است.

**قضیه ۲۲-۳-۲.** فرض کنید $G$ یک گروه پوچتوان باشد.دراین‌صورت اگر $a, b \in G$ و $\gcd(o(a), o(b)) = ۱$، آنگاه $o(ab) = o(a)o(b)$.

**برهان.** فرض کنید $|G| = p_۱^{n_۲}p_۱^{n_۲} \ldots p_s^{n_s}$، که در آن $p_i$ اعداد اول متمایز هستند. همچنین فرض کنید $P_i$، $p_i$-زیرگروه سیلوی $G$ باشد. دراین‌صورت از آنجا که $G$ پوچتوان است، بنابر قضیه ۵۰-۳-۱ می‌توان نوشت

$$G = P_۱ \times P_۲ \times \cdots \times P_s.$$

پس $g_i, h_i \in P_i$، $i = ۱, ۲, \ldots, n$، وجود دارند به‌طوری که

$$a = g_۱g_۲ \ldots g_s,$$

$$b = h_۱h_۲ \ldots h_s.$$

توجه کنید که

$$o(a) = \mathrm{lcm}(o(g_۱), o(g_۲), \ldots, o(g_s)),$$
$$o(b) = \mathrm{lcm}(o(h_۱), o(h_۲), \ldots, o(h_s)).$$

از آنجا که $\gcd(o(a), o(b)) = ۱$ به راحتی می‌توان نشان داد که $\gcd(o(g_i), o(h_i)) = ۱$ (در غیر این‌صورت اگر $\gcd(o(g_i), o(h_i)) = d > ۱$، آنگاه $d \mid o(a)$ و همچنین $d \mid o(b)$ که این خلاف فرض اولیه مبنی بر اینکه $\gcd(o(g_i), o(k_i)) = ۱$ است.). از طرفی چون $g_i$ و $k_i$ متعلق به $P_i$ هستند، $o(g_i) = p_i^k$ و $o(g_i) = p_i^r$ که درآن $۰ \leq k, r \leq n_i$. بنابراین $g_i = ۱$ یا $k_i = ۱$. درنتیجه در حالت کلی به ازای هر $۱ \leq i \leq s$ داریم

$$g_i h_i = h_i g_i.$$

بنابراین $ab = ba$ و درنهایت $o(ab) = o(a)o(b)$. □

در حالت کلی عکس قضیه فوق نیز برقرار است.

**قضیه ۲-۳-۲۳.** فرض کنید $G$ یک گروه باشد، اگر برای هر $a, b \in G$ با شرط $\gcd(o(a), o(b)) = ۱$ داشته باشیم $o(ab) = o(a)o(b)$، آنگاه $G$ پوچتوان است.

**برهان.** فرض کنید $|G| = p_۱^{n_۲} p_۱^{n_۲} \ldots p_s^{n_s}$ که در آن $p_i$ اعداد اول متمایز هستند. همچنین فرض کنید $P_i$، $p_i$-زیرگروه سیلوی $G$ باشد. کافیست نشان دهیم برای هر $i = ۱, \ldots, s$، $P_i \trianglelefteq G$. در گام اول نشان می‌دهیم

$$G = P_۱ P_۲ \cdots P_s.$$

کافسیت نشان دهیم نگاشت

$$f : P_۱ P_۲ \ldots P_S \longrightarrow G$$

با دستور $f(g_۱ g_۲ \ldots g_s) = g_۱ g_۲ \ldots g_s$ یک به یک است. فرض کنید برای $i = ۱, ۲, \ldots, s$، $r_i, t_i \in P_i$. داشته باشیم

$$r_۱ r_۲ \ldots r_s = t_۱ t_۲ \ldots t_s.$$

دراین‌صورت

$$r_۱ r_۲ \ldots r_{s-۱} = t_۱ t_۲ \ldots t_s r_s^{-۱}.$$

اگر $t_s r_s^{-۱} \neq ۱$، آنگاه $p_s$ سمت راست تساوی فوق را عاد می‌کند اما سمت چپ را عاد نمی‌کند. بنابراین $r_s = t_r$. به طور مشابه می‌توان نشان داد که $r_i = t_i$. اکنون فرض کنید $g_i \in P_i$ و $x \in G$ بنابر آنچه ثابت شد داریم

$$x g_i x^{-۱} = t_۱ t_۲ \ldots t_s$$

و

$$o(xg_ix^{-1}) = o(g_i) \mid p_i^{n_i}.$$

بنابر فرض می‌توان نتیجه گرفت که $t_2 = t_3 = \cdots = t_s = 1$. بنابراین $xg_ix^{-1} \in P_i$ و درنتیجه $P_i$ نرمال است. بنابراین $G$ پوچتوان است. □

دو قضیه‌ی قبل را در نتیجه‌ی زیر خلاصه می‌کنیم.

**نتیجه ۲-۳-۲۴.** گروه $G$ پوچتوان است اگروتنها اگر برای هر $a, b \in G$ به‌طوری که $\gcd(o(a), o(b)) = 1$ داشته باشیم $o(ab) = o(a)o(b)$.

## ۲-۴ گروه‌های ابرحل‌پذیر

در بخش‌های پیشین این فصل مقدماتی را در مورد گروه‌های CLT ثابت کردیم، از جمله اینکه هر گروه ابرحل‌پذیر CLT است. در این بخش به بررسی بیشتر گروه‌های ابرحل‌پذیر می‌پردازیم.

**لم ۲-۴-۱.** فرض کنید $G$ یک گروه باشد. دراین‌صورت گزاره‌های زیر باهم معادل‌اند

**الف.** هر زیرگروه $G$، CLT است.

**ب.** اگر $H \leq G$، آنگاه برای هر عدد اول $p$ به‌طوری که $p \mid |H|$، زیرگروه $K < H$ وجود دارد، به‌طوری که $[H : K] = p$.

**برهان.** ابتدا فرض کنید هر زیرگروه $G$، CLT باشد. دراین‌صورت اگر $p$ عددی اول باشد به‌طوری که $p \mid |H|$، آنگاه $|H|/p$ شمارنده‌ای از $|H|$ است. بنابر فرض می‌توان نتیجه گرفت $H$ دارای زیرگروهی از مرتبه‌ی $|H|/p$ مانند $K$ است. واضح است که $[H : K] = p$.

به عکس فرض کنید گزاره (ب) برقرار باشد. فرض کنید $H$ زیرگروهی دلخواه از $G$ باشد و همچنین فرض کنید $n$ شمارنده‌ای از $|H|$ باشد. دراین‌صورت عدد صحیح $m$ وجود دارد به‌طوری که $|H| = nm$. فرض کنید $p_1p_2 \ldots p_r$ تجزیه $m$ به عوامل اول متمایز باشد. دراین‌صورت $H$ دارای زیرگروهی مانند $H_1$ از شاخص $p_1$ است. درنتیجه $|H_1| = np_2 \ldots p_r$. بنابراین به‌طور مشابه بنابر فرض، $H_1$ دارای زیرگروهی مانند $H_2$ با شاخص $p_2$ است. با تکرار همین روند برای هر $i = 2, 3, \ldots, r$، زیرگروه $H_i$ با شاخص $p_i$ از $H_{i-1}$ می‌توان یافت. اکنون زیرگروه $H_r$ را درنظر بگیرید، می‌توان دریافت که

$$[H : H_r] = [H : H_1][H_1 : H_2] \cdots [H_{r-1} : H_r] = p_1 \cdots p_r = m.$$

درنتیجه $H_r$ یک زیرگروه از $H$ با مرتبه‌ی $n$ است. پس $H$ زیرگروهی CLT از $G$ است و چون $H$ به طور دلخواه انتخاب شده بود گزاره‌ی (الف) ثابت می‌شود. $\square$

**قضیه ۲-۴-۲.** $G$ گروهی ابرحل‌پذیر است اگر و تنها اگر برای هر زیرگروه $H$ از $G$ و به ازای هر شمارنده‌ی اول $H$ مانند $p$، $H$ دارای زیرگروهی از شاخص $p$ باشد.

**برهان.** به قضیه‌ی ۳-۴ از منبع [۱۴] مراجعه کنید. $\square$

قضیه‌ی فوق منجر به نتیجه‌ی مهم زیر می‌شود که راهی برای شناسایی گروه‌های ابرحل‌پذیر به ما می‌دهد. علاوه برآن دسته‌ای از گروه‌ها را مشخص می‌کند که علاوه برآنکه خودش یک گروه CLT است هر زیرگروه آن نیز CLT است (در حالت کلی زیرگروه یک گروه CLT یک گروه CLT نیست).

**نتیجه ۳-۴-۲.** گروه $G$ ابرحل‌پذیر است اگر و تنها اگر هر زیرگروه $G$، CLT باشد.

**برهان.** این قضیه نتیجه‌ی واضح قضیه‌ی قبل و قسمت (ب) از لم ۱-۴-۲ است. $\square$

اکنون با استفاده از تعاریف و قضایایی که در این بخش و بخش پیش ثابت کردیم به مطالعه‌ی بیشتر گروه‌های ابرحل‌پذیر می‌پردازیم. یادآوری می‌کنیم که اگر $G$ یک گروه باشد، آنگاه کوچکترین مضرب مشترک تمامی عناصر $G$ را با $\exp(G)$ نمایش می‌دهیم.

**تعریف ۴-۴-۲.** فرض کنید $p$ یک عدد اول دلخواه باشد. دراین‌صورت گروه $G$ را به طور سره $p$-بسته نامیده می‌شود هرگاه دارای $p$- زیرگروه سیلوی نرمال $P$ باشد به‌طوری که $\exp(G/P) \mid p-1$.

**تعریف ۵-۴-۲.** گروه آبلی $G$ را یک $p$-گروه آبلی مقدماتی گوییم، هرگاه مرتبه‌ی هر عنصر نابدیهی آن $p$ باشد به‌طوری که $p$ عددی اول است.

**لم ۶-۴-۲.** اگر $G$ حل‌پذیر باشد، آنگاه برای عدد اول $p$ زیرگروه نرمال مینیمال $N$ از $G$ وجود دارد به‌طوری که $N$ یک $p$-گروه آبلی مقدماتی است.

**برهان.** به قضیه‌ی ۱۰-۰ از منبع [۱۴] مراجعه کنید. $\square$

**لم ۷-۴-۲.** فرض کنید $N$ یک زیرگروه نرمال مینیمال از گروه $G$ باشد و برای عدد اول $p$، $N$ یک $p$-زیرگروه آبلی مقدماتی باشد. دراین‌صورت $|N| = p$ اگر و تنها اگر $G/C_G(N)$ آبلی باشد و $\exp(G/C_G(N)) \mid p-1$.

**برهان.** به قضیه‌ی ۵-۰ از منبع [۱۴] مراجعه کنید. $\square$

**قضیه ۸-۴-۲.** اگر برای عدد اول $p$، $G$ یک گروه به طور سره $p$-بسته باشد، آنگاه $G$ ابرحل‌پذیر است.

**برهان.** قضیه را با استقرا روی مرتبه‌ی $G$ ثابت می‌کنیم. فرض کنید $G$ به‌طور سره $p$-بسته باشد و $S \in \mathrm{Syl}_p(G)$. دراین‌صورت اگر $|S| = ۱$، آنگاه $G/S$ آبلی است و $\exp(G/S) \mid p - ۱$. از آنجا که $|S| = ۱$، $G \cong G/S$. بنابراین می‌توان نتیجه گرفت که $G$ آبلی است. بنابراین $G$ ابرحل‌پذیر است. فرض کنید $|S| \neq ۱$. دراین‌صورت بنابر قضیه ۴-۲-۱، $Z(S)$ نابدیهی است. همچنین می‌دانیم $Z(S)$ یک زیرگروه مشخصه است و بنابر فرض اولیه $S$ یک زیرگروه نرمال از $G$ است، درنتیجه $Z(S)$ یک زیرگروه نرمال از $G$ است. حال چونکه $Z(S)$ در $G$ نرمال است یک زیرگروه نرمال مینیمال چون $N$ از $G$ وجود دارد به‌طوری که $N \leq Z(S)$. بنابراین $S \leq C_G(N)$. بنابر لم ۶-۴-۲، $N$ یک $p$-گروه آبلی مقدماتی است. بنابر فرض $\exp(G/S) \mid p - ۱$ و چون بنابر قضیه‌ی سوم یکریختی

$$G/C_G(N) \cong \frac{G/S}{C_G(N)/S}.$$

درنتیجه $G/C_G(N)$ یک گروه آبلی است که $\exp(G/C_G(N)) \mid p - ۱$. درنتیجه بنابر لم ۷-۴-۲، $|N| = p$. بنابراین $N$ یک گروه دوری از مرتبه‌ی $p$ است. چونکه $N$ نابدیهی است، $|G/N| < |G|$. از آنجا که $S$ یک $p$-گروه متناهی است، $|S| = p^n$ و درنتیجه $|S/N| = p^{n-۱}$. بنابر فرض اولیه می‌دانیم که $S$ یک زیرگروه نرمال از $G$ است. بنابراین $S/N$ یک زیرگروه نرمال از $G/N$ است. بنابراین $S/N$ ، $p$-زیرگروه سیلوی یکتای $G/N$ است. بنابر قضیه‌ی سوم یکریختی

$$\frac{G/N}{S/N} \cong G/S.$$

بنابر فرض $G/S$ یک گروه آبلی است به‌طوری که $\exp(G/S) \mid p - ۱$. بنابراین $G/N$ به طور سره $p$-بسته است. بنابر فرض استقرا $G/N$ ابرحل‌پذیر است. از طرفی $N$ دوری و درنتیجه ابرحل‌پذیر است، پس بنابر لم ۳۳-۳-۱ می‌توان نتیجه گرفت که $G$ ابرحل‌پذیر است. □

قضیه‌ی قبل منجر به نتیجه‌ای مهمی در خصوص گروه‌های CLT می‌شود.

**نتیجه ۹-۴-۲.** فرض کنید $G$ یک گروه دلخواه از مرتبه‌ی $qp^r$ که در آن $p$ و $q$ دو عدد اول هستند به‌طوری که $q \mid p - ۱$. دراین‌صورت $G$ یک گروه CLT است. در حالت خاص هر گروه از مرتبه $۲p^r$ یک گروه CLT است.

**برهان.** فرض کنید $S \in \mathrm{Syl}_p(G)$. دراین‌صورت $n_p \mid q$ و درنتیجه $n_p \mid p - ۱$. بنابر قضیه‌ی سوم سیلو

$$n_p \equiv ۱ \mod p.$$

پس می‌توان نتیجه گرفت که $n_p = ۱$. درنتیجه $P \trianglelefteq G$. از آنجا که $|G/S| = q$ درنتیجه $G/S$ دوری و بنابراین آبلی است. از طرفی مرتبه‌ی هر عنصر از $G/S$ ، $p - ۱$ را عاد می‌کند. پس $\exp(G/S) \mid p - ۱$. بنابر قضیه‌ی قبل $G$ ابرحل‌پذیر است و بنابر قضیه‌ی ۵-۲-۲، $G$ یک گروه CLT است. □

قضیه‌ی بعد متعلق به ریاضیدان معروف آلمانی، برترام هوپرت[1] است. در واقع قضیه‌ی بعد یکی از مهمترین محک‌ها برای شناسایی گروه‌های ابرحل‌پذیر است.

**قضیه ۱۰-۴-۲ (هوپرت،۱۹۵۴).** اگر شاخص هر زیرگروه ماکسیمال $G$ عددی اول باشد، آنگاه $G$ ابرحل‌پذیر است.

**برهان.** به قضیه‌ی ۶-۴ از منبع [۱۴] مراجعه کنید. □

در قضیه‌ی بعد عکس قضیه‌ی هوپرت را ثابت میکنیم، اما پیش از آن نیازمند لم زیر هستیم.

**لم ۱۱-۴-۲.** **الف.** گروه $G$ ابرحل‌پذیر است اگروتنها اگر $G$ دارای یک سری ابرحل‌پذیری باشد، به‌طوری که عامل های آن از مرتبه‌ی عدد اول هستند.

**ب.** اگر $G$ یک گروه ابرحل‌پذیر دلخواه باشد، آنگاه $G$ دارای یک زیرگروه دوری نرمال از مرتبه‌ی عدد اول است.

**ج.** هر گروه ساده و ابرحل‌پذیر، دوری و از مرتبه‌ی عدد اول است.

**برهان.** به قضیه‌ی ۵-۱ از منبع [۱۴] مراجعه کنید. □

**قضیه ۱۲-۴-۲.** اگر $G$ یک گروه ابرحل‌پذیر باشد ، آنگاه هر زیرگروه ماکسیمال $G$ دارای شاخص اول است.

**برهان.** فرض کنید $H$ یک زیرگروه ماکسیمال از گروه $G$ باشد. دراین‌صورت اگر $H$ نرمال باشد، آنگاه $G/H$ ابرحل‌پذیر و ساده است. پس بنابر قسمت (ج) می‌توان نتیجه گرفت که $G/H$ دوری و از مرتبه‌ی اول است. این یعنی $H$ دارای شاخص اول است. فرض کنید $H$ یک زیرگروه نرمال از $G$ نباشد. قرار دهید $K = H_G$، که در آن $H_G$ هسته‌ی $H$ نامیده می‌شود و به صورت زیر تعریف می‌شود

$$H_G = \bigcap_{x \in G} xHx^{-1}.$$

دراین‌صورت $H/K$ یک زیرگروه ماکسیمال از گروه ابرحل‌پذیر $G/K$ است و همچنین

$$[G : H] = [G/K : H/K].$$

بنابراین بدون کاسته شدن از کلیت می‌توان فرض کرد که $K = \{1\}$. قسمت (ب) لم قبل نشان می‌دهد که $G$ دارای یک زیرگروه نرمال و دوری از مرتبه‌ی اول مانند $A$ است. پس هر زیرگروه $A$ دوری است. از آنجا که

[1] Bertram Huppert

$H_G = K = \{۱\}$، $H \cap A = \{۱\}$. بنابراین $H < AH$. بنابر فرض $H$ ماکسیمال است، درنتیجه $AH = G$. بنابراین

$$[G : H] = [AH : H] = [A : A \cap H] = [A : \{۱\}] = |A|.$$

پس $[G : H]$ برابر عددی اول است. □

قضیه‌ی هوپرت و قضیه‌ی قبل منجر به نتیجه‌ی مهم زیر می‌شود.

**نتیجه ۲-۴-۱۳.** گروه $G$ ابرحل‌پذیر است اگر و تنها اگر هر زیرگروه ماکسیمال $G$ دارای شاخص اول باشد.

به عنوان یکی از مهمترین نتایج این بخش نشان داده شد که گروه $G$ ابرحل‌پذیر است اگر و تنها اگر هر زیرگروه آن CLT باشد. جان‌هامفریز[۱] نتیجه‌ی مشابهی را در منبع [۱۰] اثبات کرد که در ادامه بیان می‌شود.

**قضیه ۲-۴-۱۴** (هامفریز،۱۹۷۴). اگر $G$ یک گروه از مرتبه‌ی فرد با این ویژگی باشد که هر گروه خارج قسمتی $G$ یک گروه CLT باشد، آنگاه $G$ ابرحل‌پذیر است.

اگر در قضیه‌ی قبل شرط از مرتبه‌ی فرد بودن را حذف کنیم گزاره‌ی بالا دیگر برقرار نیست. درواقع $S_۴$ یک گروهی است که تمام گروه‌های خارج قسمتی آن CLT هستند، اما $S_۴$ یک گروه CLT نیست. بنابراین شرط از مرتبه‌ی فرد بودن در قضیه قبل لازم است.

**نتیجه ۲-۴-۱۵.** اگر $G$ یک گروه از مرتبه‌ی فرد باشد به‌طوری که هر گروه خارج قسمتی $G$ یک گروه CLT باشد، آنگاه $G$ یک گروه CLT است.

یکی دیگر از محک‌های مهم برای ابرحل‌پذیری توسط دی . اچ . مکلین[۲] در سال ۱۹۵۷ ثابت شد. در واقع مکلین در منبع [۱۳] نشان داد که ابرحل‌پذیر بودن یک گروه معادل با این است که بین هر دو زیرگروه مشخصه زیرگروهی از هر مرتبه‌ی ممکن وجود داشته باشد.

**قضیه ۲-۴-۱۶** (مکلین ،۱۹۵۷). گروه $G$ ابرحل‌پذیر است اگر و تنها اگر بین هر دو زیرگروه مشخصه $K < H$ زیرگروهی از هر مرتبه‌ی ممکن وجود داشته باشد.

قضیه‌ی مکلین منجر به نتیجه مهم زیر می‌شود.

**نتیجه ۲-۴-۱۷.** گروه $G$، CLT است اگر و تنها اگر بین هر دو زیرگروه مشخصه $K < H$ زیرگروهی از هر مرتبه‌ی ممکن وجود داشته باشد.

---

[۱] John Humphreys [۲] D. H . Maclain

## ۲-۵ گروه‌های ACLT و CCLT

در این بخش نوع خاصی از گروه‌های CLT که به گروه‌های CCLT و گروه‌های ACLT شناخته می‌شوند را به طور کامل طبقه‌بندی می‌کنیم و خواص آنرا بررسی می‌کنیم.

**تعریف ۲-۵-۱.** گروه $G$ از مرتبه‌ی $n$ را CCLT نامیده می‌شود، هرگاه به ازای هر عدد صحیح مثبت $d < n$ به‌طوری که $d \mid n$، $G$ دارای یک زیرگروه دوری از مرتبه‌ی $d$ باشد.

گروه های دوری ساده‌ترین گروه‌های CCLT هستند. درواقع اگر $G$ یک گروه دوری از مرتبه‌ی $n$ باشد، آنگاه به ازای هر $d$ به‌طوری که $d \mid n$ ، $G$ تنها دارای یک زیرگروه از مرتبه‌ی $d$ است.

**تعریف ۲-۵-۲.** گروه $G$ از مرتبه‌ی $n$ را ACLT نامیده می‌شود، هرگاه به ازای هر عدد صحیح مثبت $d < n$ به‌طوری که $d \mid n$، $G$ دارای زیرگروهی آبلی از مرتبه‌ی $d$ باشد.

**تعریف ۲-۵-۳.** عدد صحیح مثبت $n$ را دوری (آبلی، ACLT، CCLT، CLT) نامیده می‌شود، هرگاه هر گروه از مرتبه‌ی $n$ دوری (آبلی، ACLT، CCLT، CLT) باشد.

کوچکترین عدد صحیح مثبت $n$ که عدد دوری نیست اما عدد CCLT است؛ ۴ است و کوچکترین عدد صحیح مثبت $n$ که عدد آبلی نیست اما عدد ACLT است؛ ۶ است .

**قضیه ۲-۵-۴.** عدد صحیح مثبت $n$ عدد CCLT است اگر وتنها اگر $n$ یک عدد دوری باشد یا $n = pq$ به‌طوری که $p$ و $q$ اعداد اول دلخواه هستند(نه لزوماً متمایز).

**برهان.** اگر $n$ یک عدد دوری باشد یا $n = p^{۲}$ یا $n = pq$ به طوری که $p$ و $q$ اعداد اول متمایز باشند، آنگاه واضح است که $n$ عدد CCLT است.

برای اثبات عکس این گزاره برای هر عدد $n$ به‌طوری که عدد دوری نباشد و به صورت $p^{۲}$ و $pq$ نباشد، گروهی غیر CCLT مثال می‌زنیم. فرض کنید $n = p^k$ و $k \geq ۳$ دراین‌صورت گروه $G = C_p \times C_p \times C_{p^{k-۲}}$ شامل زیرگروهی دوری از مرتبه‌ی $p^{k-۱}$ نیست. فرض کنید $n$ یک عدد صحیح مثبت خالی از مربع به شکل $n = p_۱p_۲ \dots p_k$، به‌طوری که $k \geq ۳$. از آنجا که $n$ عدد نادوری است، $\gcd(n, \phi(n)) > ۱$ که در آن $\phi$ تابع اویلر است. در نتیجه $۱ \leq i, j \leq k$ وجود دارد به‌طوری که $p_i \mid p_j - ۱$. گروه $G = H \times C_{\frac{n}{p_ip_j}}$ که در آن $H$ یک گروه غیر آبلی از مرتبه‌ی $p_ip_j$ است را درنظر بگیرید. دراین‌صورت به راحتی قابل مشاهده است که $G$ زیرگروه آبلی از مرتبه‌ی $p_ip_j$ ندارد. در نتیجه $G$ زیرگروهی از مرتبه‌ی $p_ip_j$ ندارد. اکنون اگر $n = p_۱^{a_۱}p_۲^{a_۲} \dots p_k^{a_k}$ به طوریکه $a_۱, \dots, a_k \geq ۲$، آنگاه

$$G = (C_{p_j} \times C_{p_j^{a_j-۱}}) \times C_{p_j{}^s}$$

که در آن $s = \frac{a_۱a_۲\ldots a_k}{a_j}$، دارای زیرگروه دوری از مرتبه‌ی $p_j^{a_j}$ نیست. □

یادآوری می‌کنیم که عدد طبیعی $n$ دوری است اگر و تنها اگر $\gcd(n, \phi(n)) = ۱$. پس می‌توان قضیه‌ی قبل را در قالب نتیجه به صورت زیر بازنویسی کنیم.

**نتیجه ۲-۵-۵.** عدد صحیح مثبت $n$ عدد CCLT است اگر وتنها اگر $\gcd(n, \phi(n)) = ۱$ یا $n = pq$ به‌طوری که $p$ و $q$ اعداد اول دلخواه هستند(نه لزوماً متمایز).

**تعریف ۲-۵-۶.** گروه $G$ را فرادوری می‌نامیده می‌شود هرگاه $G$ دارای زیرگروه دوری نرمال مانند $H$ باشد به‌طوری که $G/H$ دوری باشد.

واضح است که هر گروه فرادوری یک گروه ابرحل‌پذیر است. در واقع

$$\{۱\} \trianglelefteq H \trianglelefteq G$$

یک سری ابرحل‌پذیری برای $G$ است.

**قضیه ۲-۵-۷.** هر گروه CCLT فرادوری است.

**برهان.** فرض کنید $p$ کوچکترین عدد اولی باشد به‌طوری که $p \mid |G|$. دراین‌صورت از آنجا که $G$ یک گروه CCLT است، $G$ دارای زیرگروه دوری از مرتبه‌ی $n/p$ مانند $H$ است. واضح است که شاخص $H$ برابر $p$ است. با توجه به انتخاب ما از $p$ می‌توان نتیجه گرفت که $H$ در $G$ نرمال است و واضح است که $G/H$ دوری است. بنابراین $G$ یک گروه فرادوری است. □

در بخش‌های گذشته از این فصل نشان دادیم که هر گروه ابرحل‌پذیر، CLT است. سوالی که آنجا پیش آمد این بود که کدام زیررده‌ها از رده‌ی گروه‌های CLT ابرحل‌پذیر است؟ بنابر قضیه‌ی قبل هر گروه CCLT فرادوری است و از آنجا که هر گروه فرادوری، ابرحل‌پذیر است، می‌توان نتیجه گرفت هر گروه CCLT ابرحل‌پذیر است. این نکته را در قالب نتیجه‌ی بعد بیان می‌کنیم.

**نتیجه ۲-۵-۸.** هر گروه CCLT ابرحل‌پذیر است.

**تعریف ۲-۵-۹.** گروه $G$ را یک $Z$-گروه می‌نامیم هرگاه هر زیرگروه سیلوی آن دوری باشد.

از تعریف گروه CCLT به راحتی نتیجه می‌شود که هر گروه CCLT یک $Z$-گروه است. اما عکس این مطلب درست نیست. به عنوان مثال نقض گروه دووجهی $D_{۱۵}$ یک $Z$-گروه است اما یک گروه CCLT نیست.

**قضیه ۲-۵-۱۰.** هر دو زیرگروه از یک مرتبه از یک $Z$-گروه یکریخت هستند.

**برهان.** به منبع [۱۸] مراجعه کنید. □

**تعریف ۱۱-۵-۲.** گروه $G$ را یک زیرگروه غیردوری مینیمال می‌نامیم هرگاه $G$ دوری نباشد اما هر زیرگروه $G$ دوری باشد.

**نتیجه ۱۲-۵-۲.** فرض کنید $G$ یک گروه CCLT باشد. اگر $G$ نادوری و یک $p$-گروه نباشد، آنگاه $G$ یک گروه غیردوری مینیمال است.

در بخش‌های پیشین این فصل نشان دادیم زیرگروه یک گروه CLT لزوماً CLT نیست. در قضیه‌ی بعد نشان می‌دهیم این خاصیت برای گروه‌های CCLT برقرار است.

**قضیه ۱۳-۵-۲.** هر زیرگروه یک گروه CCLT، یک گروه CCLT است.

**برهان.** فرض کنید $G$ یک گروه CCLT باشد.
ابتدا فرض کنید $G$ یک $p$-گروه از مرتبه‌ی $p^n$ باشد. واضح است که اگر $n \leq ۳$، آنگاه قضیه برقرار است. فرض کنید $n \geq ۴$. قضیه را با استفاده از برهان خلف ثابت می‌کنیم. فرض کنید عدد صحیح مثبت $k$، بزرگترین عددی باشد به‌طوری که $G$ دارای یک زیرگروه غیر CCLT از مرتبه‌ی $p^k$ باشد. این زیرگروه را $H$ بنامید. بنابر قضیه‌ی سیلو $G$ دارای یک زیرگروه از مرتبه $p^{k+۱}$ مانند $N$ است. از نوع انتخاب $k$ می‌توان نتیجه گرفت که $N$ یک گروه CCLT است. پس $N$ دارای یک زیرگروه دوری از مرتبه $p^k$ مانند $K$ است. دراین‌صورت $K \trianglelefteq N$ و درنتیجه $HK \leq N$ و

$$|HK| = \frac{|H||K|}{|H \cap K|} = p^{۲k-\alpha} \leq p^{k+۱}$$

که درآن $|H \cap K| = \alpha$. همچنین از آنجا که $H$ دوری نیست، می‌توان نتیجه گرفت $HK = N$ (درغیر این‌صورت $HK$ یک گروه دوری است و بنابراین $H$ نیز یک گروه دوری است، که با فرض اولیه درتناقض است.).
بنابراین $\alpha = k - ۱$. پس $H$ دارای یک زیرگروه دوری از مرتبه‌ی $p^{k-۱}$ است که با فرض اولیه در تناقض است.
اکنون فرض کنید $G$ یک $p$-گروه نباشد. بنابر نتیجه‌ی قبل $G$ یک گروه نادوری مینیمال است. پس هر زیرگروه از آن دوری و درنتیجه CCLT است. □

در حالت کلی خارج قسمت یک گروه CLT یک گروه CLT نیست. در قضیه‌ی بعد نشان می‌دهیم این خاصیت برای گروه‌های CCLT برقرار است.

**قضیه ۱۴-۵-۲.** هر گروه خارج قسمتی یک گروه CCLT خود نیز CCLT است.

**برهان.** فرض کنید $G$ یک گروه CCLT و $N$ یک زیرگروه نرمال آن باشد.
ابتدا فرض کنید $G$ یک $p$-گروه از مرتبه $p^n$ و $|N| = p^m$. دراین‌صورت اگر $m = n$ یا $m = n - ۱$، آنگاه

قضیه واضح است. پس می‌توان فرض کرد $m \leq n-۲$. از آنجا که $G$ یک گروه CCLT است دراین‌صورت $G$ دارای یک عنصر از مرتبه‌ی $p^{n-۱}$ مانند $g$ است. بنابراین $o(gN)=p^k$ که در آن $k \leq n-m$. درنتیجه

$$o(g^{p^k})=\frac{o(g)}{\gcd(o(g),p^k)}=\frac{p^{n-۱}}{p^k}=p^{n-k-۱}\leq p^m.$$

بنابراین $k \geq n-m-۱$. این بدان معناست که $k=n-m-۱$ یا $k=n-m$. درنتیجه در هر دو حالت $G/N$ یک گروه CCLT است.

اکنون فرض کنید $G$ یک $p$-گروه نباشد. دراین‌صورت بنابر نتیجه ۲-۵-۱۲، هر زیرگروه سره از $G$ دوری است. بنابر قضیه تناظر هر زیرگروه سره از $G/N$ دوری است. درنتیجه $G/N$ یک گروه CCLT است. $\square$

**لم ۲-۵-۱۵.** فرض کنید $H$ و $K$ دوگروه از مرتبه‌ی به ترتیب $m$ و $n$ باشند. دراین‌صورت اگر $\gcd(m,n)=۱$، آنگاه تمامی زیرگروه‌های $H\times K$ به صورت $H_۱\times K_۱$ است که در آن $H_۱$ و $K_۱$ به ترتیب زیرگروه‌هایی از $H$ و $K$ هستند.

**برهان.** فرض کنید $S$ یک زیرگروه از $H\times K$ باشد. دراین‌صورت

$$S=\{(h_i,k_i)\mid i\in I\}$$

که در آن $I$ یک زیرمجموعه‌ی متناهی از اعداد صحیح مثبت است. فرض کنید

$$H_۱:=\{h_i\mid i\in I\}$$

و

$$K_۱:=\{k_i\mid i\in I\}.$$

دراین‌صورت واضح است که $S\subseteq H_۱\times K_۱$. فرض کنید $(h_۱,k_۱)\in H_۱\times K_۱$. دراین‌صورت $h\in H$ و $k\in K$ وجود دارند به‌طوری که $(h,k_۱),(h_۱,k)\in S$. فرض کنید $r$ مرتبه‌ی $k$ باشد. دراین‌صورت برای هر عدد صحیح $a$، $(h_۱^{ar},۱)$ عنصری از $S$ است. از آنجا که $\gcd(m,n)=۱$ و $r\mid m$ می‌توان نتیجه گرفت $\gcd(r,o(h_۱))=۱$. درنتیجه اعداد صحیحی مانند $u$ و $v$ وجود دارند به‌طوری که

$$uo(h_۱)+vr=۱.$$

بنابراین $h_۱^{ar}=h_۱$. درنتیجه با انتخاب $a=v$ داریم $(h_۱,۱)\in S$. به طور مشابه می‌توان نشان داد که $(۱,k_۱)\in S$. بنابراین $(h_۱,k_۱)\in S$. درنتیجه $H_۱\times K_۱\subseteq S$. بنابراین $S=H_۱\times K_۱$. $\square$

**قضیه ۱۶-۵-۲.** فرض کنید $H$ و $K$ دو گروه از مرتبه‌ی به ترتیب $m$ و $n$ باشند. اگر $H \times K$ یک گروه CCLT باشد، آنگاه هر دو گروه $H$ و $K$ گروه‌های دوری هستند. به عکس اگر $H$ و $K$ دو گروه دوری باشند، آنگاه $H \times K$ یک گروه CCLT است اگر وتنها اگر یکی از دو شرط زیر برقرار باشد

**الف.** $\gcd(m,n) = ۱$.

**ب.** اگر $\gcd(m,n) \neq ۱$، آنگاه $H \times K \cong C_p \times C_{p^k}$ که درآن $p$ یک عدد اول و $k$ یک عدد صحیح مثبت است.

**برهان.** فرض کنید $G = H \times K$ یک گروه CCLT و $H$ یک گروه نادوری باشد. بنابر لم قبل $H \times \{۱\}$ تنها زیرگروه از مرتبه‌ی $m$ از $G$ است، بنابراین $G$ دارای زیرگروه دوری از مرتبه $m$ نیست. که این با شرط CCLT بودن $G$ درتناقض است. اگر $\gcd(m,n) \neq ۱$ و $p$ یک عدد اول باشد به‌طوری که $p \mid \gcd(m,n)$، آنگاه $m = p^r x$ و $n = p^s y$ به‌طوری که

$$\gcd(p,x) = \gcd(p,y) = ۱.$$

در ادامه نشان می‌دهیم که $G$ دارای زیرگروه دوری از مرتبه‌ی $p^{\max(r,s)+۱}$ نیست. بدون کاسته شدن از کلیت فرض کنید $r \geq s$. می‌دانیم

$$|G| = mn = p^{r+s}xy.$$

بنابراین از آنجا که $G$ یک گروه CCLT است، $G$ دارای یک زیرگروه از مرتبه‌ی $p^{r+۱}$ است. درنتیجه $G$ دارای عنصری مانند $u = (h,k)$ از مرتبه‌ی $p^{r+۱}$ است.بنابراین

$$(۱,۱) = u^{p^{r+۱}} = (h^{p^{r+۱}}, k^{p^{r+۱}}).$$

درنتیجه $o(h) \mid p^{r+۱}$ و $o(k) \mid p^{r+۱}$. از طرفی $h \in H$ و $|H| = p^r x$. درنتیجه $o(h) \leq p^r$ و به طور مشابه $o(k) \leq p^s \leq p^r$. بنابراین $o(u) \leq p^r$، که این با فرض $o(u) = p^{r+۱}$ در تناقض است. درنتیجه $G$ فاقد زیرگروه دوری از مرتبه‌ی $p^{r+۱}$ است، که این با فرض CCLT بودن $G$ درتناقض است.
به عکس فرض کنید $H$ و $K$ گروه‌های دوری باشند. اگر $\gcd(m,n) = ۱$، آنگاه $H \times K$ یک گروه دوری است و بنابراین $H \times K$ یک گروه CCLT است.اگر $\gcd(m,n) \neq ۱$ و $p$ عدد اولی باشد به‌طوری که $p \mid \gcd(m,n)$، آنگاه $m = p^r x$ و $n = p^s y$ به‌طوری که

$$\gcd(p,x) = \gcd(p,y) = ۱.$$

حال ادعا می‌کنیم که $xy = ۱$ و $r = ۱$ یا $s = ۱$. فرض کنید $xy \neq ۱$ یا $r,s > ۱$. بنابراین $H \times K$ دارای زیرگروه نادوری از مرتبه‌ی $p^{\max(r,s)+۱}$ است که این با فرض CCLT بودن $H \times K$ در تناقض است. $\square$

در ادامه به بررسی گروه‌های ACLT می‌پردازیم.

**قضیه ۲-۵-۱۷.** عدد صحیح مثبت $n$ یک عدد ACLT است اگر و تنها اگر یکی از شرایط زیر برقرار باشد.

**الف.** $n$ یک عدد آبلی باشد.

**ب.** $n = pq$ به‌طوری که $p$ و $q$ دو عدد اول متمایز باشند.

**ج.** $n = p^m$ به‌طوری که $p$ یک عدد اول باشد و $m = ۰, ۱, ۲, ۳, ۴$.

**د.** $n = p^۲q$ به‌طوری که $p$ و $q$ دو عدد اول باشد و یکی از دو شرط زیر برقرار باشد

**۱)** $p = ۲$ و $q \in \{۴k + ۳ \mid k \in \mathbb{N}\}$.

**۲)** $p \mid q - ۱$، $p^۲ \nmid q - ۱$، $p \nmid q + ۱$ و $q \nmid p^۲ - ۱$.

**برهان.** به منبع [۱۸] مراجعه کنید. □

**تعریف ۲-۵-۱۸.** گروه $G$ یک گروه ناآبلی مینیمال نامیده می‌شود هرگاه $G$ یک گروه غیر آبلی باشد و هر زیرگروه $G$ آبلی باشد.

**تعریف ۲-۵-۱۹.** گروه $G$ را فراآبلی نامیده می‌شود. هرگاه $G$ یک زیرگروه آبلی نرمال $A$ باشد. به‌طوری که $G/A$ نیز آبلی باشد.

فرض کنید $G$ یک گروه ACLT از مرتبه‌ی $n$ و $p$ کوچکترین عدد اولی باشد به‌طوری که $p \mid n$. فرض کنید $A$ زیرگروه $G$ از مرتبه $\frac{n}{p}$ باشد دراین‌صورت چون $p$ کوچکترین شمارنده اول $|G|$ است، $A$ نرمال است و چون $|G/A| = p$، $G/A$ آبلی است و درنتیجه $G$ فراآبلی است. این خاصیت را در قالب قضیه در ادامه می‌آوریم.

**قضیه ۲-۵-۲۰.** هر گروه CCLT فراآبلی است.

**قضیه ۲-۵-۲۱.** فرض کنید $H$ و $K$ دو گروه از مرتبه‌ی به ترتیب $m$ و $n$ باشد. اگر $H \times K$ یک گروه ACLT باشد، آنگاه هر دو گروه $H$ و $K$، ACLT هستند و یکی از این دو یک گروه آبلی است. به عکس فرض کنید $H$ یک گروه ACLT و $K$ یک گروه آبلی باشد، آنگاه $H \times K$ یک گروه ACLT است اگر یکی از شرایط زیر برقرار باشد

**الف.** $H$ یک گروه آبلی باشد.

**ب.** فرض کنید $H$ ناآبلی باشد. دراین‌صورت اگر $p$ یک عدد اول باشد به‌طوری که $p \mid n$، آنگاه $p \mid m$.

**برهان.** ابتدا فرض کنید $H \times K$ یک گروه ACLT باشد. اگر $H$ یک گروه غیر ACLT باشد، آنگاه یک عدد صحیح مثبت مانند $d$ وجود دارد به‌طوری که $d \mid m$ و $H$ دارای یک زیرگروه آبلی از مرتبه‌ی $d$ نیست. بنابراین می‌توان نشان داد که $H \times K$ دارای هیچ زیرگروه آبلی از مرتبه‌ی $d^{k+1}$ که درآن $d^k \mid n$ و $d^{k+1} \nmid n$ ، نیست. فرض کنید $H$ و $K$ گروه‌های ناآبلی باشند. دراین‌صورت واضح است که $H \times K$ دارای هیچ زیرگروه آبلی از مرتبه $\frac{mn}{p}$ به‌طوری که $p$ کوچکترین شمارنده‌ی اول $m$ است، نیست. درنهایت می‌توان گفت $H \times K$ یک گروه ACLT است هرگاه $H$ و $K$ دو گروه ACLT باشد و یکی از این دو آبلی باشد.
به عکس اگر هر دو گروه $H$ و $K$ آبلی باشند. آنگاه واضح است که $H \times K$ آبلی است. بنابراین ACLT است. اگر $H$ یک گروه ناآبلی باشد و $p \mid n$ اما $p \nmid m$، آنگاه $H \times K$ دارای زیرگروه آبلی از مرتبه‌ی $\frac{mn}{p}$ نیست. $\square$

شماری از خاصیت‌های گروه‌های ACLT در ادامه بیان می‌شود. این خواص در منبع [۱۸] اثبات شده‌اند.

**قضیه ۲-۵-۲۲.** اگر $G$ یک گروه ناآبلی و ACLT باشد، آنگاه مرتبه‌ی $G$ حداکثر دو شمارنده‌ی اول دارد.

**قضیه ۲-۵-۲۳.** هر گروه ACLT ابرحل‌پذیر است.

**قضیه ۲-۵-۲۴.** هر زیرگروه یک گروه ACLT مجدداً ACLT است.

# فصل ۳

# گروه‌های NCLT

یادآوری می‌کنیم که گروه $G$ یک گروه NCLT نامیده می‌شود هرگاه در عکس قضیه‌ی لاگرانژ صدق نکند. در این فصل گروه‌های NCLT را بررسی می‌کنیم. گروه‌های NCLT دامنه‌ی محدودتری نسبت به گروه‌های CLT دارند. در این بخش ابتدا نشان می‌دهیم چه موقع یک گروه از مرتبه‌ی $p^۲q^۲$ و یک گروه از مرتبه $pq^۳$ یک گروه NCLT است. در بخش دوم شرایط NCLT بودن گروه $G$ با $|G'| < ۱۶$ را بررسی می‌کنیم.
در این فصل تمامی گروه‌ها متناهی فرض شده است. مطالب این بخش از منابع [۲]، [۳] و [۲۱] انتخاب شده‌اند.

## ۳-۱ گروه‌های NCLT از مرتبه $pq^۳$ و $p^۲q^۲$

**قضیه ۳-۱-۱.** فرض کنید $G$ یک گروه ناآبلی از مرتبه‌ی $p^۲q^۲$ باشد که در آن $p$ و $q$ اعداد اول هستند و $q < p$. دراین‌صورت $G$ یک گروه NCLT است اگر و تنها اگر $q$ فرد باشد و $q \mid p + ۱$

**برهان.** ابتدا فرض کنید $q$ فرد باشد و $q \mid p + ۱$. بنابر قضیه‌ی سوم سیلو

$$n_p \equiv ۱ \mod p \qquad (۳-۱)$$

و $n_p \mid q^۲$. پس $n_p$ می‌تواند برابر یکی از اعداد ۱ یا $q$ یا $q^۲$ باشد. نشان می‌دهیم $n_p = ۱$.
فرض کنید $n_p = q$. دراین‌صورت از (۳-۱) نتیجه می‌شود که $p \mid q - ۱$، که این با فرض $q < p$ در تناقض است.اکنون فرض کنید $n_p = q^۲$. دراین‌صورت $p \mid q^۲ - ۱$. درنتیجه بنابر لم اقلیدس نتیجه می‌شود که $p \mid q+۱$. بنابر فرض می‌دانیم که $q \mid p + ۱$. بنابراین $q = ۲$ و $p = ۳$ یا $q = ۳$ و $p = ۲$ که هردو حالت به تناقض منجر می‌شود. بنابراین $n_p = ۱$ و $P \in \mathrm{Syl}_p(G)$ نرمال است. حال فرض کنید $G$ دارای یک زیرگروه از مرتبه‌ی $pq^۲$

مانند $H$ باشد. دراین‌صورت $Q \in \mathrm{syl}_q(G)$ وجود دارد به‌طوریکه $Q \leq H$. حال بنابر قضیه‌ی سوم سیلو

$$n_q \equiv ۱ \mod q \qquad (۲-۳)$$

و $n_q = ۱$ یا $n_q = p$. اگر $n_q = p$، آنگاه از (۲-۳) نتیجه می‌شود $q \mid p-۱$. از طرفی چون $q \mid p+۱$ می‌توان نتیجه گرفت $q \mid ۲p$ و چون $q$ فرد است به تناقض می‌رسیم. در نتیجه $Q$ در $H$ نرمال است و بنابراین $N_G(Q)$ برابر $H$ یا برابر کل $G$ است. بنابراین $[G:N_G(Q)] = ۱$ یا $[G:N_G(Q)] = p$. این به این معنی است که تعداد مزدوج‌هایی $Q$ برابر ۱ یا برابر $p$ است. اگر $n_q(G) = p$، آنگاه

$$p \equiv ۱ \mod q.$$

که این با شرط اولیه در تناقض است. پس $Q$ در $G$ نرمال است. حال چون $P \cap Q = \{۱\}$ و $G = PQ$ دراین‌صورت $G \cong Q \times P$. درنتیجه $G$ آبلی است که این با فرض ناآبلی بودن $G$ در تناقض است. پس $G$ فاقد زیرگروهی از مرتبه‌ی $pq^۲$ است. درنتیجه $G$ یک گروه NCLT است.

به عکس فرض کنید $G$ یک گروه NCLT باشد. اگر $q = ۲$، آنگاه بنابر نتیجه‌ی ۹-۴-۲، $G$ یک گروه CLT است. که این با فرض اولیه درتناقض است. بنابراین $q$ فرد است. همانطور که در بخش اول اثبات نشان دادیم ، $G$ دارای یک $p$-زیرگروه سیلوی نرمال مانند $P$ است. فرض کنید $Q$ یک زیرگروه از مرتبه‌ی $q$ باشد. دراین‌صورت $PQ$ یک زیرگروه از مرتبه‌ی $p^۲q$ است. اگر $G$ شامل یک زیرگروه از مرتبه‌ی $pq^۲$ باشد، آنگاه اشتراک این زیرگروه با یک زیرگروه از مرتبه‌ی $p^۲q$، یک زیرگروه از مرتبه‌ی $pq$ است. بنابراین $G$ دارای زیرگروه از تمامی مراتب ممکن است. که این برخلاف فرض NCLT بودن $G$ است. بنابراین $G$ فاقد زیرگروه نرمال از مرتبه‌ی $p$ است، زیرا درغیراین‌صورت $G$ شامل یک زیرگروه از مرتبه‌ی $pq^۲$ خواهد بود. اگر $P$ دوری باشد، آنگاه هر زیرگروه از مرتبه‌ی $p$ مانند $H$ در $P$ مشخصه است و از آنجا که $P \trianglelefteq G$، $H$ یک زیرگروه نرمال از $G$ از مرتبه‌ی $p$ است. اما می‌دانیم $G$ فاقد زیرگروه نرمال از مرتبه‌ی $p$ است. درنتیجه $P$ دوری نیست و بنابراین $G$ دارای $p+۱$ زیرگروه از مرتبه‌ی $p$ است. حال هر زیرگروه از مرتبه‌ی $p$ در $P$ نرمال است. اگر $H$ یک زیرگروه از مرتبه‌ی $p$ باشد، آنگاه $P = N_P(H) \leq N_G(H)$. درنتیجه $|N_G(H)| \geq p^۲$ و بنابراین

$$۱ < [G:N_G(H)] \leq q^۲.$$

بنابراین $[G:N_G(H)] = q$ یا $[G:N_G(H)] = q^۲$ (مابقی حالات به تناقض منجر می‌شود.). درنتیجه $q \mid [G:N_G(H)]$. اکنون فرض کنید $X$ مجموعه‌ی تمام زیرگروه‌های $G$ از مرتبه‌ی $p$ باشد. دراین‌صورت $G$ با عمل مزدوجی روی $X$ عمل می‌کند. اکنون بنابر قضیه‌ی ۷-۱-۱ داریم

$$p+۱ = |X| = |X_f| + \sum_{i=۱}^{s} [G:\mathrm{stab}_G(H_i)].$$

اگر $H \in X_f$، آنگاه $|\mathrm{orb}_G(H)| = ۱$. بنابراین $[G : N_G(H)] = ۱$. درنتیجه $H \trianglelefteq G$. اما می‌دانیم $G$ فاقد زیرگروه نرمال از مرتبه‌ی $p$ است. درنتیجه $X_f = \emptyset$. از طرفی برای هر $H \in X$

$$\begin{aligned}\mathrm{stab}_G(H) &= \{g \in G \mid g.H = H\} \\ &= \{g \in G \mid gHg^{-۱} = H\} \\ &= N_G(H).\end{aligned}$$

بنابراین

$$p + ۱ = \sum_{i=۱}^{p+۱} [G : N_G(H_i)].$$

بنابر آنچه پیش از این بیان کردیم $q$ سمت راست تساوی فوق را عاد می‌کند. بنابراین $q \mid p + ۱$ □

**قضیه ۳-۱-۲.** فرض کنید $G$ یک گروه ناآبلی از مرتبه‌ی $p^۲q^۲$ باشد، به‌طوریکه $q < p$. دراین‌صورت $G$ یک گروه NCLT است اگر و تنها اگر یکی از دو گزاره‌ی زیر برقرار باشد.

**الف.** $q = ۲$ و $p \equiv ۳ (\mathrm{mod} ۴)$ و $G \cong (C_p \times C_p) \rtimes_\Phi C_۴$ که درآن $\Phi$ یک به یک است.

**ب.** $G \cong K_۴ \rtimes_\Phi C_۹$ یا $G \cong K_۴ \rtimes_\Phi (C_۳ \times C_۳)$، که در آن $K_۴$ گروه چهارتایی‌های کلاین است.

**برهان.** به منبع [۳] مراجعه کنید. □

**قضیه ۳-۱-۳.** فرض کنید $p$ و $q$ دو عدد اول باشند. دراین‌صورت یک گروه NCLT از مرتبه‌ی $pq^۳$ وجود دارد اگر و تنها اگر $p \mid q + ۱$ یا $p \mid q^۲ + q + ۱$.

**برهان.** به منبع [۲۱] مراجعه کنید. □

## ۳-۲ زیرگروه جابه‌جاگرها و گروه‌های NCLT

در این بخش شرایطی روی گروه $G$ که در آن $|G'| < ۱۶$ را بررسی می کنیم، که تحت آن $G$ یک گروه NCLT بشود. ابتدا به بیان چند لم می‌پردازیم.

**لم ۳-۲-۱.** اگر $H$ دوری و $G/H$ ابرحل‌پذیر باشد، آنگاه $G$ ابرحل‌پذیر است.

**برهان.** فرض کنید

$$G/H = G_\circ/H \geq G_۱/H \geq \cdots \geq G_n/H = H/H$$

سری ابرحل‌پذیری گروه $G$ باشد. دراین‌صورت واضح است که

$$G = G_\circ \geq G_۱ \geq \cdots \geq G_n = H \geq \{۱\} \qquad (۳-۳)$$

یک سری نرمال برای $G$ است. بنابر قضیه‌ی سوم یکریختی برای هر $i = ۱, ۲, \ldots, n$

$$\frac{G_{i-۱}/H}{G_i/H} \cong G_{i-۱}/G_i$$

و از آنجا که $H$ دوری است می‌توان نتیجه گرفت که عوامل سری نرمال (۳-۳) نیز دوری هستند. بنابراین $G$ ابرحل‌پذیر است. $\square$

یادآوری می‌کنیم که اگر گروه $G_۱$ با یک زیرگروه از گروه $G_۲$ یکریخت باشد یا به طور معادل یک همریختی یک به یک از $G_۱$ به $G_۲$ وجود داشته باشد، آنگاه می‌نویسیم $G_۱ \hookrightarrow G_۲$

**قضیه ۲-۲-۳** (نرمال‌ساز-مرکزساز[۱]). اگر $H$ یک زیرگروه از گروه $G$ باشد، آنگاه

$$N_G(H)/C_G(H) \hookrightarrow \mathrm{Aut}(H).$$

**برهان.** همریختی گروهی $\phi : N_G(H) \longrightarrow \mathrm{Aut}(H)$ را برای هر $h \in H$ به‌صورت $\phi(h) = \tau_h$ تعریف کنید. دراین‌صورت $\ker(\phi) = C_G(H)$. بنابراین

$$N_G(H)/C_G(H) \hookrightarrow \mathrm{Aut}(H).$$

دراینجا اثبات تکمیل می‌شود. $\square$

**لم ۳-۲-۳.** اگر $G'$ دوری باشد، آنگاه $G$ یک گروه CLT است. علاوه بر آن اگر $G'$ از مرتبه‌ی $p$ باشد، که درآن $p$ کوچکترین شمارنده‌ی اول $|G|$ است، آنگاه $G$ یک گروه پوچتوان است.

**برهان.** بنابرفرض $G'$ دوری و $G/G'$ ابرحل‌پذیر است. درنتیجه بنابر لم ۱-۲-۳، $G$ ابرحل‌پذیر است. از قضیه‌ی ۵-۲-۲ نتیجه می‌شود که $G$ یک گروه CLT است. اگر $p$ کوچکترین شمارنده‌ی اول $|G|$ باشد، آنگاه بنابر قضیه‌ی نرمال‌ساز-مرکزساز داریم

$$N_G(G')/C_G(G') \hookrightarrow \mathrm{Aut}(G')$$

[۱] Normalizer-Centralizer

و از آنجا که $G'$ نرمال و یک گروه دوری از مرتبه‌ی $p$ است، می‌توان نتیجه گرفت

$$G/C_G(G') \hookrightarrow \mathrm{Aut}(Z_p) \cong Z_p^{\times}.$$

درنتیجه $|G/C_G(G')| \mid p-۱$. بنابراین $|G/C_G(G')| = ۱$. درنتیجه $G = C_G(G')$. بنابراین $G' \leq Z(G)$. درنتیجه $G$ پوچتوان است. □

**تعریف ۳-۲-۴.** برای هر $n > ۱$ گروه $Q_{۴n}$ به صورت زیر تعریف می‌شود

$$Q_{۴n} = \langle a, x | a^{۲n} = ۱, x^{۲} = a^n, x^{-۱}ax = a^{-۱}\rangle.$$

به سهولت مشاهده می‌شود که $Q_{۴n}$ یک گروه ناآبلی از مرتبه‌ی $۴n$ است. در حالت $n = ۲$، $Q_{۴n}$ همان گروه کواترنیون‌ها است.

سه لم زیر را بدون اثبات از منبع [۲] می‌پذیریم.

**لم ۳-۲-۵.** فرض کنید $G$ یک گروه از مرتبه‌ی فرد باشد. اگر $G'$ یک $p$-گروه آبلی مقدماتی از مرتبه‌ی $p^{۲}$ باشد، که در آن $p$ کوچکترین عدد اول شمارنده‌ی $|G|$ است، آنگاه $G$ پوچتوان است.

**لم ۳-۲-۶.** اگر $G'$ و $\mathrm{Aut}(G')$ یک $p$-گروه باشند، آنگاه $G$ پوچتوان است.

**لم ۳-۲-۷.** فرض کنید $G$ یک گروه باشد. دراین‌صورت $G'$ با هیچکدام از زیرگروه‌ی زیر یکریخت نیست

**الف.** $D_{۲n}$ برای هر $n \geq ۲$.

**ب.** $Q_{۴n}$ برای هر $n \geq ۳$.

**ج.** هر گروه ناآبلی از مرتبه‌ی $pq$ که درآن $p$ و $q$ دو عدد اول هستند.

فرض کنید $G$ یک گروه NCLT باشد، به‌طوری که $|G'| < ۱۶$. دراین‌صورت بنابر لم ۳-۲-۳و سه لم قبل، تنها کافیست حالات زیر را در نظر بگیریم

۱. $G' = C_{۲} \times C_{۲}$.

۲. $G' = C_{۲} \times C_{۲} \times C_{۲}$.

۳. $G' = Q_{۸}$.

۴. $G' = C_{۳} \times C_{۳}$ و $|G|$ زوج است.

۵. $G' = C_{۶} \times C_{۲}$.

۶. $G' = A_{۴}$.

به سهولت مشاهده می‌شود که در تمامی این حالات $G'$ حل‌پذیر است. بنابراین در تمامی حالات $G$ حل‌پذیر است. در ادامه شرایطی را روی گروه $G$ تعیین می‌کنیم که اگر پنج حالت اول فوق رخ دهد، آنگاه $G$ یک گروه NCLT بشود و نشان خواهیم داد اگر حالت شش رخ دهد آنگاه $G$ یک گروه CLT خواهد شد.

**تعریف ۳-۲-۸.** فرض کنید $G$ یک گروه باشد. دراین‌صورت زیرگروه $H$ را یک زیرگروه هال نامیم، هرگاه $\gcd(|H|, [G:H]) = 1$.

**تعریف ۳-۲-۹.** فرض کنید $G$ یک گروه باشد و $H \lhd G$. گوییم $G$ روی $H$ تجزیه می‌شود، هرگاه زیرگروه $K$ از $G$ موجود باشد به‌طوریکه $G = HK$ و $H \cap K = \{1\}$.

قضیه‌ی زیر یکی از قضایای مشهور در نظریه‌ی گروه ها است. این قضیه را بدون اثبات می‌پذیریم.

**قضیه ۳-۲-۱۰** (شور-زاسنهاوس[1]). اگر $K$ یک زیرگروه نرمال و هال از گروه $G$ باشد، آنگاه $G$ روی $K$ تجزیه می‌شود.

**لم ۳-۲-۱۱.** فرض کنید $G$ یک گروه باشد. اگر $G'$ یک $p$-زیرگروه و $P \in \mathrm{Syl}_p(G)$، آنگاه $P$ در $G$ نرمال است و $G = PA$، که درآن $A$ یک زیرگروه آبلی است به‌طوری که $\gcd(p, |A|) = 1$.

**برهان.** از آنجا که $P$ یک $p$-زیرگروه سیلو و $G'$ یک $p$-زیرگروه است، می‌توان نتیجه گرفت که $G' \leq P$. بنابراین $P$ نرمال است. بنابر قضیه‌ی شور-زاسنهاوس زیرگروه $A$ از $G$ وجود دارد به‌طوری که $G = AP$ و $A \cap P = \{1\}$. بنابراین $\gcd(p, |A|) = 1$. از $G' \leq P$ نتیجه می‌شود $G/P$ آبلی است.بنابر قضیه‌ی دوم یکریختی

$$G/P = AP/P \cong A/A \cap P \cong A.$$

بنابراین $A$ آبلی است. □

**لم ۳-۲-۱۲.** اگر $P \in \mathrm{Syl}(G)$ و $P \leq C_G(G')$، آنگاه $P$ در $G$ نرمال است.

**برهان.** اگر $P$ یک زیرگروه از $C_G(G')$ باشد، آنگاه

$$G' \leq C_G(G') \leq N_G(P).$$

بنابراین $N_G(P)$ در $G$ نرمال است. بنابر قضیه‌ی فراتینی $G = N_G(P)N_G(P)$. درنتیجه $G = N_G(P)$ که این اثبات را تکمیل می‌کند. □

به سهولت از لم قبل می‌توان نتیجه گرفت که $C_G(G')$ یک گروه پوچتوان است زیرا تمام زیرگروه‌های سیلوی آن نرمال هستند.

**لم ۳-۲-۱۳.** فرض کنید $|G| = mn$ که درآن $\gcd(m, n) = 1$.دراین‌صورت اگر $m \mid |G'|$ و همچنین $\gcd(n, |\mathrm{Aut}(G')|) = 1$، آنگاه $G$ تجزیه‌پذیر است.

[1] Schur-Zassenhaus

**برهان.** فرض کنید $|G'| = m'$. دراین‌صورت از آنجاکه $G/G'$ آبلی است؛ $G/G'$ دارای یک زیرگروه نرمال از مرتبه‌ی $\frac{m}{m'}$ است. بنابراین $G$ دارای یک زیرگروه نرمال از مرتبه‌ی $m$ مانند $M$ است. $C_G(G')$ دارای یک زیرگروه مشخصه از مرتبه‌ی $n$ مانند $N$ است زیرا $C_G(G')$ پوچتوان است و $\gcd(n, |\mathrm{Aut}(G')|) = ۱$. درنتیجه $N$ یک زیرگروه نرمال از $G$ است. از آنجاکه $\gcd(m,n) = ۱$، $M \cap N = \{۱\}$ و علاوه برآن $G = MN$، $G = M \times N$. $\square$

**لم ۳-۲-۱۴.** اگر $G'$ آبلی باشد، آنگاه $G/C_G(G')$ آبلی است.

**برهان.** از آنجا که $G'$ آبلی است، $G' \leq C_G(G')$. بنابراین $G/C_G(G')$ آبلی است. $\square$

**لم ۳-۲-۱۵.** اگر $p$ کوچکترین عدد اول شمارنده‌ی $|G|$ باشد و $P$ یک $p$-زیرگروه سیلوی $G$ باشد به‌طوری که $P \leq G'$، آنگاه $G$ یک گروه NCLT است.

**برهان.** اگر $N$ یک زیرگروه از شاخص $p$ باشد، آنگاه $N$ نرمال است. بنابراین $G/N$ یک گروه آبلی است. درنتیجه $G' \leq N$. بنابراین $P \leq N$ و همچنین

$$[G:P] = [G:N][N:P] = p[N:P]$$

که این یک تناقض است زیرا $p$ یک شمارنده از $[G:P]$ نیست. بنابراین $G$ فاقد یک زیرگروه با شاخص $p$ است؛ این به این معناست که $G$ فاقد یک زیرگروه از مرتبه‌ی $\frac{|G|}{p}$ است. $\square$

**قضیه ۳-۲-۱۶.** فرض کنید $G$ یک گروه باشد به‌طوری که $G'$ یک ۲-زیرگروه آبلی مقدماتی از مرتبه‌ی ۴ باشد. دراین‌صورت $G$ یک گروه NCLT است اگروتنها اگر $G'$ یک ۲-زیرگروه سیلوی $G$ باشد.

**برهان.** از آنجا که $G'$ یک ۲-زیرگروه است بنابر لم ۳-۲-۱۱، $P \in \mathrm{Syl}_۲(G)$ یک زیرگروه نرمال است. بنا بر قضیه‌ی نرمال‌ساز-مرکزساز و لم ۳-۲-۱۴، $G/C_G(G')$ با یک زیرگروه آبلی $S_۳$ یکریخت است. اگر $G/C_G(G')$ یک ۲-گروه باشد، آنگاه بنابر لم ۳-۲-۱۲، $G$ پوچتوان است. بنابر قضیه‌ی ۲-۱-۱۰، $G$ یک گروه CLT است. فرض کنید $G/C_G(G')$ از مرتبه‌ی ۳ باشد و $Q$ یک ۳-زیرگروه سیلوی $G$ باشد. دراین‌صورت بنابر لم‌های ۳-۲-۱۲ و ۳-۲-۱۳، $G = PQ \times A$ که درآن

$$\gcd(۲, |A|) = \gcd(۳, |A|) = ۱.$$

نشان خواهیم داد اگر $|P| = ۲^i$ که درآن $i \geq ۳$، آنگاه $G$ یک گروه CLT است. فرض کنید $|Q| = ۳^j$. دراین‌صورت اگر $(PQ)/G'$ شامل زیرگروه $H/G'$ از مرتبه‌ی $۳^j \times ۲$ باشد، آنگاه $PQ$ شامل زیرگروه $H$ از مرتبه‌ی $۳^j \times ۲^۳$ است. از آنجا که $Q \nsubseteq C_G(G')$، $H$ ناآبلی است. توجه کنید $n_۳ = ۴$ و

$$|N_H(Q)| = ۲ \times ۳^j.$$

بنابر نتیجه‌ی ۹-۴-۲، $N_H(Q)$ یک گروه CLT است. بنابراین $PQ$ برای هر $1 \leq k \leq j$ شامل یک زیرگروه از مرتبه‌ی $2 \times 3^k$ است. از آنجا که $(PQ)/G'$ آبلی است، $PQ$ برای هر $d$ به‌طوری که $d \mid |PQ|$ شامل یک زیرگروه از مرتبه $d$ است. درنتیجه $G$ حاصل ضرب مستقیم گروه‌ی CLT است. بنابر قضیه‌ی ۹-۱-۲، $G$ یک گروه CLT است. بنابراین اگر $G$ یک گروه NCLT باشد، آنگاه $G'$ یک ۲-زیرگروه سیلو است.

به عکس اگر $P$ یک ۲-زیرگروه سیلوی $G$ باشد و $G' \leq P$، آنگاه بنابر لم ۱۵-۲-۳، $G$ یک گروه NCLT است. $\square$

**قضیه ۱۷-۲-۳.** فرض کنید $G$ یک گروه باشد. اگر $G'$ یکریخت با $A_4$ باشد، آنگاه $G$ یک گروه CLT است.

**برهان.** فرض کنید $P \in \mathrm{Syl}_2(G)$ و $Q \in \mathrm{Syl}_3(G)$. بنابر قضیه‌ی نرمال‌ساز-مرکزساز $G/C_G(G')$ با یک زیرگروه از $S_4$ یکریخت است. از آنجا که $G' \cap C_G(G') = \{1\}$،

$$(G/C_G(G'))' \cong G'/G' \cap C_G(G') = G'.$$

بنابراین $G/C_G(G') = S_4$ و $|P| > 8$. بنابر لم ۱۳-۲-۳، $G = PQ \times A$ که درآن $A$ یک گروه آبلی است. از آنجا که $(PQ)/G'$ شامل زیرگروه $H/G'$ از مرتبه‌ی ۲ است که درآن $|H| = 8 \times 3^j$. $H$ یک گروه ناآبلی است و $|N_H(Q)| = 2 \times 3^j$. بنابر نتیجه‌ی ۹-۴-۲، $H$ (و همچنین $PQ$) شامل یک زیرگروه از مرتبه‌ی $2 \times 3^l$ برای هر $0 \leq l \leq j$ است. $(PQ)/G'$ یک گروه آبلی از مرتبه‌ی $2^{i-2} \times 3^{j-3}$ است. بنابراین $PQ$ دارای زیرگروه‌های از مرتبه‌ی $2^k \times 3^l$ برای هر $2 \leq k \leq i$ و $1 \leq l \leq j$ است. درنتیجه $PQ$ یک گروه CLT است و چون $G$ حاصل ضرب مستقیم $P$ و $Q$ است. بنابر لم ۹-۱-۲ یک گروه CLT است. $\square$

از دیگر نتایجی که در منبع [۲] درمورد گروه‌های با زیرگروه جابه‌جاگر از مرتبه‌ی کمتر از ۱۶ به دست آمده است، به شرح زیر است.

**قضیه ۱۸-۲-۳.** فرض کنید $G$ یک گروه باشد به‌طوری که $G'$ یک زیرگروه آبلی مقدماتی از مرتبه‌ی ۸ باشد. و همچنین فرض کنید $P \in \mathrm{Syl}_2(G)$.دراین‌صورت $G$ یک گروه NCLT است اگروتنهااگر $P/G'$ دارای مرتبه‌ی کوچکتر از ۳ باشد.

**قضیه ۱۹-۲-۳.** فرض کنید $G$ یک گروه باشد به‌طوری که $G'$ یکریخت با $Q_8$ باشد. دراین‌صورت $G$ یک گروه NCLT است اگروتنهااگر $G'$ یک ۲-زیرگروه سیلو باشد.

**قضیه ۲۰-۲-۳.** فرض کنید $G$ یک گروه از مرتبه‌ی زوج باشد به‌طوری که $G'$ یک زیرگروه آبلی مقدماتی از مرتبه‌ی ۹ باشد. همچنین فرض کنید $P \in \mathrm{Syl}_2(G)$. دراین‌صورت $G$ یک گروه NCLT است اگروتنهااگر $G'$ یک ۳-زیرگروه سیلو باشد و $P/C_P(G')$ یک گروه دوری از مرتبه‌ی ۴ یا ۸ باشد.

**قضیه ۲۱-۲-۳.** فرض کنید $G$ یک گروه باشد به‌طوری که $G'$ یکریخت با $C_۲ \times C_۶$ باشد. دراین‌صورت $G$ یک گروه NCLT است اگر وتنهااگر $G'$ شامل ۲-زیرگروه سیلوی $G$ باشد.

# فهرست منابع


[1] Baumslag, B. James, W. “A sufficient condition for nilpotency in a finite group”. arXiv preprint arXiv:1411.2877 (2014).

[2] Barry, F. “The commutator subgroup and CLT (NCLT) groups”. Math. Proc. R. Ir. Acad. 104, no. 1 (2004): 119-126.

[3] Baskaran, S. “CLT and non-CLT groups of order $p^2q^2$”. Fund. Math. no. 92 (1976): 1-7.

[4] Burnside, W. “Theory of groups of finite order”. Messenger Math. no. 23 (1909): 112.

[5] Bray, H. “A note on CLT groups”. Pac. J. Math 27, no. 2 (1968): 229-231.

[6] Deskins, W. E. “A characterization of finite supersolvable groups”. Am. Math. Mon. 75, no. 2 (1968): 180-182.

[7] Hall, M. “The theory of groups”. Courier Dover Publications, 2018.

[8] Henry, J. N. “Groups Satisfying the Converse to Lagrange’s Theorem”. MSU Graduate Theses. (2019).

[9] Holmes, C. V. “A characterization of finite nilpotent groups.” Am. Math. Mon. 73, no. 10 (1966): 1113-1114.

[10] Humphreys, J. F. “On groups satisfying the converse of Lagrange’s theorem”. Math. Proc. Camb. Philos. Soc. vol. 75, no. 1 (1974): 25-32.

[11] McCarthy, D. J.“Sylow’s theorem is a sharp partial converse to Lagrange’s theorem”. Math. Z. 113 (1970): 383-384.

[12] McCarthy, D. J. “A survey of partial converses to Lagrange’s theorem on finite groups”. Trans. New York Acad. Sci. 33, no. 6 Series II (1971): 586-594.

[13] McLain, D. H. “The existence of subgroups of given order in finite groups”. Math. Proc. Camb. Philos. Soc. vol. 53, no. 2 (1957): 278-285.

[14] Pinnock, C. J. E. “Supersolubility and some characterizations of finite supersoluble groups”. PhD Thesis, 1998.

[15] Rose, H. E. “A course on finite groups”. Springier Science & Business Media, 2009.

[16] Roth, R. L. “A history of Lagrange’s theorem on groups.” Math. Mag. 74, no. 2 (2001): 99-108.

[17] Rotman, J. J. “An introduction to the theory of groups”. Springier Science & Business Media, 2012.

[18] Sharma, K, Reddy, AS. “Cyclic and Abelian CLT groups.” arXiv preprint arXiv:2208.01415 (2022).

[19] Struik, R. R. “Partial converses to Lagrange’s theorem.” Commun. Algebra 6, no. 5 (1978): 421-482.

[20] Struik, R. R. “Partial converses to Lagrange’s theorem. II.” Commun. Algebra 9, no. 1 (1981): 1-22.

[21] Tarnauceanu, M. “Non-CLT groups of order $pq^3$.” Math. Slovaca 64, no. 2 (2014): 311-314.

# واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

| | |
|---|---|
| استدلال فراتینی | Frattini's argument |
| به‌طور سره $p$-بسته | Strictly $p$-closed |
| پوچتوان | Nilpotent |
| تظریف | Refinement |
| ثابت ساز | Stabilizer |
| جابه‌جاگر | Commutator |
| حل پذیر با رادیکال | Solvable by radicals |
| خالی از مربع | Square Free |
| خودریختی | Automorphism |
| درون‌ریختی | Endomorphism |
| $p$-رادیکال | $p$-radical |
| $p$-زیرگروه سیلو | Sylow $p$-subgroup |
| زیرگروه فراتینی | Frattini subgroup |
| زیرگروه فیتینگ | Fitting subgroup |
| زیرگروه ماکسیمال | Maximal subgroup |
| زیرگروه جابه‌جاگر | Commutator subgroup |
| زیرگروه نرمال | Normal subgroup |
| زیرگروه نرمال ماکسیمال | Maximal normal subgroup |
| زیرگروه نرمال مینیمال | Minimal normal subgroup |
| سری ترکیبی | Composition series |
| سری حل پذیری | Solvable series |
| سری مرکزی بالایی | Upper central series |

| | |
|---|---|
| سری مرکزی پایینی | Lower central series |
| شاخص | Index |
| ضرب نیم مستقیم | Semi direct product |
| ضرب نیم مستقیم داخلی | Inner semi direct product |
| ضرب نیم مستقیم خارجی | Outer semi direct product |
| طول حل پذیری | Solvability length |
| عامل | Factor |
| عمل گروه | Group action |
| عمل مزدوجی | Conjugacy action |
| عدد آبلی | Abelian number |
| عدد دوری | Cyclic number |
| فرادوری | Metacyclic |
| فراآبلی | Metabelian |
| قضایای سیلو | Sylow’s theorems |
| قضیه لاگرانژ | Lagrange’s theorem |
| قضیه فیتینگ | Fitting’s theorem |
| کلاس مزدوجی | Conjugacy class |
| کاملاً پایا | Fully invariant |
| کلاس پوچتوانی | Nilpotency class |
| گروه آبلی | Abelian group |
| گروه ابرحل‌پذیر | Supersolvable group |
| گروه آبلی مقدماتی | Elementary abelian group |
| گروه حل پذیر | Solvable group |
| گروه غیر آبلی مینیمال | Minimal non-abelian group |
| گروه غیر دوری مینیمال | Minimal non-cyclic group |
| گروه CLT | CLT group |
| گروه NCLT | NCLT group |
| مدار | Orbit |
| مرکزساز | Centralizer |

مشخصه . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . Characteristic

$p$–مکمل نرمال . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . Normal $p$-compliment

مولد . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . Generator

معادله‌ی رده‌ای . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . Class equation

هسته . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . Core

# Abstract

A finite group $G$ is said to be a CLT group if $G$ satisfies the converse of Lagrange's theorem. In other word $G$ is said to be a CLT group if for any positive integer d with $d \mid |G|$, $G$ contains a subgroup of order d. The class of CLT groups and its relations to solvable and supersolvable groups have been studied in the 20th century. In this project we investigate the properties and examples of CLT and non-CLT (NCLT) groups.

**Keywords:** Lagrange's theorem , converse of Lagrange's theorem , solvable groups, supersolvable groups, nilpotent groups.

**Isfahan University of Technology**

**Department of Mathematical Sciences**

**Bachelor of Science Project in Mathematics**

# A study on CLT and NCLT groups

**Supervisor:**

**Dr. Bijan Taeri**

**By:**

**Ehsan Zabihi**

**May 2024**