جلسه‌ی دفاع از پایان‌نامه‌ی کارشناسی ارشد

گروه‌های متناهی که

سخنران: زهرا زهرایی

زمان: چهارشنبه ۹۴/۵/۲۸ ساعت ۱۳

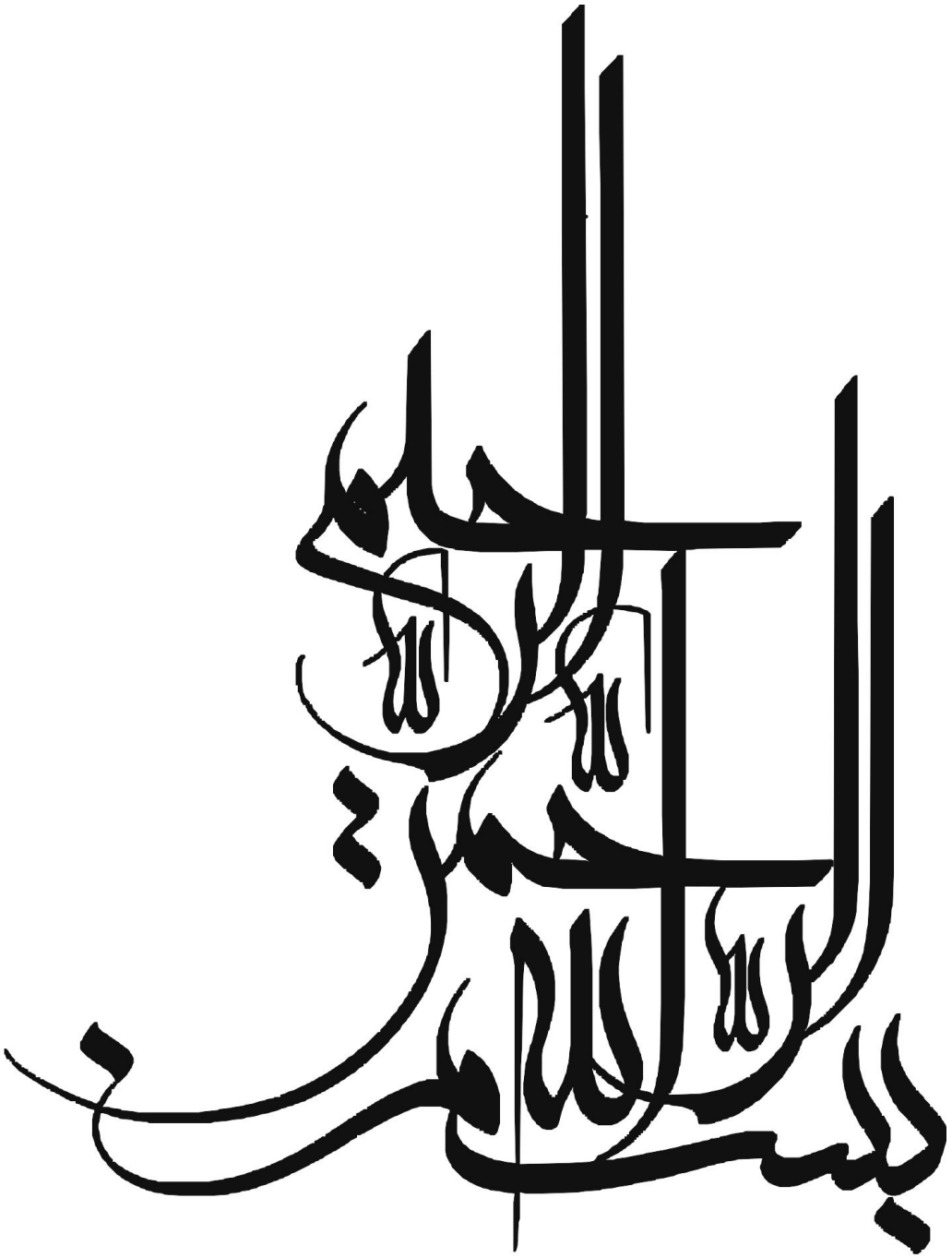
مکان: سالن خوارزمی دانشکده‌ی علوم ریاضی

هیئت داوران

۱- دکتر علیرضا اکبری
۲- دکتر حسین اصغری
۳- دکتر محمدرضا حسینی
۴- دکتر ایوب کاظمی (دانشگاه اصفهان)
۵- دکتر حمید کرمی (دانشگاه شهرکرد)
۶- دکتر احمد احمدی (دانشگاه سمنان)

چکیده: فرض کنیم G یک گروه متناهی و S یک زیرمجموعه از آن است. :::

کلمات کلیدی: گروه حل‌پذیر، مرکزساز، ...


بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه صنعتی اصفهان
دانشکده علوم ریاضی

گروه‌های متناهی که

پایان‌نامه کارشناسی ارشد ریاضی محض

زهرا زهرایی

استادان راهنما

دکتر علیرضا اکبری

دکتر حسین اصغری

۱۳۹۴

دانشگاه صنعتی اصفهان
دانشکده علوم ریاضی

پایان‌نامه کارشناسی ارشد ریاضی محض خانم زهرا زهرایی

تحت عنوان

گروه‌های متناهی که

در تاریخ ۲۸ مرداد ۱۳۹۴ توسط کمیته‌ی تخصصی زیر مورد بررسی و تصویب نهایی قرار گرفت

۱- استاد راهنمای پایان‌نامه	دکتر علیرضا اکبری
۲- استاد راهنمای پایان‌نامه	دکتر حسین اصغری
۳- استاد مشاور پایان‌نامه	دکتر محمدرضا حسینی
۴- استاد داور ۱	دکتر ایوب کاظمی
۵- استاد داور ۲	دکتر حمید کرمی
۶- استاد داور ۳	دکتر احمد احمدی

سرپرست تحصیلات تکمیلی دانشکده دکتر اعظم اعتماد

به نام آفریننده بی‌همتا

الهی، کجا باز یابم آن روز که تو مارا بودی و من نبودم، تا باز به آن روز رسم میان آتش و دودم، اگر به دوگیتی آن روز یابم پر سودم و ربود خود را یابم به نبود خود خشنودم.

الهی، آنچه ما خود کشتیم به بر میار و آنچه تو مارا کشتی آفت مارا از آن باز دار.

الهی، سپاس تو را که بی طلب بر من بخشیدی.

سپاس بیکران خداوند را به سبب پدر و مادری عزیز و مهربان که همواره بی منّت مرا در پناه لطف و مهربانی خویش داشته‌اند. :

زهرا زهرایی ۹۴/۵/۲۸

کلیه حقوق مالکیت مادی و معنوی مربوط به این رساله متعلق به دانشگاه صنعتی اصفهان و پدیدآورندگان است. این حقوق توسط دانشگاه صنعتی اصفهان و بر اساس خط مشی مالکیت فکری این دانشگاه، ارزش‌گذاری و سهم بندی خواهد شد.

هر گونه بهره برداری از محتوا، نتایج یا اقدام برای تجاری‌سازی دستاوردهای این رساله تنها با مجوز کتبی دانشگاه صنعتی اصفهان امکان‌پذیر است.

تقدیم به سرمایه‌های زندگیم:

پدرم، مادرم و همسرم

آنان که استواری، شکیبایی و امید را در وجودم تداوم بخشیدند.

فهرست مطالب

فهرست مطالب **هفت**

۱ تعاریف و مفاهیم مقدماتی **۱**

۱.۱ گذری بر جبر خطی ۲

۲.۱ گذری بر نظریه‌ی گروه‌ها ۷

۳.۱ مفاهیم اولیه‌ی گراف‌ها ۱۰

۲ گراف‌های کیلی جمعی **۱۳**

۱.۲ برخی خواص گراف‌های کیلی جمعی ۱۳

۳ گراف‌های کیلی جمعی صحیح **۱۵**

۱.۳ گروه‌های کیلی جمعی صحیح ۱۵

پیوست ۱ **۱۶**

پیوست ۲ **۱۸**

منابع **۱۹**

منابع **۲۲**

فهرست نمادها **۴۱**

چکیده:

فرض کنیم G یک گروه آبلی متناهی و S زیرمجموعه‌ای از آن است. گراف کیلی جمعی روی G وابسته به S، که با $\mathrm{Cay}^+(G,S)$ نشان می‌دهیم، گرافی با مجموعه‌ی رئوس G است و دو رأس x و y با هم مجاورند اگر و فقط اگر $x+y\in S$. بنا بر تعریف، مجموعه‌ی $S-x=\{s-x\ :\ s\in S\}$ مجموعه‌ی رئوس مجاور با رأس x است. اگر به ازای $g\in G$ داشته باشیم $g+g\in S$، آن‌گاه g یک رأس نیم‌یال‌دار بوده که با $|S|-1$ رأس دیگر نیز مجاور است و بنابراین درجه‌ی آن $|S|$ خواهد بود. در نتیجه گراف $\mathrm{Cay}^+(G,S)$ یک گراف $|S|$-منظم است.

می‌توان گراف کیلی جمعی را تعمیم داد. اگر S یک زیرمجموعه‌ی نرمال از گروه دلخواه G باشد (یعنی به ازای هر $g\in G$ و $s\in S$ داشته باشیم $g^{-1}sg\in S$)، آن‌گاه گراف کیلی جمعی $\mathrm{Cay}^+(G,S)$ با مجموعه‌ی رئوس G و مجموعه‌ی یال‌های $E=\{(x,sx^{-1})\ :\ s\in S, x\in G\}$ یک گراف غیرجهت‌دار $|S|$-منظم است.

در این رساله، ابتدا برخی خواص مقدماتی از گراف‌های کیلی جمعی را بیان و اثبات می‌کنیم. همچنین با مطالعه‌ی ارتباط میان خواص جبری گروه و خواص گراف، پارامترهای مهمی از گراف مانند قطر، کمر، عدد تسلط، مجموعه‌ی تسلط، عدد تسلط تام و مجموعه‌ی تسلط تام و برخی خواص مهم دیگر را برای رده‌های خاصی از گراف‌های کیلی جمعی بررسی می‌کنیم. سپس با مطالعه‌ی ماتریس‌های پاد-دوری و اثبات این‌که یک گراف پاد-دوری است اگر و تنها اگر یک گراف کیلی جمعی روی یک گروه دوری باشد، نتایجی را درباره‌ی یکریختی، همبندی و رأس انتقالی بودن گراف‌های پاد-دوری به دست می‌آوریم. همچنین مقادیر ویژه‌ی ماتریس‌های پاد-دوری حقیقی را با کمک گراف‌های کیلی جمعی رنگی که تعمیمی از گراف‌های کیلی جمعی هستند محاسبه می‌کنیم. در ادامه، با فرض همبندی، با به دست آوردن نتایجی در باب همیلتونی بودن گراف‌های کیلی جمعی، نشان می‌دهیم هر گراف ساده‌ی پاد-دوری همیلتونی است.

یک گراف را صحیح گوییم هرگاه مقادیر ویژه‌ی آن صحیح باشند. یک گروه را کیلی جمعی صحیح گوییم هرگاه به ازای هر زیرمجموعه‌ی S از G، گراف کیلی جمعی $\mathrm{Cay}^+(G,S)$ صحیح باشد. در این رساله نشان می‌دهیم که گروه دوری مرتبه‌ی سه و ۲-گروه‌های آبلی مقدماتی تنها گروه‌های آبلی کیلی جمعی صحیح هستند. همچنین، نشان می‌دهیم که ۲-گروه‌های آبلی مقدماتی و ۳-گروه‌های آبلی مقدماتی تنها گروه‌های آبلی کیلی جمعی ۲-صحیح هستند و هر گروه آبلی کیلی جمعی ۳-صحیح به صورت $\mathbb{Z}_2^n\oplus\mathbb{Z}_4^m$ یا $\mathbb{Z}_2^n\oplus\mathbb{Z}_3^m$ است که در آن $n\geq 0$ و $m\in\{0,1\}$. به عنوان یک نتیجه‌ی مهم اثبات می‌کنیم که تنها شش گراف کیلی جمعی ساده‌ی همبند ۳-منظم صحیح وجود دارد. به ویژه، برای گروه متناهی دلخواه G، گراف کیلی جمعی $\mathrm{Cay}^+(G,S)$ یک گراف ساده‌ی همبند ۳-منظم صحیح است اگر و تنها اگر G با یکی از گروه‌های

$$\mathbb{Z}_2^2,\ \mathbb{Z}_6,\ D_6,\ \mathbb{Z}_8,\ \mathbb{Z}_2\oplus\mathbb{Z}_4,\ \mathbb{Z}_2^3,\ \mathbb{Z}_{12},\ \mathbb{Z}_2\oplus\mathbb{Z}_6,\ \mathbb{Z}_2\oplus\mathbb{Z}_{12},\ \mathbb{Z}_4\oplus\mathbb{Z}_6,\ \mathbb{Z}_2\oplus\mathbb{Z}_2\oplus\mathbb{Z}_6$$

یکریخت باشد که در آن S یک زیرمجموعه‌ی سه عضوی فارغ از مربع است.

رده‌بندی موضوعی: ۲۰K۰۱، ۰۵C۲۵، ۰۵C۵۰، ۱۵A۱۸، ۰۵C۴۵.

واژگان کلیدی: گراف کیلی جمعی، گراف کیلی جمعی رنگی، گراف پاد-دوری، عدد تسلط (تام)، مجموعه‌ی تسلط (تام)، گراف صحیح، گروه کیلی جمعی صحیح.

پیشگفتار

کیلی[1] در سال ۱۸۷۸ خانواده‌ی بزرگی از گراف‌های رأس انتقالی را معرفی کرد. فرض کنیم G یک گروه متناهی و S یک زیرمجموعه از آن است. در این صورت، گراف کیلی $\mathrm{Cay}(G,S)$ گرافی جهت‌دار و دارای طوقه با مجموعه‌ی رئوس G است و دو رأس x و y با یک یال جهت‌دار از x به y متصلند اگر و تنها اگر $yx^{-1} \in S$. اگر S را یک مجموعه‌ی معکوس بسته با شرط $1 \notin S$ در نظر بگیریم، آن‌گاه گراف کیلی $\mathrm{Cay}(G,S)$ یک گراف ساده‌ی غیر جهت‌دار است. تاکنون مطالعات زیادی بر روی گراف‌های کیلی انجام شده و خواص زیادی از این گراف‌ها به دست آمده است، به عنوان مثال ثابت می‌شود گراف کیلی $\mathrm{Cay}(G,S)$ همبند است اگر و تنها اگر S یک مجموعه‌ی مولد برای گروه G باشد.

گراف کیلی جمعی مشابه گراف کیلی تعریف می‌شود. در واقع، گراف‌های کیلی جمعی ابتدا با عنوان گراف‌های جمعی توسط هَراری[2] در سال ۱۹۹۰ مطرح شد [۲۳]. گراف جمعی $\mathcal{G}^+(S) = (V,E)$ روی زیرمجموعه‌ی متناهی $S \subset \mathbb{N}$ گرافی است با مجموعه‌ی رئوس $V = S$ و $uv \in E$ اگر و تنها اگر $u+v \in S$. او ثابت کرد که به ازای هر گراف $\mathcal{G}$ با حداقل سه رأس و m یال، اجتماع $\mathcal{G}$ با m رأس تنها، $\mathcal{G} \cup mK_1$، یک گراف جمعی است. برای این منظور کافی است هر رأس v_i را با 10^i و m رأس تنها را با $10^i + 10^j$ برچسب گذاری کنیم که در آن $v_iv_j \in E$. به این ترتیب برای هر گراف متناهی دلخواه $\mathcal{G}$، کوچک‌ترین عدد $\sigma = \sigma(\mathcal{G})$ وجود دارد به طوری که $\mathcal{G} \cup \sigma K_1$ یک گراف جمعی باشد. هَراری این عدد را عدد جمعی گراف $\mathcal{G}$ نامید و نتایجی در مورد آن به دست آورد. به عنوان مثال، عدد جمعی C_n به صورت

$$\sigma(C_n) = \begin{cases} 3 & : \quad n = 4, \\ 2 & : \quad n \neq 4. \end{cases}$$

است. او همچنین در [۲۳] حدس زد که عدد جمعی هر درخت برابر با یک است. این حدس توسط اِلینگهام[3] اثبات گردید [۱۹]. بِرگِسترند[4] و همکارانش در [۱۲] مسأله‌ی عدد جمعی گراف‌های کامل را مطرح کردند و نشان دادند که به ازای هر $n \geq 4$، $\sigma(K_n) = 2n - 3$.

هَراری گراف‌های جمعی روی یک زیرمجموعه از اعداد صحیح را گراف‌های جمعی صحیح نامید و نشان داد که گراف‌های مسیر P_n و همچنین تطابق mK_2، $m \in \mathbb{N}$، گراف‌های جمعی صحیح هستند [۲۲] و در [۲۴] همراه با دو تن از همکارانش نشان داد که خانواده‌ی گراف‌های جمعی روی مجموعه‌ی اعداد حقیقی مثبت و خانواده‌ی گراف‌های جمعی روی مجموعه‌ی اعداد طبیعی یکی است.

---

[1] Cayley
[2] Harary
[3] Ellingham
[4] Bergstrand

به عنوان تعمیمی از گراف‌های جمعی، مفهوم گراف‌های کیلی جمعی مطرح شد که تاکنون، برخلاف گراف‌های کیلی، بسیار اندک به آن‌ها پرداخته شده است. فرض کنیم G یک گروه آبلی متناهی و S یک زیرمجموعه از آن است. در این صورت، گرافی که مجموعه‌ی رئوس آن G است و دو رأس x و y با هم مجاورند اگر و فقط اگر $x+y \in S$ را گراف کیلی جمعی G روی S نامیده و با نماد $\mathrm{Cay}^+(G,S)$ نمایش می‌دهیم. همچنین S را یک مجموعه‌ی اتصال گراف $\mathrm{Cay}^+(G,S)$ می‌نامیم.

بنابر تعریف، واضح است که $S-x=\{s-x \ : \ s\in S\}$ مجموعه‌ی رئوس مجاور با رأس x است. اگر به ازای $g\in G$ داشته باشیم $g+g\in S$، آنگاه g یک رأس نیم‌یال‌دار بوده که با $|S|-1$ رأس دیگر نیز مجاور است، بنابراین درجه‌ی آن $|S|$ است. یک نیم‌یال یالی است که یک رأس را به همان رأس متصل کرده و در شمارش درجه‌ی آن رأس فقط یک سهم دارد، بنابراین گراف $\mathrm{Cay}^+(G,S)$ یک گراف $|S|$-منظم است. گراف‌های کیلی جمعی برخلاف گراف‌های کیلی لزوماً رأس انتقالی نیستند.

به سادگی می‌توان نشان داد که $\mathrm{Cay}^+(G,S)$ کامل است اگر و فقط اگر $S=G$ یا $S=G\setminus\{0\}$ و G یک ۲-گروه آبلی مقدماتی باشد. اگر مجموعه‌ی S عضوهایی به صورت $g+g$ نداشته باشد، S را یک زیرمجموعه‌ی فارغ از مربع می‌نامیم. به وضوح، گراف کیلی جمعی با چنین مجموعه‌ی اتصالی فاقد نیم‌یال است.

اگر چه در ابتدا گراف‌های کیلی جمعی روی گروه‌های آبلی تعریف شدند، می‌توان آن‌را برای هر گروه دلخواه تعمیم داد که در این صورت، گراف کیلی جمعی آن جهت‌دار است. اگر S یک زیرمجموعه‌ی نرمال از گروه دلخواه G باشد (یعنی به ازای هر $g\in G$ و $s\in S$ داشته باشیم $g^{-1}sg\in S$)، آنگاه گراف کیلی جمعی با مجموعه‌ی رئوس G و مجموعه‌ی یال‌های $E=\{(x,sx^{-1}) \ : \ s\in S, x\in G\}$ یک گراف غیر جهت‌دار است؛ زیرا $xy\in S$ ایجاب می‌کند $yx=y(xy)y^{-1}\in S$. در این حالت نیز $\mathrm{Cay}^+(G,S)$ یک گراف $|S|$-منظم است.

گراف‌های کیلی جمعی، به سبب مشکل بودن مطالعه، مورد توجه‌ی کمی قرار گرفته‌اند. تعداد کمی مقاله در این زمینه به چاپ رسیده است که در ادامه به آن‌ها اشاره می‌شود. شین[۵] و همکارانش در سال ۲۰۰۳ با در نظر گرفتن مجموعه‌های اتصال فارغ از مربع نشان دادند که گراف‌های کیلی جمعی همبند ۳-منظم که مرتبه‌ی آن‌ها بر ۸ بخش‌پذیر است و همچنین گراف‌های کیلی جمعی دوبخشی ۳-منظم که مرتبه‌ی آن‌ها بر ۴ بخش‌پذیر است دارای دور همیلتونی هستند [۱۵]. در همان مقاله ثابت شد که اگر G یک گروه آبلی و S یک مجموعه‌ی اتصال فارغ از مربع باشد، آنگاه هر مسیر به طول ۲ در $\mathrm{Cay}^+(G,S)$ متناظر با یک یال در گراف $\mathrm{Cay}(G,S-S)$ است و برعکس، هر یال در گراف $\mathrm{Cay}(G,S-S)$ متناظر با یک مسیر به طول ۲ در گراف $\mathrm{Cay}^+(G,S)$ است. آن‌ها همچنین نشان دادند که هر گراف کیلی جمعی همبند دوبخشی با مجموعه‌ی اتصال فارغ از مربع یک گراف کیلی است.

در سال ۲۰۰۵، گرین[۶] عدد خوشه‌ای گراف‌های کیلی جمعی را مطالعه کرد [۲۰]. در سال ۲۰۰۹، گرینکویچ[۷] و همکارانش همبندی رأسی این گراف‌ها را بررسی کردند [۲۱]. آن‌ها نشان دادند که برای گروه متناهی G و مجموعه‌ی اتصال سره S همبندی رأسی یک گراف کیلی جمعی که آن را با $\kappa(\mathrm{Cay}^+(\mathrm{G},\mathrm{S}))$ نمایش می‌دهیم، عبارت است از

$$\kappa(\mathrm{Cay}^+(\mathrm{G},\mathrm{S}))=\min\{\eta_{\mathrm{G}}(\mathrm{S}),\lambda_{\mathrm{G}}(\mathrm{S}),|\mathrm{S}|\},$$

---

[۵] Cheyne
[۶] Green
[۷] Grynkiewicz

که در آن

$$\eta_G(S) = \min\{|S+H| - |H| \ : \ H \leq G \ , \ (S + \mathbf{2}G) \cap H \neq \emptyset \ , \ S + H \neq G\}$$

و

$$\lambda_G(S) = \min\{|S+L| - |L| \ : \ L \in \mathcal{L}_G(S)\}$$

و $\mathcal{L}_G(S)$ خانواده‌ی زیرگروه‌هایی مانند L از G است که به ازای یک زیرگروه G_0 از G شامل L، $|G_0/L|$ عدد زوج بزرگ‌تر از ۲ باشد و عضو $g_0 \in G_0$ وجود داشته باشد که $S + L = (G \setminus G_0) \cup (g_0 + L)$. در همان سال دِواس[۸] و همکارانش نشان دادند که هر $(0,3,6)-$فولرن یک‌ریخت با گراف کیلی جمعی یک گروه روی یک مجموعه‌ی اتصال مناسب است [۱۸]. شایان ذکر است که یک $(0,3,6)-$فولرن یک گراف ۳-منظم است که هر وجه آن یک دور به طول ۳ یا ۶ است. همچنین نشان دادند که مقادیر ویژه‌ی گراف کیلی جمعی $\mathrm{Cay}^+(G,S)$ برابر با

$$\{\chi(S) \ : \ \chi \in R\} \cup \{\pm|\chi(S)| \ : \ \chi \in C\}$$

است که در آن R مجموعه‌ی سرشت‌های حقیقی گروه G و C مجموعه‌ی سرشت‌هایی از گروه G است که به ازای هر $g \in G$، اگر $g + g \neq 0$، آنگاه $|\{\chi_g, \chi_{-g}\} \cap C| = 1$. یک سال بعد، لِو[۹] نشان داد که برای گروه آبلی G و زیرمجموعه‌ی S از آن، گراف کیلی جمعی $\Gamma = \mathrm{Cay}^+(G,S)$ همبند است اگر و فقط اگر یکی از شرایط زیر برقرار باشد:

(۱) مجموعه‌ی اتصال S مشمول در همدسته‌ی هیچ زیرگروه سره‌ی G نباشد،

(۲) مجموعه‌ی اتصال S مشمول در یک همدسته‌ی ناصفر زیرگروهی از اندیس ۲ باشد ولی مشمول در هیچ همدسته‌ی دیگری نباشد [۲۹].

سینها[۱۰] با معرفی گراف‌های کیلی جمعی یکانی در سال ۲۰۱۱ پارامترهایی مانند درجه‌ی رئوس، قطر و کمر را برای آن‌ها به دست آورد. همچنین شرایطی که تحت آن‌ها گراف‌های کیلی جمعی یکانی دوبخشی، مسطح، همیلتونی، اویلری و خودمکمل هستند را ارائه کرد [۳۴].

یک گراف را صحیح گوییم اگر تمام مقادیر ویژه‌ی ماتریس مجاورت نظیر به آن صحیح باشد. گروه آبلی G را یک گروه کیلی جمعی $k-$صحیح گوییم اگر به ازای هر زیرمجموعه‌ی k عضوی S از G، گراف $\mathrm{Cay}^+(G,S)$ صحیح باشد. همچنین، گروه آبلی G را گروه کیلی جمعی صحیح گوییم اگر به ازای هر $1 \leq k \leq |G|$، گروه G یک گروه کیلی جمعی $k-$صحیح باشد. در این رساله، گروه‌های کیلی جمعی صحیح را رده‌بندی کرده و نشان می‌دهیم که گروه آبلی G یک گروه کیلی جمعی ۲-صحیح است اگر و تنها اگر به ازای یک $n \geq 0$، یکریخت با $\mathbb{Z}_2^n$ یا $\mathbb{Z}_3^n$ باشد. همچنین G یک گروه کیلی جمعی ۳-صحیح است اگر و تنها اگر به ازای یک $n \geq 0$ و $m \in \{0,1\}$، یکریخت با $\mathbb{Z}_2^n \oplus \mathbb{Z}_3^m$ یا $\mathbb{Z}_2^n \oplus \mathbb{Z}_4^m$ باشد. به عنوان یک نتیجه‌ی مهم اثبات شده است که دقیقاً شش گراف کیلی جمعی ساده‌ی همبند ۳-منظم صحیح وجود

---

[۸] Devos
[۹] Lev
[۱۰] Sinha

دارد. به ویژه، برای گروه متناهی دلخواه G، گراف $\mathrm{Cay}^+(G,S)$ ساده‌ی همبند ۳-منظم صحیح است اگر و تنها اگر G با یکی از گروه‌های

$$\mathbb{Z}_2^2,\ \mathbb{Z}_6,\ D_6,\ \mathbb{Z}_8,\ \mathbb{Z}_2\oplus\mathbb{Z}_4,\ \mathbb{Z}_2^3,\ \mathbb{Z}_{12},\ \mathbb{Z}_2\oplus\mathbb{Z}_6,\ \mathbb{Z}_2\oplus\mathbb{Z}_{12},\ \mathbb{Z}_4\oplus\mathbb{Z}_6,\ \mathbb{Z}_2\oplus\mathbb{Z}_2\oplus\mathbb{Z}_6$$

یکریخت باشد که در آن S یک زیرمجموعه‌ی سه عضوی فارغ از مربع است. این نتایج در فصل ۳ آورده شده است.

گراف $\Gamma=(V,E)$ را در نظر می‌گیریم. مجموعه‌ی $D\subseteq V$ را یک مجموعه‌ی تسلط [۱۱] گوییم اگر هر رأس $v\in V$ یا عضو D باشد و یا با عضوی از D مجاور باشد. یک مجموعه‌ی تسلط را مینیمال گوییم اگر شامل هیچ مجموعه‌ی تسلط دیگری از Γ نباشد. مینیمم اندازه‌ی مجموعه‌های تسلط مینیمال را عدد تسلط [۱۲] گراف Γ گوییم. مجموعه‌ی $T\subseteq V$ را یک مجموعه‌ی تسلط تام [۱۳] گوییم اگر هر رأس $v\in V$ با عضوی از T مجاور باشد. مینیمم اندازه‌ی مجموعه‌های تسلط تام مینیمال را عدد تسلط تام [۱۴] گراف Γ گوییم. به مانند بسیاری از گراف‌های دیگر، مسأله‌ی به دست آوردن عدد تسلط، مجموعه‌ی تسلط، عدد تسلط تام و مجموعه‌ی تسلط تام گراف‌های کیلی جمعی در حالت کلی مسأله‌ای دشوار است. در حالت خاص، نتایجی در باب پارامترهای مذکور روی گروه‌های دوری به دست آمده که برخی از آن‌ها به شرح زیر است:

(I) گراف $\Gamma=\mathrm{Cay}^+(\mathbb{Z}_n,S)$ را در نظر می‌گیریم که در آن $S=\{1,2,\ldots,k\}$ و $1\le k\le\frac{n-1}{2}$. در این صورت، یک کران بالا برای عدد تسلط Γ برابر با $\lceil n/k\rceil$ است.

(II) اگر n و r دو عدد صحیح مثبت، $i,k\in\mathbb{Z}_n$ و $A_i=\{i,i+1,\ldots,i+k-1\}$، آنگاه عدد تسلط گراف‌های $\mathrm{Cay}^+(\mathbb{Z}_n,A_i)$ و $\mathrm{Cay}^+(\mathbb{Z}_n,A_{i+2r})$ برابر است.

(III) اگر n و r دو عدد صحیح مثبت باشند به طوری که $(n,r)=1$، آنگاه به ازای هر زیرمجموعه‌ی A از $\mathbb{Z}_n$، عدد تسلط گراف‌های $\mathrm{Cay}^+(\mathbb{Z}_n,A)$ و $\mathrm{Cay}^+(\mathbb{Z}_n,rA)$ برابر است.

(IV) گراف $\Gamma=\mathrm{Cay}^+(\mathbb{Z}_n,S)$ را در نظر می‌گیریم که در آن $S=\{1,2,\ldots,k\}$ و $1\le k\le\frac{n-1}{2}$. در این صورت، عدد تسلط تام Γ برابر با $\lceil n/k\rceil$ است. به ویژه، به ازای هر $i\in\{0,1,\ldots,k-1\}$، مجموعه‌ی $T_i=T+i$ یک مجموعه‌ی تسلط تام Γ است، که در آن $T=\{0,k,2k,\ldots,(\lceil n/k\rceil-1)k\}$.

گزارش مبسوط این نتایج را می‌توان در فصل ۲ مشاهده کرد. علاوه بر آن‌چه تاکنون گفته شد، در فصل ۲ با معرفی گراف‌های کیلی جمعی رنگی که تعمیمی از گراف‌های کیلی جمعی هستند، و با استفاده از نظریه نمایش گروه‌ها، مقادیر ویژه‌ی ماتریس‌های پاد-دوری [۱۵] حقیقی را به دست می‌آوریم. نتایج ارائه شده در فصل‌های ۲ و ۳ این رساله، در قالب ۳ مقاله‌ی [۴، ۵، ۱۰]، پذیرفته شده در مجلات بین‌المللی و مقاله‌ی ارسالی [۹] است.

---

[۱۱] Dominating set
[۱۲] Domination number
[۱۳] Total dominating set
[۱۴] Total domination number
[۱۵] Anti-circulant matrix

فصل ۱

تعاریف و مفاهیم مقدماتی

لطفا تا صفحه ۵ را به طور دقیق برای دیدن فرمول‌نویسی، چگونگی درج شکل، نحوه ارجاع دهی به فرمول‌ها، نحوه ارجاع دهی به مراجع، نحوه ایجاد مراجع، نحوه ایجاد واژنامه، نحوه ایجاد فهرست نمادها ...، مطالعه کنید.

پرینت از پایان‌نامه (رساله) را به صورت دو رو گرفته شود.

برخی از دستورات از قبیل تعریف اندازه متن، فراخوانی پکیج‌ها، فراخوانی زیپرشین و تعریف فونت‌ها و چند دستور دیگر در پوشه‌ی styles فایل head.tex قرار دارد. در صورت نیاز ، در صورتی که با دستورات لاتک آشنا هستید می‌توانید آنرا تغییر دهید . حتما باید فونت‌های مهم فونت‌های زیر برروی کامپیوتر شما نصب شده باشد: IranNastaliq، Yas ، Parsi Digits

فایل main.tex را به دقت بررسی کنید و در این فایل اطلاعات مربوط به نویسنده‌ی پایان‌نامه (رساله) از قبیل نام و نام خانوادگی، استاد راهنما، ... را (با توجه به راهنمایی‌های ارائه شده) در فیلدهای مشخص شده وارد کنید.

تذکر مهم: صفحات پایان‌نامه‌ی کارشناسی ارشد (بدون تغییر فونت‌ها یا اندازه‌ی کلمات) بین ۷۰ الی ۹۰

صفحه باشد.

توصیه مهم: لطفا فایل‌های نمونه و خروجی‌های آن‌ها را به دقت مرور کنید و اصول اولیه تایپ فرمول‌ها را ملاحظه کنید. برای دیدن مطالب بیشتر به کتاب‌های Latex مراجعه کنید.

در این فصل، برخی از مفاهیم و تعاریف موجود در جبر خطی، نظریه‌ی گراف و نظریه‌ی گروه‌ها، که در فصل‌های بعد از آن‌ها استفاده خواهیم کرد، را مرور می‌کنیم.

۱.۱ گذری بر جبر خطی

می‌توانیم یک فرمول را به این صورت در داخل متن بیاوریم. مثلاً اگر $a = b$ و $b = c$، آن‌گاه $a = c$. علاوه بر این می‌توانیم یک فرمول را در یک خط تنها به صورت زیر بیاوریم

$$f(x) = \int_{۰}^{x} g(t)\, dt.$$

می‌توانیم به یک فرمول برچسب بدهیم و سپس به آن ارجاع کنیم. مثلاً اگر داشته باشیم

$$f(x) = \frac{x + ۱}{x - ۲} \tag{۱}$$

هم‌چنین اگر

$$R = A \oplus B \tag{*}$$

از فرمول (۱) در می‌یابیم که ادعا درست است. هم‌چنین طبق رابطه‌ی (*) حکم قضیه ثابت می‌شود.

می‌توانیم چند فرمول را به صورت مناسب در چند سطر به صورت زیر بنویسم

$$\begin{aligned}
\sum_{g\in G} \alpha(g)\overline{\varrho^{(k)}(g)} &= \frac{۱}{d_k}\mathrm{Tr}\left(\sum_{g\in G} \alpha(g)\overline{\varrho^{(k)}(g)}\right) I_{d_k} \\
&= \frac{۱}{d_k}\left(\sum_{g\in G} \alpha(g)\mathrm{Tr}(\overline{\varrho^{(k)}(g)})\right) I_{d_k} \\
&= \frac{۱}{d_k}\left(\sum_{g\in G} \alpha(g)\overline{\chi_k(g)}\right) I_{d_k},
\end{aligned}$$

می‌توانیم به برخی از سطرهای فرمول‌های چند سطری برچسب داده و بعد به آن‌ها ارجاع کنیم. مثلاً

$$\begin{aligned}
a = b &\implies c = d \\
&\implies c = d \qquad (۲) \\
&\implies f(c) = f(d) \\
&\implies (g \circ f)(c) = (g \circ f)(d) \qquad (۳)
\end{aligned}$$



شکل ۱-۱: یک عکس با فرمت jpeg

برای ارجاع مشابه قبل عمل می‌کنیم. طبق رابطه‌ی (۲) و (۳) خواهیم داشت.

وارد کردن یک تصویر در متن به صورت زیر است. استفاده از [t] (که پیش فرض است، یعنی می‌توان آن‌را ننوشت) در این دستور باعث می‌شود که تصویر در بالای صفحه قرار گیرد.

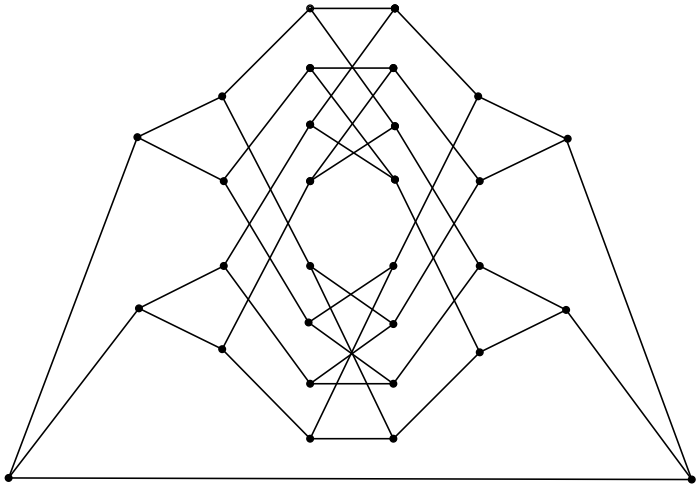
وارد کردن یک تصویر در متن به صورت زیر است. استفاده از [h] در این دستور باعث می‌شود که تصویر در همان قسمت متن که آمده قرار گیرد.

ارجاع به تصویر: در عکس ۱.۳ می‌بینیم که ۱.۱ در تصویر ملاحظه کنید که ....

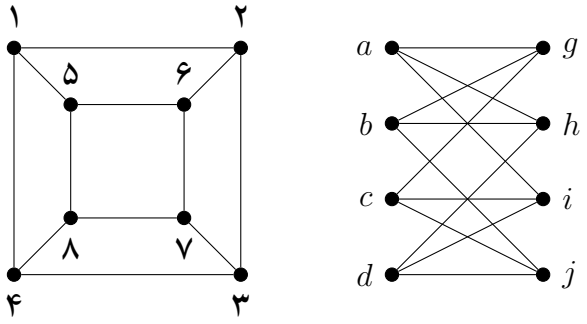
اگر بسته tikz فعال شده باشد، که در این نمونه پایان‌نامه فعال شده است، می‌توانیم شکل‌ها را با استفاده از این بسته رسم کنیم. برای آشنایی با دستورات این بسته به کتاب‌های مربوط مراجعه کنید. در ادامه تعدادی شکل که با استفاده از این بسته رسم شده‌اند را می‌آوریم.

برای آوردن مراجع و ارجاع به آن‌ها دو راه وجود دارد.

(۱) راه اول این است که مراجع مورد استفاده را در فایل references.tex براساس حروف الفبا و مطابق مراجع واقع در آن فایل آورده شود. در این روش همه‌ی مراجع (چه مراجعی که به آن‌ها ارجاع شده و چه مراجعی که به آن‌ها



شکل ۱-۲: یک عکس با فرمت pdf

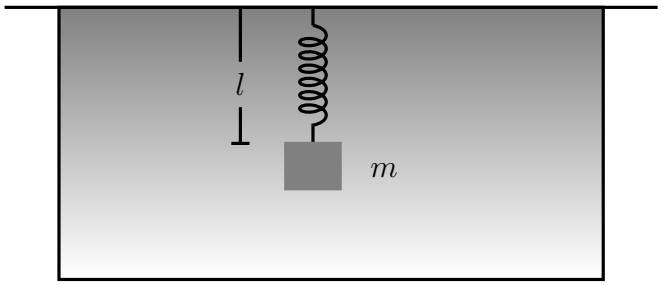


شکل ۱-۳: گراف‌های یکریخت $\mathcal{G}_1$ و $\mathcal{G}_2$

ارجاع نشده) در قسمت مراجع پایان‌نامه ظاهر می‌شوند. به هر مرجع یک برچسب داده و در موقع نیاز به صورت زیر با آن‌ها ارجاع داد. به عنوان مثال:

در این بخش برخی از مباحث جبر خطی که در این رساله از آن‌ها استفاده می‌شود را با استفاده از نمادهای [۲] کتاب [۲۶] به اختصار بیان می‌کنیم. هم‌چنین از مرجع فارسی [۱] استفاده می‌کنیم. I_n را ماتریس همانی از مرتبه n، J_n را ماتریس مربعی $n \times n$ با درایه‌های برابر با یک و j_n را بردار $n \times 1$ با درایه‌های برابر با یک در نظر می‌گیریم. اگر بخواهیم ماتریس همانی را در فهرست نمادها بیاوریم، یک برچسب مطابق بالا در نظر می‌گیریم در فایل list-of-symblos.tex مطابق نمونه داده شده عمل می‌کنیم.

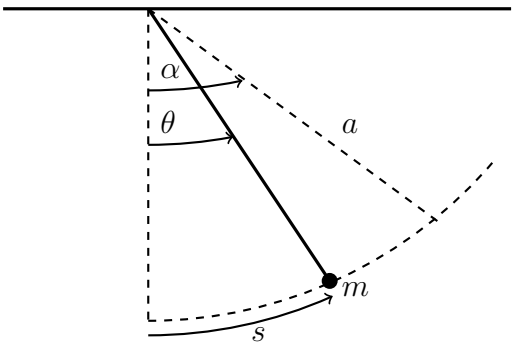
(۲) راه دوم این است که در فایل bibliography.bib مراجع (چه مراجع استفاده شده و چه استفاده نشده) را مطابق مراجع واقع در آن فایل آورده شود. در این روش تنها مراجعی که به آن‌ها در متن ارجاع شده در قسمت مراجع



شکل ۱-۴: جرم m به فنری آویزان شده.

پایان‌نامه ظاهر می‌شوند. به هر مرجع یک برچسب داده و در موقع نیاز به صورت زیر با آن‌ها ارجاع داد. در این روش می‌توان مراجعی را که به مرور فراهم آورده می‌شوند را در آن فایل قرار داد و برای کارهای دیگر مثلا در مقالات یا پایان‌نامه‌های دیگر با فرمت‌های متنوع‌تر استفاده کرد. در این روش برای آوردن مراجع در متن پایان‌نامه باید به منوی Tools رفته و دستور Tex Bib را اجرا کرد. به عنوان مثال:

در این بخش برخی از مباحث جبر خطی که در این رساله از آن‌ها استفاده می‌شود را با استفاده از نمادهای [۲] کتاب [۲۶] به اختصار بیان می‌کنیم. هم‌چنین از مرجع فارسی [۱] استفاده می‌کنیم. I_n را ماتریس همانی از مرتبه n، J_n را ماتریس مربعی $n \times n$ با درایه‌های برابر با یک و j_n را بردار $n \times ۱$ با درایه‌های برابر با یک در نظر می‌گیریم. اگر بخواهیم ماتریس همانی را در فهرست نمادها بیاوریم، یک برچسب مطابق بالا در نظر می‌گیریم در فایل list-of-symblos.tex مطابق نمونه داده شده عمل می‌کنیم.



شکل ۱-۵: یک آونگ ساده

برای ساختن واژه‌نامه و نمایه به صورت زیر عمل می‌کنیم. اگر بخواهیم عین کلمه‌ای که در متن آمده در واژه‌نامه و نمایه بیابد کلمه را در داخل دستور gls مطابق نمونه‌ی زیر قرا می‌دهیم. اگر بخواهیم کلمه‌ای که در متن نیامده واژه‌نامه و نمایه بیابد کلمه را در داخل دستور glsuseri مطابق نمونه‌ی زیر قرا می‌دهیم. کلمات استفاده شده در دستور اخیر باید به صورتی که در فایل gloss.tex آمده وارد شوند.

در این روش برای آوردن واژه‌نامه و نمایه در متن باید به منوی Tools رفته و دستور Glossaries Make Xindy را اجرا کرد. چندین نمونه واژه‌نامه و نمایه را می‌توان فعال کرد که در فایل main آمده است. همچنین، اگر $A = [a_{ij}]$

یک ماتریس روی میدان اعداد مختلط $\mathbb{C}$ باشد، آنگاه از نمادهای $A^\top$، $\mathrm{Tr}(A)$ و $\det(A)$ به ترتیب برای نمایش دادن ترانهاده، اثر و دترمینان ماتریس A استفاده می‌کنیم و فرض را بر دانستن تمام ویژگی‌های این نمادها می‌گذاریم.

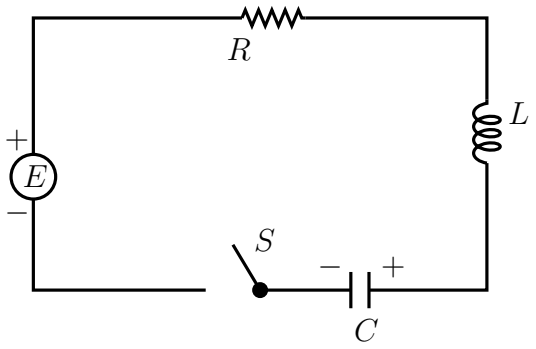
ماتریس هرمیتی الحاقی ماتریس A را با A^* نمایش داده و به صورت $A^* = (\overline{A})^\top$ تعریف می‌کنیم که در آن $\overline{A} = [\overline{a_{ij}}]$ مزدوج ماتریس A است. حال اگر A یک ماتریس مربعی مختلط باشد، آنگاه A را خودالحاق یا هرمیتی می‌نامند اگر با ماتریس هرمیتی الحاقی خود برابر باشد، به این معنی که $A = A^* = (\overline{A})^\top$. همچنین، A را نرمال گوییم اگر $AA^* = A^*A$. یک ماتریس هرمیتی حقیقی یک ماتریس متقارن (حقیقی) نامیده می‌شود.

بنابراین اگر ماتریس A حقیقی باشد آنگاه $A^* = A^\top$ و لذا A نرمال است اگر $A^\top A = AA^\top$. همچنین، هر ماتریس هرمیتی و بنابراین هر ماتریس متقارن حقیقی نرمال است.

فرض کنیم A یک ماتریس $n \times n$ روی میدان اعداد مختلط $\mathbb{C}$ است. در این صورت، اسکالر λ یک مقدار ویژه‌ی A است هرگاه یک بردار ناصفر $n \times 1$ مانند V وجود داشته باشد که $AV = \lambda V$. بردار V را یک بردار ویژه متناظر با مقدار ویژه‌ی λ برای A می‌نامند. به طور کلی، اگر A یک ماتریس مربعی باشد، آنگاه ریشه‌های چندجمله‌ای مشخصه‌ی A، چندجمله‌ای $\det(\lambda I - A)$، را مقادیر ویژه‌ی A می‌نامیم. ریشه‌ی تکراری چندجمله‌ای مشخصه‌ی ماتریس A را مقدار ویژه‌ی چندگانه و ریشه‌ی غیر تکراری آن‌را مقدار ویژه‌ی ساده‌ی A می‌گوییم. مجموعه‌ی با تکرار مجاز مقادیر ویژه‌ی A را طیف A نامیده و برای نمایش دادن آن از نماد $\mathrm{Spec}(A)$ استفاده می‌کنیم. فضای تولید شده توسط مجموعه‌ی تمام بردارهای ویژه‌ی A نظیر به مقدار ویژه‌ی λ را فضای ویژه‌ی متناظر به λ و بعد این فضا را تکرر هندسی λ می‌نامیم. همچنین، تکرر جبری λ همان تعداد تکرار λ در $\mathrm{Spec}(A)$ است. قابل ذکر است که برای ماتریس‌های هرمیتی، دو تکرر جبری و هندسی مساوی هستند.

فرض کنیم A یک ماتریس مختلط $m \times n$ است. در این صورت اگر $m \leq n$، آنگاه جذر مقادیر ویژه‌ی ناصفر AA^* و اگر $n \leq m$، آنگاه جذر مقادیر ویژه‌ی ناصفر A^*A را مقادیر منفرد ماتریس A می‌خوانیم. بنابراین، اگر A یک ماتریس حقیقی $m \times n$ باشد جذر مقادیر ویژه‌ی ناصفر ماتریس‌های $AA^\top$ یا $A^\top A$ را به عنوان مقادیر منفرد ماتریس A در نظر می‌گیریم.

در زیر چند نتیجه‌ی اساسی از جبر خطی را بیان می‌کنیم. برای اطلاعات بیشتر به مرجع [۲۶] مراجعه شود.



شکل ۱-۶: یک مدار الکتریکی ساده

برای آوردن قضیه به صورت زیر عمل می‌کنیم:

قضیه ۱-۱. فرض کنیم A یک ماتریس متقارن حقیقی $n \times n$ است. در این صورت

- دو بردار ویژه‌ی متناظر با دو مقدار ویژه‌ی متمایز A بر هم عمودند.
- مقادیر ویژه‌ی A حقیقی هستند.
- $\mathbb{R}^n$ دارای پایه‌ای متعامد شامل بردارهای ویژه‌ی A است.

می‌توانیم به یک قضیه برچسب داده و در جای مورد نیاز با استفاده از دستور ref به آن ارجاع دهیم.

قضیه ۱-۲. (قضیه‌ی در هم بافی[۱]) فرض کنیم A یک ماتریس متقارن $n \times n$ با مقادیر ویژه‌ی $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_n$ و B یک کهاد متقارن $(n-k) \times (n-k)$ از A با مقادیر ویژه‌ی $\mu_1 \geq \mu_2 \geq \ldots \geq \mu_{n-k}$ است. در این صورت دنباله‌ی مقادیر ویژه‌ی B دنباله‌ی مقادیر ویژه‌ی A را در هم می‌بافد، به این معنی که به ازای هر $i = 1, 2, \ldots, n-k$،

$$\lambda_i \geq \mu_i \geq \lambda_{i+k}.$$

در ادامه نحوه آوردن تعریف، لم، ... را می‌آوریم

۲.۱ گذری بر نظریه‌ی گروه‌ها

در این بخش به معرفی برخی اصطلاحات و نمادهای نظریه گروه‌ها که در طول رساله از آن‌ها استفاده می‌کنیم می‌پردازیم. با فرض این که خواننده مفهوم اولیه‌ی گروه را می‌داند، از نماد $\mathrm{id}(G)$ و $\mathrm{Inv}(G)$ به ترتیب به عنوان عضو بدیهی و مجموعه‌ی پیچش‌های (عناصر مرتبه‌ی ۲) گروه G استفاده می‌کنیم. گروه‌هایی که در طول رساله استفاده می‌شوند همگی متناهی هستند. اگر G یک گروه باشد، آنگاه $H \leq G$ به معنای آن است که H زیرگروه G است و $H \trianglelefteq G$ به معنای نرمال بودن زیرگروه H در G است. اگر S یک زیرمجموعه از G باشد، آنگاه زیرگروه تولید شده توسط S در G را با $\langle S \rangle$ نمایش می‌دهیم که به معنای کوچک‌ترین زیرگروه G شامل S است. اگر $G = \langle S \rangle$ آنگاه S را یک مجموعه‌ی مولد برای G می‌خوانیم. همچنین زمانی که S مجموعه‌ی تک عضوی $\{s\}$ است آنگاه از نماد $\langle s \rangle$ به جای نماد $\langle \{s\} \rangle$ استفاده می‌کنیم و در این صورت $G = \langle s \rangle$ را یک گروه دوری می‌نامیم.

برای گروه متناهی G، یک فضای برداری از بعد $|G|$ روی میدان اعداد مختلط $\mathbb{C}$ با پایه‌ای که توسط اعضای G به صورت $\{e_g\}_{g \in G}$ برچسب گذاری شده است را با $\mathbb{C}[G]$ نشان می‌دهیم. بنابراین عضو دلخواه $\phi \in \mathbb{C}[G]$ را می‌توان به صورت

$$\phi = \sum_{g \in G} \mu_g e_g$$

[۱] Interlacing Theorem

نشان داد که در آن $\mu_g \in \mathbb{C}$. فضای برداری $\mathbb{C}[G]$ را همان فضای برداری تمام توابع مختلط مقدار روی G با پایه‌ی استاندارد $\{e_g\}_{g\in G}$ در نظر می‌گیریم که

$$e_g(h) = \begin{cases} ۱ & : \quad g = h, \\ ۰ & : \quad g \neq h. \end{cases}$$

بنابراین تابع $\phi : G \to \mathbb{C}$ متناظر با بردار $\phi = \sum_{g\in G} \phi(g)e_g$ است و برعکس.

ضرب داخلی دو بردار $\phi, \psi \in \mathbb{C}[G]$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\langle \phi, \psi \rangle = \frac{۱}{|G|} \sum_{g\in G} \phi(g)\overline{\psi}(g),$$

که در آن $\overline{\psi}(g)$ مزدوج $\psi(g)$ است.

فرض کنیم d یک عدد طبیعی و $\mathrm{GL}_d(\mathbb{C})$ گروه تمام ماتریس‌های معکوس‌پذیر $d \times d$ روی $\mathbb{C}$ (تمام نگاشت‌های خطی معکوس‌پذیر روی $\mathbb{C}^d$) است. یک نمایش گروه G از درجه‌ی d یک همریختی به صورت $\rho : G \to \mathrm{GL}_d(\mathbb{C})$ است. به ازای هر $g \in G$، تصویر g در $\mathrm{GL}_d(\mathbb{C})$ را با ρ_g و برای هر $v \in \mathbb{C}^d$، تصویر v تحت عمل ρ_g را با $\rho_g v$ نمایش می‌دهیم. به ازای هر $g, h \in G$، $v, w \in \mathbb{C}^d$ و $x, y \in \mathbb{C}$ خواص زیر برقرار است:

$$\rho_g\rho_h = \rho_{gh}, \quad \rho_g^{-۱} = \rho_{g^{-۱}}, \quad \rho_g(xv + yw) = x\rho_g v + y\rho_g w.$$

دو نمایش $\rho : G \to \mathrm{GL}_{d_۱}(\mathbb{C})$ و $\tau : G \to \mathrm{GL}_{d_۲}(\mathbb{C})$ هم‌ارز هستند اگر $d_۱ = d_۲ = d$ و ماتریس وارون‌پذیر $d \times d$ای مانند T وجود داشته باشد به طوری که به ازای هر $g \in G$،

$$\tau_g = T\rho_g T^{-۱},$$

یعنی ماتریس‌های ρ_g و τ_g متشابه هستند.

حال فرض می‌کنیم $\rho : G \to \mathrm{GL}_d(\mathbb{C})$ یک نمایش گروه G و $B = \{b_۱, \ldots, b_d\}$ یک پایه برای $\mathbb{C}^d$ است. نمایش ماتریسی ρ وابسته به پایه‌ی B نگاشتی مانند ϱ است که به ازای هر $g \in G$، ماتریس $\varrho(g)$ با مرتبه‌ی d از ρ_g نسبت به پایه‌ی B را نظیر می‌کند. برای $۱ \leq i, j \leq d$، درایه‌ی سطر iام ستون jام از ماتریس $\varrho(g)$ را با $\varrho_{ij}(g)$ نمایش می‌دهیم. به عبارت دیگر، $\varrho_{ij}(g)$ یکتا عدد مختلطی است که به ازای هر $۱ \leq i, j \leq d$، در رابطه‌ی

$$\rho(g)b_j = \sum_{i=۱}^{d} \varrho_{ij}(g)b_i$$

صدق می‌کند. نمایش ماتریسی ϱ مجموعه‌ای از $d^۲$ بردار در $\mathbb{C}[G]$ را تعریف می‌کند، یعنی به ازای هر $۱ \leq i, j \leq d$،

$$\varrho_{ij} = \sum_{g\in G} \varrho_{ij}(g)e_g$$

یک بردار در $\mathbb{C}[G]$ است. فرض کنیم $\rho : G \to \mathrm{GL}_d(\mathbb{C})$ یک نمایش گروه G و W یک زیرفضای برداری از $\mathbb{C}^d$ است. زیرفضای W را ρ-پایا گوییم اگر به ازای هر $g \in G$ و $w \in W$ رابطه‌ی $\rho_g w \in W$ برقرار باشد. اگر W یک زیرفضای ρ-پایای $\mathbb{C}^d$ باشد آن‌گاه تحدید $\rho|_W$ از ρ به W یک نمایش از G روی W است. چنین نمایشی را یک زیرنمایش از ρ می‌خوانیم. نمایش $\rho : G \to \mathrm{GL}_d(\mathbb{C})$ را تحویل‌ناپذیر گوییم اگر $\mathbb{C}^d$ هیچ زیرفضای ρ-پایای غیر بدیهی نداشته باشد و در غیر این صورت نمایش را تحویل‌پذیر می‌نامیم.

لم ۱-۳. (لم شور [۲]) فرض کنیم ρ و τ دو نمایش تحویل‌ناپذیر به ترتیب از درجات d_1 و d_2 هستند و T یک نگاشت خطی از $\mathbb{C}^{d_1}$ به $\mathbb{C}^{d_2}$ است به طوری که به ازای هر $g \in G$، $\tau_g T = T\rho_g$. در این صورت،

(۱) اگر ρ و τ غیر هم‌ارز باشند، آن‌گاه $T = 0$.

(۲) اگر $d_1 = d_2$ و $\rho = \tau$، آن‌گاه $T = \lambda I$، که در آن $\lambda \in \mathbb{C}$.

نمایش $\rho : G \to \mathrm{GL}_d(\mathbb{C})$ مفروض است. سرشت $\chi_\rho : G \to \mathbb{C}$ از ρ به صورت $\chi_\rho(g) = \mathrm{Tr}\rho_g$ تعریف می‌شود که در آن $g \in G$. اگر χ_ρ سرشت مربوط به نمایش ρ از درجه‌ی d باشد، به ازای هر $g, h \in G$ خواص زیر برقرار است:

$$\chi_\rho(\mathrm{id}(G)) = d, \quad \chi_\rho(g^{-1}) = \overline{\chi_\rho(g)}, \quad \chi_\rho(ghg^{-1}) = \chi_\rho(h).$$

بنابراین اگر χ و χ' سرشت‌های مربوط به دو نمایش تحویل‌ناپذیر غیر هم‌ارز روی G باشند، آن‌گاه $\langle \chi, \chi \rangle = 1$ و $\langle \chi, \chi' \rangle = 0$. در نتیجه سرشت‌های مربوط به نمایش‌های تحویل‌ناپذیر غیر هم‌ارز از G تشکیل یک مجموعه‌ی متعامد را می‌دهند، برای اطلاعات بیشتر به مرجع [۳۰] مراجعه شود.

تعریف ۱-۴. تابع $\phi : G \to \mathbb{C}$ را یک تابع رده‌ای روی گروه G می‌نامیم هرگاه به ازای هر $g, h \in G$ داشته باشیم $\phi(ghg^{-1}) = \phi(h)$.

فضای برداری تمام توابع رده‌ای مختلط مقدار روی G را با $\mathrm{cf}(G)$ نمایش می‌دهیم که یک زیرفضا از $\mathbb{C}[G]$ با بعد متناهی و برابر با تعداد رده‌های مزدوجی G است. حال با توجه به این که سرشت مربوط به یک نمایش از G یک تابع رده‌ای است و سرشت‌های مربوط به نمایش‌های تحویل‌ناپذیر غیر هم‌ارز از G تشکیل یک پایه‌ی متعامد در $\mathrm{cf}(G)$ را می‌دهند، قضیه‌ی زیر را می‌توان نتیجه گرفت.

قضیه ۱-۵ ([۳۰]). تعداد نمایش‌های تحویل‌ناپذیر غیر هم‌ارز از گروه G متناهی و برابر با تعداد رده‌های مزدوجی G است.

یادآوری می‌کنیم که ماتریس مربعی مختط M را یکانی می‌نامیم اگر $MM^* = M^*M = I$ که در آن M^* ماتریس ترانهاده‌ی مزدوج M است. به ویژه، اگر $T = [t_{ij}]$ یکانی باشد آن‌گاه معکوس $[t_{ij}]$ برابر با $[\overline{t}_{ji}]$ است که در آن $\overline{z}$ همان مزدوج عدد مختلط z است. قضیه‌ی زیر، که در طول رساله بارها از آن استفاده می‌شود، بیان می‌کند که برای هر نمایش ρ از G یک نمایش ماتریسی یکانی متناظر با ρ وجود دارد.

[۲] Schur's Lemma

قضیه ۱-۶. ([۲۷]) هر نمایش $G \to \mathrm{GL}_d(\mathbb{C})$ از G هم‌ارز با یک نمایش به صورت $\rho : G \to \mathrm{GL}_d(\mathbb{C})$ است که در آن به ازای هر $g \in G$، ماتریس $\rho(g)$ یکانی است.

فرض کنیم χ_1، χ_2، ... و χ_n سرشت‌های متناظر با نمایش‌های تحویل‌ناپذیر غیر هم‌ارز ρ_1، ρ_2، ... و ρ_n از G با درجات به ترتیب d_1، d_2، ... و d_n هستند. همچنین فرض می‌کنیم به ازای هر $k = 1, 2, \ldots, n$، $\varrho^{(k)}$ نمایش ماتریسی متناظر با نمایش ρ_k است. در این صورت، بردارهای $\overline{\varrho}_{ij}^{(k)} \in \mathbb{C}[G]$ که در آن $1 \le k \le n$ و $1 \le i, j \le d_k$، تشکیل یک پایه‌ی متعامد برای $\mathbb{C}[G]$ را می‌دهند.

۳.۱ مفاهیم اولیه‌ی گراف‌ها

گراف جهت‌دار $\mathcal{G}$ عبارت است از دوتایی مرتب (V, E) که در آن V مجموعه‌ی رئوس است و E مجموعه‌ای از زوج‌های مرتبی از رأس‌ها است که کمان یا یال جهت‌دار نامیده می‌شوند. گراف $\mathcal{G}$ غیر جهت‌دار است هرگاه $(x, y) \in E$ اگر و تنها اگر $(y, x) \in E$. یک گراف متناهی است اگر مجموعه‌ی رئوس آن متناهی باشد. اگر $|V(\mathcal{G})| = n$ آنگاه $\mathcal{G}$ را از مرتبه‌ی n می‌گوییم. در این رساله، تنها گراف‌های متناهی در نظر گرفته می‌شوند.

فرض کنیم u و v دو رأس از گراف $\mathcal{G}$ هستند. یال بین u و v را با نماد uv نمایش داده و گوییم رأس u و v مجاور یا همسایه هستند. برای نشان دادن این همسایگی از نماد $u \sim v$ استفاده می‌کنیم. همچنین، دو یال e و f را مجاور گوییم اگر و تنها اگر در یک رأس مشترک باشند. اگر یالی رأسی را به خود آن رأس وصل کند، آن را یک طوقه می‌نامیم. اگر بین دو رأس بیش از یک یال وجود داشته باشد آن‌ها را یال‌های چندگانه نامیده و چنین گرافی را یک گراف چندگانه می‌خوانیم. گرافی غیر جهت‌داری که فاقد طوقه و یال‌های چندگانه باشد را یک گراف ساده می‌نامیم. مجموعه‌ی همه‌ی همسایه‌های v را همسایگی باز v نامیده و با $N(v)$ نمایش می‌دهیم. همچنین، همسایگی بسته‌ی v را با نماد $N[v]$ نشان می‌دهیم که برابر است با $N(v) \cup \{v\}$. اگر v یک رأس طوقه‌دار باشد آنگاه $N(v) = N[v]$. اگر لازم باشد گراف $\mathcal{G}$ را تصریح کنیم، همسایگی‌های باز و بسته‌ی رأس v را به ترتیب با $N_{\mathcal{G}}(v)$ و $N_{\mathcal{G}}[v]$ نمایش می‌دهیم. در گراف‌های ساده، درجه‌ی رأس u برابر با تعداد همسایه‌های آن است که آن‌را با نماد $\deg(u)$ نشان می‌دهیم. اگر گرافی دارای طوقه باشد آنگاه سهم یک طوقه در درجه‌ی رأس مربوط به آن دو برابر سایر یال‌ها است. در برخی متون، در محاسبه‌ی درجه‌ی یک رأس طوقه‌دار، سهمی برابر برای یک یال ساده و یک طوقه در نظر می‌گیرند و آن طوقه را با نامی متفاوت، نیم‌یال، می‌خوانند. در این رساله، بین مفهوم طوقه و نیم‌یال تفاوت قائل شده و آن‌ها را به عنوان دو مفهوم کاملا مجزا استفاده خواهیم کرد. گرافی که در آن درجه‌ی تمامی رئوس یکسان و برابر با عدد k است را یک گراف k-منظم یا به اختصار یک گراف منظم می‌نامیم. گراف ساده‌ی n رأسی $\mathcal{G}$ را کامل گوییم اگر درجه‌ی هر رأس آن $n-1$ باشد یا به عبارت دیگر گراف $(n-1)$-منظم باشد. همچنین، گراف نیم‌یال‌دار n رأسی فاقد یال چندگانه، کامل است اگر درجه‌ی هر رأس آن n باشد. یک گراف کامل n رأسی را با K_n نمایش می‌دهیم.

گراف ساده‌ی $\mathcal{G} = (V, E)$ را دوبخشی می‌نامیم هرگاه مجموعه‌ی رئوس آن‌را بتوان به دو مجموعه‌ی U و W به گونه‌ای افراز کرد که هر یال گراف، رأسی در U و رأسی در W داشته باشد. افراز $V = U \cup W$ را یک افراز دوبخشی

رئوس می‌نامند. اگر درجه‌ی هر رأس از U برابر با $|W|$ باشد یا به طور معادل درجه‌ی هر رأس از W برابر با $|U|$ باشد، آن‌گاه گراف $\mathcal{G}$ را یک گراف کامل دوبخشی نامیده و با نماد $K_{|U|,|W|}$ نمایش می‌دهیم.

دو گراف را یکریخت می‌نامند هرگاه یک نگاشت دوسویی حافظ مجاورت بین مجموعه‌ی رئوس آن‌ها وجود داشته باشد. اگر دو گراف یکریخت باشند در حالت کلی تفاوتی بین آن‌ها قائل نمی‌شویم و حتی آن دو را یکی می‌دانیم. یک خودریختی گرافی یک نگاشت دوسویی حافظ مجاورت از مجموعه‌ی رئوس گراف به همان مجموعه است. مجموعه‌ی تمام خودریختی‌های گراف $\mathcal{G}$ با عمل ترکیب تشکیل یک گروه می‌دهد که آن‌را گروه خودریختی‌های آن گراف نامیده و با $\mathrm{Aut}(\mathcal{G})$ نمایش می‌دهیم. به وضوح $\mathrm{Aut}(\mathcal{G}) \leq \mathrm{Sym}(V(\mathcal{G}))$. گراف $\mathcal{G}$ را رأس (یال) انتقالی نامیم هرگاه $\mathrm{Aut}(\mathcal{G})$ روی مجموعه‌ی رئوس (مجموعه‌ی یال‌ها) به صورت انتقالی عمل کند، به این معنی که به ازای هر دو رأس (یال) x و y یک خودریختی گرافی مانند φ وجود داشته باشد به طوری که $\varphi(x) = y$.

گراف $\mathcal{H}$ را یک زیرگراف از گراف $\mathcal{G}$ می‌نامند هرگاه مجموعه‌ی رئوس و یال‌های آن به ترتیب زیرمجموعه‌ی مجموعه‌ی رئوس و یال‌های $\mathcal{G}$ باشد. همچنین، برای زیرمجموعه‌ی T از V، زیرگراف $\mathcal{H}$ با مجموعه‌ی رئوس T را یک زیرگراف القایی از $\mathcal{G}$ می‌نامند هرگاه به ازای هر دو رأس v و u در T، u و v در $\mathcal{H}$ مجاورند اگر و تنها اگر u و v در $\mathcal{G}$ مجاور باشند. زیرگراف القایی $\mathcal{H}$ با مجموعه‌ی رئوس T از گراف $\mathcal{G}$ را با $\mathcal{G}[T]$ نمایش می‌دهیم.

در بسیاری از کاربردهای نظریه‌ی گراف موضوع حرکت روی گراف، حرکت از رأسی به رأس دیگر از طریق یال‌های گراف، دخالت دارد. یک مسیر از $v_۰$ به v_l به طول l در گراف $\mathcal{G}$ دنباله‌ای از رئوس و یال‌های متمایز به صورت $v_۰$، $e_۱$، $v_۱$، $e_۲$، $v_۲$، ...، e_l و v_l است که در آن هر e_i یالی است که رأس $v_{i-۱}$ و v_i را به هم متصل می‌کند. بعضی اوقات در یک گراف ساده، این مسیر به شکل فشرده‌تری به صورت $v_۰ \sim v_۱ \sim \cdots \sim v_l$ نمایش داده می‌شود. در یک مسیر اگر $v_۰ = v_l$، آن‌گاه آن مسیر را یک دور می‌نامند. یک مسیر n رأسی و یک دور به طول n را به ترتیب با نمادهای P_n و C_n نشان می‌دهیم و آن‌ها را به ترتیب گراف‌های مسیر و دور می‌نامیم. یک گراف مسیر می‌تواند غیر ساده باشد، به این معنی که دو رأس ابتدا و انتهای آن دارای نیم‌یال باشند. چنین گرافی را یک گراف مسیر ۲-منظم می‌نامیم. همچنین، یک گراف دور می‌تواند غیر ساده باشد، به این معنی که تمام رئوس آن دارای نیم‌یال باشند. چنین گرافی را یک گراف دور ۳-منظم می‌نامیم.

گراف $\mathcal{G}$ را در نظر می‌گیریم. دو رأس از $\mathcal{G}$ را متصل گوییم اگر مسیری بین آن‌ها در گراف وجود داشته باشد. رابطه‌ی متصل بودن یک رابطه‌ی هم‌ارزی روی مجموعه‌ی رئوس گراف است. فرض کنیم $V_۱$، $V_۲$، ... و V_r رده‌های هم‌ارزی این رابطه را تشکیل دهند. در این صورت هر کدام از زیرگراف‌های $\mathcal{G}[V_۱]$، $\mathcal{G}[V_۲]$، ... و $\mathcal{G}[V_r]$ را یک مؤلفه (مؤلفه‌ی همبندی) برای گراف $\mathcal{G}$ می‌گوییم. اگر $r = ۱$، آن‌گاه گراف $\mathcal{G}$ را همبند و در غیر این صورت آن‌را ناهمبند می‌نامیم.

فاصله‌ی بین دو رأس u و v طول کوتاه‌ترین مسیر بین آن دو رأس است که آن را با $\mathrm{dist}(u, v)$ نمایش می‌دهیم. بیشترین فاصله‌ی بین هر دو رأس گراف $\mathcal{G}$ را قطر آن نامیده و با $\mathrm{diam}(\mathcal{G})$ نمایش می‌دهیم. همچنین، کمر گراف $\mathcal{G}$ طول کوتاه‌ترین دور در گراف است که آن‌را با نماد $\mathrm{girth}(\mathcal{G})$ نمایش می‌دهیم. اگر گرافی دارای دور نباشد، آن‌گاه کمر آن‌را بینهایت، ∞، در نظر می‌گیریم.

گراف $\mathcal{G}$ از مرتبه‌ی n مفروض است. با یک برچسب‌گذاری مجدد رئوس گراف به صورت ۱، ۲، ... و n، ماتریس مجاورت گراف $\mathcal{G}$، $A = [a_{ij}]$، ماتریسی $n \times n$ است که سطرها و ستون‌های آن با ۱، ۲، ... و n برچسب‌گذاری شده

است و

$$A = [a_{ij}], \quad a_{ij} = \begin{cases} ۱ & : i \sim j \\ ۰ & : i \nsim j. \end{cases}$$

فصل ۲

گراف‌های کیلی جمعی

در این فصل ابتدا چند خاصیت مقدماتی را درباره‌ی گراف‌های کیلی جمعی ثابت کرده و سپس مؤلفه‌های همبندی گراف $\mathrm{Cay}^+(G,S)$ را مشخص می‌کنیم. برخی خواص گراف‌های پاد-دوری را بررسی کرده و با استفاده از مفاهیم گراف‌های کیلی جمعی رنگی و نظریه‌ی نمایش گروه‌ها، مقادیر ویژه‌ی گراف‌های پاد-دوری حقیقی را به دست آورده و در نهایت ثابت می‌کنیم که گراف‌های پاد-دوری همیلتونی هستند. همچنین، با به دست آوردن چند نتیجه‌ی کلی درباره‌ی عدد تسلط (تام) و مجموعه‌ی تسلط (تام) گراف‌های کیلی جمعی، کران‌های بهینه‌ای برای این مفاهیم در گراف‌های پاد-دوری ارائه می‌کنیم.

۱.۲ برخی خواص گراف‌های کیلی جمعی

تعریف ۲-۱. فرض کنیم G یک گروه آبلی متناهی و S یک زیرمجموعه از آن است. در این صورت، گراف کیلی جمعی روی G وابسته به S گرافی است که مجموعه‌ی رئوس آن G بوده و دو رأس x و y با هم مجاورند اگر و فقط اگر $x+y \in S$. چنین گرافی را با نماد $\mathrm{Cay}^+(G,S)$ نمایش داده و S را یک مجموعه‌ی اتصال برای گراف $\mathrm{Cay}^+(G,S)$ می‌نامیم.

بنا بر تعریف، مجموعه‌ی $S-x=\{s-x \ : \ s\in S\}$ مجموعه‌ی رئوس مجاور با رأس x بوده که یک مجموعه‌ی $|S|$ عضوی است. اگر به ازای $g\in G$ داشته باشیم $g+g\in S$، آن‌گاه g یک رأس نیم‌یال‌دار بوده که با $|S|-1$ رأس دیگر نیز مجاور است، بنابراین درجه‌ی آن $|S|$ خواهد بود. در نتیجه گراف $\mathrm{Cay}^+(G,S)$ یک گراف $|S|$-منظم است در حالی که لزوماً رأس انتقالی نیست. به سادگی می‌توان نشان داد که $\mathrm{Cay}^+(G,S)$ کامل است اگر و فقط اگر $S=G$ یا

$S = G \setminus \{\mathrm{id}(G)\}$ و G یک ۲-گروه آبلی مقدماتی باشد. اگر مجموعه‌ی S عضوهایی به صورت $g + g$ نداشته باشد، آنگاه S را یک زیرمجموعه‌ی فارغ از مربع می‌نامیم. به وضوح یک گراف کیلی جمعی با چنین مجموعه‌ی اتصالی فاقد نیم‌یال است. اگر چه گراف‌های کیلی جمعی برای گروه‌های آبلی تعریف شده‌اند، می‌توان آن‌را برای هر گروه دلخواه تعمیم داد که در این صورت، گراف کیلی جمعی آن یک گراف جهت‌دار است. اگر S یک زیرمجموعه‌ی نرمال از گروه دلخواه G باشد (یعنی به ازای هر $g \in G$ و $s \in S$ داشته باشیم $g^{-1}sg \in S$)، آنگاه گراف کیلی جمعی $\mathrm{Cay}^+(G, S)$ با مجموعه‌ی رئوس G و مجموعه‌ی یال‌های $E = \{(x, sx^{-1}) \ : \ s \in S, x \in G\}$ یک گراف غیرجهت‌دار است، زیرا $xy \in S$ ایجاب می‌کند $yx = yxyy^{-1} \in S$. در این حالت نیز $\mathrm{Cay}^+(G, S)$ یک گراف $|S|$-منظم است در حالی که لزوماً رأس انتقالی نیست.

در این بخش، ابتدا چند خاصیت مقدماتی را درباره‌ی گراف‌های کیلی جمعی ثابت کرده و سپس مؤلفه‌های همبندی گراف $\mathrm{Cay}^+(G, S)$ را مشخص می‌کنیم.

لِو در [۲۹] با ارائه‌ی یک شرط لازم و کافی، همبندی گراف‌های کیلی جمعی روی گروه‌های آبلی را بررسی کرده است. در لم زیر آن شرط را بیان کرده و سپس در قضیه‌ی ؟؟ آن‌را برای هر گروه دلخواه تعمیم داده و اثبات می‌کنیم.

لم ۲-۲. [۲۹] فرض کنیم S یک زیرمجموعه از گروه متناهی آبلی G است. شرط لازم و کافی برای همبندی گراف $\mathrm{Cay}^+(G, S)$ آن است که S مشمول در همدسته‌ی هیچ زیرگروهی از G نباشد مگر مشمول در همدسته‌ی ناصفر زیرگروهی از اندیس ۲.

فصل ۳

گراف‌های کیلی جمعی صحیح

در این فصل اثبات می‌کنیم که تنها شش گراف کیلی جمعی ساده‌ی همبند ۳-منظم صحیح وجود دارد که این گراف‌ها توسط گروه‌های

$$\mathbb{Z}_۲^۲,\ \mathbb{Z}_۶,\ D_۶,\ \mathbb{Z}_۸,\ \mathbb{Z}_۲ \oplus \mathbb{Z}_۴,\ \mathbb{Z}_۲^۳,\ \mathbb{Z}_{۱۲},\ \mathbb{Z}_۲ \oplus \mathbb{Z}_۶,\ \mathbb{Z}_۲ \oplus \mathbb{Z}_{۱۲},\ \mathbb{Z}_۴ \oplus \mathbb{Z}_۶,\ \mathbb{Z}_۲ \oplus \mathbb{Z}_۲ \oplus \mathbb{Z}_۶$$

تولید می‌شوند.

۱.۳ گروه‌های کیلی جمعی صحیح

یادآوری می‌کنیم که گراف $\mathcal{G}$ را صحیح گوییم هرگاه همه‌ی مقادیر ویژه‌ی آن صحیح باشند. گراف بدون یال n رأسی و گراف کامل n رأسی ساده دو مثال از گراف‌های صحیح با طیف‌های به ترتیب، $(۰,\dots,۰)$ و $(n-۱,-۱,\dots,-۱)$ هستند. مفهوم گراف‌های صحیح ابتدا توسط هَراری و شوئِنک[۱] مطرح شد. آن‌ها ابتدا این سؤال را مطرح کردند که کدام گراف‌ها طیف صحیح دارند [۲۵]. در واقعیت، جواب این سؤال به ظاهر سخت است. اگر چه با انتخاب کلاس‌های خاص از گراف‌ها، حل این سؤال ساده‌تر خواهد بود. به عنوان مثال، مسیرهای با n رأس صحیح هستند اگر و تنها اگر $n = ۲$. همچنین، دورهای با n رأس صحیح هستند اگر و تنها اگر $n = ۳, ۴, ۶$. برای اطلاعات بیشتر به مرجع [۱۱] مراجعه شود. به تازگی دریافته‌اند که از جاذبه‌های گراف‌های صحیح، استفاده‌ی آن‌ها در طراحی شبکه‌های توپولوژی حالت پایدار شبکه‌های انتقال است، برای اطلاعات بیشتر به مراجع [۳، ۳۱] مراجعه شود.

---

[۱] Schwenk

پیوست ۱

در این بخش الگوریتم‌های مورد نیاز در فصل ۳ رساله که به وسیله‌ی نرم افزار GAP [۳۵] نوشته شده‌اند ارائه شده است. خروجی الگوریتم Prog-I علاوه بر آن زیرمجموعه‌های سه عضوای از $\mathbb{Z}_n$ که گراف کیلی جمعی حاصل همبند و صحیح است، قدرمطلق مقادیر ویژه‌ی گراف مذکور نیز است.

Prog-I:

```
Main:=function(n)
local i,j,k,r,t,a,c,w,A,B,G,T,D;
G:=CyclicGroup(IsPermGroup,n);
a:=MinimalGeneratingSet(CyclicGroup(IsPermGroup,n))[1];
T:=Elements(List(G,x->x^2));     B:=Set([]);
for i in [1..n-1] do
  for j in [i+1..n-1] do
    for k in [j+1..n-1] do
      w:=0; A:=[]; D:=[];
      for r in [0..n-1] do
        c:=E(n)^(i*r)+E(n)^(j*r)+E(n)^(k*r);
        t:=ImaginaryPart(c)^2+RealPart(c)^2;
        if IsInt(t)  and IsInt(Sqrt(t)) then   w:=w+1;
        fi;
      od;
      if w=n and Intersection([a^i,a^j,a^k],T)=[]
         and Group(a^i,a^j,a^k)=G
         and Size(Group(a^(i-j),a^(i-k),a^(j-k)))>=Size(G)/2
      then
```

```
        Add(D,i); Add(D,j); Add(D,k); Add(A,D);
        for r in [0..n-1] do
          c:=E(n)^(i*r)+E(n)^(j*r)+E(n)^(k*r);
          t:=ImaginaryPart(c)^2+RealPart(c)^2;
          if IsInt(t) then  t:=Sqrt(t);
          fi;
          Add(A,t);
        od;
        Add(B,A);
      fi;
    od;
  od;
od;
return B;
end;
```

پیوست ۲

سرشت‌های تحویل ناپذیر دو گروه A_4 و S_4 به ترتیب در جدول‌های Table-I و Table-II ارائه شده است که در آن‌ها $C_G(g)$ مرکزساز عضو g در گروه G است.

Table-I:

g_i	1	$(1\ 2)(3\ 4)$	$(1\ 2\ 3)$	$(1\ 3\ 2)$
$\lvert C_G(g_i)\rvert$	12	4	3	3
χ_1	1	1	1	1
χ_2	1	1	w	w^2
χ_3	1	1	w^2	w
χ_4	3	-1	0	0

Table-II:

g_i	1	$(1\ 2)$	$(1\ 2\ 3)$	$(1\ 2)(3\ 4)$	$(1\ 2\ 3\ 4)$
$\lvert C_G(g_i)\rvert$	24	4	3	8	4
χ_1	1	1	1	1	1
χ_2	1	-1	1	1	-1
χ_3	2	0	-1	2	0
χ_4	3	1	0	-1	-1
χ_5	3	-1	0	-1	1

منابع

[۱] طائری، ب.، مبانی جبر مجرد، انتشارات دانشگاه صنعتی اصفهان، ۱۳۸۳.

[۲] یاسمی س.، جبر پیشرفته، انتشارات دانشگاه صنعتی شریف، ۱۳۸۹.

[3] Abdollahi A. and Vatandoost E., "Which Cayley graphs are integral?", Electronic Journal of Combinatorics 16 (2009) #R122.

[4] Ahmadi A., Belk R., Tamon C. and Wendler C., "On mixing of continuous-time quantum walks on some circulant graphs", Quantum Inform. and Comp. 3 (2003) 611-618.

[5] Aldrovandi R., *Special Matrices of Mathematical Physics: Stochastic, Circulant and Bell Matrices*, World Scientific, Singapore, 2001.

[6] Alon N., "Large sets in finite fields are sumsets", J. Number Theory 126 (1) (2007) 110-118.

[7] Amooshahi M. and Taeri B., "On the domination and total domination numbers of Cayley sum graphs over $\mathbb{Z}_n$", Kragujevac J. Math. 38 (2) (2014) 315-320.

[8] Amooshahi M. and Taeri B., "On Cayley sum graphs of non-abelian groups", Graphs and Combinatorics 38 (1) (2015) 332-340.

[9] Amooshahi M. and Taeri B., "On integral Cayley sum graphs", submitted.

[10] Amooshahi M. and Taeri B., "Cayley sum color and anti-circulant graphs", Linear Algebra and its Applications 466 (2015) 409–420.

[11] Baliń ska K., Cvetković D., Radosavljević Z., Simić S. and Stevanović D., "A survey on integral graphs", Univ. Beograd. Publ. Elektrotehn. Fak. Ser. Mat. 13 (2002) 42-65.

[12] Bergstrand D., Harary F., Hodges K., Jenning G., Kuklinski L. and Weiner J., "Product graphs are sum graphs", Math. Mag. 65 (1992) 262-264.

[13] Biggs N., *Algebraic Graph Theory*, Cambridge University Press, 1974.

[14] Bussemaker F. C. and Cvetković D., "There are exactly 13 connected, cubic, integral graphs", Univ. Beograd, Publ. Elektrotehn. Fak. Ser. Mat. Fiz. 544 (1976) 43-48.

[15] Cheyne B., Gupta V. and Wheele C., "Hamilton cycles in addition graphs", Rose-Hulman Undergraduate Math. Journal 1 (4) (2003) 1-17.

[16] Chung F. R. K., "Diameters and eigenvalues", J. Amer. Math. Soc. 2 (2) (1989) 187-196.

[17] Davis P. J., *Circulant Matrices*, Wiley, New York, 1979.

[18] Devos M., Goddyn L., Mohar B. and Samal R., "Cayley sum graphs and eigenvalues of (3,6)-fullerenes", J. Combin. Theory Ser. B 99 (2009) 358-396.

[19] Ellingham M. N., "Sum graphs from trees", Ars Combinatoria 35 (1993) 335-349.

[20] Green B., "Counting sets with small sumset, and the clique number of random Cayley graphs", Combinatorica 25 (3) (2005) 307-326.

[21] Grynkiewicz D., Lev V. F. and Serra O., "Connectivity of addition Cayley graphs", J. Comin. Theory Ser. B 99 (2009) 202-217.

[22] Harary F., "Sum graphs over all the integers", Discrete Math. 124 (1994) 99-105.

[23] Harary F., "Sum graphs and difference graphs", Congr. Numer. 72 (1990) 101-108.

[24] Harary F., Hentzel I.R. and Jacobs D., "Digitizing sum graphs over the reals", Caribbean J. Math. Comput. Sci. 1 (1991) 1-4.

[25] Harary F. and Schwenk A., "Which graphs have integral spectra?", in: R. Bari, F. Harary (Eds.), Graphs and Combinatorics, Springer, Berlin, 1974, p. 45.

[26] Hoffman K. and Kunze R., *Linear Algebra*, Prentice-Hall, 2nd Ed. 1971.

[27] Issacs M., *Character theory of finite Groups*, Academic Press Inc., 1976.

[28] Klotz W. and Sander T., "On integral Cayley graphs over abelian groups", Notes Number Theory Discrete Math. 17 (3) (2011) 49-59.

[29] Lev V. F., "Sums and differences along Hamiltonian cycles", Discrete Math. 310 (2010) 575-584.

[30] James G., and Liebeck M., *Representationes and characters of groups*, Cambridge University Press, 1993.

[31] Saxena N., Severini S. and Shparlinski I. E., "Parameters of integral circulant graphs and periodic quantum dynamics", Int. J. Quant. Inf. 5 (2007) 417-430.

[32] Schwenk A. J., *Exactly thirteen connected cubic graphs have integral spectra*, Proceedings of the International Graph Theory Conference at Kalamazoo, Springer-Verlag, May 1976.

[33] Sikorski R., "*Boolean Algebras*", Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1969.

[34] Sinha D., Garg P. and Singh A., "Some properties of unitary addition Cayley graphs", NNTDM 17(3) (2011) 49-59.

[35] The GAP Group, GAP-Groups, Algorithms, and Programming, Version 4.4.4, 2004, http://gap-system.org.

منابع

[۱] س.،، یاسمی،. جبر پیشرفته. انتشارات دانشگاه صنعتی شریف، تهران، ۱۳۸۹.

[۲] هانگرفورد، توماس دبلیو. جبر. ترجمه‌ی حسین، ذاکری، و علی‌اکبر، عالم‌زاده. انتشارات پژوهش، تهران، ویرایش ششم، ۱۳۸۹.

[3] Ahmadi A., Belk R., Tamon C. and C., Wendler. "on mixing of continuous-time quantum walks on some circulant graphs". *Quantum Inform. and Comp.*, 3:611–618, 2003.

[4] M., Amooshahi and B., Taeri. "on the domination and total domination numbers of cayley sum graphs over $\mathbb{Z}_n$". *Kragujevac J. Math.*, 38(2):315–320, 2014.

[5] M., Amooshahi and B.., Taeri. "on cayley sum graphs of non-abelian groups". *Graphs and Combinatorics*, 2015.

واژه نامه

اثر ..... trace
بردار ویژه ..... eigenvector
تابع رده‌ای ..... class function
ترانهاده ..... transope
ترانهاده ماتریس ..... transope of matrix
تکرر جبری ..... algebraic multiplicity
تکرر هندسی ..... geometric multiplicity
چندجمله‌ای مشخصه ..... characteristic polynomial
خودالحاق ..... self adjoint
خودریختی گرافی ..... automorphism of graph
دترمینان ..... determinant
درجه‌ی نمایش گروه ..... degree of group representation
درجه‌ی یک رأس ..... degree of a vertex
رأس (یال) انتقالی ..... vertex (edge) transitive
زیرفضای پایا ..... ρ-invariant subspace
زیرگراف ..... subgraph
زیرگراف القایی ..... induced subgraph
زیرمجموعه‌ی فارغ از مربع ..... square free subset
زیرمجموعه‌ی نرمال ..... normal subset
زیرنمایش ..... subrepresentation
سرشت گروه ..... group character
ضرب داخلی ..... order of graph
طوقه ..... loop
طیف ماتریس ..... matrix specturm
فضای ویژه ..... eigenspace

قضیه‌ی در هم بافی ..... Interlacing theorem
قطر گراف ..... diameter of graph
کمر گراف ..... girth of graph
گراف جهت‌دار ..... directed graph
گراف دوبخشی ..... bipartite graph
گراف دوبخشی کامل ..... complete bipartite graph
گراف دور ..... cycle graph
گراف ساده ..... simple graph
گراف کامل ..... complete graph
گراف کیلی جمعی ..... Cayley sum graph
گراف متناهی ..... finite graph
گراف مسیر ..... path graph
گراف منظم ..... regular graph
گراف همبند ..... connected graph
گراف‌های یکریخت ..... isomorphic graphs
لم شور ..... Schur’s lemma
ماتریس خودالحاق (هرمیتی) ..... self adjoint matrix (Hermaitian)
ماتریس نرمال ..... normal matrix
ماتریس هرمیتی الحاقی ..... Hermitian adjoint matrix
ماتریس یکانی ..... unitary matrix
مجاور ..... adjacent
مجموعه‌ی اتصال ..... connection set
مرتبه‌ی گراف ..... order of graph
مقادیر منفرد ماتریس ..... singular value of matrix
مقدار ویژه ..... eigenvalue
مؤلفه‌ی همبندی ..... connected component
نمایش تحویل‌ناپذیر ..... irreducible representation
نمایش گروه ..... group representation
نمایش ماتریسی گروه ..... matrix representation of group
نمایش‌های هم‌ارز ..... equivalent representations
نیم‌یال ..... semiedge
همسایگی باز ..... open nieghburhood

همسایگی بسته ..... closed niebourhood
همسایه ..... neighbour

واژه نامه

اثر trace. ۵

بردار ویژه eigenvector. ۶

تابع رده‌ای class function. ۹

ترانهاده transopse. ۵

ترانهاده ماتریس transopse of matrix. ۵

تکرر جبری algebraic multiplicity. ۶

تکرر هندسی geometric multiplicity. ۶

چندجمله‌ای مشخصه characteristic polynomial. ۶

خودالحاق self adjoint. ۶

خودریختی گرافی automorphism of graph. ۱۰

دترمینان determinant. ۵

درجه‌ی نمایش گروه degree of group representation. ۸

درجه‌ی یک رأس degree of a vertex. ۱۰

رأس (یال) انتقالی vertex (edge) transitive. ۱۱

زیرفضای پایا ρ-invariant subspace. ۸

زیرگراف subgraph. ۱۱

زیرگراف القایی induced subgraph. ۱۱

زیرمجموعه‌ی فارغ از مربع square free subset. ۱۳

زیرمجموعه‌ی نرمال normal subset. ۱۳

زیرنمایش subrepresentation. ۸

سرشت گروه group character. ۹

ضرب داخلی order of graph. ۸

طوقه loop. ۱۰

طیف ماتریس matrix specturm. ۶

فضای ویژه eigenspace. ۶

قضیه‌ی در هم بافی Interlacing theorem. ۷

قطر گراف diameter of graph. ۱۱

کمر گراف girth of graph. ۱۱

گراف جهت‌دار directed graph. ۱۰

گراف دوبخشی bipartite graph. ۱۰

گراف دوبخشی کامل complete bipartite graph. ۱۰

گراف دور cycle graph. ۱۱

گراف ساده simple graph. ۱۰

گراف کامل complete graph. ۱۰

گراف کیلی جمعی Cayley sum graph. ۱۲

گراف متناهی finite graph. ۱۰

گراف مسیر path graph. ۱۱

گراف منظم regular graph. ۱۰

گراف همبند connected graph. ۱۱

گراف‌های یکریخت isomorphic graphs. ۱۰

لم شور Schur's lemma. ۹

ماتریس خودالحاق (هرمیتی) self adjoint matrix (Hermaitian). ۶

ماتریس نرمال normal matrix. ۶

ماتریس هرمیتی الحاقی Hermitian adjoint matrix. ۶

ماتریس یکانی unitary matrix. ۹

مجاور adjacent. ۱۰

مجموعه‌ی اتصال connection set. ۱۲

مرتبه‌ی گراف order of graph. ۱۰

مقادیر منفرد ماتریس singular value of matrix. ۶

مقدار ویژه eigenvalue. ۶

مؤلفه‌ی همبندی connected component. ۱۱

نمایش تحویل‌ناپذیر irreducible representation. ۸

نمایش گروه group representation. ۸

نمایش ماتریسی گروه matrix representation of group. ۸

نمایش‌های هم‌ارز equivalent representations. ۸

نیم‌یال semiedge. ۱۰

همسایگی باز open nieghburhood. ۱۰

همسایگی بسته closed niebourhood . ۱۰

همسایه neighbour. ۱۰

واژه نامه

اثر

۵ .trace

بردار ویژه

۶ .eigenvector

تابع رده‌ای

۹ .class function

ترانهاده

۵ .transopse

ترانهاده ماتریس

۵ .transopse of matrix

تکرر جبری

۶ .algebraic multiplicity

تکرر هندسی

۶ .geometric multiplicity

چندجمله‌ای مشخصه

۶ .characteristic polynomial

خودالحاق

۶ .self adjoint

خودریختی گرافی

۱۰ .automorphism of graph

دترمینان

۵ .determinant

درجه‌ی نمایش گروه

۸ .degree of group representation

درجه‌ی یک رأس

۱۰ .degree of a vertex

رأس (یال) انتقالی

۱۱ .vertex (edge) transitive

زیرفضای پایا

۸ .ρ-invariant subspace

زیرگراف

۱۱ .subgraph

زیرگراف القایی

۱۱ .induced subgraph

زیرمجموعه‌ی فارغ از مربع

۱۳ .square free subset

زیرمجموعه‌ی نرمال

۱۳ .normal subset

زیرنمایش

۸ .subrepresentation

سرشت گروه

۹ .group character

ضرب داخلی

۸ .order of graph

طوقه

۱۰ .loop

طیف ماتریس

۶ .matrix specturm

فضای ویژه

۶ .eigenspace

قضیه‌ی در هم بافی

۷ .Interlacing theorem

قطر گراف

۱۱ .diameter of graph

کمر گراف

۱۱ .girth of graph

گراف جهت‌دار

۱۰ .directed graph

گراف دوبخشی

۱۰ .bipartite graph

گراف دوبخشی کامل

۱۰ .complete bipartite graph

گراف دور

۱۱ .cycle graph

گراف ساده

simple graph. ۱۰

گراف کامل

complete graph. ۱۰

گراف کیلی جمعی

Cayley sum graph. ۱۲

گراف متناهی

finite graph. ۱۰

گراف مسیر

path graph. ۱۱

گراف منظم

regular graph. ۱۰

گراف همبند

connected graph. ۱۱

گراف‌های یکریخت

isomorphic graphs. ۱۰

لم شور

Schur's lemma. ۹

ماتریس خودالحاق (هرمیتی)

self adjoint matrix (Hermaitian). ۶

ماتریس نرمال

normal matrix. ۶

ماتریس هرمیتی الحاقی

Hermitian adjoint matrix. ۶

ماتریس یکانی

۹ .unitary matrix

مجاور

۱۰ .adjacent

مجموعه‌ی اتصال

۱۲ .connection set

مرتبه‌ی گراف

۱۰ .order of graph

مقادیر منفرد ماتریس

۶ .singular value of matrix

مقدار ویژه

۶ .eigenvalue

مؤلفه‌ی همبندی

۱۱ .connected component

نمایش تحویل‌ناپذیر

۸ .irreducible representation

نمایش گروه

۸ .group representation

نمایش ماتریسی گروه

۸ .matrix representation of group

نمایش‌های هم‌ارز

۸ .equivalent representations

نیم‌یال

۱۰ .semiedge

همسایگی باز

۱۰ .open nieghburhood

همسایگی بسته

۱۰ . closed niebourhood

همسایه

۱۰ .neighbour

واژه نامه

اثر trace. ۵

بردار ویژه eigenvector. ۶

تابع رده‌ای class function. ۹
ترانهاده transpose. ۵
ترانهاده ماتریس transpose of matrix. ۵
تکرر جبری algebraic multiplicity. ۶
تکرر هندسی geometric multiplicity. ۶

چندجمله‌ای مشخصه characteristic polynomial. ۶

خودالحاق self adjoint. ۶
خودریختی گرافی automorphism of graph. ۱۰

دترمینان determinant. ۵
درجه‌ی نمایش گروه degree of group representation. ۸
درجه‌ی یک رأس degree of a vertex. ۱۰

رأس (یال) انتقالی vertex (edge) transitive. ۱۱

زیرفضای پایا ρ-invariant subspace. ۸
زیرگراف subgraph. ۱۱
زیرگراف القایی induced subgraph. ۱۱
زیرمجموعه‌ی فارغ از مربع square free subset. ۱۳
زیرمجموعه‌ی نرمال normal subset. ۱۳
زیرنمایش subrepresentation. ۸

سرشت گروه group character. ۹

ضرب داخلی order of graph. ۸

طوقه loop. ۱۰
طیف ماتریس matrix specturm. ۶

فضای ویژه eigenspace. ۶

قضیه‌ی در هم بافی Interlacing theorem. ۷
قطر گراف diameter of graph. ۱۱

کمر گراف girth of graph. ۱۱

گراف جهت‌دار directed graph. ۱۰
گراف دوبخشی bipartite graph. ۱۰
گراف دوبخشی کامل complete bipartite graph. ۱۰
گراف دور cycle graph. ۱۱
گراف ساده simple graph. ۱۰
گراف کامل complete graph. ۱۰
گراف کیلی جمعی Cayley sum graph. ۱۲
گراف متناهی finite graph. ۱۰
گراف مسیر path graph. ۱۱
گراف منظم regular graph. ۱۰
گراف همبند connected graph. ۱۱
گراف‌های یکریخت isomorphic graphs. ۱۰

لم شور Schur's lemma. ۹

ماتریس خودالحاق (هرمیتی) self adjoint matrix (Hermaitian). ۶
ماتریس نرمال normal matrix. ۶
ماتریس هرمیتی الحاقی Hermitian adjoint matrix. ۶
ماتریس یکانی unitary matrix. ۹
مجاور adjacent. ۱۰
مجموعه‌ی اتصال connection set. ۱۲
مرتبه‌ی گراف order of graph. ۱۰
مقادیر منفرد ماتریس singular value of matrix. ۶

مقدار ویژه eigenvalue. ۶
مؤلفه‌ی همبندی connected component. ۱۱

نمایش تحویل‌ناپذیر irreducible representation. ۸
نمایش گروه group representation. ۸
نمایش ماتریسی گروه matrix representation of group. ۸
نمایش‌های هم‌ارز equivalent representations. ۸
نیم‌یال semiedge. ۱۰

همسایگی باز open nieghburhood. ۱۰
همسایگی بسته closed niebourhood . ۱۰
همسایه neighbour. ۱۰

واژه نامه

اثر trace. ۵

بردار ویژه eigenvector. ۶

تابع رده‌ای class function. ۹
ترانهاده transpose. ۵
ترانهاده ماتریس transpose of matrix. ۵
تکرر جبری algebraic multiplicity. ۶
تکرر هندسی geometric multiplicity. ۶

چندجمله‌ای مشخصه characteristic polynomial. ۶

خودالحاق self adjoint. ۶
خودریختی گرافی automorphism of graph. ۱۰

دترمینان determinant. ۵
درجه‌ی نمایش گروه degree of group representation. ۸
درجه‌ی یک رأس degree of a vertex. ۱۰

رأس (یال) انتقالی vertex (edge) transitive. ۱۱

زیرفضای پایا ρ-invariant subspace. ۸
زیرگراف subgraph. ۱۱
زیرگراف القایی induced subgraph. ۱۱
زیرمجموعه‌ی فارغ از مربع square free subset. ۱۳
زیرمجموعه‌ی نرمال normal subset. ۱۳
زیرنمایش subrepresentation. ۸

سرشت گروه group character. ۹

ضرب داخلی order of graph. ۸

طوقه loop. ۱۰
طیف ماتریس matrix specturm. ۶

فضای ویژه eigenspace. ۶

قضیه‌ی در هم بافی Interlacing theorem. ۷
قطر گراف diameter of graph. ۱۱

کمر گراف girth of graph. ۱۱

گراف جهت‌دار directed graph. ۱۰
گراف دوبخشی bipartite graph. ۱۰
گراف دوبخشی کامل complete bipartite graph. ۱۰
گراف دور cycle graph. ۱۱
گراف ساده simple graph. ۱۰
گراف کامل complete graph. ۱۰
گراف کیلی جمعی Cayley sum graph. ۱۲
گراف متناهی finite graph. ۱۰
گراف مسیر path graph. ۱۱
گراف منظم regular graph. ۱۰
گراف همبند connected graph. ۱۱
گراف‌های یکریخت isomorphic graphs. ۱۰

لم شور Schur's lemma. ۹

ماتریس خودالحاق (هرمیتی) self adjoint matrix (Hermaitian). ۶
ماتریس نرمال normal matrix. ۶
ماتریس هرمیتی الحاقی Hermitian adjoint matrix. ۶
ماتریس یکانی unitary matrix. ۹
مجاور adjacent. ۱۰
مجموعه‌ی اتصال connection set. ۱۲
مرتبه‌ی گراف order of graph. ۱۰
مقادیر منفرد ماتریس singular value of matrix. ۶

مقدار ویژه eigenvalue. ۶
مؤلفه‌ی همبندی connected component. ۱۱

نمایش تحویل‌ناپذیر irreducible representation. ۸
نمایش گروه group representation. ۸
نمایش ماتریسی گروه matrix representation of group. ۸
نمایش‌های هم‌ارز equivalent representations. ۸
نیم‌یال semiedge. ۱۰

همسایگی باز open nieghburhood. ۱۰
همسایگی بسته closed niebourhood . ۱۰
همسایه neighbour. ۱۰

فهرست نمادها

نماد	مفهوم	اولین صفحه‌ی مراجعه
$\mathrm{Cay}(G, S)$	گراف کیلی روی G وابسته به S	نه
$\mathcal{G}^+(S)$	گراف جمعی روی مجموعه‌ی S	نه
$\sigma(\mathcal{G})$	عدد جمعی	نه
I_n	ماتریس همانی	۴
J_n	ماتریس مربعی تمام یک از مرتبه n	۵
j_n	بردار $n \times ۱$ تمام یک	۴
$A^\top$	ترانهاده ماتریس A	۴
$\mathrm{Tr}(A)$	اثر ماتریس A	۴
$\det(A)$	دترمینان ماتریس A	۴
$\mathbb{C}$	میدان اعداد مختلط	۴
A^*	ماتریس هرمیتی الحاقی ماتریس A	۴
$\overline{A}$	مزدوج ماتریس A	۴
$\mathrm{Spec}(A)$	طیف ماتریس A	۶
$\mathrm{id}(G)$	عضو همانی گروه G	۷
$\langle X \rangle$	گروه تولید شده توسط X	۷
$H \lhd G$	زیرگروه H در G نرمال است	۷
$\mathbb{C}[G]$	یک فضای برداری از بعد $\lvert G \rvert$ روی میدان اعداد مختلط $\mathbb{C}$	۷
$\langle \phi, \psi \rangle$	ضرب داخلی دو بردار ϕ و ψ	۸
$\mathrm{GL}n(F)$	گروه خطی عام از درجه‌ی n روی F	۸
$\mathrm{SL}n(F)$	گروه خطی خاص از درجه‌ی n روی F	۸
χ_ρ	سرشت متناظر به نمایش ρ	۹
$cf(G)$	فضای برداری تمام توابع رده‌ای مختلط مقدار روی گروه G	۹
$K_{n,m}$	گراف کامل دو بخشی	۱۰

K_n	گراف کامل	۱۰
$u \sim v$	رأس u با رأس v مجاور است	۱۰
$\deg(u)$	درجه رأس u	۱۰
$N(u)$	همسایگی باز رأس u	۱۰
$N[u]$	همسایگی بسته رأس u	۱۰
$\mathrm{Sym}(X)$	گروه جایگشت‌ها روی مجموعه‌ی X	۱۱
$\mathcal{G}[U]$	زیرگراف القائی با مجموعه رئوس U از گراف $\mathcal{G}$	۱۱
$\mathrm{Aut}(\mathcal{G})$	گروه خودریختی‌های گراف $\mathcal{G}$	۱۱
P_n	گراف مسیر به طول n	۱۱
C_n	گراف دور به طول n	۱۱
$\mathrm{diam}(\mathcal{G})$	قطر گراف $\mathcal{G}$	۱۱
$\mathrm{dist}(u,v)$	فاصله‌ی بین دو رأس u و v	۱۱
$\mathrm{girth}(\mathcal{G})$	کمر گراف $\mathcal{G}$	۱۱
$\mathrm{Cay}^+(G,S)$	گراف کیلی جمعی روی G وابسته به S	۱۳
$C(x)$	مؤلفه‌ی همبندی شامل رأس x	؟؟
$\mathrm{Inv}(G)$	مجموعه‌ی تمام پیچش‌های گروه G	؟؟
$\mathbb{Z}_n$	گروه رده‌ای مانده‌ای به پیمانه‌ی n	؟؟
$\mathrm{circ}(v)$	ماتریس دوری وابسته به بردار v	؟؟
$\mathrm{anti-circ}(v)$	ماتریس پاد-دوری وابسته به بردار v	؟؟
$[g_1, g_2, \ldots, g_n]$	دنباله‌ای به طول n روی گروه G	؟؟
$[]$	دنباله‌ی تهی	؟؟
$\Omega_i([r_1, r_2, \ldots, r_n])$	$r_1 r_2^{-1} r_3 r_4^{-1} \cdots r_{i-1}^{(-1)^i} r_i^{(-1)^{i+1}}$	؟؟
$\mathrm{Ham}(G,S)$	مجموعه‌ی تمام S-دنباله‌های همیلتونی روی G	؟؟
$\mathrm{Cay}^+(G,\alpha)$	گراف کیلی جمعی رنگی	؟؟
δ_{ij}	تابع دلتای کرونکر	؟؟
A_n	گروه جایگشت‌های زوج روی مجموعه‌ی $\{1, 2, \ldots, n\}$	؟؟
S_n	گروه جایگشت‌های روی مجموعه‌ی $\{1, 2, \ldots, n\}$	؟؟
$\mathrm{span}(X)$	فضای تولید شده توسط X	؟؟
$\gamma(\mathcal{G})$	عدد تسلط گراف $\mathcal{G}$	؟؟
$\gamma_t(\mathcal{G})$	عدد تسلط تام گراف $\mathcal{G}$	؟؟
$\mathbb{C}^*$	گروه ضربی اعداد مختلط	؟؟
$B(G)$	جبر بول تولید شده توسط زیرگروه‌های گروه G	؟؟

$G \oplus H$	حاصل‌جمع مستقیم گروه‌های G و H	؟؟
$D_{۲n}$	گروه دووجهی از مرتبه‌ی $۲n$	؟؟
$T_{۴n}$	$\langle a, b \ : \ a^{۲n} = ۱, a^n = b^۲, b^{-۱}ab = a^{-۱} \rangle$	؟؟
$U_{۶n}$	$\langle a, b \ : \ a^{۲n} = b^۳ = ۱, a^{-۱}ba = b^{-۱} \rangle$	؟؟
$F_{۵,۴}$	$\langle a, b \mid a^۵ = b^۴ = ۱, b^{-۱}ab = a^۲ \rangle$	؟؟
$cs(G)$	مجموعه‌ی اندازه‌ی همه‌ی رده‌های مزدوجی گروه G	؟؟
$V_{۲۴}$	$\langle a, b \ : \ a^۶ = b^۴ = ۱, \ ba = a^{-۱}b^{-۱}, \ b^{-۱}a = a^{-۱}b \rangle$	؟؟
$C_G(g)$	مرکزساز g در G	۱۸

A classification of nonabelian simple 3-BCI-groups

EHSAN BAMPOORi
e.bampoori@math.iut.ac.ir
September 18, 2013
Master of Science Thesis (in Farsi)
Departement of Mathematical Sciences
Isfahan University of Technology, Isfahan 84156-8311, Iran

Supervisor: Dr. Bijan Taeri, b.taeri@cc.iut.ac.ir
Advisor: Mr. Mohammad Mashkouri, mohammad@cc.iut.ac.ir
2000 MSC: 05C25 20B25 05C60
Keywords: Cayley graph, Bi-Cayley graph, Semi-regular and regular action,

---

Abstract:
This M.Sc. thesis is based on the following papers

- Weijun Liu, Wei Jin, Dragan Marusic, Stefko Miklavic., *A classification of nonabelian simple* $3-BCI-$*groups,* European Journal of Combinatorics 31 (2010) 1257-1264
- Xing Gao, Yanfeng Luo., *On the extendability of Bi-Cayley graphs of finite abelian groups,* Discrete Mathematics 309 (2009) 5943-5949

Let R, S, T be subsets of a group G such that $R = R^{-1}$, $S = S^{-1}$ and $1 \notin R \cup S$. Define the undirected graph $\mathrm{BCay}(G; R, S, T)$ to have vertex set $G \times \{0, 1\}$, and with vertices (h, i), (g, j) adjacent if and only if one of the following three possibilities occurs:
(1) $i = j = 0$ and $gh^{-1} \in R$; (2) $i = j = 1$ and $gh^{-1} \in S$; (3) $i = 0, j = 1$ and $gh^{-1} \in T$.
The graph $\mathrm{BCay}(G; R, S, T)$ is called a bi-Cayley graph. Equivalently, a bi-Cayley graph may be defined as a graph $\Gamma = (V, E)$ which admits an automorphism group acting semiregular on the vertex set V with two orbits (of equal size). Let G be a finite group G and a subset $S \subseteq G$ (possibly, S contains the identity element), the bi-Cayley graph $\mathrm{BCay}(G, S)$ of G with respect to S is the graph with vertex set $G \times \{0, 1\}$ and with edge set $\{(x, sx) \mid x \in G, s \in S\}$. Then $\mathrm{BCay}(G, S)$ is a well-defined bipartite graph with bipartition subsets, say $U = G \times \{0\}$, $W = G \times \{1\}$. There are two important isomorphisms for bi-Cayley graphs. Let G be a finite group, S be a subset of G. Suppose $X = \mathrm{BCay}(G, S)$, g, h are two elements of G, α is a group automorphism. Then we have:

(1) $\mathrm{BCay}(G, S) \cong \mathrm{BCay}(G, S^{\alpha})$
(2) $\mathrm{BCay}(G, S) \cong \mathrm{BCay}(G, gSh)$.

The above two isomorphisms and their compounds are called Cayley isomorphisms of bi-Cayley graphs. Furthermore, if there exist Cayley isomorphisms between two bi-Cayley graphs $\mathrm{BCay}(G, S)$ and $\mathrm{BCay}(G, T)$ then there exist $g \in G$, $\alpha \in \mathrm{Aut}(G)$ such that $T = gS^{\alpha}$. A bi-Cayley graph $\mathrm{BCay}(G, S)$ is called a $BCI-$graph if, for any bi-Cayley graph $\mathrm{BCay}(G, T)$, whenever $\mathrm{BCay}(G, S) \cong \mathrm{BCay}(G, T)$ we have $T = gS^{\alpha}$, for some $g \in G$; $\alpha \in \mathrm{Aut}(G)$. A group G is called an $m - BCI-$group, if all bi-Cayley graphs of G of valency at most m are $BCI-$graphs. In one paper, we prove that a finite nonabelian simple group is a $3 - BCI-$group if and only if it is $A5$.
A set M of edges of a graph Γ is called a matching of Γ if no two members of M share a common vertex. A matching M is perfect if every vertex of Γ is covered by an edge of M. A graph Γ admitting a perfect matching is called n-extendable if $|V(\Gamma)| \geq 2n + 2$ and every matching of size n in Γ can be extended to a perfect matching of Γ . In seconed paper, the extendability of Bi-Cayley graphs of finite abelian groups is explored. In particular, $2-$extendable and $3-$ extendable Bi-Cayley graphs of finite abelian groups are characterized.

Isfahan University of Technology
Department of Mathematical Sciences

Finite groups with ....

A Thesis
Submitted in Partial Fulfillment of the Requirements
for the Doctor of Philosophy (Ph. D.)

By
Zahra Zahraee

Evaluated and approved by the thesis committee, on 19/8/2015

1- Dr. Alireza Akbari, Professor (Supervisor)

2- Dr. Hossien Asghri, Professor (Supervisor)

3- Dr. Mohammad Reza Hossieni, Professor (Advisor)

4- Dr. Ayoub Kazemi, Assistant Professor (Examiner)

5- Dr. Hamid Karami, Assistant Professor (Examiner)

6- Dr. Ahmad Ahmadi, Assistant Professor (Examiner)

Dr. Azam Etemad, Assistant Professor (Department graduate coordinator)

Isfahan University of Technology
Department of Mathematical Sciences

Thesis Submitted for the Award of Doctor of Philosophy (Ph. D.) in Mathematics

Finite groups with ....

Zahra Zahraee

Supervisor: Dr. Alireza Akbari
Supervisor: Dr. Hossien Asghri

Advisor: Dr. Mohammad Reza Hossieni

August 2015