

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ



دانشگاه صنعتی اصفهان
دانشکده علوم ریاضی

انتگرال ریمان با افرازهای منظم

پروژه کارشناسی ریاضی محض

ثمین سادات نوربخش

استاد راهنما

دکتر مهدی نعمتی

فهرست مطالب

دو	فهرست مطالب
۱	۱ مقدمه
۱	۱.۱ تعاریف و مفاهیم مقدماتی
۴	۲ انتگرال ریمان با افرازهای منظم
۵	۱.۲ اثبات قضیه ۱-۲
۹	۲.۲ بحث روی قضیه
۱۲	مراجع

فصل ۱

مقدمه

هدف این پروژه این است که نشان دهیم تعریف انتگرال ریمان شامل یک شرط غیر ضروری است. در سال ۱۸۵۴، تعریف دقیق انتگرال $\int_a^b f(x)dx$ توسط ریمان صورت گرفت، که پایه و اساسی برای نظریه ی انتگرال ایجاد کرد. حدود یک قرن و نیم، تحقیقات متعددی توسط چندین ریاضیدان صورت گرفت، اما هنوز مطالبی برای بررسی وجود دارند.

۱.۱ تعاریف و مفاهیم مقدماتی

در ادامه تعریف افراز یک بازه و انتگرال ریمان یک تابع را بیان می کنیم:

تعریف ۱-۱. یک افراز P از بازه ی $[a, b]$ مجموعه ای متناهی از اعداد به فرم زیر است

$$P = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}.$$

نرم افراز P به صورت زیر تعریف می شود.

$$\|P\| := \max\{x_k - x_{k-1} : 1 \leq k \leq n\}$$

تعریف ۱-۲. تابع $f(x)$ تعریف شده روی بازه $[a, b]$ ریمان-انتگرال پذیر نامیم هرگاه یک عدد I وجود داشته باشد که به ازای هر $\varepsilon > 0$ دلخواهی، یک $\delta > 0$ وجود داشته باشد، به طوری که به ازای هر افراز P با شرط $\|P\| < \delta$ ، و برای هر انتخاب $c_k \in [x_{k-1}, x_k]$ ($k = 1, \dots, n$) داشته باشیم

$$\sum_{k=1}^n f(c_k)(x_k - x_{k-1}) < \varepsilon.$$

تذکر ۱-۳. توجه کنیم که در تعریف ۱-۲، عبارت “به ازای هر” دوبار تکرار شده است. بدیهی است که عبارت “به ازای هر انتخاب $c_k \in [x_{k-1}, x_k]$ ” در این تعریف ضروری است، مثال زیر گویای این مطلب است.

مثال ۱-۴. تابع f را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

برای این تابع داریم:

$$\sum_{k=1}^n f(c_k)(x_k - x_{k-1}) = \begin{cases} 0 & c_k \notin \mathbb{Q} \\ 1 & c_k \in \mathbb{Q} \end{cases}$$

به طور طبیعی این سوال مطرح می شود که آیا عبارت “به ازای هر P با شرط $\|P\| < \delta$ ” نیز در این تعریف ضروری است.

در واقع ما به یک تابع $f(x)$ روی بازه $[a, b]$ نیاز داریم که حاصل جمع $\sum_{k=1}^n f(c_k)(x_k - x_{k-1})$ را برای دو افراز متفاوت P و Q به دو مقدار متفاوت نزدیک کند. برای مثال P یک افراز منظم است در حالی که Q نیست.

قبل از بیان نتیجه، یک شرط لازم و کافی برای ریمان-انتگرال پذیری که توسط داربو^۱ در سال ۱۸۷۵ بیان شده است را ارائه می دهیم:

قضیه ۱-۵. فرض کنید $f(x)$ یک تابع کراندار روی بازه $[a, b]$ باشد. برای هر افراز P از $[a, b]$ ، مانند $P = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$ ، قرار می دهیم:

$$\omega(f, [x_{k-1}, x_k]) = \sup\{f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\} - \inf\{f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\}.$$

^۱Darboux

در این صورت تابع $f(x)$ ریمان-انتگرال پذیر است اگر و تنها اگر

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \text{ s.t. } \left| \sum_{k=1}^n \omega(f, [x_{k-1}, x_k]) (x_k - x_{k-1}) \right| < \varepsilon,$$

هنگامی که $\|P\| < \delta$.

تذکر ۱-۶. دو ویژگی زیر برای مقدار $\omega(f, [a, b])$ بدیهی هستند.

۱. اگر $[a, b] \subset [c, d]$ آنگاه $\omega(f, [a, b]) \leq \omega(f, [c, d])$

۲. اگر $a < c < b$ آنگاه $\omega(f, [a, b]) \leq \omega(f, [a, c]) + \omega(f, [c, b])$

قرار داد: در ادامه اگر تابع $f(x)$ تنها تابع مطرح شده باشد، برای راحتی به جای $\omega(f, [a, b])$ می نویسیم $\omega([a, b])$.

فصل ۲

انتگرال ریمان با افرازهای منظم

حال نتیجه ی اصلی را بیان می کنیم.

قضیه ۲-۱. فرض کنید $f(x)$ تابعی تعریف شده بر بازه ی $[a, b]$ باشد. اگر عدد I وجود داشته باشد که به ازای هر $\varepsilon > 0$ یک عدد طبیعی N وجود داشته باشد به طوری که هرگاه $n \geq N$ و اعداد c_k به طور دلخواه از بازه ی زیر انتخاب شده باشند

$$\left[a + \frac{(k-1)(b-a)}{n}, a + \frac{k(b-a)}{n} \right]$$

داشته باشیم :

$$\left| \sum_{k=1}^n f(c_k) \frac{b-a}{n} - I \right| < \varepsilon,$$

آنگاه $f(x)$ ریمان-انتگرال پذیر است.

تذکر: در تعریف بالا، هیچ افرازی از $[a, b]$ به صراحت بیان نشده است. در واقع، اعداد

$$\left\{ a + \frac{k(b-a)}{n} : k = 0, 1, \dots, n \right\}$$

یک افراز منظم را تشکیل می دهند.

۱.۲ اثبات قضیه ۱-۲

اثبات در دو مرحله انجام می شود:

مرحله ی اول: ابتدا ثابت می کنیم که برای هر $\varepsilon > 0$ به دلخواه کوچک، یک عدد طبیعی $N \in \mathbb{N}$ وجود دارد به طوری که $n \geq N$ نتیجه می دهد

$$\left| \sum_{k=1}^n \omega(f, [a + \frac{(k-1)(b-a)}{n}, a + \frac{k(b-a)}{n}]) \frac{b-a}{n} \right| < \varepsilon.$$

برای ساده شدن کار قرار می دهیم

$$t_k = a + \frac{k(b-a)}{n} \quad (k = 0, 1, \dots, n)$$

حال برای هر $\varepsilon > 0$ ، اعداد $c_k, d_k \in [t_{k-1}, t_k]$ وجود دارند که

$$0 \leq \sup\{f(x) : t_{k-1} \leq x \leq t_k\} - f(c_k) < \frac{\varepsilon}{4(b-a)} \quad (1)$$

$$0 \leq f(d_k) - \inf\{f(x) : t_{k-1} \leq x \leq t_k\} < \frac{\varepsilon}{4(b-a)} \quad (2)$$

توجه کنیم که دو رابطه ی (۱) و (۲) از خاصیت $\sup$ و $\inf$ حاصل می شوند که داریم

$$\sup - \varepsilon \implies_{\sup} \exists x \in [a, b] ; f(x) \geq \sup - \varepsilon \Rightarrow \sup - f(x) \leq \varepsilon$$

$$\inf + \varepsilon \implies_{\inf} \exists x' \in [a, b] ; f(x') \leq \inf + \varepsilon \Rightarrow f(x') - \inf \leq \varepsilon$$

برای این ε ، دو عدد طبیعی N_1, N_2 وجود دارد که

$$n \geq N_1 \Rightarrow \left| \sum_{k=1}^n f(c_k) \frac{b-a}{n} - I \right| < \frac{\varepsilon}{4}. \quad (3)$$

$$n \geq N_2 \Rightarrow \left| \sum_{k=1}^n f(d_k) \frac{b-a}{n} - I \right| < \frac{\varepsilon}{4}. \quad (۴)$$

حال اگر قرار دهیم $N := \max\{N_1, N_2\}$ ، آنگاه برای $n \geq N$ دو رابطه ی زیر را نتیجه می دهد.

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{k=1}^n \sup\{f(x) : t_{k-1} \leq x \leq t_k\} \frac{b-a}{n} - \sum_{k=1}^n f(c_k) \frac{b-a}{n} \right| \\ &= \left| \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n (\sup\{f(x) : t_{k-1} \leq x \leq t_k\} - f(c_k)) \right| \\ & \stackrel{(۱)}{<} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n \frac{\varepsilon}{4(b-a)} \\ &= \frac{b-a}{n} \frac{n\varepsilon}{4(b-a)} \\ &= \frac{\varepsilon}{4} \end{aligned} \quad (I)$$

به طور مشابه

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{k=1}^n f(d_k) \frac{b-a}{n} - \inf\{f(x) : t_{k-1} \leq x \leq t_k\} \frac{b-a}{n} \right| \\ &= \left| \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f(d_k) - \inf\{f(x) : t_{k-1} \leq x \leq t_k\} \right| \stackrel{(۲)}{<} \frac{\varepsilon}{4} \end{aligned} \quad (II)$$

در نتیجه داریم:

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{k=1}^n \sup\{f(x) : t_{k-1} \leq x \leq t_k\} \frac{b-a}{n} - I \right| \\ &= \left| \sum_{k=1}^n \sup\{f(x) : t_{k-1} \leq x \leq t_k\} \frac{b-a}{n} - \sum_{k=1}^n f(c_k) \frac{b-a}{n} + \sum_{k=1}^n f(c_k) \frac{b-a}{n} - I \right| \\ &\leq \left| \sum_{k=1}^n (\sup\{f(x) : t_{k-1} \leq x \leq t_k\} \frac{b-a}{n} - f(c_k) \frac{b-a}{n}) \right| + \left| \sum_{k=1}^n f(c_k) \frac{b-a}{n} - I \right| \\ & \stackrel{(۳)(I)}{<} \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} \\ &= \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned} \quad (۵)$$

به طریق مشابه داریم

$$\left| \sum_{k=1}^n \inf\{f(x) : t_{k-1} \leq x \leq t_k\} \frac{b-a}{n} - I \right| < \frac{\varepsilon}{2} \quad (۶)$$

درنتیجه

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=1}^n \omega(f, [t_{k-1}, t_k]) \frac{b-a}{n} \right| &= \left| \sum_{k=1}^n (\sup\{f(x) : t_{k-1} \leq x \leq t_k\} - \inf\{f(x) : t_{k-1} \leq x \leq t_k\}) \right| \\ &= \left| \sum_{k=1}^n (\sup\{f(x) : t_{k-1} \leq x \leq t_k\} - I + I - \inf\{f(x) : t_{k-1} \leq x \leq t_k\}) \right| \\ &\leq \left| \sum_{k=1}^n (\sup\{f(x) : t_{k-1} \leq x \leq t_k\} - I) \right| + \left| \sum_{k=1}^n (I - \inf\{f(x) : t_{k-1} \leq x \leq t_k\}) \right| \\ &\leq \left| \sum_{k=1}^n (\sup\{f(x) : t_{k-1} \leq x \leq t_k\} - I) \right| + \left| \sum_{k=1}^n (\inf\{f(x) : t_{k-1} \leq x \leq t_k\} - I) \right| \\ &\stackrel{(۵)(۶)}{<} \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\ &= \varepsilon \end{aligned}$$

مرحله ی دوم: فرض کنید $\varepsilon > 0$ دلخواه باشد. با توجه به توضیحات مرحله ی اول عدد طبیعی N را طوری انتخاب می کنیم که $n \geq N$ نتیجه دهد

$$\left| \sum_{k=1}^n \omega(f, [t_{k-1}, t_k]) \frac{b-a}{n} \right| < \frac{\varepsilon}{3}$$

به طور خاص $n = N$ را انتخاب کرده و داریم

$$\left| \sum_{k=1}^N \omega([t_{k-1}, t_k]) (t_{k-1} - t_k) \right| < \frac{\varepsilon}{3}. \quad (۷)$$

حال فرض کنیم $P = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_m = b\}$ افرازی از بازه ی $[a, b]$ با شرط $\|P\| < \delta$ باشد که در آن $\delta = \frac{b-a}{N}$. با توجه به اینکه به ازای هر $k = 1, \dots, N$ داریم

$$\begin{aligned} t_k - t_{k-1} &= \left(a + \frac{k(b-a)}{n}\right) - \left(a + \frac{(k-1)(b-a)}{n}\right) \\ &= \frac{(b-a)(k - k + 1)}{n} \\ (n=N) &= \frac{b-a}{N} \end{aligned}$$

می دانیم که برای هر بازه ی $[t_{k-1}, t_k]$ ، حداقل یک عدد x_{i_k} در افراز P وجود دارد که $x_{i_k} \in [t_{k-1}, t_k]$ از این رو دو گروه عددی $\{t_k / 0 \leq k \leq N\}$ و $\{x_i / 0 \leq i \leq m\}$ به صورت زیر مرتب می شوند

$$\begin{aligned} a = t_0 = x_0 < x_1 < \dots < x_{i_1} < t_1 &\leq x_{i_1+1} \\ &< x_{i_1+2} < \dots < x_{i_2} < t_2 \leq x_{i_2+1} < \dots < x_{i_k} \\ &< t_k \leq x_{i_k+1} < \dots < x_{i_{N-1}} < t_{N-1} \\ &\leq x_{i_{N-1}+1} < x_{i_{N-1}+2} < \dots < x_m = t_N = b \end{aligned}$$

حال برای هر بازه ی $[x_i, x_{i+1}]$ دو حالت زیر وجود دارد :

۱. وجود دارد k -ای که $[x_i, x_{i+1}] \subset [t_k, t_{k+1}]$. که در این حالت طبق قضیه ی ۵-۱،

$$\omega([x_i, x_{i+1}]) \leq \omega([t_k, t_{k+1}]).$$

۲. بازه ی $[x_i, x_{i+1}]$ به صورت کامل در بازه ی $[t_k, t_{k+1}]$ قرار نمی گیرد. پس i باید یک i_k باشد به طوری که $t_{k-1} < x_{i_k} < t_k \leq x_{i_k+1} < t_{k+1}$ پس طبق قضیه ی ۵-۱ نتیجه می شود که

$$\omega([x_{i_k}, x_{i_k+1}]) \leq \omega([t_{k-1}, t_{k+1}]) \leq \omega([t_{k-1}, t_k]) + \omega([t_k, t_{k+1}]).$$

حال عبارت حاصل جمعی $\sum_{i=0}^m \omega([x_i, x_{i+1}]) (x_{i+1} - x_i)$ را با توجه به دو حالت بالا به دو بخش تقسیم می کنیم.

در بخش اول از آنجا که طول کل بازه های مجاور $[x_i, x_{i+1}]$ که در بازه ی $[t_k, t_{k+1}]$ قرار می گیرند برابر $x_{i_k+1} - x_{i_k} < t_{k+1} - t_k$ و همچنین داریم $\omega([x_i, x_{i+1}]) \leq \omega([t_k, t_{k+1}])$ نتیجه می گیریم که مجموع

همه ی جمع های این قسمت کمتر از

$$\sum_{k=0}^N \omega([t_k, t_{k+1}]) (t_{k+1} - t_k)$$

است.

در بخش دوم برای بازه های به فرم دوم داریم

$$x_{i_{k+1}} - x_{i_k} \leq \|P\| \leq \frac{b-a}{3N} < \frac{b-a}{N} = t_k - t_{k-1} = t_{k+1} - t_k$$

پس

$$\omega([x_{i_{k+1}}, x_{i_k}]) (x_{i_{k+1}} - x_{i_k}) \leq \omega([t_{k-1}, t_k]) (t_k - t_{k-1}) + \omega([t_k, t_{k+1}]) (t_{k+1} - t_k)$$

بنابراین حاصل جمع تمام جمع های این قسمت نمی تواند از

$$2 \sum_{k=0}^N \omega([t_k, t_{k+1}]) (t_{k+1} - t_k)$$

بیشتر شود. بنابراین

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^m \omega([x_i, x_{i+1}]) (x_{i+1} - x_i) &< 3 \sum_{k=0}^N \omega([t_k, t_{k+1}]) (t_{k+1} - t_k) \\ (7) \quad &< 3 \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \end{aligned}$$

پس طبق قضیه ی ۱-۵، $f(x)$ ریمان-انتگرال پذیر است.

■

۲.۲ بحث روی قضیه

قضیه ی ۱-۲ نشان می دهد که یک شرط اضافی در تعریف ریمان وجود دارد.

در واقع شرط ”به ازای هر افراز P از بازه ی $[a, b]$ که $\|P\| < \delta$ را می توان ساده تر کرد. در واقع با بازنویسی

به جای $\sum_{k=1}^n f(c_k) \frac{b-a}{n}$ می‌توانیم به انتگرال ریمان یک تعریف آماری بدهیم زیرا $\frac{\sum_{k=1}^n f(c_k)}{n}$ میانگین دنباله‌هایی از نمونه‌های گرفته شده از فضای زیر است.

$$S_k = \{f(x) : a + \frac{(k-1)(b-a)}{n} \leq x \leq a + \frac{k(b-a)}{n}\}$$

تعریف ۲-۲. فرض کنید $f(x)$ یک تابع روی بازه $[a, b]$ باشد. در این صورت

$$\int_a^b f(x) dx = m(b-a)$$

اگر و تنها اگر وجود داشته باشد $m = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n f(c_k)}{n}$ که در آن

$$f(c_k) \in \{f(x) : a + \frac{(k-1)(b-a)}{n} \leq x \leq a + \frac{k(b-a)}{n}\}.$$

تذکر ۲-۳. قضیه ۱-۲ بیان می‌کند که برای اثبات ریمان انتگرال پذیری یک تابع کافیت افزایش‌های منظم بازه $[a, b]$ را در نظر بگیریم. با یک تغییرات کوچک در این قضیه می‌توان نشان داد که ریمان انتگرال پذیری یک تابع در واقع به وجود یک دنباله از افزایش‌های بازه $[a, b]$ وابسته است که نرم این دنباله از افزایش به صفر همگرا است به صورت دقیق‌تر قضیه زیر را داریم.

قضیه ۲-۴. فرض کنید $f(x)$ بر بازه $[a, b]$ تعریف شده باشد. همچنین فرض کنید

$$P_i = \{a = x_0(i) < x_1(i) < \dots < x_{n(i)}(i) = b\}$$

دنباله‌ای از افزایش‌های بازه $[a, b]$ باشد و $\lim_{i \rightarrow \infty} \|P_i\| = 0$. اگر I یک عدد حقیقی باشد و برای هر $\varepsilon > 0$ یک عدد طبیعی N وجود داشته باشد که $i \geq N$ نتیجه دهد

$$\left| \sum_{k=1}^{n(i)} f(c_k)(x_k(i) - x_{k-1}(i)) - I \right| < \varepsilon$$

که در آن c_k به طور دلخواه از بازه $[x_{k-1}(i), x_k(i)]$ انتخاب شده است. آنگاه

$$\int_a^b f(x) dx = I.$$

انتگرال ریمان سابقه ای طولانی دارد. باورنکردنی است که چنین ویژگی پایه ای برای مدت طولانی مورد غفلت قرار گرفته است. حتی از توجه بسیاری از تحلیلگران بزرگ ریاضی نیز دور مانده است. در اکثر کتاب های درسی حساب، انتگرال ریمان یک تابع به عنوان حد زیر در صورت وجود تعریف می شود.

$$\lim_{||P|| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(c_k)(x_k - x_{k-1})$$

این فرایند حدگیری بر روی افراز ها، با فرایند حدگیری در مجموعه اعداد حقیقی متفاوت است. کتاب های درسی این دو فرایند را به اشتباه یکی در نظر می گیرند. می دانیم که مجموعه ی اعداد حقیقی دارای ساختار بسیار غنی در جبر و توپولوژی است، در حالی که مجموعه ی افراز های یک بازه، ساختار بسیار ضعیفی دارد. بسیاری از ویژگی های فرایند های حد در مجموعه ی اعداد حقیقی را نمی توان به فرایند حد در افراز انتقال داد. اکثر مردم به اشتباه فکر می کنند که می توان یک مثال نقض پیدا کرد، زیرا در فرایند حد که شامل اعداد حقیقی است، بدیهی است که همگرایی یک زیر دنباله، همگرایی دنباله را نتیجه نمی دهد.

مراجع

- [1] Foulis, D. J., and Munem, M. A., 1989, After Calculus: Analysis (San Francisco: Dellen Publishing Company).
- [2] Larson, R., Hostetler, R., and Edwards, B., 1994, Calculus, 8th edition (Lexington: D. C. Heath and Company).
- [3] Kestelman, H., 1960, Modern Theory of Integration (New York: Dover Publications).