بعد ابوت، ریاضیات الهام گرفته از فلتلند

به کوشش: علیرضا شریعتی

استاد درس: دکتر محمدرضا کوشش

۱۴۰۳/۰۵/۱۱

فهرست مطالب

۱ پیشگفتار

مفهوم بُعد از کاربردی‌ترین و پایه‌ای‌ترین مفاهیم ریاضی در زندگی روزمره است. حتی افرادی که هیچ آشنایی با ریاضیات عالی ندارند، مفهوم بُعد را درک می‌کنند و درباره سه‌بعدی بودن جهان اطراف ما، دوبعدی بودن فضای کاغذ و تک‌بعدی بودن فضای خط بحثی ندارند؛ اگرچه خودِ مفاهیم فضا، صفحه، خط و بُعد نیز به‌طور دقیق تعریف نشده‌اند. ارائه تعریفی در ریاضیات مدرن کار دشواری نیست، دست‌کم در هر فضای برداری که صفحه و خط از انواع آن هستند، بُعد تعریفی واضح و ساده دارد: تعداد اعضای یک پایه. با این حال، پیدا کردن تعریفی ریاضی و دقیق که با درک شهودی ما از بُعد سازگار باشد و برای یک فضای توپولوژیک دلخواه نیز قابل استفاده باشد، کاری غیربدیهی و البته جالب است.

در این تحقیق، که در حقیقت پروژه کارشناسی اینجانب، علیرضا شریعتی در ریاضیات است، نگاهی می‌اندازیم به مقاله‌ای [۱۰] از جرمی سیگرت [۱] که قصد دارد مفهوم بُعد را با ایده گرفتن از رمان مشهور "فلتلند" (سرزمین مسطح) تعریف کند. لازم می‌دانم از استاد خود، جناب آقای دکتر محمدرضا کوشش، که بنده را در این مسیر راهنمایی کردند، تشکر کنم.

---

[۱] Jeremy Siegert

۲ مقدمه

بعد چیست؟ چه معنایی دارد که چیزی سه‌بعدی باشد؟ به نظر می‌رسد بعد مفهومی است که باید بتوان آن را توصیف کرد، اما چگونگی انجام این کار چندان واضح نیست. وظیفه اصلی ریاضیدانان در اوایل قرن بیستم، که در حوزه‌ای کار می‌کردند که امروز به عنوان نظریه بعد شناخته می‌شود، یافتن تعریفی رسمی وبه طور هندسی شهودی برای بعد بود، به‌ویژه برای بعد فضاهای توپولوژیکی "خوب".

در سال ۱۹۰۵، پوانکاره یکی از اولین مفاهیم بعد را که توسط ریاضیدانان این حوزه به‌طور رسمی تعریف شد، [۷] ارائه کرد. در این متن فلسفی، پوانکاره (با زبان بسیار زیباتر از آنچه ما استفاده خواهیم کرد) بعد را از نظر جداسازی توصیف کرد. به‌طور خاص، آنچه که یک خط را یک‌بعدی می‌کند این است که برای بریدن آن به قطعات جدا از هم باید آن را در امتداد زیرفضایی که حداقل صفر بعدی است، برید. به‌طور مشابه، برای بریدن یک صفحه به قطعات جدا از هم باید آن را در امتداد زیرفضایی که حداقل یک‌بعدی است، برید، و برای بریدن فضای سه‌بعدی باید آن را در امتداد چیزی که حداقل دو بعدی است، برید. تعریف رسمی داده نشد، اما شهود جذاب و واضح بود. برای درک از آن نیازی به دانش پیشرفته هندسه یا توپولوژی نبود. بروئر، چخ، منگر و اوریسون این مفهوم را به تعریف دقیقی از بعد برای فضاهای توپولوژیکی "خوب" (برای این حساب، می‌توانیم فضاهای متریک جداشدنی را در نظر بگیریم) تبدیل کردند. مهمترین آنها ابعاد استقرایی کوچک و بزرگ ind و Ind بودند که جذابیت شهودی توصیف اولیه پوانکاره را حفظ کردند و معنای دقیق عبارت $\mathbb{R}^n$ بعد n دارد را مشخص کردند.

در همان زمان که پوانکاره می‌نوشت، لبگ بعد مکعب‌های $[0,1]^n$ را به شکلی متفاوت، اما همچنان شهودی توصیف کرد. به‌طور خاص، اگر $[0,1]$ را با بازه‌های باز پوشش دهیم، همیشه می‌توان تظریفی [۲] از آن پوشش پیدا کرد که همچنان از بازه های بازی تشکیل شده که هر نقطه از بازه در حداکثر دو نقطه از تظریف قرار دارند. در حالت $[0,1]^2$، هر پوشش با مربع‌های باز

[۲] refinement

را می‌توان با پوششی از مربع‌های باز کوچک‌تر به گونه‌ای تظریف کرد که هر نقطه از $[0,1]^2$ در حداکثر سه عنصر از تظریف باشد. تقریباً بیست سال بعد، چخ فرمول کلی برای این ایده ارائه داد که به فضاهای عمومی‌تری اعمال می‌شود. ما اکنون این تعریف را بعد پوششی [۳] یا توپولوژیکی [۴] $(\dim)$ می‌نامیم. اکتشافات تعاریف مبتنی بر ایده‌های پوانکاره و لبگ در طول قرن بیستم ادامه یافت و یکی از نتایج برجسته این بود که، در کلاس فضاهای متریک جداشدنی، توابع بعد ind، Ind و $\dim$ با هم سازگار هستند. این تاریخ و نظریه غنی اطراف آن را می‌توان در کتاب‌های عالی هورویچ و والمان [۵] ، انگلکینگ [۲] و پیرز [۳] یافت.

اگر وظیفه اصلی نظریه بعد اولیه را ارایه تعریف شهودی هندسی بعد فضاهای توپولوژیکی بدانیم (که ما این کار را می‌کنیم)، می‌توانیم با اطمینان بگوییم که این وظیفه با موفقیت بزرگی به پایان رسیده است. با این حال، اکنون می‌توانیم به این موفقیت تأمل کنیم و دوباره به مفهوم بعد بپردازیم و بپرسیم:

آیا هر تعریف شهودی هندسی از بعد برای فضاهای توپولوژیکی خوب باید با تعاریف کلاسیک سازگار باشد؟

این سؤال به طور قاطع قابل پاسخ نیست، اما تأمل در آن می‌تواند بینش‌هایی در مورد ایده ما از بعد ارائه دهد. اگر پاسخ "بله" باشد، می‌توانیم با اطمینان باور کنیم که تعاریف شهودی هندسی ما تعاریف "درست" هستند، به این معنا که هر تعریفی از بعد که به نظر ما در سطح شهودی هندسی قابل قبول باشد، باید با تعاریف کلاسیک در فضاهای توپولوژیکی خوب سازگار باشد. اما اگر پاسخ "نه" باشد، یعنی اگر فضایی وجود داشته باشد که فکر کنیم باید بعدی به وضوح قابل تعریف داشته باشد و دو تعریف شهودی مختلف از بعد در آن فضا اختلاف داشته باشند، این موضوع چه چیزی در مورد ایده‌های ما از بعد می‌گوید؟ در نهایت، ما از خواننده می‌خواهیم که سعی کند به این سؤال برای خود پاسخ دهد، اما هدف اصلی ما در این مقاله این است که بگوییم پاسخ به سؤال ما "نه" است.

---

[۳] covering dimension
[۴] topological dimension

ما این کار را با ارائه تعریفی شهودی هندسی برای بعد فضاهای هاوسدورف بر اساس تصوری از بعد که قبل از تصورات لبگ و پوانکاره وجود داشته انجام می‌دهیم. این تعریف در رمان کوتاه فلتلند[۵] نوشته ادوین ابوت[۶] در سال ۱۸۸۴ ظاهر می‌شود. فلتلند داستان یک ساکن (یک مربع) از سرزمین دوبعدی با همان نام است است و تجربیات او با قلمروهای با ابعاد بالاتر و پایین‌تر. این رمان به‌خوبی به ارائه مفهوم بعد معروف است. با این حال، به طور شگفت‌انگیزی، به نظر نمی‌رسد که یک برخورد دقیق با ایده‌ها انجام شده باشد. برخلاف تصورات پوانکاره و لبگ که بر اساس جداسازی و پوشش‌ها بودند، تصور ابوت از بعد بر اساس "دید" است. به طور خاص، برای اقامت در یک فضای با بعد بالاتر، باید بتوان "داخل" فضاهای با بعد پایین‌تر را دید.

ما تلاش می‌کنیم یک فرمول دقیق از این ایده برای فضاهای هاوسدورف ارائه دهیم و نام بعد ابوت، که با $Ab(X)$ نشان داده می‌شود، را به آن اختصاص دهیم. در بخش ۲ برخی تعاریف و نتایج مقدماتی را مرور خواهیم کرد و حداقل خواص مورد نیاز برای یک تعریف از بعد را شرح خواهیم داد. در بخش ۳ بعد ابوت را تعریف خواهیم کرد. قسمتی از این بخش شامل توضیح مفهوم "دید" مذکور در فلتلند و چگونگی فرمول‌سازی آن در تعریف ما خواهد بود. همچنین در بخش ۲ ویژگی‌های اصلی Ab، مانند ناوردایی توپولوژیکی و این که $Ab(\mathbb{R}^n) = n$ را ارائه خواهیم کرد. در بخش ۴ نشان خواهیم داد که Ab با سه تعریف کلاسیک بعد در فضاهای متریک جداشدنی (در واقع فضاهای متریک فشرده) سازگار نیست. این کار را با نشان دادن اینکه بعد ابوت همه آنچه که به عنوان پیوستارهای تجزیه ناپذیر ارثی [۷]

شناخته می‌شوند برابر ۱ است انجام خواهیم داد. در طول راه برخی از مثال‌های معروف را به تفصیل توضیح خواهیم داد. در بخش ۵ با بحثی کوتاه و چالشی برای خواننده نتیجه‌گیری خواهیم کرد. یک پیوست که شامل برخی مباحث و استدلال‌های فنی است نیز آمده است. در طول این مقاله از برخی مفاهیم پایه توپولوژی نقطه‌ای بدون تعریف آنها استفاده خواهیم کرد. به‌طور خاص، از اصطلاحاتی مانند هاوسدورف، نرمال و فشرده استفاده خواهیم کرد. خواننده‌ای

---

[۵] Flatland
[۶] Abbott
[۷] hereditarily indecomposable continua

که با این اصطلاحات آشنا نیست، ممکن است همچنان بتواند این مقاله را بخواند و ایده‌های اصلی آن را درک کند. خواننده بی‌تجربه باید این اصطلاحات و مفاهیم را به عنوان

"جزییات قانونی" در نظر بگیرد که باید رعایت شوند تا اظهارات ریاضی به‌طور دقیقی قابل اثبات باشند.

۳ پیشنیازها

ابتدا برخی تعاریف و مفاهیم را مرور می‌کنیم:

توپولوژی[۸]: یک توپولوژی روی مجموعه X یک گردایه τ از زیرمجموعه‌های X (که به آن‌ها مجموعه‌های باز[۹] گفته می‌شود) است که شرایط زیر را دارد:

۱. مجموعه تهی و خود مجموعه X متعلق به τ هستند.

۲. هر اجتماع دلخواه (متناهی یا نامتناهی) از اعضای τ به τ متعلق هستند.

۳. هر اشتراک دلخواه متناهی از اعضای τ به τ متعلق هستند.

وقتی توپولوژی τ روی X مشخص باشد، به زوج مرتب (X, τ) یک فضای توپولوژیکی[۱۰] می‌گویند.

فضای متریک[۱۱]: یک فضای متریک M زوج مرتب (M, d) است که در آن M یک مجموعه و d یک متر[۱۲] روی M است، یعنی تابعی $d : M \times M \to \mathbb{R}$ که شرایط زیر را دارد:

۱. برای هر $x \in M$، $d(x, x) = 0$

۲. برای هر $x, y \in M$ که $x \neq y$، $d(x, y) > 0$

[۸] topology
[۹] open sets
[۱۰] topological space
[۱۱] metric space
[۱۲] meter

۳. برای هر $x, y \in M$، $d(x,y) = d(y,x)$

۴. برای هر $x, y, z \in M$، $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$

گوی باز[۱۳]: اگر (M,d) یک فضای متریک باشد، منظور از یک گوی باز به مرکز p و شعاع ϵ مجموعه:

$$B_\epsilon(p) = \{x \in M \mid d(p,x) < \epsilon\}$$

است.

فضای متر پذیر[۱۴]: فضای توپولوژیکی (X,τ) را متر پذیر گوییم هرگاه یک متر d روی X وجود داشته باشد به طوری که توپولوژی τ را القا کند. یعنی همه‌ی مجموعه های باز X تحت متر d برابر τ باشند (یک مجموعه U در فضای متریک (X,d) باز است هرگاه برای هر $x \in U$ یک گوی باز به مرکز x درون U وجود داشته باشد).

فضای هاسدورف[۱۵] :فضای توپولوژیکی X را هاسدورف گوییم هرگاه برای هر دو نقطه‌ی مجزای $x, y \in X$، یک مجموعه باز U شامل x و یک مجموعه باز V شامل y وجود داشته باشد به طوری که U و V مجزا باشند.

فضای همبند[۱۶] : فضای توپولوژیکی X همبند نامیده می‌شود اگر اجتماع هیچ دو مجموعه باز غیر تهی و مجزا نباشد. در غیر این صورت، X غیرهمبند[۱۷] نامیده می‌شود.

مولفه همبندی[۱۸] : به اجتماع تمام زیرمجموعه‌های همبند شامل نقطه‌ی x در فضای توپولوژیکی X، مولفه همبندی نقطه x در X گفته می‌شود.

---

[۱۳] open ball
[۱۴] metrizable space
[۱۵] Hausforff space
[۱۶] connected space
[۱۷] disconnected
[۱۸] connected component

فضای کاملاً ناهمبند[19]: فضای توپولوژیکی X را کاملا ناهمبند گوییم هرگاه مولفه‌های همبندی در X تک‌نقطه‌ای ها باشند.

همبند موضعی[20] : فضای X در نقطه x همبند موضعی نامیده می‌شود اگر هر همسایگی از x شامل یک همسایگی باز همبند از x باشد. یک فضای همبند موضعی فضایی است که در هر یک از نقاطش همبند موضعی باشد.

پایه[21]: یک پایه برای توپولوژی در فضای X (که اگر توپولوژی τ مشخص باشد، پایه‌ای برای X نیز نامیده می‌شود) یک گردایه $\mathcal{B} \subseteq \tau$ از مجموعه‌های باز است به طوری که هر مجموعه باز توپولوژی می‌تواند به صورت اجتماع اعضایی از $\mathcal{B}$ نمایش داده شود.

پوشش باز[22]: یک پوشش باز $\mathcal{C}$ برای یک فضای توپولوژیکی X گردایه‌ای از زیرمجموعه‌های باز X است که اجتماع آن‌ها کل فضای X را تشکیل می‌دهد. یک زیرپوشش باز[23] $\mathcal{C}$ یک زیرمجموعه $\mathcal{C}$ است که همچنان X را پوشش می‌دهد (یعنی اجتماع اعضای آن برابر X است).

فضای فشرده[24]: یک فضای توپولوژیکی X فشرده نامیده می‌شود اگر هر پوشش باز X یک زیرپوشش متناهی داشته باشد. به عبارت دیگر، X فشرده است اگر برای هر گردایه $\mathcal{C}$ از زیرمجموعه‌های باز X به طوری که:

$$X = \bigcup_{U \in \mathcal{C}} U,$$

---

[19] totally disconnected space
[20] locally connected
[21] basis, base
[22] open cover
[23] open subcover
[24] compact space

یک زیرمجموعه متناهی $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{C}$ وجود داشته باشد به طوری که:

$$X = \bigcup_{U \in \mathcal{F}} U.$$

توپولوژی زیرفضایی[۲۵] : اگر (X, τ) یک فضای توپولوژیکی و S یک زیرمجموعه از X باشد، توپولوژی زیرفضایی روی S به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\tau_S = \{S \cap U \mid U \in \tau\}.$$

به عبارت دیگر، یک زیرمجموعه از S در توپولوژی زیرفضایی باز است اگر و تنها اگر اشتراک S با یک مجموعه باز در (X, τ) باشد.

بستار[۲۶] یک مجموعه: اگر S یک زیرمجموعه از فضای توپولوژیکی X باشد، به کوچکترین مجموعه بسته که S را شامل می‌شود یا به طور معادل، اشتراک تمام مجموعه‌های بسته که S را شامل می‌شود، بستار S در X گفته می‌شود و با $\mathrm{cl}_X\, S$ یا $\overline{S}$ نشان داده می شود:

$$\bar{S} := \bigcap_{\{C \mid S \subseteq C, \text{بسته است } C\}} C$$

درون[۲۷] یک مجموعه: درون یک زیرمجموعه S از فضای توپولوژیکی X، که با $\mathrm{int}_X\, S$ یا S° نشان داده می‌شود، به عنوان بزرگترین زیرمجموعه باز X که در S قرار دارد یا به طور

[۲۵] subspace topology
[۲۶] closure
[۲۷] interior

معادل، اجتماع تمام مجموعه‌های باز X که در S قرار دارند، تعریف می‌شود:

$$\operatorname{int}_X S := \bigcup_{\{U \mid U \subseteq S, \text{باز است } U\}} U$$

مرز[۲۸] یک مجموعه: مرز یک زیرمجموعه S از یک فضای توپولوژیکی X، که با ∂S یا $\operatorname{Bd}_X S$ نشان داده می‌شود، برابر است با تفاضل بستار S با درون S در X:

$$\partial S := \overline{S} \setminus \operatorname{int} S,$$

همسان‌ریختی[۲۹]: نگاشت f میان دو فضای توپولوژیکی X و Y یک همسان‌ریختی نامیده می‌شود هرگاه دوسویی (پوشا و یک به یک) باشد و هردوی f و f^{-1} پیوسته باشند.

۴ مقدمات

در این بخش تعاریف و نتایج پایه‌ای که برای بیان دقیق و اثبات روابط بین بُعد ابوت و تعاریف کلاسیک بُعد لازم است، جمع‌آوری خواهیم کرد. همچنین از این بخش برای توصیف بُعد استقرایی بزرگ [۳۰] که یکی از تعاریف کلاسیک بُعد است استفاده خواهیم کرد و آن را با تعریف بعد ابوت مقایسه خواهیم کرد.

بُعد استقرایی بزرگ مفهوم بُعد را که توسط Poincaré با جداسازی مشخص می‌شود، تجسم می‌کند. یعنی، این ایده را دقیق می‌کند که یک فضای n-بُعدی فضایی است که برای جدا شدن نیاز به حذف یک زیرمجموعه $n-1$-بُعدی دارد. در نهایت از نتایج موجودی که در اینجا برای بُعد استقرایی بزرگ بیان می‌کنیم استفاده خواهیم کرد تا نشان دهیم که بُعد ابوت (که هنوز

---

[۲۸] boundary
[۲۹] homeomorphism
[۳۰] large inductive diminsion

تعریف نکرده‌ایم) از $\mathbb{R}^n$ برابر با n است. یک بحث کامل از بُعد استقرایی بزرگ را می‌توان در [۲] یافت. خواننده‌ای که با نظریه بُعد کلاسیک آشناست می‌تواند این بخش را نادیده بگیرد.

برای یک زیرفضا Y از فضای توپولوژیکی X، بستار Y در X را با $cl_X(Y)$ و مرز Y در X را با $\partial_X Y$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۱.۴. منظور از یک پیوستار [۳۱] یک فضای فشرده، همبند و هاسدورف (که لزوماً متریک نیست) است. در صورتی که چنین فضایی یک نقطه باشد، آن را پیوستار تباه [۳۲] می‌نامیم.

تعریف ۲.۴. فرض کنیم X یک فضای توپولوژیک و $A, B \subseteq X$ دو زیرمجموعه بسته و مجزا باشند، یک جداکننده در X بین A و B یک مجموعه بسته C است که از $A \cup B$ مجزا است به طوری که که $X \setminus C = U \cup V$ که U و V مجموعه‌های باز و مجزایی هستند که به ترتیب A و B را شامل می‌شوند.

تعریف بالا دقیقاً مشخص می‌کند که به چه معنی است که یک فضا را بین دو ناحیه درون آن جدا کنیم. در تعریف زیر، امیدواریم که روشن باشد که با یک تصور متفاوت از "جداکننده"، ممکن است یک تعریف متفاوت از بُعد براساس ایده جداسازی به دست آوریم.

تعریف ۳.۴. بُعد استقرایی بزرگ یک فضای نرمال X، که با $Ind(X)$ نشان داده می‌شود، به صورت استقرایی به شرح زیر تعریف می‌شود:

۱. $Ind(X) = -1$ اگر و تنها اگر $X = \emptyset$.

۲. $Ind(X) \leq n$ برای $n \geq 0$ اگر و تنها اگر برای هر جفت از مجموعه‌های بسته و مجزای $A, B \subseteq X$ یک جداکننده $C \subseteq X$ بین A و B وجود داشته باشد که $Ind(C) \leq n-1$.

مقدار $Ind(X)$ سپس به عنوان کوچکترین n که $Ind(X) \leq n$ تعریف می‌شود. در

[۳۱] continuum
[۳۲] degenerate continuum

صورتی که $Ind(X) \not\leq n$ برای هر n می‌گوییم $Ind(X) = \infty$.

در مقدمه به طور مختصر ذکر کردیم که برخی از خواص وجود دارند. که یک تعریف بُعد باید داشته باشد تا به عنوان یک تعریف مناسب پذیرفته شود. در اینجا این خواص را در زمینه بُعد استقرایی بزرگ بیان می‌کنیم. ما از این خواص Ind برای نشان دادن خواص مشابه برای بُعد ابوت در بخش بعدی استفاده خواهیم کرد.

قضیه ۴.۴. (ناوردایی توپولوژیکی) اگر X و Y فضاهای نرمال و همریخت باشند، آنگاه $Ind(X) = Ind(Y)$.

ناوردایی توپولوژیکی بُعد بازتاب‌دهنده شهود ماست که تغییرات پیوسته نباید بُعد را تغییر دهند.

قضیه ۵.۴ (قضیه زیرفضا). اگر X یک فضای متریک جداپذیر باشد و $Y \subseteq X$ هر زیرفضایی باشد، آنگاه $Ind(Y) \leq Ind(X)$.

قطعاً بیرون کشیدن یک زیرفضای با بُعد بالاتر از یک زیرفضای با بُعد پایین‌تر نباید ممکن باشد.

قضیه ۶.۴ (بُعد اقلیدسی). برای هر n، $Ind(\mathbb{R}^n) = n$.

این شاید مهم‌ترین خاصیتی است که یک تعریف از بُعد باید داشته باشد. در واقع، هر خاصیتی از فضاهای توپولوژیکی که این نیاز را برآورده نکند نمی‌تواند به طور معقولانه بُعد نامیده شود.

علاوه بر موارد گفته شده، ما از دو خاصیت اضافی Ind نیز استفاده خواهیم کرد:

قضیه ۷.۴. اگر یک فضای متریک جداپذیر X چنین باشد که $Ind(X) = 0$، آنگاه X کاملاً ناهمبند است.

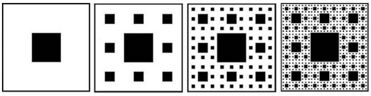
قضیه ۸.۴. برای هر $K \subseteq \mathbb{R}^n$ داریم که $Ind(K) = n$ اگر و تنها اگر K در $\mathbb{R}^n$ درون غیرتهی داشته باشد.

محاسبه بُعد بزرگ استقرایی یک فضا می‌تواند بسیار دشوار باشد، حتی برای فضاهای خوش رفتار. به ویژه، اثبات قضیه ۶.۲ بسیار دشوار است. با این حال، هنگامی که قضایایی مانند قضیه

۸.۲ اثبات شده باشند، محاسبه بُعد بزرگ استقرایی برخی از زیرفضاهای اقلیدسی بسیار آسان‌تر می‌شود، همان‌طور که در مورد "فرش سیرپینسکی" که در زیر توصیف شده است، دیده می‌شود.

مثال ۹.۴. فرض کنید F_0 زیرفضای $[0,1] \times [0,1]$ از $\mathbb{R}^2$ باشد. F_1 را از F_0 با تقسیم F_1 به نه مربع هم‌نهشت $\left[\frac{i}{3}, \frac{i+1}{3}\right] \times \left[\frac{j}{3}, \frac{j+1}{3}\right]$ برای $0 \leq i, j \leq 2$ و حذف "مربع مرکزی"، $\left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right] \times \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right]$، بدست آورید. سپس F_1 اجتماعی از هشت مربع یکسان در $\mathbb{R}^3$ است. F_2 را با تکرار این فرآیند و حذف مربع مرکزی از هر یک از مربع‌های باقی‌مانده در F_1 بدست آورید. به همین ترتیب، برای هر $n \in \mathbb{N}$ می‌توانیم زیرفضای $F_n \subseteq F_{n-1}$ را با این فرآیند حذف بسازیم. "فرش سیرپینسکی" فضای حدی $X = \bigcap_{n=0}^{\infty} F_n$ با متر زیر فضایی از $\mathbb{R}^2$ است. به سادگی می‌توان دید که X یک فضای همبند است که هیچ زیرمجموعه بازی از $\mathbb{R}^2$ ندارد و بنابراین با استفاده از قضیه ۷.۲ و قضیه ۸.۲ داریم که $Ind(X) = 1$. علاوه بر این، X فضایی است که به آن یک فضای جهانی برای فضاهای متریک جداپذیر با بُعد بزرگ استقرایی ۱ می‌گویند، به این معنی که هر فضای متریک جداپذیر Y با $Ind(Y) = 1$ در X جاسازی می‌شود.

چهار مرحله از ساخت فرش سیرپینسکی در زیر نشان داده شده است. این فضا و جهانی بودن آن در ابتدا توسط سیرپینسکی در [۱۹] مورد بحث قرار گرفت. نسخه انگلیسی ساخت و نتیجه جهانی در [۶] یافت می‌شود.



شکل ۱: مراحل F_1، F_2، F_3 و F_4 در ساخت فرش سیرپینسکی.

۵ بُعد ابوت

در این بخش، بُعد ابوت فضاهای هاسدورف را تعریف خواهیم کرد. نشان خواهیم داد که این خاصیت یک ناوردا توپولوژیکی است، که قضیه زیرفضا (مشابه قضیه ۵.۲ برای بُعد ابوت) را برآورده می‌کند و مهمتر از همه، نشان خواهیم داد که بُعد ابوت $\mathbb{R}^n$ برابر با n است. با این حال، قبل از انجام هر یک از این‌ها، بحثی درباره منشا الهام تعریف ما، رمان کوتاه ادوین ابوت به نام فلت‌لند، لازم است.

داستان فلت‌لند به دو بخش تقسیم شده است. بخش اول توضیحی درباره کشور فلت‌لند، یک دنیای دو بعدی شبیه به $\mathbb{R}^2$ است که توسط قهرمان داستان، یک مربع، روایت می‌شود. جامعه فلت‌لند به گونه‌ای طراحی شده است که نگاهی طنزآمیز به فرهنگ انگلستان در آن زمان (دوران ویکتوریایی) داشته باشد. نیمه دوم داستان مربوط ترین بخش به کار ماست. در این بخش مربع خواب دیداری از سرزمینی با بُعد صفر به نام پوینتلند و سرزمینی با بُعد یک به نام لاینلند می‌بیند. بین این خواب‌ها، مربع توسط یک کره از اسپیس‌لند، یک دنیای سه بعدی شبیه به $\mathbb{R}^3$ بازدید می‌شود که به مربع به صورت دایره‌ای با قطر متغیر ظاهر می‌شود. کره مربع را به سفری به اسپیس‌لند سه بعدی می‌برد. در طول متن، مفهوم بودن از یک "بُعد بالاتر" به این معناست که می‌توانید "داخل" بدن‌های موجودات با بُعد پایین‌تر را ببینید. وقتی مربع دیداری از لاینلند دارد، این به معنای توانایی مربع برای دیدن "اندام‌های داخلی" ساکنان لاینلند است.

> گرچه او صدای من را شنیده بود وقتی که اولین بار با او صحبت کردم، صداها به گونه‌ای به او رسیده بودند که بر خلاف تجربیاتش بود و پاسخی نداد، "هیچ کس را ندیده" همانطور که او بیان کرد، "و صدایی شنید که انگار از درون روده‌های خودم بود." تا لحظه‌ای که دهانم را در دنیای او قرار دادم، او نه من را دیده بود و نه چیزی جز صداهای مبهم که به چیزی که من آن را پهلو و او آن را داخل یا معده‌اش می‌نامید، شنیده بود؛ و حتی اکنون نیز هیچ تصوری از منطقه‌ای که من از آن آمده بودم، نداشت.

مربع در حال توصیف پادشاه لاینلند (صفحات ۱۱۶-۱۱۷ از [۱])

به همین ترتیب، هنگامی که کره مربع را به فضای سه بعدی می‌آورد، این مفهوم بُعد به مربع اجازه می‌دهد تا «از روی» دیوارهای معادن و غارهای فلتلند را ببیند.

> یک بار دیگر احساس کردم که از میان فضا بالا می‌روم. همانطور که کره گفته بود. هرچه بیشتر از شیئی که مشاهده می‌کردیم فاصله می‌گرفتیم، میدان دید بزرگتر می‌شد. شهر بومی من، با داخل هر خانه و هر موجودی در آن، به صورت مینیاتوری در مقابل دید من باز بود. بالاتر رفتیم، و ناگهان، اسرار زمین، اعماق معادن و درون غارهای تپه‌ها، در برابر من آشکار شد.
>
> مربع از دیدگاه سه بعدی به سرزمین مسطح نگاه می‌کند (صفحه ۱۴۰ از [۱])

می‌توان نقل قول‌های دیگری یافت که ایده «دیدن داخل» چیزهای بُعد پایین‌تر از دیدگاه بُعد بالاتر را نمایش می‌دهند. وظیفه تعریف بُعد با استفاده از این ایده رسمی کردن این مفهوم «دید» است. ما این کار را به روش زیر انجام می‌دهیم. در ادامه این مقاله، تمام فضاها فرض می‌شوند که هاوسدورف هستند. برای نقاط x, y در یک فضای X، نه لزوماً متمایز، قرار دهید $C(x, y, X)$ گردایه زیرمجموعه‌های باز و همبند X باشد که هر دو x و y را شامل می‌شوند.

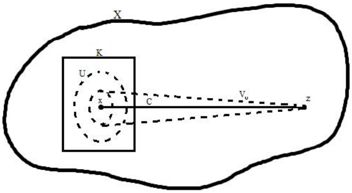
تعریف ۱.۵. فرض کنید X یک فضای هاوسف غیرتهی باشد، $x, z \in X$ نقاط متمایز، و $K \subseteq (X \setminus \{z\})$ یک زیرفضا شامل x باشد. یک پیوستار $C \subseteq X$ که شامل x و z است، یک خط دید [۳۳] از z به x نامیده می‌شود اگر شرایط زیر برقرار باشند:

۱. $C(x, z, X)$ شامل یک پایه همسایگی برای C باشد.

۲. برای همه مجموعه‌های باز $U \subseteq K$ که شامل x هستند، عنصر $V_U \in C(x, z, X)$ وجود داشته باشد که C را شامل شود و $V_U \cap K \subseteq cl_X(V_U) \cap K \subseteq U$ را

[۳۳] line of sight

ارضا کند.



شکل ۲: یک خط دید از z به $x \in K$

این تعریف، مفهوم قابل رویت بودن یک نقطه در یک فضا از نقطه‌ای خارج از آن فضا را رسمی می‌کند. باید نقطه z در تعریف بالا را به عنوان نقطه‌ای که از آن مربع به داخل ساکنان لاینلند نگاه می‌کند، در نظر گرفت. با همین تمثیل، فضای K خود لاینلند است. دو شرط تعریف برای دقیق کردن این ایده است که می‌توانیم "دید خود را محدود کنیم" به قیمت کم شدن دید اطراف. می‌توان تصور کرد که به نقطه‌ای روی دیوار نگاه می‌کنیم. با چشمان نیمه‌باز، می‌توانیم تمرکز خود را روی آن نقطه بگذاریم به قیمت کم شدن دید محیطی. به همین ترتیب، برای این تمرکز نیاز نیست که خط دید از چشمان ما به نقطه تغییر کند. با تعریف خود، قصد داریم رویت مستقیم یک نقطه x از z را رسمی کنیم، همان‌طور که در شکل بالا نشان داده شده است.

تعریف ۲.۵. فرض کنید X یک فضای هاسدروف غیرتهی باشد. بعد ابوت [۳۴] X، که با $Ab(X)$ نشان داده می‌شود، به صورت زیر تعریف می‌شود.

فرض کنید X_0 مجموعه توانی X باشد. با فرض اینکه X_n برای $n \geq 0$ تعریف شده است، X_{n+1} به عنوان گردایه‌ای از از زیرمجموعه‌های $Y \subseteq X$ تعریف می‌شود که در آن یک $K \in X_n$ وجود دارد به‌طوری‌که:

[۳۴] Abbott dimension

۱. $K \subseteq Y$.

۲. نقطه‌ای $z \in Y \setminus K$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که برای همه نقاط $x \in K$ یک خط دید $W_{z,x} \subseteq Y$ از z به x وجود داشته باشد که:

- یک $V \in C(x, z, Y)$ وجود داشته باشد که $W_{z,x}$ را شامل شود و اگر $V' \in C(x, z, Y)$ شامل $W_{z,x}$ باشد و در V قرار داشته باشد، آن‌گاه یک $D \in X_n$ وجود داشته باشد که $D \subseteq \partial_Y(V')$.

سپس $Ab(X)$ به عنوان بزرگترین n که در آن $X_n \neq \emptyset$ تعریف می‌شود. اگر $X_n \neq \emptyset$ برای همه n، بعد ابوت X را بی‌نهایت می‌گوییم. در نهایت، $Ab(\emptyset) = -1$ تعریف می‌کنیم.

در تعریف بالا اگر $Y_n \in X_n$ و $Y_{n-1} \in X_{n-1}$ به‌طوری‌که Y_{n-1} بتواند نشان دهد که $Y_n \in X_n$، در این صورت می‌گوییم Y_{n-1} شهادت می‌دهد [۳۵] که $Y_n \in X_n$ و آن را با $Y_n \ll_n Y_{n-1}$ نشان می‌دهیم . همچنین نقطه z استفاده شده در مورد (۲) یک نقطه مشاهده برای K نامیده می‌شود.

این تعریف می‌گوید اگر فضای X یک زیرفضای n بعدی داشته باشد که بتواند "داخل آن را ببیند" از یک دیدگاه بالاتر، پس باید حداقل $n+1$ بعدی باشد.

مثال ۳.۵. بعد ابوت یک مجموعه تک‌نقطه‌ای صفر است. به همین ترتیب، بعد ابوت هر فضای کاملاً ناهمبند صفر است. به خاطر بیاورید که فضایی کاملاً ناهمبند است اگر تنها زیرمجموعه‌های همبند غیرتهی آن نقاط باشند. فرض کنید X کاملاً ناهمبند باشد. اگر $Y \subseteq X$ به‌طوری‌که $Y \in X_n$ برای برخی $n \geq 1$، در این صورت یک زیرفضای $K \subseteq Y$، یک نقطه‌ی $x \in K$، یک نقطه‌ی $z \in Y \setminus K$، و یک پیوستار $W_{z,x} \subseteq Y$ وجود دارد که هر دو x و z را شامل شود. اما، تنها زیرمجموعه‌های همبند X و در نتیجه Y، نقاط هستند. بنابراین چنین $W_{z,x}$ نمی‌تواند وجود داشته باشد و X_n باید برای همه $n \geq 1$ تهی باشد. این منجر به $Ab(X) = 0$ می‌شود.

---

[۳۵] witnesses

یک نکته واضح مفید به صورت زیر است.

لم ۴.۵. با داشتن یک فضا و $k \in \mathbb{N}$ داریم که $X_{k+1} \subseteq X_k$.

تعریف Ab ، در حالی که ماهیت استقرایی دارد، طعمی متفاوت از ابعاد استقرایی Ind و ind دارد، زیرا با Ind و ind، اغلب ارائه کران های بالا برای بعد فضا آسان‌تر است. اما، با Ab برعکس این صادق است. برای یک فضای X، اثبات $Ab(X) \geq n$ فقط نیاز به یافتن دنباله‌ی درون‌همی از $n+1$ زیر فضاهای $Y_0 \ll_1 Y_1 \ll_2 \cdots \ll_n Y_n \subseteq X$ دارد. در واقع، برای $\mathbb{R}^3$ می‌توان از یک نقطه، سپس یک پاره‌خط که آن نقطه را شامل می‌شود، سپس یک مربع که یکی از اضلاعش

آن پاره‌خط است، و در نهایت یک مکعب که آن مربع را به عنوان یک وجه دارد استفاده کرد تا نشان داد $Ab(\mathbb{R}^3) \geq 3$. به طور کلی داریم،

قضیه ۵.۵. برای هر $n \geq 1$، $Ab(\mathbb{R}^n) \geq n$.

دو نتیجه بعدی، در نگاه اول، ظاهراً بدیهی هستند. اولی، لم ۶.۳، می‌گوید که اگر کسی بتواند داخل یک زیر فضا $Y \subseteq X$ را از یک نقطه مشاهده $z \in X \setminus Y$ و $K \subseteq Y$ ببیند، باید نقطه مشاهده‌ای در $X \setminus K$ نیز وجود داشته باشد که بتواند داخل K را ببیند. به عبارت ساده‌تر، اگر روی دیوار یک مربع بکشید، می‌توانید داخل مربع را ببینید و می‌توانید داخل هر یک از قطعه‌های خطی که اضلاع مربع را تشکیل می‌دهند ببینید. نتیجه دوم، گزاره ۷.۳، می‌گوید که یک فضای با بعد متناهی باید زیر فضاهایی از هر بعد کوچکتر ممکن را شامل شود. دوباره، این احتمالاً بدیهی است زیرا از شهود ما در مورد بعد ناشی می‌شود. با این حال، حتی در مورد تعاریف کلاسیک بعد، اثبات غیر بدیهی نیاز است.

لم ۶.۵. فرض کنید X یک فضا با $Ab(X) = n$ باشد و $Y \subseteq X$ باشد به طوری که $Y \ll_n X$. اگر $K \subseteq Y$ با $K \in X_k$ برای برخی $k \leq n-1$، در این صورت $K \ll_{k+1} X$.

اثبات. ما با استفاده از تعریف ثابت خواهیم کرد که $K \ll_{k+1} X$. فرض کنید $z \in X \setminus Y$ یک نقطه مشاهده برای Y باشد و همچنین فرض کنید $x \in K$ داده شود. از آنجا که $K \subseteq Y$ و $X \ll_n Y$، یک پیوستار $W_{z,x} \subseteq X$ وجود دارد که هر دو x و z را شامل می‌شود. همچنین $W_{z,x}$ می‌تواند به گونه‌ای انتخاب شود که $C(x, z, X)$ شامل یک پایه همسایگی برای $W_{z,x}$ باشد. فرض کنید $U \subseteq K$ یک زیر مجموعه باز از K باشد که شامل x است. سپس $U = U' \cap K$ برای برخی زیر مجموعه $U' \subseteq Y$ که در Y باز است. سپس، یک $V_{U'} \in C(x, z, X)$ وجود دارد که $W_{z,x}$ را شامل می‌شود و $V_{U'} \cap Y \subseteq cl_X(V_{U'}) \cap Y \subseteq U'$ را برآورده می‌کند. با اشتراک همه این‌ها با K داریم

$$V_{U'} \cap K \subseteq cl_X(V_{U'}) \cap K \subseteq U' \cap K = U$$

که مورد (۲) از تعریف یک خط دید را برقرار می‌کند . زیرنکته مورد (۲) از تعریف بعد ابوت برقرار است زیرا این خاصیت $W_{z,x}$ است که مستقل از Y و K است. ما سپس نشان داده‌ایم که $X \in X_{k+1}$ توسط K شهادت داده می‌شود. یعنی، $K \ll_{k+1} X$. □

جالب اینجاست که برای تعاریف کلاسیک بعد، نتیجه در صورتی که فضا بی‌نهایت بعدی باشد، برقرار نیست. در [۴]، یک فضای متریک فشرده با بعد بی‌نهایت (با توجه به هر یک از تعاریف کلاسیک) ساخته شده است که هر زیر فضای آن یا بی‌نهایت بعدی یا صفر بعدی است.

قضیه ۷.۵. اگر X یک فضا با $Ab(X) = n \geq 0$ باشد، سپس برای همه $0 \leq k \leq n$ یک $Y \subseteq X$ وجود دارد که $Ab(Y) = k$.

اثبات. اگر $n = 0$، نتیجه بدیهی است. در غیر این صورت، فرض کنید $n > 0$ و فرض کنید k به گونه‌ای باشد که $1 \leq k \leq n - 1$ و هیچ $Y \subseteq X$ وجود ندارد که $Ab(Y) = k$ را برآورده کند. این بدان معناست که اگر $Y \subseteq X$ هر زیر مجموعه غیر تهی باشد، یا $Ab(Y) < k$ یا یک $K \subseteq Y$ وجود دارد که $K \in X_{k+1}$. از آنجا که $Ab(X) = n > k$ ما داریم که X_n نباید تهی باشد، که توسط لم ۴.۳ به ما می‌دهد که X_{k+1} غیر

تهی است برای $0 \leq i \leq n-k$. ما ادعا می‌کنیم که $X_{k+1} = X_{k+i}$ برای همه $i \geq 1$، که با متناهی بودن $Ab(X)$ در تناقض است. اگر $Y \subseteq X$ به گونه‌ای باشد که $Y \in X_{k+1}$، سپس یک $K \subseteq Y$ وجود دارد که $K \in X_k$ و $K \ll_{k+1} Y$. طبق فرض ما داریم که $Ab(K) > k$ بنابراین باید یک $K' \subseteq K$ باشد که $K' \in X_{k+1}$. از آنجا که $K \ll_{k+1} Y$ داریم با لم ۴.۳ که $K' \in X_k$. علاوه بر این، با لم ۶.۳ داریم که $K' \ll_{k+1} Y$. پس از ای در نظر گرفتن فرض ما که هر عنصر X_k یک زیر مجموعه در X_{k+1} دارد و مورد ۲ از تعریف بعد ابوت، به این نتیجه می‌رسیم که $K' \ll_{k+2} Y$ است، که نشان می‌دهد که $Y \in X_{k+2}$ است. از آنجا که $X_{k+2} \subseteq X_{k+1}$ این برابری آنها را اثبات می‌کند. اکنون فرض کنید که $X_{k+1} = X_{k+j}$ برای $1 \leq j$ و فرض کنید $Y \in X_{k+j}$ و $K \in X_{k+j-1}$ که $K \ll_{k+j} Y$. از فرض که $X_{k+j-1} = X_{k+j}$ به سرعت می‌توان نتیجه گرفت که در واقع $K \ll_{k+j+1} Y$، به دست می‌دهد که $Y \in X_{k+j+1}$. با استقرا و لم ۴.۳ سپس داریم که $X_{k+1} = X_{k+i}$ برای همه $i \geq 1$. این اما به معنای $Ab(X) = \infty$ است، در تناقض با فرض ما که $Ab(X)$ متناهی است. بنابراین باید یک $Y \subseteq X$ وجود داشته باشد که $Ab(Y) = k$. $\square$

دو نتیجه بعدی نتایج آسانی از تعریف بعد ابوت هستند، اما همچنان بخشی از حداقل خصوصیات لازم برای یک تابع بعد را برآورده می‌کنند.

قضیه ۸.۵. اگر Y یک زیر فضای یک فضای X باشد، سپس $Ab(Y) \leq Ab(X)$.

اثبات. فرض کنید X یک فضا باشد و $Y \subseteq X$ داده شود. فرض کنید $K_1, K_2 \subseteq Y$ به گونه‌ای باشد که $K_1 \ll_n K_2$. سپس $K_1 \in Y_{n-1}$ و $K_2 \in Y_n$. پیوستارها در K_2 پیوستارها هستند، خواه K_2 به عنوان زیر فضای Y یا X در نظر گرفته شود یا نه. به همین ترتیب، زیر مجموعه‌های باز همبند K_2 زیر مجموعه‌های باز همبند K_2 هستند، خواه K_2 به عنوان زیر مجموعه Y یا X در نظر گرفته شود یا نه. بنابراین $K_2 \in X_n$ و $K_1 \in X_{n-1}$ هستند. علاوه بر این $K_1 \ll_n K_2$ به عنوان زیر مجموعه‌های X هستند.

بنابراین اگر n بزرگترین عدد طبیعی باشد که $Y_n \neq \emptyset$ آنگاه $X_n \neq \emptyset$ نیز هست. بنابراین $Ab(Y) \leq Ab(X)$. $\square$

قضیه ۹.۵. اگر X و Y فضاهای هم‌ریخت باشند، سپس $Ab(X) = Ab(Y)$.

اثبات. این نتیجه بلافاصله با توجه به این که هم‌ریختی‌ها توابع دوسویی پیوسته‌ای هستند که مجموعه‌های باز همبند، پیوستارها و پایه‌های همسایگی را حفظ می‌کنند، به دست می‌آید. $\square$

آنچه باقی می‌ماند برای بعد ابوت این است که نشان داده شود که آن خاصیت اساسی یک تابع بعد را برآورده می‌کند، یعنی این که بعد $\mathbb{R}^n$ برابر با n است.

خود اثبات نسبتاً فنی است و جزئیات استدلال را به پیوست ارجاع می‌دهیم. با این حال، می‌توانیم یک مرور کلی از استدلال ارائه دهیم. برای اثبات اینکه $Ab(\mathbb{R}^n) = n$ از قضیه ۵.۳ استفاده می‌کنیم تا نشان دهیم که بعد ابوت با بعد بزرگ استقرایی بر روی کلاس فضاهای متریک جداشدنی که شامل $\mathbb{R}^n$ است، از بالا کران دار است (همچنین در پیوست اثبات شده است). همانطور که برای نتایج از این نوع نسبتاً رایج است، حالت‌های بعد متناهی و نامتناهی به صورت جداگانه بررسی می‌شوند. در حالت متناهی از استقراء بر بعد ابوت فضا استفاده می‌شود و سپس فرض می‌شود که بعد بزرگ استقرایی کمتر از بعد ابوت است. در حالت نامتناهی فرض می‌شود که فضا دارای بعد ابوت نامتناهی است و سپس از استقراء بر بعد بزرگ استقرایی استفاده می‌شود و نشان داده می‌شود که صرف نظر از اینکه کدام مقدار متناهی برای بعد بزرگ استقرایی فرض شود، به تناقض می‌رسیم. از آنجا که تعریف هر دو بعد ابوت و بعد بزرگ استقرایی در نهایت شامل مرزهای مجموعه‌های باز با بعد کمتر است، می‌توان برای هر دو حالت متناهی و نامتناهی بدون مشکل به تناقض رسید. مجدداً، خواننده علاقه‌مند می‌تواند جزئیات فنی را در پیوست بیابد.

قضیه ۱۰.۵. برای همه $n \geq 1$، $Ab(\mathbb{R}^n) = n$.

با نتایج این بخش، بعد ابوت به عنوان یک تعریف مشروع از بعد تثبیت شده است. همانطور که در مقدمه وعده داده شده بود، وظیفه بعدی ما این است که نشان دهیم بعد ابوت با تعاریف کلاسیک بعد (که در اینجا با Ind نشان داده می‌شود) بر روی کلاس فضاهای متریک جداشدنی مطابقت ندارد.

۶ ناهمگونی بعد ابوت با تعاریف کلاسیک

در این بخش، ما نشان خواهیم داد که بعد ابوت با تعاریف کلاسیک بعد مطابقت ندارد. به طور خاص، ابتدا نشان خواهیم داد که بعد ابوت بادبزن نستر-کوراتوفسکی [۳۶] (یک فضای غیر فشرده) برابر با ۰ است در حالی که بعد بزرگ استقرایی آن ۱ است. سپس نشان خواهیم داد که بعد ابوت پیوستار های تجزیه‌ناپذیر ارثی حداکثر ۱ است. با این حال، همانطور که توسط بینگ [۳۷] در [۴] نشان داده شده است، پیوسته‌های تجزیه‌ناپذیر ارثی با بعد پوششی به دلخواه بالا (و در نتیجه بعد استقرایی بزرگ و بعد استقرایی کوچک) وجود دارد. در طول مسیر، توصیف دقیقی از برخی فضاهای شناخته شده در کلاس پیوسته‌های تجزیه‌ناپذیر و تجزیه‌ناپذیر ارثی ارائه خواهیم داد. خواننده‌ای که با این نوع فضاها راحت است، می‌تواند از تعریف پیوسته‌های تجزیه‌ناپذیر و تجزیه‌ناپذیر ارثی به قضیه ۴.۴، نتیجه اصلی این بخش، مستقیم برود.

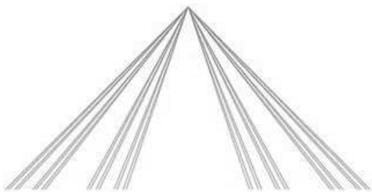
همانطور که گفته شد، با بادبزن نستر-کوراتوفسکی شروع خواهیم کرد. ساختار آن به شرح زیر است (و همانطور که در [۲۰] یافت می‌شود):

فرض کنید C مجموعه کانتور یک‌سوم در $[0,1]\times\{0\}\subseteq\mathbb{R}^2$ باشد و فرض کنید $z=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$. سپس فرض کنید Y اجتماع همه پاره خط های متصل‌کننده z به نقاط C باشد. برای یک x خاص در C، فرض کنید L_x پاره خطی در Y باشد که x را به z متصل می‌کند. اکنون فرض کنید $C_1\subseteq C$ مجموعه نقاطی باشد که به عنوان نقاط انتهایی بازه‌ها در ساختار C حذف می‌شوند، و فرض کنید C_2 مکمل C_1 در C باشد. اگر $x\in C_1$،

[۳۶] Knaster-Kuratowski fan

[۳۷] Bing

تعریف کنید $\hat{L}_x = \{(r,s) \mid s \in \mathbb{Q}\}$. به همین ترتیب، اگر $x \in C_2$، تعریف کنید $\hat{L}_x = \{(r,s) \mid s \notin \mathbb{Q}\}$. بادبزن نستر-کوراتوفسکی فضای $X = \bigcup_{x \in C} \hat{L}_x$ است. چرا این فضا به عنوان "بادبزن" شناخته می‌شود، با مشاهده تصویر فضا بیشتر مشهود است. بادبزن به عنوان فضایی شناخته شده است که همبند است، اما موضعی همبند نیست. همچنین دارای چیزی به نام نقطه پراکندگی [۳۸] است. به این معنی که نقطه $z = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ به گونه‌ای است که $X \setminus \{z\}$ کاملاً ناهمبند است.



شکل ۳: بادبزن نستر-کوراتوفسکی

قضیه ۱.۶. اگر X بادبزن نستر-کوراتوفسکی باشد، آنگاه $Ab(X) = 0$ و $Ind(X) = 1$.

اثبات. از آنجا که X غیر تهی است، داریم $Ab(X) \geq 0$. با این حال، از آنجا که X هیچ پیوستار غیر بدیهی ندارد، داریم $Ab(X) < 1$. بنابراین $Ab(X) = 0$. با این حال، از آنجا که X همبند است، باید $Ind(X) \geq 1$. در همین حال، X در $\mathbb{R}^2$ دارای درون تهی است و بنابراین $Ind(X) < 2$، پس $Ind(X) = 1$. □

با بادبزن نستر-کوراتوفسکی، ما قبلاً نشان داده‌ایم که بعد ابوت با تعاریف کلاسیک بر روی فضاهای متریک جداشدنی مطابقت ندارد. با این حال، در اینجا رها کردن داستان کمی نامطلوب خواهد بود. بادبزن نستر-کوراتوفسکی، در حالی که جداشدنی است، فشرده نیست و به نظر می‌رسد که ممکن است فقط یک استثنا باشد. با این حال، همانطور که اکنون نشان خواهیم

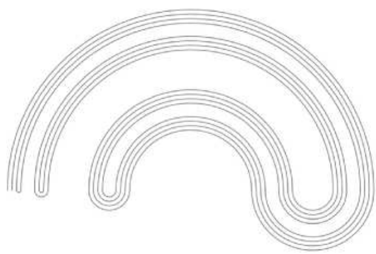
[۳۸] Dispersion point

داد، تحمیل شرط فشردگی هیچ سودی برای تضمین مطابقت بین بعد ابوت و تعاریف کلاسیک ندارد. به طور خاص، ما به بررسی خانواده پیوستارهای تجزیه‌ناپذیر ارثی می‌پردازیم که به شرح زیر تعریف می‌شوند.

تعریف ۲.۶. یک پیوستار متریک K تجزیه‌ناپذیر نامیده می‌شود اگر K نتواند به صورت اجتماع دو زیرپیوستار سره نوشته شود. ما می‌گوییم که K تجزیه‌ناپذیر ارثی است اگر هر زیرپیوستار K نیز تجزیه‌ناپذیر باشد.

برای کمک به درک این تعریف، مثال زیر را در نظر بگیرید، پیوستار "دسته سطل" [۳۹] که به شرح زیر تعریف شده است و می‌توان آن را در [۶] یافت:

فرض کنید C مجموعه کانتور یک‌سوم‌ها در $\mathbb{R}^2 \supseteq \{0\} \times [0,1]$ باشد. C_0 را به عنوان گردایه‌ی نیم‌دایره‌هایی که بالای محور x در $\mathbb{R}^2$ قرار دارند و انتهایشان در C است و مرکز آن‌ها در $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ است، تعریف کنید. سپس C_1 را به عنوان گردایه‌ی نیم‌دایره‌هایی که زیر محور x قرار دارند و مرکز آن‌ها در نقطه میانی $\left[\frac{2}{3}, 1\right]$ است و انتهای آن‌ها در $C \cap \left[\frac{2}{3}, 1\right]$ است، تعریف کنید. گردایه‌های نیم‌دایره‌های C_i به عنوان گردایه‌هایی از نیم‌دایره‌ها که زیر محور x قرار دارند و مرکز آن‌ها در نقطه میانی بازه $\left[\frac{2}{3^i}, \frac{3}{3^i}\right]$ است و انتهای آن‌ها در $C \cap \left[\frac{2}{3^i}, \frac{3}{3^i}\right]$ است، تعریف می‌شوند. پیوستار دسته سطل اجتماع تمام مجموعه‌های C_i برای $i \geq 0$ است.



شکل ۴: تصویری تقریبی از پیوستار دسته سطل

[۳۹] Bucket Handel

مثال‌های دیگری از پیوستارهای تجزیه‌ناپذیر جالب وجود دارد، مانند "دریاچه‌های وادا" [۴۰] که پیوستاری تجزیه‌ناپذیر است و به طرز شگفت‌انگیزی به عنوان مرز مشترک سه زیرمجموعه باز همبند مجزا از $\mathbb{R}^2$ ظاهر می‌شود. با این حال، در حالی که می‌توانیم زمان زیادی را صرف کار بر روی چنین مثال‌هایی کنیم، آن‌ها تمرکز این بخش نیستند. ما افرادی که به دریاچه‌های وادا علاقه‌مند هستند را به توضیح اصلی آن در [۱۱] (در صفحه ۶۰) ارجاع می‌دهیم. همانطور که در مقدمه بیان شد، زیرخانواده پیوستارهای تجزیه‌ناپذیر که در این بخش مورد توجه اصلی ما هستند، پیوستارهای تجزیه‌ناپذیر ارثی هستند که، همانطور که در تعریف ؟؟ توضیح داده شده است، پیوستارهای تجزیه‌ناپذیری هستند که تمام زیرپیوستارهای آن‌ها نیز تجزیه‌ناپذیر هستند. شاید معروف‌ترین مثال از یک پیوستار تجزیه‌ناپذیر ارثی "شبه‌کمان" [۴۱] باشد.

در زیر ساختاری برای شبه‌کمان همانند [۹] ارائه می‌دهیم. این ساختار برای نتایج این بخش ضروری نیست، اما آن را به‌منظور تکمیل اینجا آورده‌ایم. خواننده‌ای که تنها به نتایج این بخش علاقه‌مند است، می‌تواند به‌راحتی از آن صرف‌نظر کند.

یک مجموعه متناهی $\{U_1, \ldots, U_n\}$ از زیرمجموعه‌های یک مجموعه X را یک زنجیر ساده [۴۲] از نقطه x به z در X می‌نامیم اگر $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ اگر و تنها اگر $|i-j| \leq 1$، x فقط در U_1 باشد و z فقط در U_n باشد. عناصر زنجیرهای ساده را پیوند [۴۳] می‌نامند. یک زنجیر ساده $V = \{V_1, \ldots, V_m\}$ یک زیر زنجیر [۴۴] از یک زنجیر ساده دیگر $\mathcal{U} = \{U_1, \ldots, U_n\}$ است زمانی که $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{U}$. اگر زنجیرهای ساده $\mathcal{U} = \{U_1, \ldots, U_n\}$ و $\mathcal{V} = \{V_1, \ldots, V_m\}$ و اعداد صحیح i, j با $i < j < n$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که $V_1 = U_i$ و $V_m = U_j$، آنگاه $\mathcal{V}$ را با $\mathcal{U}(i,j)$ نشان می‌دهیم. به‌طور خلاصه، اگر $\mathcal{V}$ یک زیرزنجیر از $\mathcal{U}$ باشد که اولین پیوند $\mathcal{V}$، U_i و آخرین پیوند $\mathcal{V}$، U_j باشد، آنگاه $\mathcal{V}$ را با

[۴۰] Lakes of Wada
[۴۱] Pseudo-arc
[۴۲] simple chain
[۴۳] link
[۴۴] subchain

$\mathcal{U}(i,j)$ نشان می‌دهیم. می‌گوییم که یک زنجیر ساده $\mathcal{V}$ (به طور قوی) تظریف می‌کند [۴۵] یک زنجیر ساده $\mathcal{U}$ را اگر هر پیوند (بستار یک پیوند) در $\mathcal{V}$ در برخی پیوندهای $\mathcal{U}$ قرار داشته باشد. مفهوم نهایی که برای ساختن شبه‌کمان نیاز داریم، کجی است.

تعریف ۳.۶. فرض کنید یک زنجیر ساده V زنجیر ساده U را تظریف می‌کند، می‌گوییم که V در U کج [۴۶] است اگر شرایط زیر را برآورده کند:

- هر زمان که $V(i,j)$ زیرزنجیری از V باشد با $V_i \cap U_h \neq \emptyset$ و $V_j \cap U_k \neq \emptyset$ که در آن $|h-k| \geq 3$ ، r و s وجود دارند به طوری که

$$V(i,j) = V(i,r) \cup V(r,s) \cup V(s,j)$$

که در آن $(s-r)(j-i) > 0$ و V_r, V_s زیرمجموعه‌هایی از پیوندهای $U(h,k)$ هستند که با U_k و U_h اشتراک دارند ، به ترتیب.

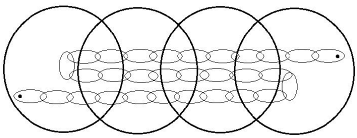
این تعریف با دیدن تصویر در صفحه بعدی قابل فهم تر است. در این شکل دو زنجیر ساده بین یک جفت نقطه در $\mathbb{R}^2$ به تصویر کشیده شده‌اند. یکی زنجیر ساده‌ای از چهار عنصر با قطر بزرگ و دیگری زنجیر ساده‌ای از سی عنصر با قطر کوچک است. برای اینکه زنجیر کوچکتر در زنجیر بزرگتر کج باشد، زنجیر کوچکتر باید دو بار برای هر جفت عناصر زنجیر بزرگتر که حداقل سه پیوند از هم فاصله دارند، به خود "برگردد".

سپس شبه‌کمان به عنوان زیرمجموعه‌ای از $\mathbb{R}^2$ به شرح زیر ساخته می‌شود. فرض کنید p و q نقاط متمایز از $\mathbb{R}^2$ باشند و فرض کنید C_1 زنجیر ساده‌ای بین آن‌ها باشد که از زیرمجموعه‌های همبند باز تشکیل شده است. سپس، برای $n \geq 2$ می‌توان به صورت استقرایی یک دنباله از زنجیرهای ساده C_n بین p و q که از زیرمجموعه‌های همبند باز از $\mathbb{R}^2$ تشکیل شده‌اند به طوری که C_n به طور قوی C_{n-1} را تظریف می‌کند، C_n در C_{n-1} کج است، و قطر عناصر

[۴۵] refines
[۴۶] crooked

C_n حداکثر $\frac{1}{n}$ است، ساخت. شبه‌کمان فضای $X = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(\bigcup C_n\right)$ با توپولوژی متریک به ارث برده شده از $\mathbb{R}^2$ است.

یک نکته نهایی قبل از اثبات نتیجه اصلی این بخش. ما به بحث خود درباره پیوستارهای تجزیه‌ناپذیر و تجزیه‌ناپذیر ارثی پس از پیشنهاد اینکه خصوصیت غیرعادی بادبزن نستر-کوراتوفسکی ممکن است فقط یگ حالت خاص باشد عجیب و نادر باشد. ممکن است خواننده بخواهد همان قضاوت را در مورد پیوستارهای تجزیه ناپذیر و پیوستارهای تجزیه ناپذیر ارثی نیز بکند. با این حال، این نوع پیوستارها به هیچ وجه نادر نیستند. در واقع، به نوعی، "اکثر" پیوستارها در $\mathbb{R}^n$ به طور ارثی تجزیه ناپذیر هستند.[۴۷] همچنین، در هر زیرمجموعه $n+1$ بعدی از $\mathbb{R}^{n+1}$ یک پیوستار تجزیه ناپذیر ارثی n بعدی وجود دارد (که n بعدی با توجه به تعاریف کلاسیک است). اثبات این نتایج را می‌توان در [۸] یافت. با این حال، بیایید به نتیجه اصلی این بخش بپردازیم.



شکل ۵: یک زنجیر کوچک تر که در یک زنجیر بزرگ‌تر کج است.

قضیه ۴.۶. اگر X یک پیوستار تجزیه ناپذیر ارثی باشد، آنگاه $Ab(X) \leq 1$ و $Ab(X) = 0$ اگر و تنها اگر X تک عضوی باشد.

اثبات. ما از خاصیت زیر از پیوستارهای تجزیه ناپذیر ارثی استفاده خواهیم کرد که از تعریف نتیجه می‌شود. اگر K یک پیوستار تجزیه ناپذیر ارثی باشد و $K_1, K_2 \subseteq K$ پیوستارهایی باشند که $K_1 \cap K_2 \neq \emptyset$، آنگاه یا $K_1 \subseteq K_2$ یا $K_2 \subseteq K_1$ است. اکنون فرض کنید

[۴۷] ممکن است مجموعه‌ای از تمام پیوستارها در $\mathbb{R}^n$ را با $C(\mathbb{R}^n)$ نشان دهیم و آن را با فاصله هاسدورف d_h مجهز کنیم. با توجه به دو پیوستار $X, Y \in C(\mathbb{R}^n)$، $d_h(X,Y)$ حداقل $\epsilon > 0$ است به طوری که $X \subseteq B(Y,\epsilon)$ و $Y \subseteq B(X,\epsilon)$. در اینجا $B(X,\epsilon)$ توپ باز به شعاع ϵ در اطراف X است. نتیجه‌ای که به آن اشاره می‌کنیم می‌گوید که پیوستارهای تجزیه ناپذیر ارثی یک زیرمجموعه چگال از این فضا هستند.

X یک پیوستار تجزیه ناپذیر ارثی باشد. اگر X یک مجموعه تک عضوی نباشد، پس چون X یک پیوستار است، داریم $Ab(X) \geq 1$. فرض کنید $Y_1 \ll_k Y_2$ برای برخی k با نقطه مشاهده $z \in Y_2$. اگر $x_1, x_2 \in Y_1$ نقاط متمایزی باشند، آنگاه همسایگی‌های باز مجزا $U_1, U_2 \subseteq Y_1$ وجود دارد که x_1 و x_2 را در بر می‌گیرند. سپس یک پیوستار $W_{z,x_1} \subseteq Y_2$ وجود دارد که x_1 و z را در بر می‌گیرد. علاوه بر این، یک مجموعه باز همبند $V_1 \subseteq Y_2$ وجود دارد که W_{z,x_1} را در بر می‌گیرد و به طوری که $x_1 \in cl_{Y_2}(V_1) \cap Y_1 \subseteq U_1$. به طور مشابه، یک پیوستار W_{z,x_2} و مجموعه باز همبند متناظر $V_2 \subseteq Y_2$ وجود دارد. با این حال، از آنجایی که z یک عنصر از هر دو W_{z,x_1} و W_{z,x_2} است، باید داشته باشیم که $W_{z,x_1} \subseteq W_{z,x_2}$ یا $W_{z,x_2} \subseteq W_{z,x_1}$. سپس $cl_{Y_2}(V_1) \cap Y_1 \not\subseteq U_1$ و $cl_{Y_2}(V_2) \cap Y_1 \not\subseteq U_2$. این یک تناقض است. فرض اولیه ما این بود که Y_1 نقاط متمایز را در بر می‌گیرد. پس باید داشته باشیم که Y_1 یک مجموعه تک عضوی است و مجموعه‌های تک عضوی در X_0 و هیچ X_k دیگری نیستند. بنابراین داریم $Ab(X) \leq 1$. □

۷ بحث

در مقدمه، دو سوال اصلی پرسیدیم. اول، بعد چیست؟ این سوال به معنای واقعی کلمه پرسشی نبود که ما واقعاً به آن پاسخ دهیم، بلکه سوالی بود که ما را به تأمل در مورد بعد و ایجاد تعاریف و توصیفاتی از بعد الهام می‌بخشید، همانطور که پوانکاره، لُبِگ و ریاضی‌دانان مختلف دیگری که در مقدمه ذکر شد انجام دادند. این ما را به سوال دوم ما سوق داد، یعنی، آیا تعاریف نظریه بعد کلاسیک تعاریف "درست" هستند؟ ما گفتیم که تعریف "درست" می‌تواند به عنوان یک تعریف هندسی شهودی توصیف شود که هر تعریف هندسی شهودی دیگری باید با تعریف "درست" در فضاهایی که ما به عنوان طبیعی می‌پذیریم، موافق باشد. ما در این مقاله استدلال کرده‌ایم که پاسخ به این سوال "نه" است، با استفاده از بعد ابوت. ممکن است خواننده در این نقطه اعتراضات متعددی مطرح کند. آنها ممکن است با توصیف ما از تعریف "درست" از بعد مخالفت کنند. امیدواریم که خواننده با چنین اعتراضی، تصور خود از معنای تعریف "درست" را ایجاد کرده و

از خود بپرسد که آیا تعریف "درست" از بعد هنوز پیدا شده است یا خیر. همچنین ممکن است خواننده به جایگاه بعد ابوت به عنوان یک تعریف هندسی شهودی اعتراض کند. این اعتراض بسیار خوش‌آمد است (حتی امید می‌رود) و به چنین خواننده‌ای چالش پیدا کردن تعریف خود از بعد که برای آنها شهودی است را می‌دهیم و سپس آن تعریف را با تعاریف کلاسیک مقایسه کنید. حتی اگر در نهایت هیچ تعریفی ایجاد نشود، زمانی که صرف تأمل در چگونگی بیان مفهوم بعد شده، زمانی ارزشمند خواهد بود.

۸ ضمیمه

در این ضمیمه، نتایجی که به لحاظ فنی ممکن است از روایت اصلی مقاله منحرف‌کننده باشند، جمع‌آوری شده‌اند. این نتایج همچنان مهم هستند. به خصوص، این ضمیمه شامل بحثی درباره‌ی کلاس فضاهای مدل [۴۸] و نتایج فنی پیرامون آن‌ها است. این کلاس در اثبات قضیه ۱۰.۳ که بیان می‌کند $Ab(\mathbb{R}^n) = n$ است، نقش کلیدی دارد. با سوالی شروع می‌کنیم که به طور طبیعی پس از تعریف بعد ابوت مطرح می‌شود. با توجه به فضای X که $Ab(X) = n$، آیا باید $X \in X_n$ باشد؟ مشخص می‌شود که پاسخ این سوال خیر است، همانطور که مثال زیر نشان می‌دهد.

مثال ۱.۸. فرض کنید X اجتماع زیرمجموعه‌های زیر از $\mathbb{R}^3$ باشد:

$\{0\} \times \{0\} \times \mathbb{R}$، $\{(q, r, s) \mid q, r, s \in \mathbb{Q} s \geq 0\}$

و $\{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$.

X را با متر ارثی از $\mathbb{R}^3$ مجهز کنید. در این صورت $X \in X_1$ به دلیل قسمت منفی محور y. اما $X \notin X_2$ زیرا هیچ زیرمجموعه باز از X که حاوی نقطه‌ای از دیسک باشد، همبند نیست. اما خود دیسک عضوی از X_2 است.

---

[۴۸] model

کارکردن با فضاهای (یا زیرفضاهای) X که $Ab(X) = n$ و $X \in X_n$ برای ما مفید است و آن‌ها را به عنوان "خوش رفتارترین" فضاها نسبت به بعد ابوت در نظرمی‌گیریم. این ویژگی را در تعریف زیر مشخص می‌کنیم.

تعریف ۲.۸. یک فضا X یک فضای مدل است اگر

$$Ab(X) = \sup\{n \in \mathbb{N} \mid X \in X_n\}$$

. به طور مشابه، اگر $Y \subseteq X$ زیرمجموعه‌ای باشد که $Ab(Y) = n$ و $Y \in X_n$، Y را زیرمجموعه مدل می‌نامیم.

خوشبختانه، در مورد فضاهایی با بعد ابوت متناهی، همیشه چنین زیرفضاهایی در دسترس هستند.

گزاره ۳.۸. اگر X فضایی با $Ab(X) = n$ باشد، آنگاه X یک زیرفضا مدل Y دارد که $Ab(Y) = n$.

اثبات. اگر $Ab(X) = n$، آنگاه $X_n \neq \emptyset$، بنابراین $Y \subseteq X$ وجود دارد که $Y \in X_n$. برای هر زیرفضا $K \subseteq Y$ داریم که $K \in X_m$ برای $m \leq n$ زیرا $Ab(X) = n$. بنابراین Y یک زیرفضا مدل است. $\square$

گزاره ۴.۸. اگر (X, d) یک فضای متریک ناتهی باشد که $Ab(X) = 0$، آنگاه X یک فضای مدل است.

به خاطر داشته باشید که وقتی در مورد اینکه $Ab(\mathbb{R}^n) \geq n$ بحث می‌کردیم، به یک دنباله خاصی از زیرمجموعه‌ها اشاره کردیم. به طور خاص، برای $\mathbb{R}^3$ اشاره کردیم که $Ab(\mathbb{R}^3) \geq 3$ را می‌توان با در نظر گرفتن یک نقطه، یک پاره‌خط شامل آن نقطه، یک مربع که یک ضلعش یک پاره‌خط است، و یک مکعب که یک وجه آن مربع است، مشاهده کرد. دنباله‌های تودرتوی

زیرفضاهای این‌چنین بسیار مفید هستند، به خصوص زمانی که زیرفضاهای مورد نظر زیرفضاهای مدل باشند. دنباله‌های چنین زیرفضاهای را در تعریف زیر مشخص می‌کنیم.

تعریف ۵.۸. یک پروفایل بعدی [۴۹] دنباله‌ایی به سادگی پروفایل یک فضای X با $Ab(X) = n$ دنباله‌ای از زیرفضاها $Y_0, \ldots, Y_n$ است به گونه‌ای که $Y_0 \prec_1 Y_1 \prec_2 \cdots \prec_n Y_n$. یک پروفایل $Y_0, \ldots, Y_n$ برای یک فضای X پروفایل مدل [۵۰] نامیده می‌شود اگر $Y_n = X_n$ و Y_k برای هر k یک فضای مدل باشد. با توجه به یک خاصیت P، به پروفایل $Y_1, \ldots, Y_n$ برای یک فضای متریک X پروفایل P برای X گوییم اگر هر Y_k خاصیت P را داشته باشد (مثلاً یک پروفایل همبند). اگر $Ab(X) = \infty$ ، یک پروفایل را به عنوان دنباله نامتناهی از زیرفضاهای $(Y_i)_{i\in\mathbb{N}}$ تعریف می‌کنیم به گونه‌ای که $Y_i \prec_{i+1} Y_{i+1}$ برای هر i.

گزاره ۶.۸. هر فضای مدل X با بعد ابوت متناهی یک پروفایل مدل دارد.

اثبات. فرض کنید X یک فضای مدل داده شده با $Ab(X) = n$ باشد. سپس یک عنصر $Y \in X_{n-1}$ وجود دارد به‌طوری که $X \ll_n Y$. از آنجا که $Y \subseteq X$ داریم $Ab(Y) \leq n$، و بنابراین بر اساس قضیه ۳.۶ باید یک زیرفضای مدل $Y^{n-1} \subseteq Y$ با همان بُعد ابوت Y که حداقل $n-1$ است وجود داشته باشد. سپس $Y_{n-1} \in X_{n-1}$. چون Y شهادت می‌دهد که X در X_n است و Y_{n-1} زیرمجموعه‌ای از Y است داریم Y_{n-1} شهادت می‌دهد که X در X_n است بر اساس لم ۶.۳. می‌توانیم این فرایند را تکرار کنیم تا Y_k را برای $1 \leq k \leq n-2$ پیدا کنیم و یک پروفایل مدل برای X به دست آوریم. □

در قضیه زیر نشان می‌دهیم که کلاس فضاهای مدل شامل برخی از فضاهای معروف، به ویژه فضاهای همبند موضعی است. این ممکن است تعجب‌آور نباشد با توجه به اینکه تعریف بُعد ابوت به زیرمجموعه‌های همبند بسیار وابسته است. به یاد داشته باشید که اگر X یک فضای همبند موضعی با زیرفضای Y و $U \subseteq Y$ یک زیرمجموعه باز همبند از Y باشد، سپس یک

---

[۴۹] dimensional profile
[۵۰] model profile

$X \supseteq \hat{U}$ باز همبند وجود دارد به‌طوری که $\hat{U} \cap Y = U$. برای دیدن این کافی است به یاد آوریم که در یک فضای همبند موضعی، مولفه همبندی هر مجموعه باز، باز هستند.

قضیه ۷.۸. اگر (X, d) همبند موضعی باشد، آنگاه X یک فضای مدل است.

اثبات. فرض کنید $X \in X_m$، $X \notin X_{m+1}$، و $Y \subseteq X$ به‌طوری که $Y \in X_n$ برای برخی $n > m$. فرض کنید $Y_2 \in X_{n-1}$ شهادت دهد که $Y \in X_n$. اگر $V \subseteq Y$ یک مجموعه باز همبند باشد که برای نشان دادن $Y \in X_n$ استفاده شده است، آنگاه با همبند موضعی بودن X، داریم $U = \hat{V} \cap Y$ برای برخی مجموعه باز همبند $\hat{V} \subseteq X$. از آنجا که $\partial_Y V \subseteq \partial_X \hat{V}$ داریم اگر $Y \in X_n$، آنگاه X نیز چنین است، که با فرض $X \notin X_{m+1}$ تناقض دارد. بنابراین، X یک فضای مدل است. $\square$

نتیجه ۸.۸. $\mathbb{R}^n$ یک فضای مدل برای هر $n \geq 1$ است.

با این نتایج به دست آمده، می‌توانیم بالاخره اثبات کنیم که $Ab(\mathbb{R}^n) = n$. همان‌طور که در متن اصلی مقاله بیان شده است، ما موارد با ابعاد متناهی و نامتناهی را جداگانه بررسی می‌کنیم.

قضیه ۹.۸. فرض کنید X یک فضای مدل متریک جداشدنی با $Ab(X) = n < \infty$ باشد. در اینصورت $Ind(X) \geq n$.

اثبات. از آنجا که $Ab(X) = 0$ به معنای این است که $X \neq \emptyset$، داریم $Ab(X) = 0$ به معنای $Ind(X) \geq 0$. اگر $Ab(X) = 1$ ، سپس X لزوماً شامل یک مجموعه همبند غیر بدیهی است (برخی $W_{z,x}$ طبق تعریف $Ab(X)$) و $Ind(X) = 0$ به معنای این است که X کاملاً ناهمبند است، بنابراین $Ind(X) \geq 1$ است. حال فرض کنید که نتیجه برای $Ab(X) < n$ که $n \geq 2$ برقرار باشد و فرض خلف کنید که $Ab(X) = n$ و $Ind(X) = m < n$ که $m \geq 0$ (توجه کنید که $Ind(X) = -1$ تناقض بلافاصله‌ای به‌وجود می‌آورد زیرا $X \neq \emptyset$). سپس فرض کنید $Y_0, Y_1, \ldots, Y_{n-1}, X$ یک پروفایل مدل برای X باشد. فرض کنید $z \in X \setminus Y_{n-1}$ یک نقطه مشاهده برای Y_{n-1} باشد.

فرض کنید $x \in Y_{n-1}$ و فرض کنید $W_{z,x} \subseteq X$ یک خط دید از z به x باشد طبق تعریف $Ab(X)$. به یاد بیاورید که مجموعه $C(x,z,X)$ باید شامل یک پایه همسایگی برای $W_{z,x}$ باشد. بر اساس تعریف Ind، یک مجموعه باز $V \subseteq X$ شامل $W_{z,x}$ وجود دارد به‌طوری که برای همه مجموعه‌های باز $\hat{V} \subseteq X$ با $W_{z,x} \subseteq \hat{V} \subseteq V$ داریم

که $Ind(\partial_X \hat{V}) \leq m-1 < n-1$. با توجه به تعریف $Ab(X)$، باید داشته باشیم که یک همسایگی کوچک‌تر $V' \in C(z,x,X)$ شامل $W_{z,x}$ و درون $\hat{V}$ باشد به‌طوری که اگر $V'' \in C(x,z,X)$ شامل $W_{z,x}$ و درون V' باشد، سپس یک $D \subseteq \partial_X(V'')$ وجود داشته باشد به‌طوری که $D \in X_{n-1}$. فرض‌کنید $V'' \subseteq X$ با $D \subseteq \partial_X(V')$ چنین مجموعه‌هایی باشند. باید داشته باشیم که $Ind(\partial_X(V'')) \leq m-1 < n-1$. از آنجا که $D \in X_{n-1}$ داریم که $Ab(D) \geq n-1$. از آنجا که $Ab(X)$ متناهی است، همچنین داریم که $Ab(D)$ متناهی است بر اساس قضیه ۸.۳. سپس بر اساس گزاره ۷.۳ باید یک $H \subseteq D \subseteq \partial_X(V'')$ وجود داشته باشد به‌طوری که $Ab(H) = n-1$. با این حال، باید داشته باشیم که $Ind(H) \leq m-1$ بر اساس قضیه ۵.۲. این فرض استقرایی ما را نقض می‌کند. بنابراین $Ind(X) \geq n$.

□

قضیه ۱۰.۸. فرض‌کنید X یک فضای متریک جدا شدنی با $Ab(X) = \infty$ باشد. در اینصورت $Ind(X) = \infty$.

اثبات. برای هر عدد صحیح $n \geq 0$، عبارت زیر را در نظر بگیرید.

$(*_n)$ Z یک فضای متریک جدا شدنی است به‌طوری که $Ab(Z) = \infty$ و $Ind(Z) = n$.

ما با استقرا روی n ثابت خواهیم کرد که $(*_n)$ برای هیچ n صحیحی برقرار نیست. اول، برای $n = 0$ داریم که اگر $Ind(X) = 0$ ، آنگاه X کاملاً ناهمبند است، اما $Ab(X) = \infty$ بدین معناست که $X_1 \neq \emptyset$ که بدین معناست که X شامل یک زیرمجموعه همبند

غیر بدیهی است، که یک تناقض است. بنابراین $(*_0)$ برقرار نیست. فرض کنید که $(*_m)$ برای $0 \leq m < n$ برقرار نیست و فرض خلف کنید که $(*_n)$ برقرار است. از آنجا که $Ab(X) = \infty$ داریم که $X_k \neq \emptyset$ برای همه اعداد صحیح غیرمنفی k. سپس فرض کنید $Y_{3n} \in X_{3n}$. سپس می‌توانیم مجموعه $Y_{3n-1} \in X_{3n-1}$ را پیدا کنیم به‌طوری که $Y_{3n-1} \ll_{3n} Y_{3n}$. اگر $Ab(Y_{3n}) < \infty$ ، سپس $Ab(Y_{3n}) \geq 3n$ و بر اساس ترکیب قضیه ۵.۲، قضیه ۹.۶، و گزاره ۳.۶، باید داشته باشیم که $Ind(Y_{3n}) \geq 3n$. با این حال، این یک تناقض خواهد بود زیرا $Ind(X) = n$. بنابراین $Ab(Y_{3n})$ باید نامتناهی باشد. بر اساس استدلال مشابه هر عنصری از X_k برای $k > n$ بُعد ابوت نامتناهی دارد. حال فرض کنید $z \in Y_{3n} \setminus Y_{3n-1}$ یک نقطه مشاهده برای Y_{3n-1} باشد و $x \in Y_{3n-1}$، و همچنین فرض کنید $W_{z,x}$ یک پیوستار در Y_{3n} باشد که z و x را به هم متصل می‌کند همان‌طور که در تعریف بُعد ابوت آمده است. از آنجا که $Y_{3n} \in X_{3n}$، یک $V \in C(z, x, Y_{3n})$ شامل $W_{z,x}$ وجود دارد به‌طوری که اگر $V' \in C(z, x, Y_{3n})$ یک عنصر دیگر باشد که شامل $W_{z,x}$ باشد، سپس باید یک $D \subseteq \partial_{Y_{3n}}(V')$ وجود داشته باشد که $D \in X_{3n-1}$. از آنجا که $Ind(X) = n$ و $C(x, z, Y_{3n})$ شامل یک پایه برای $W_{z,x}$ است، می‌توانیم V را طوری انتخاب کنیم که هر $V' \in C(z, x, Y_{3n})$ درون V و شامل $W_{z,x}$، به‌گونه‌ای باشد که $Ind(\partial_{Y_{3n}} V) \leq n - 1$. با این حال، این یک تناقض ایجاد می‌کند زیرا اگر $V \in C(z, x, Y_{3n})$ و $V' \in C(z, x, Y_{3n})$ درون V و شامل $W_{z,x}$ باشند، سپس باید یک $D \subseteq \partial_{Y_{3n}}(V')$ وجود داشته باشد به‌طوری که $D \in X_{3n-1}$، اما بحث قبلی نشان می‌دهد که هر دو $Ab(D) = \infty$ و $Ind(D) \leq n-1$ فرض استقرایی ما که $(*_k)$ برای هیچ فضای متریک قابل جدا برای $k < n$ برقرار نیست، را نقض می‌کند. بنابراین، نشان داده‌ایم که $(*_n)$ برای هیچ عدد صحیح غیرمنفی n برقرار نیست و بنابراین باید داشته باشیم که $Ind(X) = \infty$.

□

گزاره ۱۱.۸. اگر X یک فضای متریک جداشدنی با $Ab(X) < \infty$ باشد، آنگاه $Ab(X) \leq$

$.Ind(X)$

اثبات. اگر X یک فضای متریک جداشدنی با $Ab(X) = n$ باشد، آنگاه بر اساس قضیه ۳.۶ یک زیر فضای مدل $X \subseteq Y$ با $Ab(Y) = n$ وجود دارد . بر اساس قضیه ۹.۶ باید داشته باشیم $Ab(Y) \leq Ind(Y)$ و بر اساس قضیه ۵.۲، $Ind(Y) \leq Ind(X)$. سپس $.Ab(X) = Ab(Y) \leq Ind(Y) \leq Ind(X)$ $\square$

قضیه ۱۰.۳ به عنوان یک نتیجه سریع دنبال می‌شود.

مراجع

[1] E. Abbott. *Flatland*. Mathematical Association of America, Washington, DC, 2010.

[2] R. Engelking. *Dimension Theory*. North-Holland Mathematical Library, Warsaw, 1978.

[3] V.V. Fedorchuck. On the brouwer dimension of compact spaces. *Mat. Zametki*, ,304–295:(2)73 2003.

[4] D. Henderson. An infinite-dimensional compactum with no positive-dimensional compact subsets. *Amer. J. Math.*, ,121–105:(1)89 1967.

[5] W. Hurewicz and H. Wallman. *Dimension Theory*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1941.

[6] W. T. Ingram and W. S. Mahavier. *Inverse Limits: From continua to chaos*. Springer, New York, NY, 2012.

[7] H. Poincaré. *The Value of Science*. Dover Publications, New York, 1958.

[8] Jr. S.B. Nadler. *Hyperspaces of Sets*. Marcel Dekker, New York, NY, 1978.

[9] Jr. S.B. Nadler. *Continuum Theory: An Introduction*. Marcel Dekker, New York, NY, 1992.

[10] Jeremy Siegert. Abbott dimension, mathematics inspired by flatland, 2022.

[11] K. Yoneyama. Theory of continuous set of points. *T^ohoku Math. J.*, ,158–43:(1)12 1917.